Suma 66
Febrero 2011, pp.107-112

Música y matemáticas en educación primaria

La especialización, aunque no deja de ser un rasgo necesario de nuestra civilización, debe complementarse con la integración a través del pensamiento interdisciplinario. Uno de los obstáculos que siguen oponiéndose a dicha integración es la línea divisoria entre los que se sienten cómodos con las matemáticas y los que no.

Murray Gell-Mann (1929 –), premio Nobel de Física en 1969.

Aunque la cita la he elegido porque tiene mucha relación con lo que trataremos aquí, lo cierto es que en esta ocasión está dedicada a Eliseo Borrás, un amigo que nos dejó hace poco. Cuando no estaba tan de moda el carácter multidisciplinar de las Matemáticas, Eliseo siempre me animó a potenciar esta faceta. Por eso y por los buenos momentos que hemos compartido, me gustaría que éste y gran parte de mis trabajos de Música y Matemáticas fuesen un modesto homenaje a su gran labor dentro de la docencia y la didáctica de las Matemáticas.

Hace unos meses, en una charla en la Universidad Rey Juan Carlos, en la que intenté mostrar algunas de las Matemáticas que hay en la Música, parte de los asistentes eran alumnos del Grado de Educación Infantil y Primaria. Al llegar el turno de preguntas, resultó muy alentador comprobar que la revista *Suma* se ha convertido en una referencia habitual tanto en las clases como en los trabajos de los estudiantes. Pero además, cuando acabó la charla, pude hablar con varios de estos estudiantes y me comentaron la posibilidad de hacer propuestas aplicables en Educación Primaria siguiendo la línea que, junto con Tomás Queralt, emprendimos en el manual del Día Escolar de las Matemáticas 2008.

Sin duda, estos alumnos tenían razón, porque muchas de las ideas que lanzamos desde Musymáticas no tienen una aplicación directa a las clases de primaria. Consciente de esta deficiencia, y sobre todo agradecido por la sugerencia, me decidí a proponer algunas actividades que tendrían cabida en primaria y que podrían vincular las asignaturas de Música, Matemáticas y Conocimiento del Medio, ésta última en la parte de Historia.

A pesar de que las actividades que presentamos en este trabajo se basan en dos conceptos muy sencillos de música: los valores de las figuras (las notas y sus silencios) y el compás, hemos preferido no destinarlo a ningún nivel educativo concreto porque debería ser el maestro (o el grupo de maestros) quien decida cuál es el momento más adecuado para llevar a cabo su puesta en marcha.

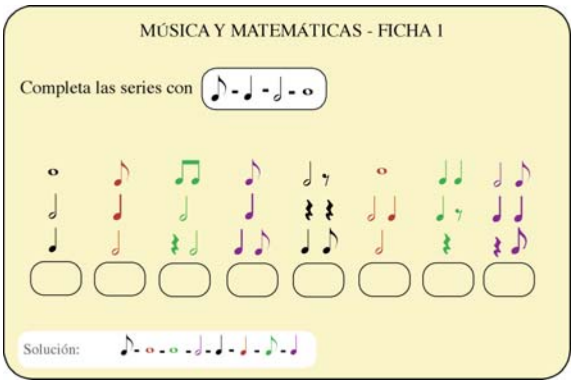
Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

Operando con las figuras de la música

Los alumnos de primaria reciben clases de Música y de Matemáticas desde el primer curso. Esto significa que, mucho antes de saber que existen las potencias del 2 o las fracciones, en las clases de música están manejando de forma inconsciente estos conceptos y algunas reglas muy elementales de su aritmética. Por ejemplo, las figuras con las que se escriben las notas musicales guardan entre sí una relación que viene dada por potencias de 2. Así, las notas y sus respectivos silencios, verifican las equivalencias siguientes:

	Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea	Fusa	Semifusa
Notas	𝅝	= 2 𝅗𝅥	= 4 ♩	= 8 ♪	= 16 𝅘𝅥𝅯	= 32 𝅘𝅥𝅰	= 64 𝅘𝅥𝅱
Silencios	𝄻	= 2 𝄼	= 4 𝄽	= 8 𝄾	= 16 𝄿	= 32 𝅀	= 64 𝅁

Haciendo referencia solamente a los valores de las notas, ya podemos plantear actividades para nuestros alumnos. Por ejemplo, pueden completar series como las que se muestran a continuación.



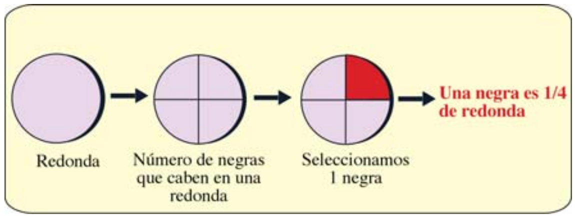
Ejemplo de serie lógica basada en los valores de las notas musicales

Pero además, los valores relativos de las notas, nos proporcionan una buena excusa para trabajar con fracciones. Si, como es habitual en música, a la redonda le damos el valor 1, los valores para las notas son:

	Redonda	Blanca	Negra	Corchea	Semicorchea	Fusa	Semifusa
Notas	𝅝 $=1$	𝅗𝅥 $=\frac{1}{2}$	♩ $=\frac{1}{4}$	♪ $=\frac{1}{8}$	𝅘𝅥𝅯 $=\frac{1}{16}$	𝅘𝅥𝅰 $=\frac{1}{32}$	𝅘𝅥𝅱 $=\frac{1}{64}$
Silencios	𝄻 $=1$	𝄼 $=\frac{1}{2}$	𝄽 $=\frac{1}{4}$	𝄾 $=\frac{1}{8}$	𝄿 $=\frac{1}{16}$	𝅀 $=\frac{1}{32}$	𝅁 $=\frac{1}{64}$

Uno de nuestros objetivos es que el alumno interiorice la capacidad de las fracciones para expresar la relación (proporción) entre dos cosas. Así, por ejemplo, si a los alumnos les preguntamos ¿Cuántas negras caben en una redonda?, lo cierto es que no tienen dificultades para decir que son 4. Sin embargo, si hacemos la pregunta al revés, ¿Qué parte de redonda hay en una negra?, la respuesta ya no es tan inmediata, porque el niño debe plantearse la siguiente secuencia lógica:

PASO 1: En la redonda caben 4 negras.
PASO 2: Divido la redonda en 4 partes iguales.
PASO 3: A una negra le corresponde una de esas partes.



Esquema del proceso para calcular la fracción que representa una nota

Utilizando este proceso, resulta interesante plantear al estudiante cuestiones como:

1. ¿Qué parte de negra es una semicorchea?
2. ¿Qué parte de blanca es una corchea?

Y cuando el alumno ya ha interiorizado el algoritmo, podemos no dar pistas de si el resultado será una fracción o un número natural. Por ejemplo:

3. ¿Cuántas negras caben en una blanca?
4. ¿Cuántas negras caben en una corchea?

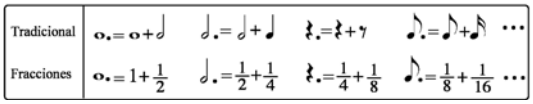
Al principio, la respuesta más habitual es que en una corchea no cabe ninguna negra, porque saben que se les está preguntando por un número y no atribuyen a las fracciones esa entidad. Sin embargo, si junto con el profesor de música hacemos habitualmente preguntas como estas, estaremos contribuyendo no sólo a que interioricen el concepto de fracción, sino que estaremos dando un paso más para derribar esa línea que separa a los que están cómodos con las matemáticas y los que no, con la esperanza de que nuestros alumnos asuman que las matemáticas les resultan útiles en otras asignaturas y lo que es mejor: en su vida cotidiana.

Una ayuda para perder el miedo a las fracciones

En Música hay un concepto relacionado con el valor de las figuras, que los estudiantes jóvenes asimilan con dificultad. Se trata del puntillo, que se representa con un punto situado a la derecha de la figura.

El **puntillo** es un signo de prolongación con forma de punto, que se coloca a la derecha de la figura, aumentando la mitad del valor de la misma.

La dificultad para asimilar la noción de puntillo puede encontrarse en que se trata de un signo que implica el uso de fracciones y además tiene valor relativo. En los primeros cursos de música, a los niños les resulta desconcertante que el puntillo no tenga un valor concreto, sino que depende de la nota a la que acompaña. Veamos a continuación algunos ejemplos.



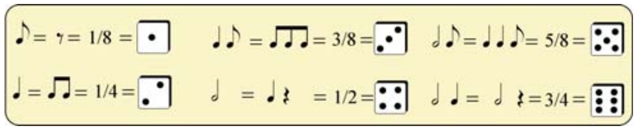
Aunque el puntillo está asociado a la suma de dos fracciones de denominador diferente y para esta operación el alumno ya debe tener cierta soltura con las fracciones, al principio se les puede plantear que expresen diferentes notas con puntillo como suma de dos fracciones. Con esto pueden ir asimilando la equivalencia ‘nota-fracción’ y ejercitando mentalmente el cálculo de la mitad de una fracción (nota) dada.

Juegos con Música y Matemáticas

En el cuaderno del *Día Escolar de las Matemáticas* del año 2008, propusimos algunos juegos con Música y Matemáticas. Entre ellos presentamos dos dominós que aún podéis obtener solicitando el cuaderno al Servicio de Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas o directamente en internet en la dirección http://perso.wanadoo.es/csap/html/musica.pdf. Además, por si queréis utilizarlos en el aula, en la dirección:

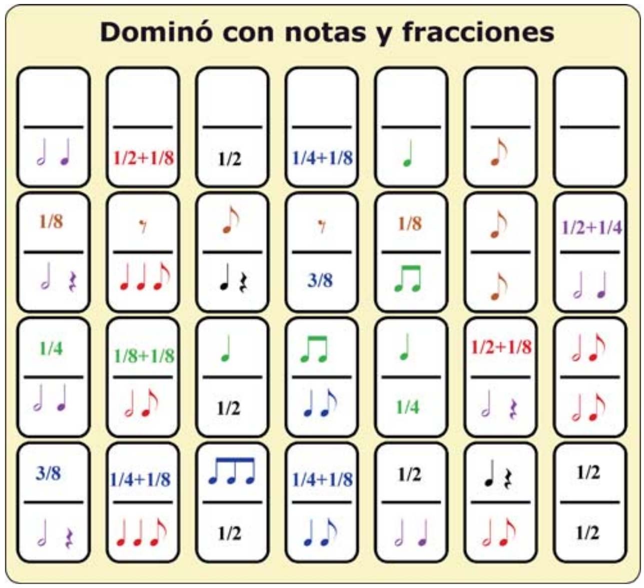
www.fespm.es/web2009/documentacion/diaescolar/dominos-plantilla.pdf
podéis encontrar las plantillas de los dominós que sólo tendréis que recortar.

La propuesta que os hacemos es que utilicéis los valores de las notas para elaborar vuestros propios dominós para el aula. Aquí os muestro un dominó en el que aparecen de forma explícita las fracciones. La idea es sencilla: tomamos como unidad la corchea y a partir de ahí obtenemos el resto de valores hasta el 6. Así, por ejemplo, dos corcheas o una negra será el 2, tres corcheas será el tres y así sucesivamente. Con esto podemos diseñar un dominó con el que podremos jugar con las mismas reglas que en un dominó normal. Simplemente hay que tener en cuenta cuál es la equivalencia entre notas, fracciones y puntos del dominó.



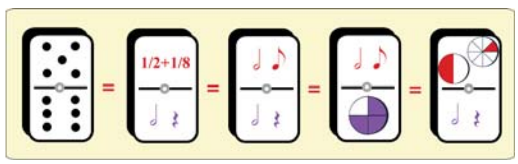
Equivalencia entre los valores de las figuras musicales y los puntos del dominó.

Para facilitar el desarrollo del juego, las fracciones o figuras que tienen el mismo valor están representadas con el mismo color. Por ejemplo, el cinco siempre aparece en rojo. Aunque pudiera parecer que con esto el juego se hace excesivamente fácil, lo cierto es que los jugadores están obligados a utilizar las equivalencias entre figuras, fracciones y puntos, porque cuando acaba el juego, los jugadores que no han ganado tienen que contar con cuantos puntos se han quedado.



Ejemplo de dominó con notas y fracciones.

Cuando los alumnos ya han jugado con alguno de estos dominós, además de los propuestos, en el aula se pueden elaborar[1] por grupos otros dominós teniendo en cuenta diferentes maneras de expresar las equivalencias. A continuación os pongo un ejemplo.



Ejemplo de equivalencia entre los valores de las figuras musicales, las fracciones y los puntos del dominó.

Si planteáis la experiencia en el aula, resulta muy interesante que sean los grupos de alumnos quienes determinen las equivalencias que van a considerar sin que el resto de grupos lo sepa. Cuando un alumno juegue con un dominó que no ha elaborado él mismo, la primera tarea será determinar cuáles son las equivalencias, es decir, saber si el cinco aparece como un gráfico, una nota o una fracción. Por otro lado el juego puede complicarse más si eliminamos la condición de que un mismo color significa el mismo valor de puntos.

Las matemáticas y el compás musical

Como ocurre en otras muchas disciplinas, nuestros alumnos muchas veces tienen las sensación de que las cosas siempre han sido como son ahora y, por ejemplo, que la música siempre se ha escrito igual. Para sacarlos de este error resulta interesante invitarlos a hacer una búsqueda en internet (por ejemplo poniendo "compás musical" en Google) y que comprueben que esto no es así.

El concepto de compás como espacio de tiempo comenzó a establecerse durante el siglo XV. Sin embargo, el sistema de líneas divisorias para delimitarlo gráficamente no se utilizó hasta el siglo XVI[2]. Hasta entonces, las líneas divisorias no delimitaban compases, sino que indicaban diferencias entre lo que iba delante o después de ellos, sin marcar ninguna regularidad. Pero aún así, hubo que esperar hasta el barroco para que el compás se utilizase habitualmente y se estableciese de modo definitivo.

El **compás** es la entidad métrica musical que se coloca entre dos líneas verticales, llamadas *líneas divisorias* o *barras de compás*. Su estructura se indica al comienzo de la obra o de los fragmentos que la componen, mediante una fracción cuyo denominador marca las partes en que dividiremos la redonda (que se toma como valor de referencia) y el numerador indica el número de estas partes que entran en el compás.

Por ejemplo, el compás[3] de 3/4 está formado por tres cuartos de una redonda, es decir tres negras. Esto significa que en el fragmento musical que esté compuesto en 3/4 todos los compases tendrán la misma duración, tres cuartos de redonda.

Existen muchos tipos de compases 2/4, 3/4, 4/4 (con subdivisión binaria), 6/8, 9/8 y 12/8 (con subdivisión ternaria) y otros muchos que responden a diferentes clasificaciones como 2/2, 3/2 (que se utilizan muy poco actualmente), 5/8, 7/8, 8/8, 5/4, 7/4, etc.

Nosotros aquí no estamos interesados en cómo se clasifican los compases, ni siquiera en cómo deberían marcarse con el brazo cada uno de ellos. Sin embargo, sí que son necesarias algunas aclaraciones a casos que pueden sorprender desde el punto de vista estrictamente matemático. Me estoy refiriendo al hecho de que aparezcan compases diferentes representados por dos fracciones equivalentes, por ejemplo, 3/4 y 6/8. En el primero caben tres negras por compás, mientras que el segundo indica que caben seis corcheas. Está claro que en ambos compases caben la misma cantidad de notas, pero lo cierto es que responden a realidades rítmicas muy diferentes. El tres por cuatro tiene tres tiempos (ocupados cada uno de ellos por una negra) mientras que el seis por ocho consta de dos tiempos ocupados cada uno por una negra con puntillo. Hay muchas más diferencias entre estos compases[4], pero aquí nos conformaremos con advertir que reducir la fracción que representa un compás musical no es una buena idea desde el punto de vista musical.

El concepto de compás como espacio de tiempo comenzó a establecerse durante el siglo XV. Sin embargo, el sistema de líneas divisorias para delimitarlo gráficamente no se utilizó hasta el siglo XVI.

A continuación veamos algunas actividades relacionadas con el compás. La más inmediata, que no necesita ningún comentario, sería representar gráficamente qué fracción de redonda ocupa cada compás. Pero hay otras propuestas en las que nos detendremos algo más.

Ejemplo 1: Escribe tres compases de manera que los valores de sus notas se correspondan con la suma de fracciones

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

La primera cosa que debemos hacer es sumar estas fracciones para saber a qué compás nos estamos refiriendo:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{4}$$

En realidad no haría falta sumar las fracciones para saber que se trata del compás de 2/4, porque sabemos que se completa con una negra y dos corcheas o sus silencios. Una vez sabemos esto, una posible solución sería la que ponemos a continuación, aunque, por supuesto, la respuesta no es única.

Pero la pregunta del ejemplo 1 también podría hacerse al revés, partir de un pentagrama y que el alumno escriba las fracciones. Veámoslo en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2: Expresa como suma de fracciones las notas que aparecen en el pentagrama siguiente:

Como el compás que aparece es 2/4, el alumno debe comprobar que las fracciones que aparecen en cada compás suman 2/4. Las fracciones asociadas al pentagrama anterior son las siguientes:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \;\Big|\; \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} \;\Big|\; \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$$

Un aliciente de estas actividades es que, una vez resueltas, los alumnos podrían cantar sus respuestas (quizás sin necesidad de entonarlas) con la ayuda del profesor de Música si fuese necesario.

Teresa, estudiante de cuarto de primaria, calculando algunas de las fraccciones que aparecen en dos compases de la Quinta Sinfonía de Beethoven.

Nada más lejos de nuestra intención que trivializar la Música, pero creo que podríamos contribuir bastante al gusto por las fracciones si el alumno asimilase que la Música puede verse como una forma bellísima de operar con fracciones.

La unión hace la fuerza

A continuación presentamos una propuesta que, inicialmente, relaciona las asignaturas de Música, Matemáticas y Conocimiento del Medio. En esencia, la actividad consiste en seleccionar un compositor famoso y analizar algunas de sus composiciones desde diferentes puntos de vista. La elección debe hacerse de manera que sea fácil conseguir material (grabaciones, películas, documentos en internet, etc.) para trabajar en el aula.
Las actividades que podríamos realizar deberían considerar, al menos, los tres aspectos siguientes:

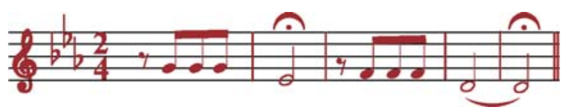
- Analizar muy brevemente el periodo histórico en el que vivió el personaje. Para esto, poder disponer de películas favorece mucho la labor, sobre todo si se tiene en cuenta que en la mayoría de centros la parte de Historia que se trabaja en Conocimiento del Medio es muy reducida.

- Escuchar pequeños fragmentos de música conocida del autor y analizar los instrumentos para los que componía, cómo son los ritmos e incluso si son capaces de cantar fragmentos de algunas de sus obras.

- Aprovechar los conocimientos musicales del alumno para operar con fracciones.

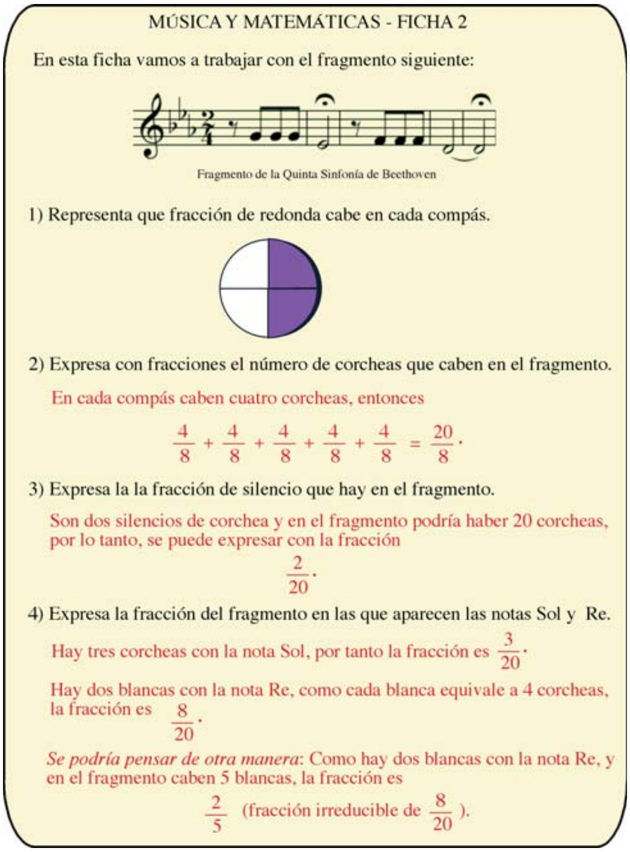
Como no podía ser de otra manera, para que este trabajo tenga una extensión razonable, aquí sólo trataremos la parte matemática de la propuesta. En nuestro caso hemos seleccionado a Ludwig van Beethoven (1770 – 1827) y algunos fragmentos de su Quinta Sinfonía. Podéis encontrar mucha información, incluso documentos sonoros, en:
http://es.wikipedia.org/wiki/Sinfonía_n.º_5_(Beethoven)

La obra empieza con un conocidísimo motivo de cuatro notas que se repiten dos veces:



Fragmento de la Quinta Sinfonía de Beethoven

A partir de este fragmento podemos plantear varias preguntas como la representación gráfica del compás como fracción de una redonda, o el cálculo de diferentes fracciones que nos dan, por ejemplo, la proporción de tiempo en que hay silencios, o la proporción en que aparece una determinada nota, etc. A continuación mostramos una ficha con algunas de las cuestiones que podrían plantearse al alumno.


MÚSICA Y MATEMÁTICAS - FICHA 2

En esta ficha vamos a trabajar con el fragmento siguiente:

Fragmento de la Quinta Sinfonía de Beethoven

1) Representa que fracción de redonda cabe en cada compás.

2) Expresa con fracciones el número de corcheas que caben en el fragmento.

En cada compás caben cuatro corcheas, entonces

$$\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}+\frac{4}{8}=\frac{20}{8}.$$

3) Expresa la la fracción de silencio que hay en el fragmento.

Son dos silencios de corchea y en el fragmento podría haber 20 corcheas, por lo tanto, se puede expresar con la fracción

$$\frac{2}{20}.$$

4) Expresa la fracción del fragmento en las que aparecen las notas Sol y Re.

Hay tres corcheas con la nota Sol, por tanto la fracción es $\frac{3}{20}$.

Hay dos blancas con la nota Re, como cada blanca equivale a 4 corcheas, la fracción es $\frac{8}{20}$.

Se podría pensar de otra manera: Como hay dos blancas con la nota Re, y en el fragmento caben 5 blancas, la fracción es

$\frac{2}{5}$ (fracción irreducible de $\frac{8}{20}$).

Ejemplo de actividades basadas en la Quinta Sinfonía de Beethoven.

Una vez se ha trabajado algún ejemplo en clase, lo aconsejable es que los alumnos respondiesen por grupos a otras fichas con otros fragmentos y que fuesen capaces de exponer los resultados en el aula, entendiendo también como resultados los aspectos musicales e históricos de los compases que han analizado.

Siempre que hablo de Matemáticas a los niños, me viene a la cabeza la crítica que Antoine de Saint-Exupéry (1900 – 1994), hacía de los adultos en *El principito*:

> A los mayores les gustan las cifras. Cuando se les habla de un nuevo amigo, jamás preguntan sobre lo esencial del mismo. Nunca se les ocurre preguntar: *¿Qué tono tiene su voz? ¿Qué juegos prefiere? ¿Le gusta coleccionar mariposas?* Pero en cambio preguntan: *¿Qué edad tiene? ¿Cuántos hermanos? ¿Cuánto pesa? ¿Cuánto gana su padre?* Solamente con estos detalles creen conocerle.

Quizás algo de razón sí tenía *El principito*. Cómo cambiaría todo si preguntásemos ¿cómo se llaman los hermanos de tu amigo? o ¿va al mismo curso que tú?, etc. Tendríamos incluso más información que preguntado por un número y posiblemente la sensación sería muy distinta.

Por eso, los docentes deberíamos aceptar otro consejo del principito, porque "todos los mayores han sido primero niños. (pero pocos lo recuerdan)". No podemos desperdiciar la oportunidad que nos ofrece la Música para que el niño vea que las Matemáticas no son aburridas. Experiencias como las que aquí se proponen y otras muchas en las que se ve mira con ojos matemáticos elementos que provienen de la vida real, incluso de las más divertidas como la música, los juegos o el deporte, pueden hacer que en el futuro el niño que tenemos en el aula sea de aquéllos que, como dice Murray Gell-Mann, se sienta cómodo con las matemáticas.

MUSYMÁTICAS ■

NOTAS

1 Las fuentes que he utilizado para escribir las figuras musicales en Microsoft Word son Rhythms y Sonata.

2 El primer caso que se conoce es en el año 1536, cuando Sebald Heynen la nombra en su tratado de música De arte canendi.

3 En Música, la forma normal de leer los compases no es la habitual para las fracciones, sino como un producto. Por ejemplo, el compás de 3/4 se lee como "tres por cuatro".

4 Podéis consultar estas diferencias en http://es.wikipedia.org/wiki/Compás_(música).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gell-Mann, M. (1995). *El quark y el jaguar*. Barcelona: Tusquets Editores.

Liern, V. (2008). Las fracciones de la Música. *Suma*, 59, pp. 129 – 134.

Liern, V., Queralt, T. (2008). *Música y Matemáticas. La armonía de los números* (Cuaderno del Día Escolar de la Matemáticas 2008). Badajoz: Servicio de Publicaciones de la FESPM.

Randel, D. (1999). *Diccionario Harvard de música*. Alianza Editorial, Madrid.

De Saint-Exupéry, A. (2008). *El principito*. Barcelona: Editorial Salamandra.

Zamacois, J. (1986). *Teoría de la música. Libro I*. Barcelona: Editorial Labor.

Internet

http://enciclopedia.us.es/index.php/Compás_(música)

http://es.wikipedia.org/wiki/Compás_(música)

http://es.wikipedia.org/wiki/Sinfonía_n.º_5_(Beethoven).

http://perso.wanadoo.es/csap/html/musica.pdf.

http://www.fespm.es/web2009/documentacion/diaescolar/dominos-plantilla.pdf

Este artículo fue solicitado por *Suma* en octubre de 2010 y aceptado en diciembre de 2010 para su publicación.