

Salió de un callejón sombrío. Los pocos occidentales que había a esas primeras horas del día comenzaron a hacerle fotografías. Ella se dejaba mientras avanzaba con los pasitos cortos que le imponía el ropaje tan ajustado. La solemnidad y exquisitez del kimono contrastaba con los calcetines bífidos y las sandalias de madera. Un calzado muy ligero para el frío que hacía aquella mañana.

La ornamentación del tocado sintonizaba con el entorno de las *sakuras* y las ramas lánguidas de los cerezos. El maquillaje era una pátina blanca que se extendía por el cuello y la parte alta de la espalda trazando una extraña curva en el cogote (figura 1). El carmín en los labios era escueto y no se reducía a la manchita redondeada tan abundante en los rostros femeninos de la pintura tradicional nipona.

Mi exotismo cultural hacía de la geisha un ser insólito y de su atavío un disfraz. Le confería un aire irreal. ¿Había realmente alguien bajo el kimono y esa capa de blanco? Su esencia era para mí la de un ser platónico, tan perfecto como intangible. Imaginé que si me acercaba a ella con el brazo extendido mi mano la atravesaría sin ninguna dificultad. La geisha y su entorno eran niebla, un cuadro vivo de formas ideales como la del círculo de Platón.

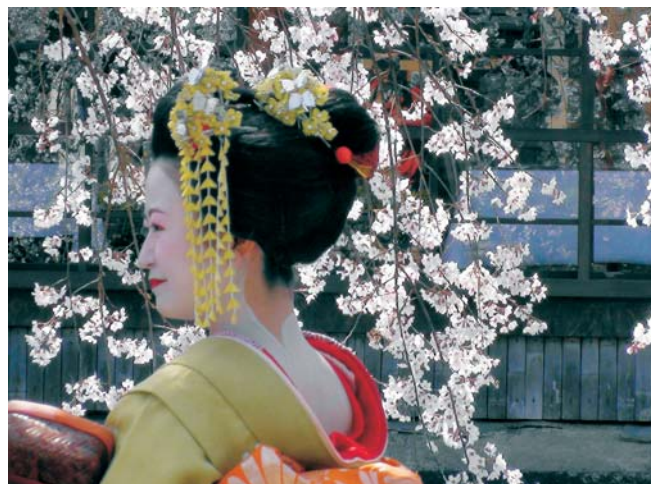


Figura 1. Geisha entre sakuras (Kioto)

Miquel Albertí Palmer
Institut Vallés, Sabadell
adherencias@revistasuma.es

Ése círculo aparece también en los *sangaku* japoneses. Entre los siglos XVII y XIX Japón estuvo aislado del mundo occidental. Fue entonces cuando se desarrolló, tanto en lo que concierne a la creación como a la práctica, una corriente matemática que recorrió el país a través de templos budistas y de altares sintoístas. La comunicación se establecía por medio de tablas de madera llamadas *sangaku* en las que se escribían teoremas y problemas matemáticos. El reto consistía en resolverlos o demostrarlos. Durante esa época apenas había academias oficiales en Japón, por lo que las matemáticas no eran exclusivas del mundo académico. Esa geometría templaria fue un conocimiento autóctono y extra académico. Muchas de esas tablas han desaparecido; otras, en cambio, se han hallado muy recientemente. La última se encontró en 2005 en el altar Ubara de la ciudad de Toyama y data de 1879.

La costumbre de colgar tablillas es un fenómeno extraordinariamente corriente en el Japón de hoy en día (figura 2). A las entradas de los lugares de culto hay espacios reservados para ello. En épocas de exámenes los estudiantes los llenan de tablillas con la esperanza de obtener buenos resultados.



Figura 2: Tablillas de buenos deseos a la entrada de un altar sintoísta

El *sangaku* del altar de Katayamahiko, en Okayama, data de 1873. Su autor, Irie Shinjyun, escribió en él:

Las matemáticas son profundas. Cada uno tiene sus propios métodos para resolver problemas. Esto es cierto tanto en Occidente como en China y en Japón. Quienes no estudian duro no pueden resolver ningún problema. Yo no domino aún las matemáticas pese a haberlas estudiado desde joven. Así que no merezco ser profesor de nadie, pero algunos me han pedido que les enseñe matemáticas. Les enseñé a resolver problemas y colgaré un *sangaku* junto al altar de Katayamahiko, en el que he escrito dieciséis problemas. Dedico esta tabla al altar con la esperanza de que mis alumnos ganen maestría en matemáticas.

Uno de los problemas de este *sangaku* hace referencia a la inserción de tres círculos tangentes entre sí en otro círculo mayor. La relación k entre el radio r de los tres círculos tangentes inscritos y el radio R del círculo que los contiene es:

$$k = \frac{R}{r} = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Las cosas pueden llevarse mucho más lejos iterando la inscripción hasta el infinito para crear un diseño (figura 3) cuya dimensión fractal es:

$$D = \log_{\frac{1}{k}} n = \frac{\log 3}{\log \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)} = 1,431\dots$$

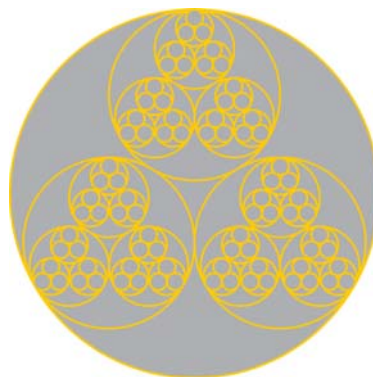


Figura 3: Iteración de un *sangaku*

Los círculos aparecen también en las aceras niponas. La mayoría de ellas están marcadas con senderos amarillos hechos de arrugas circulares y rectangulares (figura 4). Al principio, el visitante exótico no comprende su sentido, pero luego ve que sirven de guía a los ciegos. Tentando esas arrugas con el bastón saben qué camino seguir y dónde se encuentran.



Figura 4: Acera nipona

Algo similar ocurre con las tapas del alcantarillado y las arquetas de acceso a los suministros de electricidad, gas o agua que se abren al subsuelo. Sus arrugas ayudan al transeúnte a no resbalar cuando las pisa. Pero, ¿cuál es el arrugado óptimo de una arqueta? Cuantas más arrugas tenga, mejor. Sin embargo, un arrugado llevado hasta el infinito acabaría siendo absolutamente liso. ¿Cómo debería ser la arqueta ideal?

Busquemos una curva o serie de curvas perpendiculares a la trayectoria de un transeúnte imaginario que partiese del centro de una arqueta o pasase por él. Es decir, una arruga perpendicular a cualquier dirección que pase por el centro de la arqueta. Una sencilla reflexión permite dar con la solución, pero podemos ser más rigurosos aplicando el cálculo diferencial. Sean $(x, f(x))$ los puntos de esa curva en un sistema de coordenadas con origen en el centro de la arqueta. Matemáticamente, la condición expuesta quiere decir que, en todo momento, el radio vector $(x, f(x))$ es perpendicular al vector tangente $(1, f'(x))$ a la curva. Por lo tanto, su producto escalar debe ser nulo:

$$\begin{aligned}
 x + f(x) \cdot f'(x) &= 0 \\
 f(x) \cdot f'(x) &= -x \\
 \frac{(f(x)^2)'}{2} &= -x \\
 f(x)^2 &= \int (-2x) dx = -x^2 + k, \quad k \in \mathbb{R} \\
 f(x) &= \sqrt{k - x^2}, \quad k \in \mathbb{R}^+
 \end{aligned}$$

Se trata de la familia de circunferencias concéntricas de radio creciente $r = \sqrt{k}$ y con centros en el de la arqueta. Así es una arqueta de la ciudad de Takayama (figura 5). Otra opción es combinar ésta última (radial) con la anterior (reticular) y crear, en vez de un arrugado concéntrico de radio creciente, un arrugado de círculos de igual radio también ortogonal a todas las direcciones que la recorran (figura 6).



Figuras 5 y 6: Arquetas circulares en suelo nipón (Takayama)

Llevando esos círculos a límites extremos y abandonando su distribución hexagonal, llegaríamos a una arqueta arrugada con miríadas de diminutos círculos. No importa que las arrugas sean geométricas, sino que haya muchas y en todas direcciones. Para cumplir con ese cometido valen tanto una descomposición particular de la circunferencia (figura 7) como diseños puramente artísticos (figuras 8 y 9).



Figura 7: Arcos circulares en una arqueta (Okayama)



Figuras 8 y 9: Arquetas con arrugados artísticos (Kanazawa y Kobe)

Los recorridos urbanos no se reducen a los callejeos por un plano horizontal. Hace tiempo que las ciudades abandonaron las dos dimensiones para desarrollarse hacia arriba y hacia abajo. Subir y bajar se hace por escaleras y ascensores. Tras un ascenso vertiginoso superior al centenar de metros se llega al mirador de las oficinas del gobierno metropolitano de Tokio. Desde esa sala se aprecia el carácter abierto de la metrópoli, una extensión urbana sin principio ni fin, sin una línea precisa que indique donde comienza o termina. Grandes ventanales rodean un espacio en el que hay varios sofás para relajarse, una cafetería y expositores con información de diversos eventos culturales (exposiciones, museos, actuaciones...). En uno de los expositores un folleto gris destacaba entre los de colores vivos y dibujitos infantiles que había a su alrededor. No entendía los caracteres nipones, pero estaba claro que era un cuestionario. Entre las preguntas identifiqué fórmulas químicas. Me resultaron familiares, pero no las comprendí. Me llamaron más la atención otras cuestiones de contenido evidentemente matemático. Una de las preguntas se ilustraba con una figura geométrica familiar. Otra contenía fórmulas matemáticas sobre igualdades entre los valores de una función desconocida. Otra parecía versar sobre un problema de programación lineal, dadas sus inecuaciones con dos incógnitas. ¿Cuál era el objetivo del test?

Busqué a alguien que me pudiese traducir al inglés ese enunciado. Una mujer atendió mi petición. Según me explicó se trataba de un test para acceder al Cuerpo de Bomberos de Tokio. Tradujo el enunciado de la cuestión 4 (figura 10), aquella ilustrada

trada con la figura geométrica, así: *Al cerrar este desarrollo, ¿sobre cuál de las caras marcadas caerá la cara sombreada?*

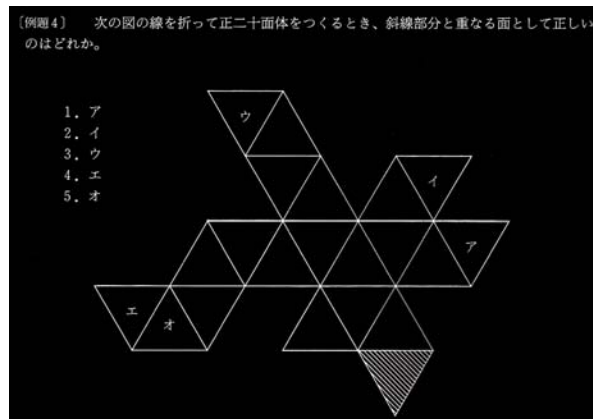


Figura 10: Una pregunta del test para bomberos de Tokio

La figura es un desarrollo plano poco corriente del icosaedro al que se le ha añadido una cara extra. La cara sombreada se superpone a la marcada con el ideograma japonés de la respuesta número 5. Lo deduje sobre el papel, pero no pude retraerme del deseo de comprobar realmente que la solución era la correcta. Recorté el perfil de la figura y marqué los pliegues de las aristas. La reconstrucción del icosaedro llevó la cara sombreada encima de la solución predicha.



Figura 11: Recortando el patrón cuadrado del pan de oro (Kanazawa)

Nada de lo que existe es bidimensional. Quizá sea verdad, pero en la ciudad de Kanazawa, al oeste de la isla de Honshu, se trabaja el oro hasta límites muy próximos a la bidimensionalidad. El proceso comienza con una pieza de oro del tamaño de una moneda que se aplana en una tira de grosor fino como una hoja de papel. Luego se corta en trozos pequeños más o menos cuadrados que se apilan insertando entre ellos hojas de papel de corteza. Esa pila es prensada a golpes para obtener cuadrados más extensos y más finos. Luego, esos cuadrados son separados de nuevo en otros fajos que vuelven a ser golpeados. Y así en varias etapas hasta conseguir unas láminas cuadradas finísimas (figura 11) de lado 10,9 cm. El espesor de cada cuadrado de oro es de tan sólo 0,1 micras, una diez milésima parte del milímetro, un objeto real translúcido y casi bidimensional (figura 12).

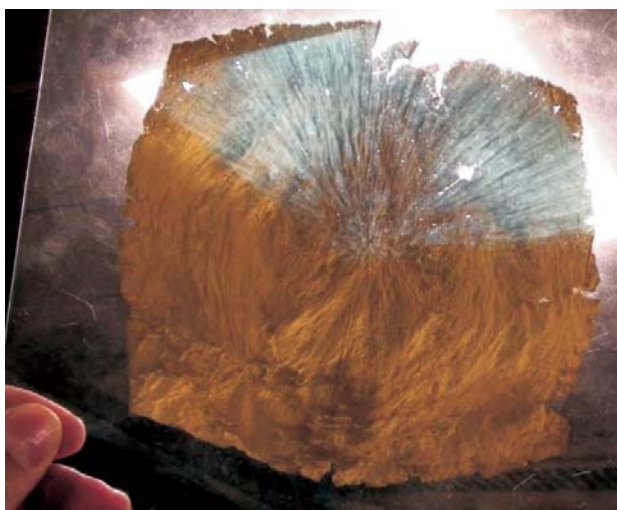


Figura 12: La luz atraviesa el pan de oro

Supongamos que la pieza de oro de la que se hacen las láminas tiene el tamaño de una moneda: unos 2 cm de diámetro y 1 mm de espesor. ¿Qué dimensiones tendrá la lámina que se puede extraer de esa moneda? Igualando el volumen de la moneda de radio $r=1$ cm y altura $h=1$ mm al de un cuadrado de lado c y altura $a=10^{-4}$ mm, que es la forma final de la lámina, vemos que:

$$\pi r^2 h = a \cdot c^2 \Rightarrow c = r \cdot \sqrt{\frac{\pi h}{a}} = 10 \text{ mm} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot 1 \text{ mm}}{10^{-4} \text{ mm}}} = \sqrt{\pi} \text{ m} \approx 1,77 \text{ m}$$

La finísima lámina dorada extraíble de esa moneda es un gran cuadrado de lado superior al metro y medio. Pero lo más extraordinario es que ese resultado sea precisamente un cuadrado de área π , es decir, ¡el área del círculo de radio un metro! En conclusión, una moneda de radio 1 cm y altura 1 mm se transforma en una lámina circular de radio 1 m y espesor 0,1 μ .

El llamado pan de oro es sin duda la obra artesana que más cerca está de las dos dimensiones. Una labor cuyos orígenes se remontan al antiguo Egipto de hace cuatro mil quinientos años y que se realiza en Kanazawa desde hace cuatro siglos.

Entre los siglos XVII y XIX Japón desarrolló una corriente matemática que recorrió el país a través de templos budistas y de altares sintoístas. La comunicación se establecía por medio de tablas de madera llamadas sangaku en las que se escribían teoremas y problemas matemáticos.

El pan de oro no es lo más fino que se conoce. En 2005 investigadores de la Universidad de Manchester obtuvieron láminas de grafeno, un compuesto de grafito y carbono, de 3 angstroms de espesor. Mil tercios más finas que el pan de oro.

¿Verdaderamente no existe nada bidimensional o es la limitada capacidad de nuestros sentidos la que nos impide percibirlo? Un objeto bidimensional carecería de espesor, por lo que sería perfectamente translúcido. ¿Cómo verlo? ¿Cómo tocarlo? No nos daríamos cuenta de su existencia. Como el círculo, lo bidimensional es también un ideal platónico cuya esencia perseguimos y que sólo las matemáticas permiten vislumbrar.

ADHERENCIAS ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en octubre de 2010 y aceptado en diciembre de 2010 para su publicación.