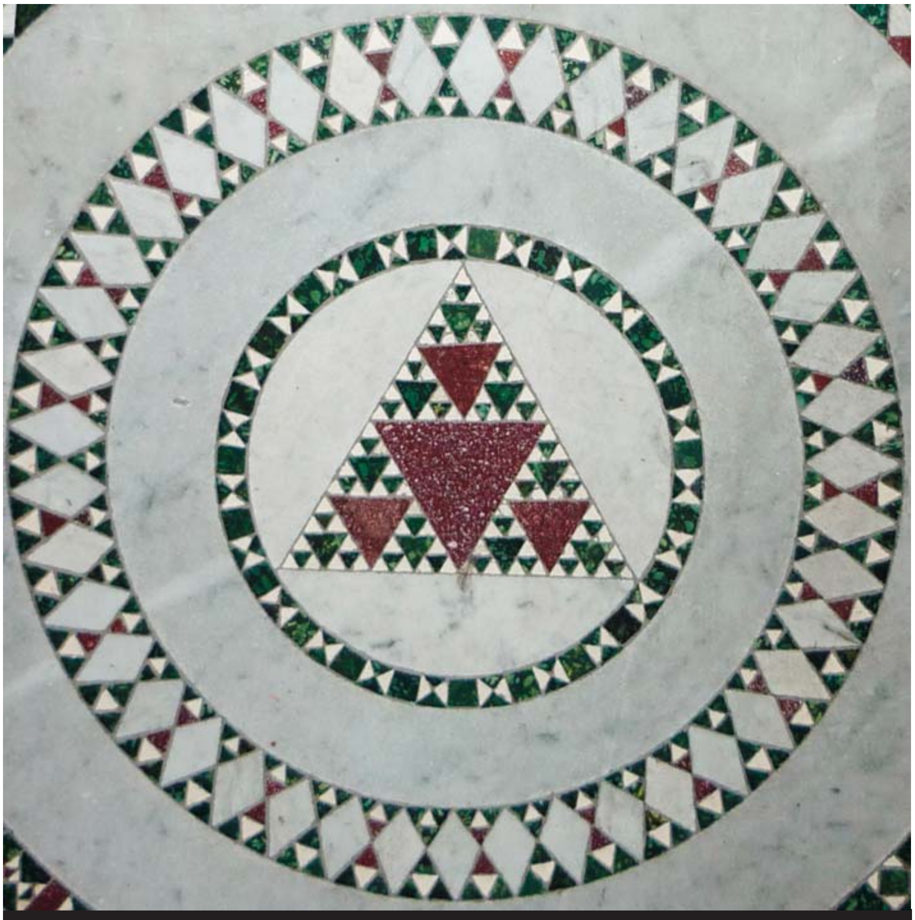
suma+ 66
Febrero 2011, pp. 67-71

Un fractal cosmatesco

Paseando por Roma, los ojos muchas veces no saben adónde dirigirse. Levantando ligeramente la mirada podemos toparnos con un caravaggio*, con su luz oscura. Alzando los ojos al cielo, con el mismo cielo a través del óculo de la bóveda del Panteón. Al mirar hacia abajo encontramos los magníficos suelos cosmatescos que son pura geometría. Centraremos nuestra mirada matemática en algunos de estos diseños. En 2003, el Campidoglio celebró el noventa cumpleaños de Emma Castelnuovo. Mª Jesús Luelmo, paseando por Roma, con ocasión de ese evento, descubrió el mosaico de la derecha. A ambas, a Emma y a Mª Jesus, dedico este artículo.*



Suelo cosmatesco, Santa María in Trastevere, Roma (Foto: FMC)

Francisco Martín Casalderrey
IES Juan de la Cierva (Madrid)
fmc@revistasuma.es

Los Cosmati fueron una familia de artesanos romanos. Son conocidos siete de sus miembros a lo largo de cuatro generaciones. La saga se inició con Laurentius Cosmati a finales del siglo XII. El último representante de esta familia es Giovanni Cosmati que vivió a mediados del siglo XIII. Los Cosmati fueron arquitectos y escultores, pero sobre todo se les recuerda por sus mosaicos marmóreos. Los Cosmati crearon un estilo propio, llamado *cosmatesco*, derivado en parte del arte bizantino y en parte del gusto clásico. Sus pavimentos se forman a base de teselas, normalmente de mármol y otras piedras, raramente de vidrio, con las que forman dibujos de carácter abstracto geométrico. Con respecto al *opus tessellatum* romano —que utiliza siempre teselas del mismo tamaño y forma pero de diferentes colores— los suelos cosmatescos son más complejos. Usan teselas de formas y tamaños diferentes y de variados colores que van del rojo oscuro del pórfido, al verde de la serpentina, dejando el blanco del mármol de Carrara para los fondos.

Predominan las formas redondas que muchas veces son secciones de columnas de las ruinas de la Roma antigua, de donde tomaban también los mármoles para las piezas más pequeñas. La otra forma fundamental son las bandas entrelazadas que rodean los círculos, pasando de unos a otros. Por último, para rellenar los espacios que quedan entre bandas y círculos y pasar de lo redondo a lo rectangular, se usan generalmente mosaicos semirregulares, basados en polígonos regulares.

El estilo cosmatesco fue muy imitado por otros artistas a lo largo de los siglos y en diversos países. Recordamos, por ejemplo, el suelo representado en el cuadro de *Los embajadores*, del que hablamos en esta sección en *Suma* 65.

El interés matemático de los mosaicos cosmatescos es indudable y requeriría un estudio profundo y específico. En esta ocasión me contentaré con señalar y sugerir algunas ideas que pueden resultar útiles para los lectores de *Suma*, es decir, para los profesores de matemáticas.

Figuras 2-7, en esta página.
Seis detalles de motivos utilizados en los mosaicos cosmatescos de Roma. De izquierda a derecha y de arriba abajo, los dos primeros son de *Santa María Mayor* (siglo XII), los dos siguientes de *Santa Maria in Cosmedin (siglo XIII)* y los restantes de *Santa Maria in Trastevere,* (restaurados y rehechos en el siglo XIX).

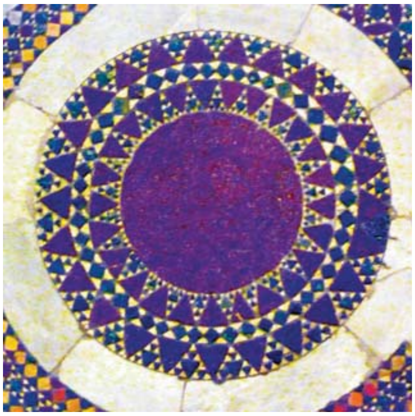
Figuras 8-19, en la página siguiente.
Doce rosetones de mosaicos cosmatescos romanos.
Los cuatro primeros, en el mismo orden anterior, de *Santa María Mayor* (del siglo XII), los ocho restantes de *Santa Maria in Trastevere* (restaurados y rehechos en el siglo XIX)
Fotos: FMC

Wacław Sierpiński (1882-1969)

Wacław Franciszek Sierpiński, de nacionalidad polaca, fue un matemático conocido por sus notables contribuciones a la Teoría de conjuntos —trabajó sobre el Axioma de Elección y la Hipótesis del continuo— la Teoría de números, la Topología y la Terоría de funciones.

Tres fractales reciben nombres asociados a su apellido: el *triángulo de Sierpiński*, la *alfombra de Sierpiński* y la *curva de Sierpiński*.









Como se puede ver en las imágenes de las páginas anteriores son muchos los motivos que abordan los suelos cosmatescos. Los representados en detalle son todos de pavimentos de iglesias romanas. Los de la Basílica de Santa María Mayor y de Santa Maria in Cosmedin son originales del siglo XII. Los de Santa Maria in Trastevere, entre los que se encuentra también el de la primera página, fueron casi completamente rehechos en una restauración realizada por Virginio Vespignani en el último cuarto del siglo XIX, aunque parece ser que respetando los dibujos y los motivos originales.

Triángulos de Sierpiński cosmatescos

Pero lo que más llama la atención es la frecuencia con la que aparecen entre los dibujos distintas versiones de los triángulos de Sierpiński, obviamente muchos años antes de que ese triángulo recibiera tal nombre.

Refiriéndonos a las imágenes por su número de orden. La primera es sin duda la más espectacular. Se trata de un triángulo de orden cuatro. Los triángulos de los dos primeros niveles están realizados en rojo con pórfido, mientras que en los otros dos niveles el diseñador ha optado por el verde de la serpentina. Como hemos señalado, este suelo fue rehecho por Vespignani en el siglo XIX, por lo que no podemos asegurar que el dibujo precedente fuera exactamente como el que podemos ver en la actualidad. Podría tratarse por tanto de una innovación y no de una autentica restauración, a pesar de eso, por la fecha en que se hizo, continuaría siendo anterior a los estudios de Sierpiński sobre el triángulo que lleva su nombre. Además, como vemos al analizar las restantes imágenes, este tipo de triángulos aparecen en los suelos cosmatescos desde los origines.

Así, por ejemplo, en las imágenes 2, 3, 5 y 6 —las de los detalles de los motivos ornamentales– podemos ver triángulos de orden uno, mientras que en las imágenes 3, 4 y 7 se pueden ver triángulos de orden dos. El de la imagen inicial del artículo como hemos señalado es de orden cuatro.

Si pasamos a las imágenes de la página siguiente observamos que en todas ellas aparecen triángulos de Sierpiński a excepción de la tercera de la fila superior, ya que los que se ven en ella, entre las puntas de la estrella central, no lo son. En las restantes los que aparecen son de órdenes uno y dos. Buscar dónde están en cada caso y de que orden son puede ser un juego divertido.

Resulta también interesante estudiar el grupo de simetría de cada uno de los rosetones; nos podemos llevar sorpresas. Por ejemplo, si observamos la figura número 13, es decir, el sexto de los rosetones de la página precedente, el cuadrado central nos puede llevar a pensar que se trata del grupo diédrico D_4, sin embargo, al considerar el marco de rombos que lo rodea y contar éstos, vemos que son 41; como 41 es primo, no tiene divisores comunes con 4; la figura solo tiene una simetría, es decir, realmente se trata del grupo diédrico D_1. La figura 16 —inmediatamente debajo de la anterior— en su parte central tiene las simetrías de un hexágono y como en el marco hay 36 triángulos de Sierpiński de orden 1, se trata de un D_6.

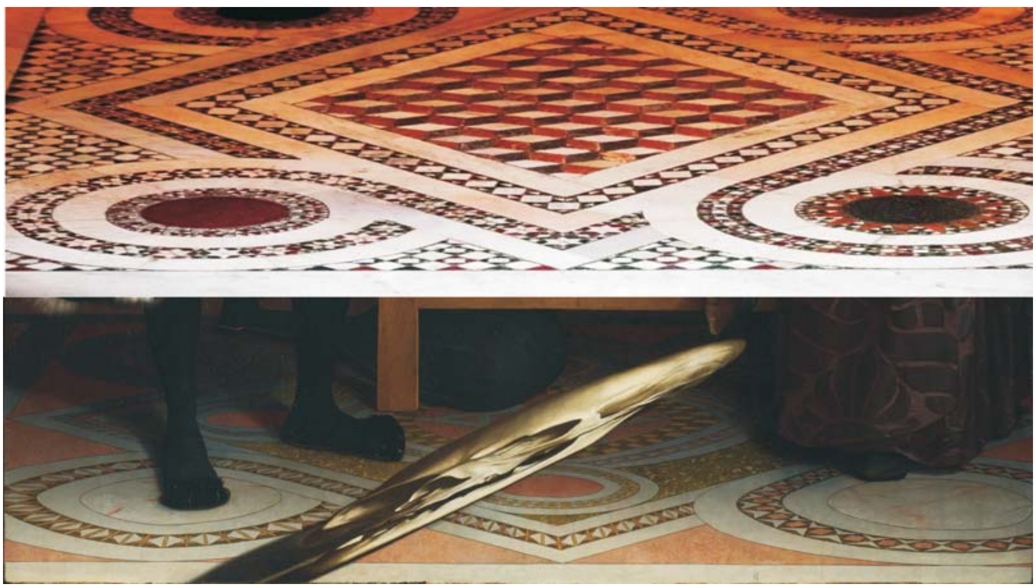
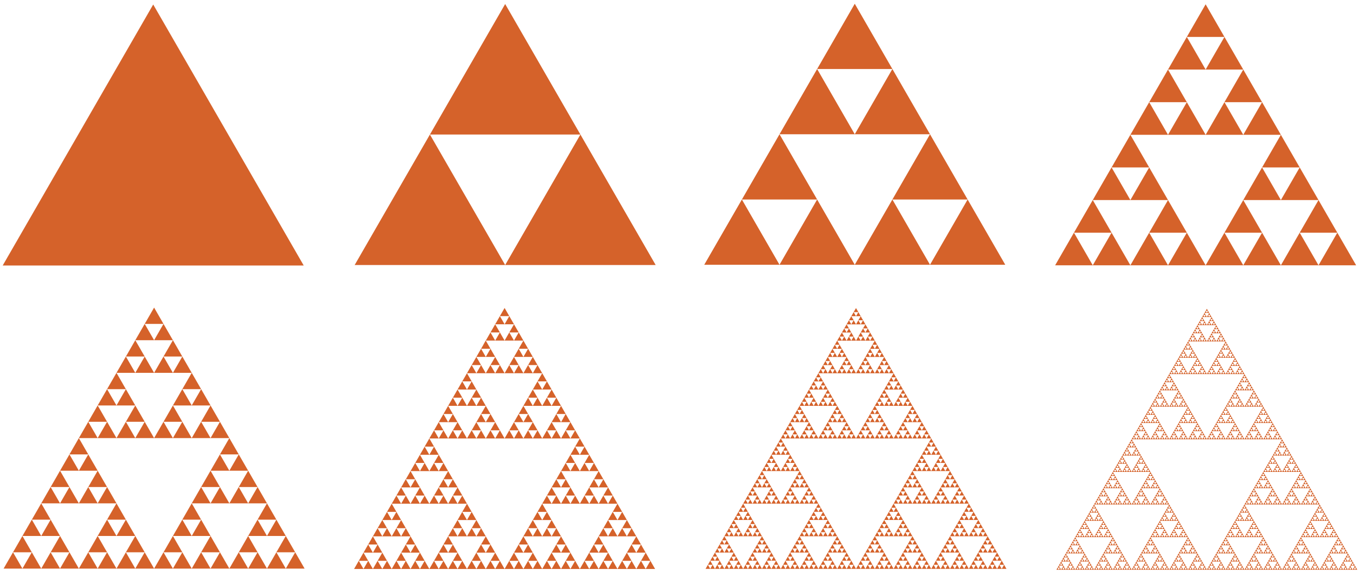


Figura 20
Comparación del pavimento de estilo cosmatesco de Los Embajadores, Hans Holbein El Joven, 1533 National Gallery (Londres) y el suelo de Santa Maria Maggiore, de Roma, visto con una perspectiva similar



Figuras 21-28. Triángulos de Sierpiński de niveles cero a siete (Imágenes: FMC)

Alrededor del triángulo de Sierpiński

La manera más sencilla de imaginar, de una manera generativa, el triángulo de Sierpiński, es partir de un triángulo cualquiera y marcar en él los puntos medios de cada lado. Al unirlos se formará un triángulo semejante al original, con una razón de semejanza de ½, en el centro del anterior y otros tres, también semejantes y con la misma razón de semejanza, uno en cada vértice. Si al triángulo inicial le asignamos el orden 0 y lo denominamos $\boldsymbol{S_0}$, a la nueva figura la podemos denominar $\boldsymbol{S_1}$. El triángulo de Sierpiński, $\boldsymbol{S}$, lo podemos obtener pasando al límite.

$$\boldsymbol{S} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{S}_n$$

El triángulo de Sierpiński, $\boldsymbol{S}$, es autosimilar, ya que cada una de las tres subfiguras triangulares de lado 1/2 que lo forman son idénticas a la figura global, reducidas a escala 1:2.

Si observamos en la sucesión $\boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}$ ... el número de triángulos coloreados, vemos que forman una progresión geométrica cuyo primer término es 1 y de razón 3. Así, el número de triángulos de $\boldsymbol{S_n}$ es 3^n. El último de los triángulos que hemos representado es un $\boldsymbol{S_7}$, que, por tanto, está formado por 3^7= 2.187 triángulos semejantes al inicial.

Los lados de los triángulos de la sucesión $\boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}$ ... forman otra progresión geométrica. Si llamamos l al lado del triángulo inicial, la progresión tiene como primer l y una razón de 1/2. Así, el lado de los triángulos que forman $\boldsymbol{S_7}$, es una ciento veintiochoava parte del inicial. O dicho de otro modo, sobre el lado del triángulo $\boldsymbol{S_7}$ se apoyan 128 triángulos de lado $l/128$.

El área coloreada de cada uno de los triángulos de la sucesión $\boldsymbol{S_0}, \boldsymbol{S_1}, \boldsymbol{S_2}$ ... es 3/4 del área coloreada del anterior. Así en la figura del $\boldsymbol{S_7}$, el área de la superficie coloreada es

$$A = \left(\frac{3}{4}\right)^7 \simeq 0{,}133$$

Obviamente, como

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

El área de la superficie coloreada del triángulo de Sierpiński $\boldsymbol{S}$ es 0. Podemos decir, por tanto, que es *invisible*. Al no tener superficie ni ser tampoco exactamente una línea, el triángulo de Sierpiński pasa a ser objeto intermedio entre ambos. Un objeto con una dimensión no entera. De hecho, la dimensión fractal de Hausdorff-Besicovitch del triángulo de Sierpiński es:

$$D_{HB} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \simeq 1{,}585$$

Wacław Sierpiński estudió su triángulo en 1915. Muchos años antes, en el siglo XII, una idea geométrica parecida había servido de inspiración a los Cosmati para construir sus suelos. El arte y las matemáticas otra vez se tocan.

ARTE CON OJOS MATEMÁTICOS ■