suma+ 66
Febrero 2011, pp.43-46

# Puzles de cuadraturas

Desde la más tierna infancia todos nos hemos sentido fascinados por los puzzles. Trabajar con piezas irregulares y desconocidas y que tras un arduo trabajo encontremos una imagen o figura reconocible siempre es algo atractivo. Como además se suele abordar desde un aspecto lúdico, suele ser una actividad motivante con gran potencial didáctico, por eso no es raro que el puzzle sea uno de los recursos educativos desde los primeros años de escolarización.

En esta sección ya hemos trabajado anteriormente con gran variedad de puzzles, tanto de dos como de tres dimensiones: poliábolos, hexamantes, el cubo de Muñoz, el Teorema de Pitágoras, Stomachion de Arquímedes, etc. Hay ocasiones en que intentamos agotar todo lo que en ese momento conocemos de un tema y en otros incluimos lo que podemos para que el artículo no quede demasiado extenso. Pero hasta el momento no habíamos retomado un tema que ya habíamos trabajado antes. Aprovechando que aunque los directores de SUMA van cambiando, siempre se encargan amigos que nos siguen honrado con su confianza, hoy podemos volver la vista atrás y retomar el tema de las cuadraturas.

Como dice el Diccionario de la Real Academia de la Lengua, en su acepción geométrica, cuadratura es el efecto de cuadrar, es decir, dar el aspecto de cuadrado. Esto es algo corriente en el mundo de los puzzles ya que muchos de ellos parten de la disección de un cuadrado, como en el Tangram Chino o de Sam Loyd. En nuestro caso vamos a trabajar, en esta ocasión, con la disección de polígonos regulares con cuyas piezas puede reconstruirse un cuadrado.

En el número 48[1] de esta revista SUMA, del ya lejano año 2005, apareció el artículo *Cuadraturas de los polígonos regulares* donde se planteaba el problema de las disecciones de polígonos regulares para obtener un cuadrado. En él se comentaban las cuadraturas del triángulo, del pentágono, del hexágono y del octógono, y por medio del teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein se daba respuesta a la pregunta que hacíamos sobre qué polígonos admiten una cuadratura: *Dados dos polígonos de igual área existe una disección de uno en un número finito de piezas poligonales que recubre exactamente el otro*[2]. La demostración se puede encontrar en http://bayledes.free.fr/decoupage/index.html

El concepto matemático que se desarrolla en las disecciones planas es la conservación del área cuando se corta una figura y se reordenan las piezas resultantes. Por el teorema enunciado anteriormente siempre es posible pasar de un polígono a otro distinto; la dificultad estriba en hacerlo con el menor número de piezas o con piezas no muy sofisticadas. En esta entrega queremos presentar una segunda parte ampliando el trabajo que habíamos realizado a otros cuatro polígonos regulares: heptágono, eneágono, decágono y dodecágono.

**Grupo Alquerque de Sevilla**
*Constituido por:*
**Juan Antonio Hans Martín.** *CC Santa María de los Reyes.*
**José Muñoz Santonja.** *IES Macarena.*
**Antonio Fernández-Aliseda Redondo.** *IES Camas.*
*juegos@revistasuma.es*

El primer trabajo suele ser aclararle al alumnado cuáles son estos polígonos, pues hay veces que no saben que existen, pues no suelen ser polígonos que se trabajen normalmente en clase, ni tienen idea clara de su forma y algunos hasta desconocen el número de lados que tienen. Por ello puede ser un buen momento para tratar aspectos de la geometría plana que se están perdiendo, como la construcción de polígonos regulares con regla y compás, y además la dimensión histórica y cultural de las matemáticas.

Podemos pues comentarles los requisitos sobre la regla y compás como elementos ideales que se autoimpusieron los griegos para sus construcciones geométricas, aspectos que seguro les llamarán la atención, pues no están acostumbrados a reglas de longitud infinita, que no tengan marcas que permitan medir o trasladar distancias y con un sólo borde (para evitar el paralelismo fácil), ni a compases de memoria frágil que olvidan la distancia que tenían entre sus puntas cuando se levantan del papel.

Desde la época de Euclides, alrededor del 300 a. C., se conocían construcciones geométricas, con sólo regla y compás, para dibujar polígonos regulares de 3, 4, 5 y 15 lados y aquellos otros que se pueden deducir de ellos por bisección, como los de 6, 8, 10, 12, 16... lados. Más tarde Gauss (1777-1855), el Príncipe de las Matemáticas, demostró que es imposible construir, utilizando únicamente regla y compás, los polígonos regulares de 7, 9, 11 y 13 lados. Y hoy se sabe perfectamente qué polígonos regulares de n lados son construibles de esta forma sin más que conocer la descomposición en factores primos de n.

Vamos a empezar viendo la cuadratura del dodecágono regular pues a pesar de ser el de mayor número de lados de los cuatro polígonos que vamos a tratar, permite un desarrollo completo más fácil del proceso de disección: la construcción del polígono de partida es posible con regla y compás o de forma aproximada si no se desea ser tan riguroso geométricamente, y las instrucciones de cortes no son tan compicadas.

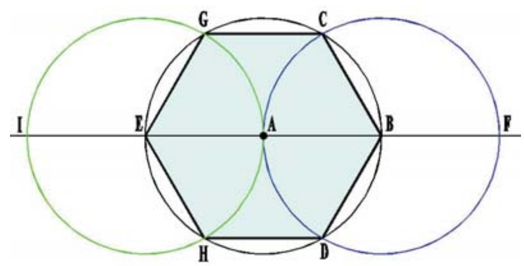
## La cuadratura del dodecágono

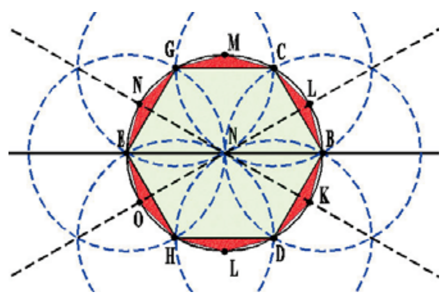
La construcción y posterior disección de este polígono nos permite realizar un buen trabajo de regla y compás y de repaso de elementos geométricos como circunferencia, polígono inscrito, radio, segmento, cuerda y punto medio de un segmento entre otros.

Vamos a empezar construyendo un hexágono regular a partir de dos puntos A y B:

Con radio AB trazamos sendas circunferencias con centro primero en A y después en B. Estas circunferencias se cortan en dos puntos: C y D que van a ser vértices de nuestro hexágono. Prolongando el segmento AB y cortando con las circunferencias trazadas obtenemos E y F. Volvemos a trazar un circunferencia, ahora con centro en E y que pase por A; sus cortes con la circunferencia de centro A nos determinan los puntos G y H. Uniendo los puntos-vértices obtenemos el hexágono regular buscado.

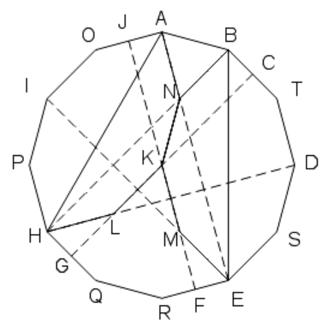
Posteriormente cada uno de los seis lados se divide en dos, calculando en cada una de las cuerdas que se determinan en la circunferencia de centro A la mediatriz del segmento y su corte con el arco (también se puede hacer trazando las bisectrices de los ángulos centrales de los distintos sectores circulares). Obtenemos así el dodecágono regular.



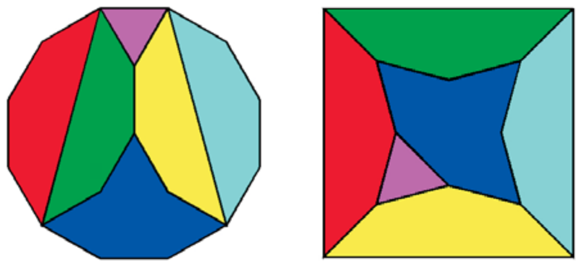




La transformación de un dodecágono en un cuadrado fue creada por Harry Lindgren ((1912–1992), ingeniero anglo-australiano y matemático aficionado) en 1951. Lindgren publicó en 1964 el libro Geometric Dissections sobre técnicas de elaboración y resolución de rompecabezas de disección.

Para diseccionarlo seguimos los siguientes pasos:



1. Dibujamos el dodecágono regular.
2. Trazamos los segmentos (cuerdas del polígono): AH, AE, BH, BE, EI Y HD.
3. Trazamos los segmentos GC y JF, unen los puntos medios de lados opuestos.
4. Dibujamos el segmento KN.
5. Dividimos el dodecágono en seis piezas:
    a. Cuatro pentágonos iguales: AHPIO, ANKLN, BEMKN y BTDSE.
    b. El triángulo ABN y el heptágono HLKMERQ.

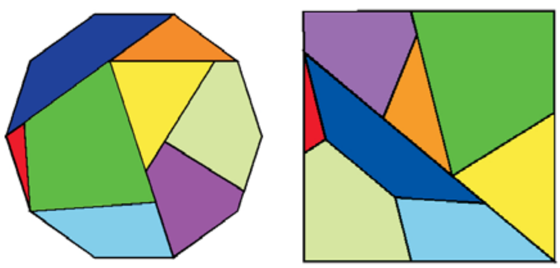


Y con las seis piezas podemos formar un cuadrado. La imagen de la izquierda muestra el polígono de partida y la de la derecha su transformación en un cuadrado.

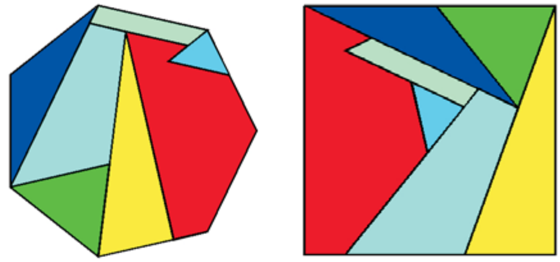
Ya hemos comentado que la construcción con regla y compás del heptágono y eneágono regulares son imposibles (aunque siempre podemos partir de una construcción no exacta), pero como además las instrucciones para la construcción de la disección de estos dos polígonos y del decágono son más complicadas es por lo que sólo presentamos sus dibujos. Las plantillas para construir los puzzles de este artículo y de su predecesor se pueden descargar en formato PDF en nuestra web: http://www.grupoalquerque.es/

Las tres disecciones siguientes corresponden al decágono, al heptágono y al eneágono. Han sido descubiertas por Gavin Theobald que, junto a Greg N. Frederickson, es uno de los expertos actuales en disecciones geométricas, y cuya página web citada en la bibliografía recomendamos encarecidamente.

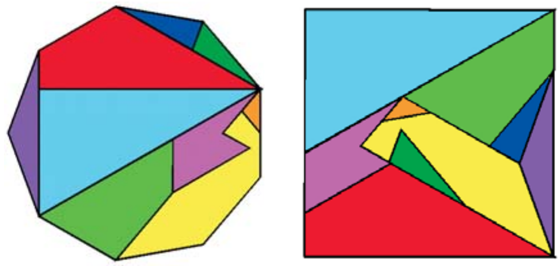
### La cuadratura del decágono



### La cuadratura del heptágono



### La cuadratura del eneágono



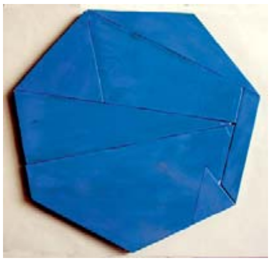
La siguiente tabla muestra el estado actual de los récords de disección entre polígonos, al indicar el número menor de piezas con las que se pueden conseguir unos de otros.

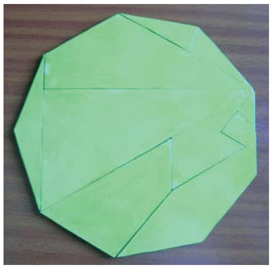
| | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 4 | 6 | 5 | 8 | 7 | 8 | 7 | 8 |
| 4 | 4 | 1 | 6 | 5 | 7 | 5 | 9 | 7 | 6 |
| 5 | 6 | 6 | 1 | 7 | 9 | 9 | 10 | 10 | 10 |
| 6 | 5 | 5 | 7 | 1 | 8 | 8 | 11 | 9 | 6 |
| 7 | 8 | 7 | 9 | 8 | 1 | 11 | 13 | 11 | 11 |
| 8 | 7 | 5 | 9 | 8 | 11 | 1 | 12 | 10 | 10 |
| 9 | 8 | 9 | 10 | 11 | 13 | 12 | 1 | 13 | 14 |
| 10 | 7 | 7 | 9 | 9 | 11 | 10 | 13 | 1 | 12 |
| 12 | 8 | 6 | 10 | 6 | 11 | 10 | 14 | 12 | 1 |

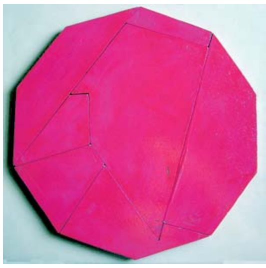
## Trabajo en clase

Poniendo la Tecnología al servicio de las Matemáticas o las Matemáticas al servicio de la Tecnología, para nuestros compañeros tecnólogos, puede ser un buen proyecto de trabajo el construir los puzzles a partir de una plantilla del polígono en papel. La construcción del dodecágono puede comenzar desde su propio diseño con regla y compás.

Las plantillas se copian en cartulina, cartoncillo, cartón pluma, panel, que es también muy fácil de cortar con un cutter o, mucho mejor, en madera, para su corte con la sierra de marquetería, lijado, pintado y barnizado. Quedando unos estupendos puzzles para su manipulación.


heptágono


eneágono


decágono


dodecágono

Al manipular las piezas obtenidas en las disecciones del heptágono, eneágono y dodecágono podemos distinguir que los tres tienen alguna pieza un poco distinta a las demás: tienen piezas que son polígonos cóncavos, lo que nos puede permitir plantear el siguiente cuestionario de trabajo o investigación:

- Diferencias entre un polígono cóncavo y uno convexo.
- ¿Cuánto pueden medir los ángulos interiores en un polígono convexo? ¿Y en uno cóncavo?
- ¿En los polígonos convexos cuánto vale la suma de sus ángulos interiores? ¿Y de los ángulos exteriores? ¿Y en los cóncavos?

Pero estos puzzles son también problemas en cuanto plantean un reto de transformación de un polígono en otro para el que de entrada no se conoce el camino de resolución más adecuado. Al jugar con ellos podemos comprobar su dificultad. Para evitar la frustración del alumno ante estos rompecabezas y que no abandone la resolución del problema que tiene delante se le pueden dar como pistas unas plantillas con el contorno del polígono inicial y del cuadrado de área equivalente.

La plantilla con el contorno sirve de ayuda, orienta y guía hasta la construcción que se debe realizar, al facilitar la medida del lado del polígono y poder medir comparando la longitud de las piezas con la longitud de los segmentos dibujados en la plantilla.

Aprovechando el puzzle se pueden trabajar aspectos geométricos y numéricos en clase. Por ejemplo, repasar los ángulos interiores de un polígono regular, lo que nos puede servir de pista para encontrar las piezas que van a formar el contorno del polígono regular. Otro aspecto más complicado es trabajar con las medidas de los lados, es decir, si conocemos cuánto mide el lado del cuadrado, ¿cuánto debe medir el lado del polígono regular para que tengan la misma área?

Para su uso directamente en clase o para actividades complementarias y extraescolares, como Matemáticas en la calle, estos materiales manipulables constituyen unos elementos altamente atractivos y motivadores, cuya resolución engancha a casi todos los que por allí pasen.

Hemos visto en estos dos artículos cómo partir de polígonos regulares para llegar a obtener un cuadrado, pero es posible partir de otros tipos de polígonos también muy atractivos. El tema de las cuadraturas no termina aquí… aunque sí por hoy.

***JUEGOS*** ■

## NOTAS

1 En la página de divulgación de la Real Sociedad Matemática Española, http://www.divulgamat.net/, puede consultarse el artículo dentro de la sección Juegos Matemáticos en el apartado de Recursos.

2 En 1833, P. Gerwein, teniente del ejército prusiano dio la solución a la pregunta sobre las disecciones planteada por el matemático húngaro y experto en geometría Wolfang Bolyai (1775-1856). También llamado Teorema de Bolyai-Gerwein, parece que sin embargo fue demostrado por primera vez en 1807 por el matemático escocés William Wallace (1768-1843). El teorema no se generaliza a tres dimensiones. En 1908 el matemático alemán Max Dehn (1878-1952) demostró que un cubo y un tetraedro regular del mismo volumen no son equivalentes por disección; aunque hay ejemplos de figuras que sí lo son.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Frederickson, Greg (1997). *Dissections: Plane & Fancy*. Cambridge (UK): Cambridge University Press.

Hans, J. A.; Muñoz, J.; Fernández-Aliseda, A.; Blanco, J y Aldana, J. (2003). Rompecabezas del Teorema de Pitágoras. *Suma*, 43, 119-122.

Hans, J. A.; Muñoz, J.; Fernández-Aliseda, A. (2005). Cuadraturas de polígonos regulares, *Suma*, 48, 65-68.

Van Delft, P., Botermans, J. (1995). *Creative puzzles of the World*. Emeryville (California, USA): Key Curriculum Press.

**Internet** (consultadas en agosto de 2010)

http://www.cabri.net/abracadabri/abraJava/Dissection/ListDiss.html

http://geometriadinamica.es/Geometria/Disecciones/

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/puzzles.htm

http://home.btconnect.com/GavinTheobald/Index.html. *Geometric Dissections.* Autor: Gavin Theobald

Este artículo fue solicitado por *Suma* en noviembre de 2010 y fue aprobado para su publicación en enero de 2011.