suma+ 66
Febrero 2011, pp. 17-26

Picos y mesetas en los aprendizajes matemáticos en Educación Primaria: el caso de la multiplicación

En el presente artículo se pretenden identificar los puntos críticos que entrañan mayor dificultad para los alumnos dentro de los contenidos numéricos en Educación Primaria. La finalidad didáctica de este trabajo reside en ser capaces de saber dónde se sitúan esos puntos críticos para proponer tratamientos educativos que los superen. También se proporcionan unas indicaciones para la enseñanza basadas en el carácter visual y espacial de los números, así como un conjunto de actividades abiertas, susceptibles de ser empleadas en el trabajo con los alumnos.

Palabras Clave: Experiencia de aula, aritmética, números, enseñanza-aprendizaje, primaria.

Peaks and plateaus in learning mathematics in primary education: the case of multiplication

This paper shows some of the most critical issues that primary education students have to face when they solve numerical problems. If all these important facts are identifyed, we will be able to define solutions to improve the learning process. This document also provides some indications to work with visual and spatial teachings. Some interesting activities are also proposed to make the education process easier.

Key words: Classroom experience, arithmetic, numbers, teaching and learning, primary.

Introducción

Siendo alumno en la escuela de mi pueblo escuché a mi maestro D. José Guerra, que imagino que no había leído a Piaget, esta frase de los picos y mesetas en los aprendizajes. Se refería a la mayor dificultad que entrañan unos contenidos en relación a otros. Una meseta se correspondería con un tramo de aprendizajes de similar dificultad, no existe propiamente una mayor exigencia cognitiva entre los requerimientos de un aprendizaje y el siguiente; un pico se correspondería con un desafío nuevo, un aprendizaje que exige de capacidades superiores para ser adquirido.

La metáfora es adecuada, situados en una meseta del conocimiento se avanza por un tiempo sin mayores dificultades y pueden ser adquiridos un grupo importante de contenidos, luego, lo natural es que venga un pico, que da acceso a otra meseta en la que están situados un nuevo grupo amplio de aprendizajes, pero que supone un escalón cognitivo, y por tanto, un mayor esfuerzo para ser superado.

Esta secuencia de picos y mesetas, que se produce en todas las materias, y de un modo más acusado en el aprendizaje de las matemáticas, es importante de identificar. Permite conocer dónde se encuentran los lugares en los que algunos alumnos van a encontrar más dificultades, y por tanto, seleccionar con anterioridad las estrategias metodológicas más adecuadas, a la vez que colocar las ayudas necesarias, para que, si es posible, los obstáculos puedan ser superados por todos o casi todos.

Nos referiremos en este artículo a un pico y a su meseta subsiguiente, relevantes en el conjunto de contenidos que tienen que adquirir los alumnos de Educación Primaria, se trata de la multiplicación, y más concretamente, del aprendizaje de las tablas de multiplicar. La multiplicación constituye un pico por la importante dificultad que supone para algunos alumnos y da inicio a su vez a una meseta porque es un contenido básico a partir del cual se construyen otros contenidos importantes. Pero no es un pico cualquiera, un alumno puede prescindir de otros supuestos picos matemáticos como el álgebra o la combinatoria, pero la no adquisición con soltura del

José Antonio Redondo González
Junta de Extremadura
José Luis Redondo García
Universidad de Extremadura

automatismo de la multiplicación cercena en buena medida cualquier posibilidad de desarrollo matemático, e incluso de desenvolvimiento en su vida cotidiana.

La suma como meseta de partida

El comienzo del aprendizaje numérico se inicia cuando a un grupo de elementos se le asigna un número. En los primeros intentos de contar, el alumno va señalando con el dedo cada uno de los elementos de un conjunto, a la vez que va recitando la serie numérica, de modo que cuando finaliza con los elementos ha obtenido el cardinal del conjunto. En una segunda etapa, esta tarea se puede llevar a cabo mediante una estrategia más potente, con lo que se vuelve más rápida y automática, se reconocen configuraciones de elementos como un todo, tres, cuatro, cinco, seis puntos, tal como vienen situados en un dado. Así, de un solo golpe de vista, se le asigna un cardinal al conjunto.

Adquirido el concepto de número, un número se puede añadir a otro y así se crea la operación suma, 5+3 = 8; con ella se inicia la primera meseta del aprendizaje numérico. En una meseta hay muchos pasos (contenidos procedimentales) de parecido nivel, cada paso supone un conocimiento nuevo, pero no un esfuerzo cognitivo significativamente superior al paso anterior, así 8+7 es más complicado que 5+3 porque los números son mayores y hay que saltar de la primera a la segunda decena, pero no hay una ruptura radical con el paso anterior. La suma de números en los que intervienen las decenas, por ejemplo 15+13, necesita de mayores conocimientos, saber que por un lado hay que sumar las decenas y por otro las unidades, también de un poco más de memoria de trabajo, hay que retener las suma de las decenas mientras se suman las unidades, pero no exige una diferencia radical de representación con respecto al paso anterior. Otro contenido dentro de las misma meseta es 5+9+3 =, sobre un resultado obtenido volver a aplicar de nuevo el procedimiento de la suma.

La resta se sitúa en esta misma meseta que la suma, 9– es sencillamente contar desde 3 hasta 9, en los dos casos es el mismo mecanismo de ir progresivamente de un número a otro, por lo que todos los ejercicios de restar, por ejemplo 17–9 se sitúan en la misma meseta que la suma.

Los algoritmos tradicionales de la suma y de la resta están también situados en esta misma meseta, 345+297 no es más que una serie de sumas sencillas, es el mismo proceso repetido con el añadido de la preocupación de las llevadas, pero si la suma de cada par de números se realiza de forma automática, no entrañan mayor problema. El algoritmo de la resta aparece como más difícil porque tiene algunos impedimentos que no posee la suma, como que el número mayor debe situarse arriba, o que las llevadas deben agregarse inexcusablemente al sustraendo mientras que en la suma es indiferente al sumando que se añadan, pero no exige mayor carga de memoria, y por tanto, tampoco mayores dificultades de representación.

El territorio sobre el que se producen todas estas operaciones es el sistema de numeración, muy especialmente los números hasta el 100. Las operaciones de suma y resta no son más que desplazamientos en el territorio de los números del 1 al 100, por eso es de especial importancia tener una representación mental completa y ajustada de este tramo numérico.

La multiplicación como pico

La multiplicación como pico se manifiesta tanto en el concepto mismo de la operación como en los cálculos necesarios para llevarla a cabo.

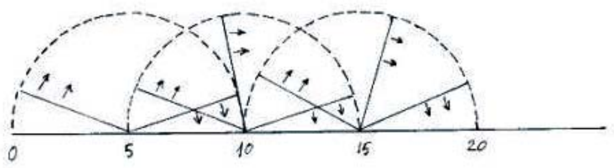
La dificultad del concepto de multiplicación

El concepto de multiplicación es más difícil que el de suma o resta, crear una película mental de la suma o de la resta es relativamente fácil: dos colecciones de objetos que se juntan o se separan, se trata de un solo movimiento mental. Para imaginar la multiplicación se necesitan varias colecciones iguales, o una colección que reiteradamente se repite, se trata pues de varios movimientos. La multiplicación es ya una operación construida sobre otra operación, de ahí su mayor nivel de abstracción y dificultad.

En la multiplicación los números crecen rápidamente y la cantidad de información que se maneja es mayor. Diversos autores (Nesher y Katriel, 1977; Luriya, 1969 y Hart, 1981) han señalado que la comprensión del significado de la multiplicación y la división es considerablemente más difícil que el de la adición y la sustracción. Añadir o quitar son acciones concretas y fáciles de visualizar, "tantas veces" no tiene una referencia activa tan obvia.

La multiplicación como la suma y la resta puede ser representada en la recta numérica mediante las metáforas de la longitud y el movimiento. Los papeles que juegan en la multiplicación los dos números son distintos, el primer número es la longitud del segmento que se considera, el segundo número indica las veces que el primero se lleva sobre la recta numérica. Surge la idea intuitiva de que con la multiplicación se avanza más rápidamente sobre la recta numérica, con el 5 y el 4 se avanza hasta el 20.

La representación de la multiplicación como una suma reiterada, al igual que otras formas de representación, puede adoptar formas idiosincrásicas, un alumno expresaba que visualizaba la multiplicación como un segmento que girando sobre sí mismo avanzaba sobre la recta numérica.

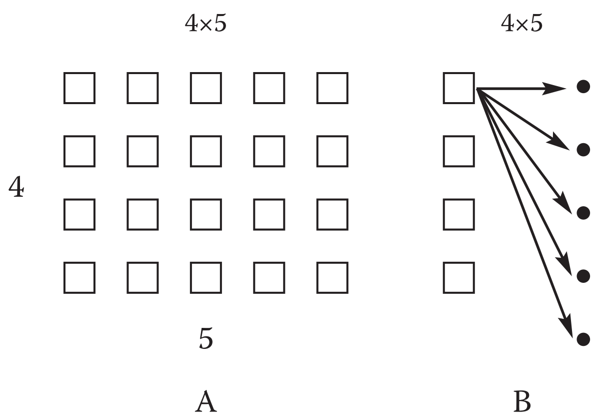


Representación idiosincrásica de la multiplicación

La información conceptual es que se suma cuatro veces la misma cantidad y se manifiesta espacialmente rotando un segmento. Este ejercicio mental necesita de mayor capacidad de representación que el de juntar dos colecciones.

Al hilo de las nuevas situaciones problemáticas que se les van planteando los alumnos van construyendo otras representaciones.

A: ¿Cuántas baldosas hay en una habitación que tiene 5 baldosas a lo largo y cuatro baldosas a lo ancho?
B: ¿De cuántos modos pueden combinarse cuatro pantalones y cinco camisetas?



Representaciones de la multiplicación

En el diagrama A las dos cantidades se colocan al mismo nivel, el modo más abstracto de representación de la operación multiplicación. En él participan numerosos elementos visuales, los elementos están organizados en varias hileras con el mismo número de elementos y por tanto de la misma longitud, columnas paralelas que encajan verticalmente unas sobre otras completando así la figura de un rectángulo.

Aunque ambos diagramas responden a la misma operación, el diagrama B es más fácilmente comprensible por los alumnos, quedan explicitados de manera más clara el tipo de relación que se establece entre los datos: cada pantalón puede combinarse con cada una de las cinco camisetas. Este diagrama o forma de representación de la multiplicación podría considerarse el estándar, en cuanto que es muy utilizado por los profesores y resulta de los más eficaces para ser comprendidos y asimilados por los alumnos.

La dificultad del algoritmo de la multiplicación

El afán de las matemáticas es la búsqueda de regularidades. La regularidad de una suma en que los sumandos son iguales, situación por lo demás bien frecuente en los cálculos cotidianos, puede ser aprovechada para buscar una forma más ágil, rápida y sencilla de buscar el resultado, así surge el algoritmo de la multiplicación.

Cawley et al., (1998), mostraron que sólo el 85% de la población de 14 años desarrolla una buena fluidez con la operación de la suma; el 81% con la resta; el 54% con la multiplicación; y el 54% con la división.

En la suma existen unas combinaciones básicas que es necesario manejar con soltura 8+6; 6+3; 9+5... de igual modo en la operación multiplicación existen unas combinaciones básicas 7×5; 8×9; 4×3; etc, lo que constituyen las tablas de multiplicar, que también es necesario dominar. Ambos tipos de combinaciones se realizan en el tramo del sistema de numeración que va del 1 al 100, sin embargo, existe una diferencia notable entre ellas, las combinaciones básicas de la suma pueden realizarse con ayuda de los dedos elemento a elemento, las de la multiplicación no. Esta imposibilidad de servirse de apoyos concretos y que la multiplicación necesita de una mayor capacidad de representación –los números se hacen más grandes, los desplazamiento en la recta numérica son más largos– son lo que la hacen más difícil.

Todas las combinaciones básicas de las tablas de multiplicar y sus extensiones son aprendizajes que pertenecen a la meseta de la multiplicación. Unas tablas, por ejemplo la del 5, son más sencillas de visualizar y retener que otras, por ejemplo la del 7. Un cálculo que supone un avance en la misma meseta de la multiplicación puede ser por ejemplo 8×7+5, añade una suma a una multiplicación previa lo que supone mayor carga de la memoria de trabajo, si se resuelve la multiplicación de modo automático la suma no debe suponer una dificultad mucho mayor. Los algoritmos tradicionales de la multiplicación y división se resuelven por aplicaciones sucesivas de este tipo de mecanismos en los que un componente esencial es el dominio de las combinaciones básicas multiplicativas. Muchas personas tienen almacenados en la memoria otras combinaciones, como por ejemplo 4 por 15, o 4 por 25 o 5 por 12; pertenecen a su red de conocimiento individual en cálculo mental que puede ser más o menos extensa.

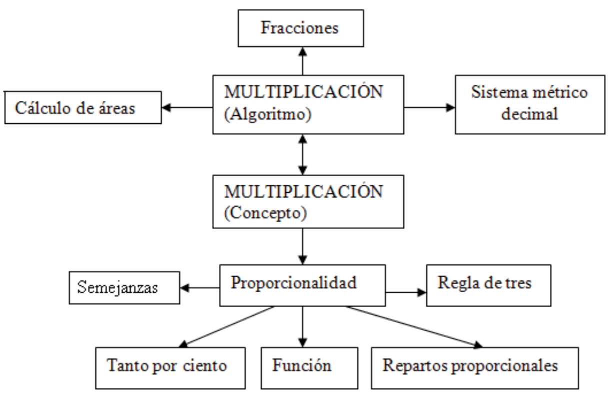
La multiplicación como meseta: contenido básico alrededor del cual se construyen otros contenidos importantes

La mayoría de los profesores coinciden en señalar, que la comprensión del concepto de multiplicación y la automatización de su algoritmo, abren una gran vía de progreso en los alumnos, suponen la culminación del aprendizaje numérico en primaria, y dotan a los alumnos de la competencia necesaria para su progreso en secundaria.

El algoritmo de la multiplicación está omnipresente en numerosos cálculos: cálculo de áreas, fracciones, sistema métrico decimal, problemas en los que están implicadas las operaciones de la multiplicación y división etc. Es una herramienta universal aplicable a multitud de situaciones matemáticas.

En cuanto al concepto de multiplicación muchos de los contenidos posteriores de las matemáticas se basan de una u otra manera en él, el concepto de razón construido sobre esta operación, es nuclear a una gran cantidad de contenidos matemáticos, está subyacente a conceptos tales como proporcionalidad, tanto por ciento, regla de tres, semejanzas, función, que la mayoría de lo que los alumnos deben después aprender. Si por incapacidad del alumno, o por cualquier otro motivo, no se interioriza este aprendizaje, los alumnos ven interrumpidos de forma drástica sus posibilidades de comprensión y asimilación de casi todos estos conceptos y por tanto su fracaso en la asignatura resulta casi asegurado.

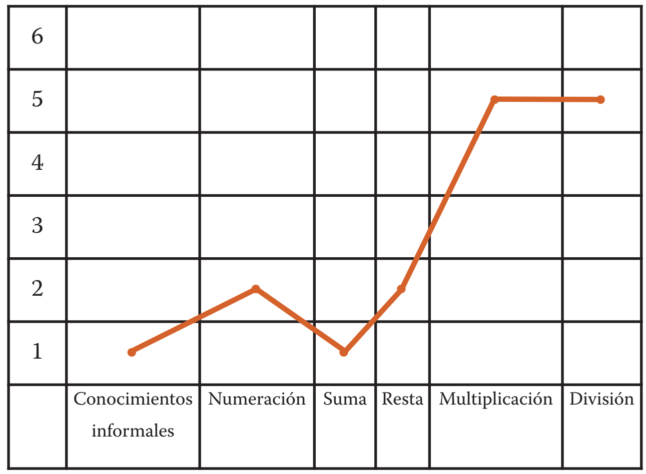
De modo sucinto la meseta de la multiplicación tanto en lo relativo a su algoritmo como a su concepto se extendería por los siguientes contenidos:



Meseta de la multiplicación

Lo que expresan los profesores

Los profesores saben, por su propia experiencia, de aquellos contenidos que suponen un mayor esfuerzo para sus alumnos. Los resultados obtenidos en la entrevista (anexo I) en cuanto a nivel de dificultad quedan resumidos en la siguiente tabla:



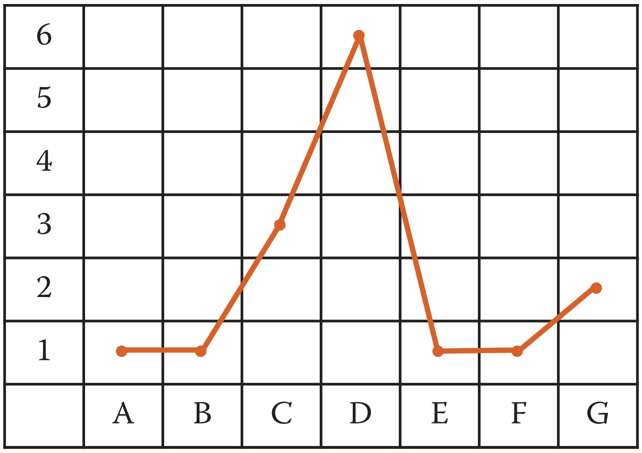
Abcisas: Contenidos de Educación Primaria
Ordenadas: Niveles de dificultad atribuido a esos contenidos

Niveles de dificultad según los profesores

Los conocimientos informales aparecen como aquellos contenidos adquiridos en un ambiente menos estructurados que el escolar, pero importantes porque son fruto de la comprensión y porque preparan al alumno para un buen abordaje del sistema de numeración.

Para los profesores la suma es un poco más fácil que la resta y la multiplicación ligeramente más fácil que la división, pero en niveles diferentes. De la suma y la resta a la multiplicación y división marcan un escalón muy pronunciado. La suma y la resta se sitúan en una meseta común, y la multiplicación y la división, en otra meseta de altitud y dificultad superior.

Aquilatando un poco más los profesores expresan que el escollo mayor para dominar los algoritmos de la multiplicación y división se encuentra en la retención y automatización de las combinaciones que componen las tablas de multiplicar. Consideran que los otros tipos de errores que aparecen son sólo expresiones de descuido que los alumnos suelen superar sin inconveniente mayor, eso sí, una vez que las combinaciones numéricas de las tablas son automatizadas y la memoria de trabajo queda descargada de esa exigencia. Su opinión sobre la frecuencia y relevancia de los tipos de errores más comunes en los alumnos queda reflejada en la siguiente tabla



Errores cometidos por los alumnos

A: Colocar los números en su posición.
B: Errores en las llevadas.
C: Fallos en la suma y la resta que participan en la multiplicación y división.
D: Errores en las tablas multiplicar.
E: Omitir ceros en el cociente.
F: Dejar restos intermedios mayores que el divisor.
G: Saber qué número cabe.

Una observación importante extraída de la práctica es que los alumnos que fallan en los algoritmos de la multiplicación o división, cuando se les permite abordarlos con plantillas con las tablas de multiplicar a la vista, apenas cometen errores y los realizan correctamente. Estos datos coinciden con los aportados por Buswel y John (1926) en un estudio acerca de los métodos de trabajo de los escolares de 3º a 6º grado en el que muestran que el error más frecuente y el obstáculo cognitivo más importante es la falta de conocimiento sobre las combinaciones de las tablas de multiplicar.

Lo que saben los alumnos

Con el objetivo de indagar sobre la dificultad expresada en la automatización de las combinaciones básicas en el aprendizaje numérico en Educación Primaria, se ha elaborado una prueba de cálculo mental (anexo II) que consta de ejercicios con las operaciones básicas, graduadas en cuatro niveles de dificultad.

Nivel de dificultad I: sumas dentro de la misma decena 2+3=; 4+4=; 23+5=; Los niños pequeños más aventajados las captan rápidamente de un sólo golpe de vista, la mayoría de los alumnos de 2º y 3º curso de primaria las suelen dominar con facilidad. Dentro de este nivel –como en los otros– hay unas sumas sencillas que otras, bien por simetría 3+3 =; o porque encajan de modo perfecto en la decena 6+4=; lo que facilita su visualización.

Nivel de dificultad II: sumas del tipo 8+7=; 9+5=. El salto de la decena y el tener que utilizar números más grandes ya supone un nivel de dificultad añadido. Para realizarlas con soltura es necesario aplicar una habilidad fundamental que es la capacidad de segmentación, que supone partir los números y agrupar las partes de forma sabia. Es básico el conocimiento de las decenas.

Nivel de dificultad III: sumas en las que hay que sumar decenas y unidades 19+19 =; 14+17=; supone un mayor grado de dificultad, los apoyos concretos con los dedos si se aplican al número completo no sirven –no hay suficientes dedos– y es más difícil abarcar los números mentalmente. Las decenas deben ser agrupadas por un lado y las unidades por el otro. Se hace ineludible la capacidad de partir los números en decenas y unidades.

Nivel de dificultad IV: son ítems que evalúan el aprendizaje de las tablas de multiplicar 9x8 =; 6x7 =; suponen menos referencias visuales y manipulativas, mayor nivel de abstracción y por lo tanto mayor nivel de dificultad.

En los criterios de corrección (anexo III) se tienen en cuenta los errores cometidos y necesariamente también el tiempo empleado. Con tiempo suficiente y los métodos que se quiera –conteo con los dedos– cualquier alumno podría finalizar la prueba correctamente.

Datos cuantitativos extraídos de la aplicación de la prueba de cálculo mental (anexo II)

Los resultados son que de 91 alumnos de tercer ciclo de Educación Primaria de tres colegios de ámbito rural a los que se les pasó la prueba, 67 mostraron tener perfectamente automatizadas las combinaciones básicas de las tablas de multiplicar y por añadido el algoritmo de la multiplicación, 15 dejaban ver algunas lagunas que con un mayor entrenamiento podían ser superadas y 9 manifestaban tener dificultades serias en la automatización y aprendizaje de las tablas de multiplicar.

Datos cualitativos

El nivel I se corresponde con las combinaciones básicas más sencillas, las más fáciles de aprehender y memorizar y que por tanto su respuesta es inmediata en un grupo importante de alumnos.

En el nivel II al tener que saltar de decena y que los números sean más grandes hace que aparezcan más errores y que el tiempo de respuesta aumente. Los alumnos que resuelven bien este apartado se desenvuelven bien en los algoritmos tradicionales de la suma y de la resta, en ambas operaciones deben manejarse mentalmente números menores que 20.

El nivel III de la prueba exige respecto del nivel II el uso de estrategias apropiadas de cálculo mental, agrupar las decenas por un lado y las unidades por otro, para poder resolver sus ítems. En sumas del tipo 12+17 es muy frecuente que los alumnos se inclinen por aplicar mentalmente el algoritmo de cálculo del mismo modo que si pudieran utilizar lápiz y papel. Es decir, apenas intentan utilizar otras estrategias más flexibles. A algunos incluso se les observa un intento de escribir con los dedos sobre la mesa los resultados de las operaciones mentales para poder retenerlas. Ello es indicativo de que en las aulas se enseñan los algoritmos de cálculo repetidamente de forma tradicional, lo que supone un empobrecimiento para los alumnos, con la consecuencia de que muy pocos se inclinan por utilizar estrategias variadas que les haga más fácil el cálculo mental de la operación.

De los alumnos a los que se les pasó la prueba los que manifestaron dificultades en el nivel II también las manifestaron en el nivel IV. Ambos apartados, II y IV, deben de mantener algún tipo de relación clara, porque los alumnos que fracasan en uno de ellos también lo hacen en el otro. Es decir, que quienes no realizan las sumas con soltura tampoco aprenden con facilidad las tablas de multiplicar.

La experiencia de aplicación de la prueba muestra que la evaluación del nivel II de dificultad es fundamental, importante no es tanto si el alumno lo ha resuelto sino más aún saber cómo lo ha resuelto; si se ha servido de los dedos para realizar las sumas –lo que indica que necesita de apoyos concretos– la velocidad o soltura con que las lleva a cabo, en definitiva, el grado de automatización que ha conseguido. La deficiencia más frecuente es el contar paso a paso al hacer la operación, con algunos alumnos es difícil percibir que están contando, lo hacen casi a escondidas, con los labios, los dedos de las manos bajo su mesa, o incluso mentalmente.

Todavía en 6º curso de primaria, para determinados alumnos, el sumar a grupos con soltura es una actividad compleja, algunos de ellos suman elemento a elemento, lo que significa situarse en los primeros estadios del aprendizaje del sistema de numeración. Son incapaces de aprehender la estructura de grupo de elementos, que proporciona una estrategia mucho más flexible, la capacidad de agrupar de una forma sabia según convenga a la situación. No tienen una visión integrada del número como una totalidad que a su vez consta de una serie de elementos, tratar el número siete como una unidad que a su vez consta de siete elementos, el número ocho como una unidad que consta de ocho elementos es una habilidad que se les escapa. Su conocimiento del sistema de numeración es muy reducido y carecen de muchas unidades de información sobre el mismo que les permitiría actuar de forma más flexible.

Se observa en la prueba que algunos alumnos con dificultades conocen mejor las combinaciones más pequeñas porque son más fácilmente abarcables mentalmente o porque se han utilizado con mayor asiduidad y por tanto las han aprendido de memoria, pero realmente no las sacan provecho porque no son capaces de generalizarlas a otros tramos de la recta numérica. Por ejemplo pueden contestar que 5+3 son ocho pero no son capaces de contestar con rapidez que 25+3 son 28.

Los alumnos que resuelven con facilidad la prueba se apoyan en los números nudo (decenas) para realizar un cálculo más rápido. Esta estrategia, presente en sus verbalizaciones, es de extraordinaria importancia. Se basa en una de las virtualidades que posee el sistema de numeración, que un fragmento de la recta numérica, la decena, se repite con regularidad a lo largo de la recta numérica. Todo se reduce a operar dentro de una decena (apartado I de la prueba) o saltar de una decena a otra (apartado II de la prueba). Si por ejemplo se hace la suma 52+3 se está dentro de la misma decena, sería una generalización de 2+3; en la suma 57+8 lo que se hace es saltar de una decena a la siguiente, con 3 llegar hasta 60 y con las 5 restantes hasta 65. Los números nudos (10, 20, 30, etc.) juegan un papel fundamental en esta representación, a partir de ellos utilizados como hitos o mojones en el camino se pueden realizar los cálculos y situar los demás números.

Del modo de proceder de los alumnos en los ítems de la prueba de cálculo mental (anexo II) se desprende que las estrategias de conteo, el saber desplazarse en la serie numérica, juegan un papel destacado, aquellos alumnos que las realizan adecuadamente pueden aprender con rapidez las tablas de multiplicar. Para construir la tabla del 7 se va sumando de 7 en 7, pero si esta suma se realiza uno a uno significa que los alumnos no visualizan la serie numérica, su conocimiento es demasiado particular, no manejan tramos más amplios de ella, no se representan aspectos generales y fallan al tratar de retenerlas. Como se ha señalado, para sumar 56+7 primero debe sumarse 4 e ir hasta el número nudo que es 60 y después añadir 3 y obtener el resultado 63. Esta estrategia de suma a trozos o saltos es fundamental para manejarse en la serie numérica, que a su vez es imprescindible para retener el contenido de la tabla de multiplicar. Esto explicaría la relación que aparece entre los apartados II y IV de la prueba.

Los alumnos que resuelven con rapidez y eficacia la prueba se valen de estrategias tales como:

- Contar a saltos y no contar paso a paso.
- Apoyarse para las sumas en los números nudos.
- Partir un número y utilizar los trozos con los que se puede operar más fácilmente. Por ejemplo 12+16 se puede hacer como 10+10 más 8.
- Utilizar estrategias variadas. Por ejemplo 15+17 se puede hacer como el doble de 15 y añadir 2 al resultado.
- Manejan muchos ítems de información sobre el sistema de numeración, saben por ejemplo que 7 puede des-

componerse como 5 + 2 o 4 + 3 o 6 + 1; que de 25 a 30 hay la misma distancia que de 35 a 40; que para hacer 38 + 7 pueden servirse de la suma 8 + 7 etc.

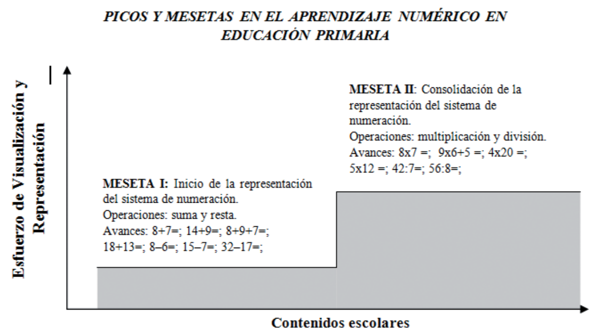
Los alumnos que fallan en la realización de la prueba no es un grupo muy numeroso, (9 de 91 alumnos) pero con un gran significado, porque constituyen el grueso de lo que podría denominarse fracaso escolar en base a causas cognitivas. Son alumnos que no han sabido manejarse con soltura en los apartados II y III de la prueba del cálculo mental y no contestan o cometen errores en el apartado IV.

Las causas se encuentran en la incapacidad para formarse una representación eficaz de los contenidos numéricos.

- Suman elemento a elemento, ayudándose en la mayoría de las ocasiones de los dedos de las manos. Se muestran incapaces de desprenderse de este asidero concreto.
- Falta de capacidad de representación, no son capaces de visualizar tramos más amplios de la recta numérica, dan la sensación de encontrarse perdidos de tener que caminar a tientas, apoyándose en ayudas.
- No se apoyan en las decenas y números nudo para realizar un cálculo más flexible.
- No son capaces de automatizar la suma a saltos. Consecuencia de ello es que a pesar de sus esfuerzos tienen muchas dificultades para memorizar las tablas de multiplicar.
- No conocen con soltura las combinaciones numéricas más usuales.
- Dificultades para generalizar, si de 2 a 10 hay 8, desde 32 hasta cuarenta también debe haber 8.
- Dificultades para realizar inferencias a partir de los conocimientos que se poseen: por ejemplo si un número termina en cinco hasta la decena siguiente hay cinco y apoyándose en ese conocimiento saber rápidamente que de 34 hasta 40 hay 6.
- Les cuesta descomponer un número de diversas formas.
- No utilizan con flexibilidad las estrategias de análisis y síntesis pasando de una modalidad a otra.
- Apenas se sirven de las propiedades de los números, doblar un número, utilizar los ceros, realizar la resta como suma, la división como multiplicación, la propiedad distributiva etc.
- Pueden manifestar dificultades espaciales, en ocasiones confundir la posición de los dígitos en un número, 91 con 19, realizar alguna escritura de números con la direccionalidad equivocada, comenzar el cálculo con lápiz y papel de una suma o resta por la izquierda, realizar una suma en vez de una resta y viceversa.

Para que se produzca la memorización de las combinaciones básicas de la multiplicación, por ejemplo 6×3 = 18 hace falta que la operación y el resultado estén de forma simultánea en la memoria de trabajo. Como la memoria de trabajo de los alumnos con dificultades es de menor capacidad, y como utilizan con preferencia procedimientos algorítmicos más lentos (la estrategia sumar o contar todo, la estrategia de sumar elemento a elemento), es posible que hayan olvidado uno de los dos sumandos cuando alcanzan el resultado. En este caso, al no estar todos los números de la combinación a la vez en la memoria de trabajo tienen menos posibilidades de ser almacenados y posteriormente recuperados.

Cuando las operaciones aritméticas se transforman con relativa facilidad cualquier cálculo matemático adquiere un sentido más atractivo, semejante al de un juego de números y ello puede derivar en una actitud positiva hacia las matemáticas. Pero cuando esto no es posible los cálculos más sencillos pueden convertirse en una tarea excesivamente ardua y árida.



Picos y mesetas

La situación es que algunos alumnos quedan retenidos en la meseta primera de la suma y la resta, sin un dominio y automatización de los cálculos de la meseta de la multiplicación, lo que les imposibilita el acceso a contenidos básicos para un posterior desarrollo matemático e incluso personal de desenvolvimiento en la vida corriente.

Indicaciones para la enseñanza: la naturaleza espacial y visual de los cálculos numéricos

La multiplicación ocupa un lugar crucial dentro de los contenidos matemáticos, pero para poder multiplicar es necesario aprender las tablas. Bastantes alumnos tienen dificultades para memorizarlas. Esta incapacidad es debida a que no son capaces de elaborar una representación mental adecuada que les permita visualizarlas y situarlas en la recta numérica. Cuando lo que pretenden es aprenderlas de memoria, sin haberlas construido mentalmente, fallan en su propósito.

En el aprendizaje de las tablas de multiplicar se observa que la práctica repetitiva por si misma no asegura el dominio de las combinaciones básicas numéricas, hasta que no se “hace la luz” de manera significativa en la mente del alumno, no se consiguen progresos. Memorizar hechos que no se comprenden, aparentemente aislados, constituye una tarea dura y por ello muchos alumnos abandonan estos aprendizajes.

Todos los algoritmos y operaciones, la mayoría de los conceptos que se trabajan en la etapa de primaria, máximo común divisor, mínimo común múltiplo etc. tienen como teatro de operaciones la serie numérica. Es muy conveniente representarla, bien dibujada sobre el suelo o construida con un modelo de madera, en la que estén marcados los números. Para crear una representación mental es necesario promover actividades de exploración y desplazamiento espacial a través de las serie de los números, situarse en referencia a los hitos o mojones, los números nudo, para a la hora de calcular, poder apoyarse en ellos. Conocer bien el terreno es básico para poder desplazarse bien a través de él. El uso de preguntas sobre la serie numérica contribuye a rellenar los huecos de una representación incompleta ¿Se va más lejos con la tabla del 3 o con la tabla del 7? ¿Cuántos pasos hay de 56 a 60? ¿Si de 35 a 40 hay cinco pasos, cuántos hay de 35 a 43? ¿Cuál es la decena que sigue a 62? Y a través de las verbalizaciones conocer los procesos de pensamiento de los alumnos. El uso del cálculo mental y de los procedimientos informales, aunque puede que menos rápidos y eficaces que los algoritmos tradicionales, tienen las ventajas de que son creados por los propios alumnos, y están siempre basados en la comprensión de quien los lleva a cabo.

Además de la recta numérica, disposiciones espaciales numéricas como la siguiente favorecen los aprendizajes:

7×1= 7	**7×4=28**	**7×7=49**
7×2=14	**7×5=35**	**7×8=56**
7×3=21	**7×6=42**	**7×9=63**

Disposición espacial de la tabla del 7

Esto se justifica teniendo presente las posibilidades de la visualización como favorecedora de la memoria. Del mismo modo que las diferentes partes de un discurso para ser mejor recordadas pueden situarse mentalmente en un espacio físico conocido, por ejemplo las estancia de una casa, en las tablas de multiplicar, dividiendo el espacio en fragmentos, es más sencillo organizar los contenidos y localizar la respuesta.

La tabla del siete puede ser considerada una de las más difíciles, dentro de ella unas combinaciones, las más fáciles de retener, pueden ser aprendidas antes y servir de apoyo para retener las demás. Por ejemplo, 7 por 5 en la segunda columna puede ayudar a memorizar 7 por 4 y 7 por 6. En la tercera columna 7 por 7 puede ayudar a memorizar 7 por 8 y 7 por 9. Existen diferentes propuestas sobre el orden en que las tablas de multiplicar deben ser aprendidas (Maza, 1991), primero las más sencillas y las que funcionalmente desempeñen un papel importante. Una tabla es más sencilla cuanto más fácil es de visualizar la secuencia de los números que la componen. Puede comenzarse por la tabla de 10 que marca las decenas, seguida de la del 5 que parte justamente las decenas por la mitad y por ello es fácil de visualizar, seguidas de las del 2, 4, 3, 6, 8, 9 y 7. Este orden no debe ser rígido, ni es bueno quedar detenido en una tabla porque ésta no se retiene. Deben ser trabajadas en conjunto y sobre la base de un buen conocimiento del sistema de numeración, particularmente de los números del 1 hasta el 100. Las combinaciones que se sitúan antes del 50 son más fácilmente retenidas que las que se sitúan del 50 hasta el 100 porque ese primer tramo de la recta numérica es más conocido y familiar. Pueden relacionarse unas tablas con otras en base a las combinaciones básicas que comparten, 12 es 2 por 6 y también 4 por 3.

Algunas actividades tipo

Es posible y deseable una enseñanza basada en la selección por parte de los profesores de aquellas actividades que su práctica profesional diaria ha demostrado son más valiosas para el desarrollo de los alumnos. Actividades abiertas que puedan ser resueltas por diferentes caminos, que permitan diferentes niveles de dificultad y con impacto cognitivo sobre los esquemas de los alumnos.

Se trata de que los alumnos practiquen en la composición y descomposición de números en situaciones interesantes para ellos, partiendo de los conocimientos que ellos mismos pueden descubrir u observar, como fragmentación de un número, relaciones entre las operaciones, propiedades etc. No se trata de introducirlos de inmediato en los algoritmos tradicionales de la multiplicación y de la división, más bien que mediante la experimentación con cantidades, en solitario o pequeños grupos, puedan reflexionar y construir un conjunto amplio de experiencias que les haga posible el desarrollo y aplicación de un cálculo rico y flexible.

1. Con treses y cincos tengo que llegar a 180.

2. Construir en madera un modelo físico de la recta numérica y aprender a desplazarse a través de él.

3. Construir sobre el suelo mediante cintas adhesivas de colores un modelo de la recta numérica.

4. Con cincos y ochos ¿puedes ir de 87 a 149?

5. Números diana. Con los números 9, 8 y 5 conseguir el número 143 (con sólo cambiar los números y las opera-

ciones esta actividad puede realizarse de muy diferentes formas).

6. Los sellos: Si tenemos muchos sellos de 3 céntimos y 5 céntimos. ¿Se pueden conseguir hacer todos los valores hasta 50 céntimos?

7. Ajustar armarios de 5 y 7 dm en habitaciones de diferente longitud.

8. Realizar sumas mentalmente
   a) 3+6+8+9+5+4++3+2+8 =
   b) 7+4+5+8+9+1+4+5+6 =

9. Multiplicaciones y divisiones: 3×12 =; 4×15 =; 5×60 =; 3×45 =; 148:7 =; 225:25 =; etc.

10. ¿Cuántos balones de a 12 euros pueden comprarse con un billete de 50 euros.

11. Un mecánico debe colocar 100 tornillos en cajas de 15 tornillos cada una ¿Cuántas cajas necesita?

12. Imagina 120 ¿Cómo lo ves? Sobre el 120 que tenías imaginado, imagina ahora 75. ¿Cuánto hay de de 75 a 120? Explica como lo has hecho.

Conclusión

Los números, el sistema de numeración, constituyen un verdadero lenguaje, el lenguaje para calcular y operar, el lenguaje matemático por excelencia. Cualquier lenguaje debe ser no sólo aprendido, sino automatizado, lo que quiere decir que debe poder utilizarse con mucha facilidad y rapidez, sin aparente esfuerzo y con poco costo cognitivo, sin apenas ocupar espacio de la memoria de trabajo. La retención de las tablas de multiplicar es un punto de especial dificultad. Cuando se realiza una multiplicación o una división, si se tiene que comenzar a pensar cuánto son 9 más 6 u 8 por 9, por poner un ejemplo, se escapa el sentido general de lo que se está haciendo, se alarga la actividad en tiempo y consumo de energías, haciendo inviable la solución y las posibilidades de progreso del alumno.

Volviendo a la frase del inicio de mi maestro D. José Guerra, decía yo al principio que presumiblemente no debía haber leído a Piaget, ciertamente esta es una afirmación gratuita, porque yo no lo sé. Sólo, que su propuesta de picos y mesetas es más visual que la de Piaget. Quizás es posible que entonces hubiera menos pedagogismo que a veces cuesta sacarle utilidad, y sí había muchos maestros intuitivos, con un buen conocimiento de la estructura de la materia que enseñaban, y con un gran ascendiente sobre la conducta de sus alumnos. Que sirva este modesto artículo de pequeño homenaje a D. José Guerra, a las muchas cosas que nos enseñó, y por las que hoy le estamos agradecidos. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Buswell, G. T., & John, L. (1926). Diagnostic studies in arithmetic. *Supplementary Educational Monographs, 30*, pp. 138-140.

Fernández Bravo, J. A. (1994). ¿Es la multiplicación una suma de sumandos iguales*? Comunidad Educativa*. Mayo, 215, pp. 36-42.

Hart, K. M. (Ed.)(1981). *Children´s Understanding of Mathematics. 11-16* . London: John Murray.

Luriya, A. R. (1969). On the Pathology of Computational Operations. En J. Kilpatrick y I. Wirszup (Eds) *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics, vol I*, Stanford. California: School Mathematics Study Group.

Maza Gómez, C. (1991). *Enseñanza de la multiplicación y la división.* Madrid: Síntesis.

Nesher, P. & Katriel T. (1977). A Semantic Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in Arithmetic. *Educational Studies in Mathematics* 8, pp.251-270

Este artículo fue recibido en SUMA en diciembre de 2009 y aceptado en diciembre de 2010

Anexo I

CURSO EN EL QUE IMPARTE SUS CLASES _______
1. Señalar con una cruz el nivel de dificultad asignado a cada uno de los siguientes contenidos de matemáticas:

CONTENIDOS	NIVEL DE DIFICULTAD					
	1	2	3	4	5	6
Conocimientos informales						
Sistema de numeración						
Algoritmo de la Suma						
Algoritmo de la Resta						
Algoritmo de la Multiplicación (aprendizaje de las tablas de multiplicar)						
División						

2. ¿Qué contenidos dentro de los que se imparten en la Educación Primaria en el área de Matemáticas considera son más trascendentales para un alumno que pueda progresar sin dificultad en cursos posteriores? Señale dos.

3. ¿Dónde se encuentran los cuellos de botella, es decir aquellos contenidos que son importantes pero que por su especial dificultad impiden el progreso del alumno? Señale alguno.

Anexo II

I) 3 + 2 =	**15 +7 =**	**3 × 9 =**
5 + 5 =	**24 + 7 =**	**4 × 7 =**
5 + 4 =	**36 + 8 =**	**6 × 9 =**
11 + 8 =	**77 + 6 =**	**9 × 8 =**
12 + 7 =	**43 + 8 =**	**6 × 3 =**
26 + 4 =	**84 + 9 =**	**6 × 8 =**
25 + 3 =	**17 + 8 =**	**7 × 4 =**
42 +6 =	**68 + 9 =**	**8 × 5 =**
II) 8 + 5 =	**59 + 6 =**	**7 × 9 =**
9 + 2 =	**III) 18 + 15 =**	**8 × 7 =**
6 + 5 =	**19 + 19 =**	**9 x 5 =**
8 + 3 =	**20 +16 =**	**9 × 6 =**
7 + 4 =	**4 +9 +3 =**	**7 × 6 =**
7 + 7 =	**5 + 9 + 2 + 7 =**	**5 x 7 + 9 =**
9 + 9 =	**8 +7 + 9 + 6 =**	**9 × 4 + 7 =**
8 + 6 =	**IV) 5 × 2 =**	**7 × 8 + 5 =**
8 + 9 =	**5 × 5 =**	**6 · 7 + 3 =**
8 + 7 =	**2 × 6 =**	**5 × 12 =**
12+9	**4 × 3 =**	**4 × 15 =**

Anexo III

NORMAS DE APLICACIÓN Y CORRECCIÓN

Información a los alumnos:

Haz las siguientes sumas mentalmente (de cabeza), sin escribir otra vez los números, pon sólo el resultado a la derecha. Concentraros en hacer la prueba y tratar de hacerlo en el menor tiempo posible.

Orientaciones para los profesores:

La prueba pretende medir el grado de automatización del lenguaje matemático en los alumnos.

Puede pasarse tanto de forma individual como colectiva, pasarla de modo colectivo para los alumnos que obtienen buenas puntuaciones en matemáticas y de modo individual para los alumnos con dificultades.

En la aplicación individual, tanto como evaluar si el alumno lo hace o no lo hace bien se trata de evaluar cómo lo hace, si cuenta elemento a elemento, si se apoya o no en la decena.

Es fundamental observar si se suma con los dedos, porque es el indicador de la necesidad de apoyo concreto y de dificultades en la capacidad de representación.

Permite saber también qué tipo de combinaciones básicas domina.

Para obtener una puntuación debe tenerse presenta el número de aciertos y el tiempo empleado, la ponderación de ambos dará el grado de automatización del lenguaje matemático.

ALUMNO_____________________________CURSO_________

Nº ACIERTOS______TIEMPO EMPLEADO________________

¿En qué apartado de la prueba se sitúan preferentemente los fallos?

¿Cuenta con los dedos, bien a las claras?

¿Cuenta con los dedos de modo encubierto, en alguna parte de la prueba?

OTRAS OBSERVACIONES: