

La rueda de la fortuna

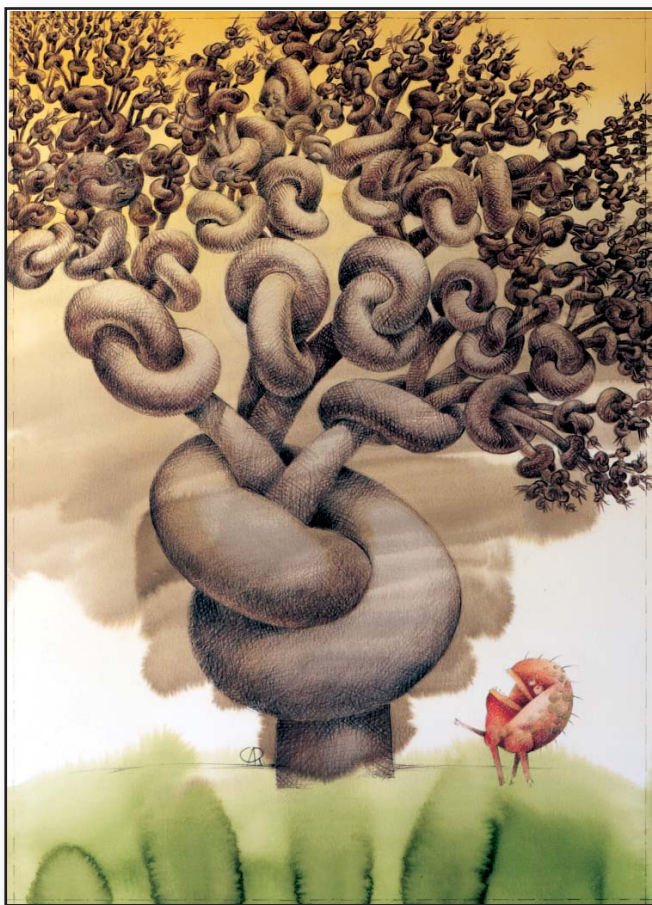


A Eliseo Borrás in memoriam

Hoy me he levantado triste, pero tu recuerdo me ha conducido a la orilla de la playa, donde dábamos vueltas en el kayak, cual noria horizontal, por delante del viejo faro. Y donde arribé a tierra, por la mañana, con tal suavidad inesperada que esa misma tarde, el exceso de confianza y el rompedor, nos dieron un buen revolcón a mí y a la piragua. Hoy la mar estaba algo agitada, he jugado con las olas, he recordado los buenos ratos pasados buscando un algoritmo fractal para la espuma. He recordado a Alfonsina Storni. Amparo la está ilustrando. Hoy la llamaré.

Supiste jugar tu partida, disfrutar como un niño, reír sin límite
Foto: Alejandro Ruiz

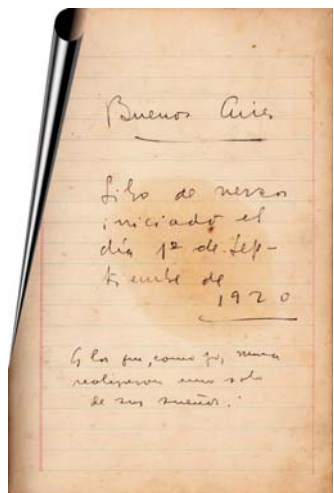
Xaro Nomdedeu Moreno
*Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat
Valenciana "Al-Khwarizmi"*
ariadna@revistasuma.es



Un paseo por el infinito. Ilustración: Javier Carvajal

A ti te llamamos todos, somos ese desamparado piojo que te necesita para deshacer tanto nudo, tanto problema, cada vez más sofisticado, más especializado, tanto que en cada rama del infinito, se sabe casi todo de casi nada. ¡Qué bien lo has ilustrado, Javier!

Alfonsina no pudo satisfacer ni uno sólo de sus sueños



Alfonsina Storni

Tú los cumpliste casi todos y fuiste la llave de la fortuna para muchos de los nuestros.



Tiké, dios fortuna, llave en el Templo de Adriano en Éfeso.
Fotografía: Soldbaken

No queremos estar tristes, tú nos habrías amonestado jocosamente con un “no seáis carcas”, queremos jugar contigo de nuevo.

*¡Oh Fortuna!,
de condición variable,
como la luna
dice al comienzo
el Carmina Burana
Nuestra fue la fortuna,
pues Eliseo nos dió:
¡sus estelas en la mar!
Qué gran suerte la nuestra
conocerle,
disfrutar de su amistad,
trabajar con él,
aprender siempre y
reír, reír, reír,
reír permanentemente
era inevitable.
Su luminosa sonrisa contagiaba,
su optimismo arrastraba,
su generosidad abrumaba.
Siempre será nuestro espejo
en el que buscar esa chispa,
ese instante mágico,
que nos hacía más humanos,
más felices.
Su maravillosa luz nos acompañará siempre*

Sí le quedaron sueños por realizar: una jubilación larga y placentera junto a Patro, jugar con Carlota y Mar, que estaba en camino, disfrutar un poco más de sus hijos y ver recogidos, ordenados y publicados unos materiales que han sido olvidados antes de que dieran el generoso fruto que anunciaban.

Humildemente intentaremos remediar, en la medida de nuestras fuerzas y de la colaboración que encontremos, éste último sueño suyo, ya antiguo.

Luego, cada cual dirigió esa mirada a rincones diferentes de la realidad: la cotidiana, la social, la natural... Eliseo, uno de los centros de gravedad del Grupo Cero, siguió impertérrito poniendo todas las herramientas al servicio del juego, que es la realidad más próxima a niños y niñas, así como adolescentes de todo tipo. Juego simulador de otras realidades y facilitador de aprendizajes más abstractos, prácticamente imposibles sin aproximaciones más amables. Aquella revolución tuvo un lugar y un detonante, también todos los grupos convienen en ello.



Última fotografía de Eliseo con Carlota
Fotografía: Pilar Moreno

Basta leer el reciente monográfico de la revista UNO de GRAÓ, para comprender que Eliseo era un engranaje esencial de la rueda en la que gira todo intento de renovación pedagógica en el campo de las matemáticas en nuestro país.

Los grupos y sociedades de toda España mencionan al Grupo Cero de Valencia como el catalizador, si no el iniciador de aquella revolución dichosa que nos abrió los ojos a un hacer en la clase de matemáticas desde otra mirada.

El lugar *L'Escola d'Estiu* organizada por el colectivo Rosa Sensat

El detonante un artículo manifiesto, escrito en 1975, firmado por quienes componían el grupo entonces, destinado a inducir la reflexión sobre la necesidad de cambio en las aulas de matemáticas.

Dada la dificultad de encontrarlo transcribimos aquí algunos párrafos, por su importancia histórica y por su rabiosa actualidad.

- *Tanto los profesores como los estudiantes sufrimos la contradicción existente entre las matemáticas como centro de interés científico y las matemáticas como instrumento de selección social.*
- *No se trata de dar a conocer una colección de teoremas más o menos ingeniosos, ni de “enseñar a pensar” o “desarrollar la claridad del espíritu y el rigor del juicio”, sino:*
 - *Dar una información específica real y no ficticia sobre el mundo y la sociedad en la que el estudiante y el profesor viven.*
 - *Elaborar un modelo matemático para entender esa realidad.*
 - *Utilizar el modelo para actuar y buscar soluciones que los alumnos puedan colectivamente dar a conocer a su medio.*
- *El proyecto idealista típico es reducir las matemáticas a un texto riguroso, sus reglas a las de un lenguaje. El proyecto materialista es tratar de determinar lo que las matemáticas hacen conocer y cómo lo hacen conocer. (Raymond: “Le passage au materialisme”).*
- *La enseñanza actual es, en las aulas tradicionales, una enseñanza de clase destinada a reproducir la división social.*
- *El papel receptivo que generalmente el profesor asigna al alumno, en dicho modelo de enseñanza, genera inevitablemente aburrimiento, “forma suprema de represión intelectual”.*
- *La construcción científica de un fragmento dado de conocimiento matemático, no puede y no debe ser totalmente identificada con su construcción pedagógica.*
- *Hay un permanente peligro de hacer creer al estudiante que sólo las demostraciones plenamente rigurosas de las matemáticas son racionales; y que fuera de las matemáticas no hay racionalidad: que no hay opciones racionales en la gestión de una empresa, o en la adhesión a un partido político, o en la decisión de socializar la medicina, por ejemplo.*
- *Para nosotros es un hecho cotidiano, y para los rectores de la enseñanza una consigna, la gran presión existente para enseñar más matemáticas a los estudiantes, a una edad cada vez más temprana, debido al rápido crecimiento de*

las aplicaciones de las matemáticas.

- *Los profesores de matemáticas somos, en general, en este país, aliados objetivos de la clase dominante¹.*

Como es natural, esta criba que suponen las matemáticas, afecta más a las clases desfavorecidas y es buen caldo de cultivo del anumerismo que abona las creencias pseudocientíficas, tan en boga, tan mediáticas.

El documento expresaba no sólo la crítica al sistema educativo que intentaba una reforma pero andaba bastante despistado, sino también una rigurosa crítica a la autocomplacencia que en el profesorado había producido el período llamado “de la enseñanza de las Matemáticas Modernas”, que no de la enseñanza moderna de las Matemáticas. Éste último era el objetivo que afloraba en el manifiesto.

El proyecto que surgió de aquel deseo de cambio, ha quedado archivado sin alcanzar la fase de ejecución, los “fracasos” escolares detectados por “entes” internacionales descansan sobre esa ausencia, no sobre su realización, que todavía espera.

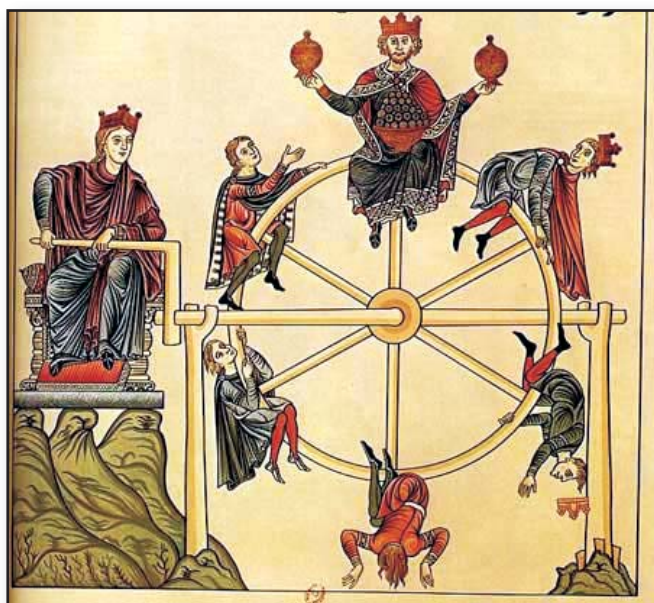
En el reciente monográfico de la revista UNO, escribe Eliseo su último artículo y manifiesta la pena que siente por ese proyecto silenciado, a la vez que utilizado como arma arrojada por quienes medran en las oscuras aguas del inmovilismo.

Él que, como un Sócrates redivivo, cual noria colosal, facilitaba el ascenso ligero, desde las aguas profundas de la ignorancia.

No importaba que se tratara de las aguas geométricas, o de las funcionales, muchas veces estadísticas. La suerte y los juegos de azar hicieron sus delicias y las nuestras. Su destreza fue excelente con las nuevas tecnologías, que utilizó bien temprano y de ellas anunció vicios y virtudes.



Fotografía: Herald de Lansberg



Ascenso, triunfo, decadencia, pérdida y vuelta a rodar.
 Imaginamos tus carcajadas ante la trascendencia de la ilustración
 y las cómicas posturas de sus personajes
 Frederik Questier and Yanna Van Wesemael

Eliseo y su rueda de la vida

Eliseo Borrás Veses nació en Castellón, donde vivió su infancia y adolescencia. Estudió primaria y bachillerato en esta ciudad, hizo el curso selectivo de ciencias en Valencia y luego marchó a Madrid, a estudiar Física con Ramón Lapiedra, que luego ha sido Rector de la Universitat de Valencia. Acabada la licenciatura en Madrid, en 1963, ambos marcharon a París a ampliar sus estudios de Física Teórica. Allí se encontraron con Antonio Montes, actualmente profesor de Matemáticas en la Universidad Politécnica de Cataluña. La amistad con ellos ha durado toda la vida, y para ellos Eliseo ha sido siempre el punto de apoyo y pilar fundamental en sus vidas. Ambos coinciden en reconocer que Eliseo era un alumno brillante además de la persona más maravillosa que se puede imaginar.

En Le Hall Aux Vins, actual Jussieux, obtuvieron el Diploma d'Études Approfondies en Física Teórica Atómica y Nuclear que les habilitaba para realizar el doctorado.

En el 65 marcharon a Orsay, con becas del Gobierno de España y del Gobierno francés, éstas últimas facilitadas por el Instituto Francés, a través del señor Colin, agregado cultural de la Embajada de España en París, y, que puso a Eliseo en contacto con su director de tesis, el profesor Lurçat y con muchos otros físicos y matemáticos como Louis Michel, director del IHES de Bures sur Yvette.

Eliseo comenzó sus trabajos de investigación sobre Mecánica Cuántica, en concreto sobre el *spin nuclear*, tema de su tesis doctoral. Indudablemente, aquella investigación marcó su pasión por la probabilidad, la modelización matemática y la geometría, que permanecieron y crecieron a lo largo de toda su trayectoria profesional. Fueron tiempos no sólo dedicados al estudio de la Física, sino también al forjado de su personalidad culta, bohemia, curiosa y creativa, y a la consolidación de relaciones de amistad inquebrantables. También fue el tiempo en que maduró su amor por Patro, que ahora no entiende la vida sin él.

Tras Orsay, obtuvo una propuesta de investigación en Marsella, a la que renunció. Luego volvió a España, hizo oposiciones a cátedras de matemáticas y obtuvo la plaza del Instituto de Sagunto, que dirigió durante varios años. Mayo del 68 no le pilló en París, pero su casa, en Valencia, por aquel tiempo, en palabras de Patro “parecía la ONU”.

Luego vino el Benlliure y en el 75 el artículo manifiesto *¿Para qué las Matemáticas?* que destapó la caja de los truenos y dio cuenta del nacimiento del Grupo Cero y la revolución que supuso para tantos de nosotros. Los primeros libros de texto en el 77 y el 78, insuperados y producidos en un ambiente de febril actividad, apasionamiento, ganas de cambiar la faz de las aulas de matemáticas en nuestro país y sobre todo, con mucho esfuerzo, creatividad y gozo. Cada semana, se habían comprometido a llevar un problema diferente, genuino, atractivo, había ocasiones en que no salía. Y leían, leían, leían.

Entre otras lecturas, destacaba su interés por la epistemología de la ciencia. Ellos nos presentaron el “Pruebas y Refutaciones” de Imre Lakatos. Seguía su actividad. En el 79, Eliseo y sus compañeros del Grupo Cero, publicaron con el ICE los fascículos de Cónicas, Estadística y Análisis. En el 82 fueron llamados a colaborar en la Reforma de EEMM, pero no obtuvieron las condiciones para una “consulta a todo el profesorado”, tal como su proyecto requería. En el 83, Eliseo aportó su colaboración a un libro que ha marcado a toda una generación: “Es posible”. En el 84 participó en el Simposio “La Enseñanza de las Matemáticas a Debate”, organizado por el Ministerio de Educación, con el fin de recoger información sobre lo que se estaba cocinando fuera y dentro de nuestro país. Entre el 85 y el 86 organizaron cursos de formadores de formadores. Aquellos alumnos vinieron a llamarse “fofitos” y sembraron el país con la simiente allí obtenida. Todos recuerdan a Eliseo como un bondadoso y gran maestro de maestros.

Desde los Centros de Profesores, el Grupo Cero, facilitó el acceso a materiales didácticos de primera fila. En el 87 publicaron el proyecto de 12 a 16 y pusieron en marcha los cursos de formación permanente del profesorado. Luego vinieron diversas dificultades y obstáculos. En los 90, publican la colección de libros de texto para primaria y secundaria.

Durante unos años, Eliseo impartió clases de Álgebra en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia. Mientras tanto, se trasladó al Instituto Ferrer y Guardia, donde siguió disfrutando con las Matemáticas y con sus compañeros.

La jubilación no paralizó su actividad.

Fue miembro del *International Study Group for research on learning Probability and Statistics* y se doctoró por la Universitat Politècnica de Barcelona. Su tesis, dirigida por Claudi Alsina, lleva por título: *Algunos modelos de simulación aleatoria y su aplicación a la enseñanza del azar*.

Dio conferencias, trabajó en talleres. Como siempre, fue la llave en la creación de los materiales educativos en soporte informático titulados *Fotografía y Matemáticas*, escribió páginas bellísimas en *Ritmos* y creó hermosas exposiciones de Matemáticas e Imágenes.

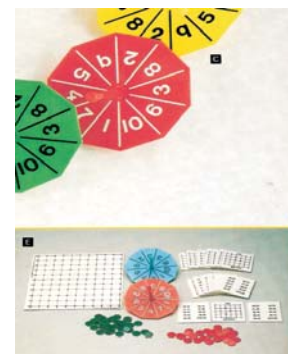
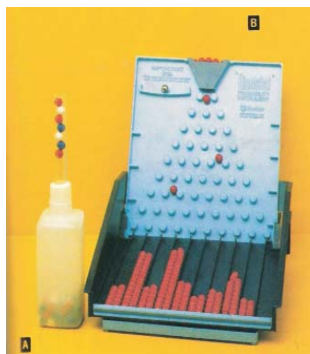
Su último trabajo, que no ha podido ver terminado, fue, precisamente, la exposición *Un paseo por el infinito*. Sólo dos días antes de su fallecimiento, todavía estaba pendiente de ella, de encargar a su inseparable amigo Javier Carvajal el cartel de presentación de dicha exposición.

Todos sus amigos y amigas coinciden en la apreciación de que Eliseo iluminaba sus vidas; que su curiosidad era limpia como la de un niño y, como un niño, todavía disfrutaba del asombro, de la sorpresa; que su inteligencia era prodigiosa y su sentido del humor imperturbable. Pero sobre todo, como dice Patro, era un hombre respetuoso y bueno en el sentido machadiano de la palabra.

Hemos tenido la suerte de disfrutar su larga juventud, pues 70 años eran pocos para tanto optimismo y vitalidad.

Eliseo y el azar

En palabras de Eliseo: "El azar, en interacción con una gran variedad de leyes, gobierna el mundo. Si solamente actuaran las leyes, la vida sería determinista, todo podría predecirse antes de que sucediera. Pero el azar introduce la sorpresa, hace que algunas veces suceda lo inesperado, modula el determinismo de las leyes y, por su causa, todos los sucesos, en mayor o menor grado, se tiñen de imprevisión. La aventura es posible, lo inesperado puede romper lo habitual..." Y nos llevó a vivir aventuras.



E.J. Arnold

Con ruletas equiprobables y no equiprobables, dados poliédricos, monedas trucadas, urnas y bolas, dardos y dianas, ábacos probabilísticos, calculadoras, ordenadores, concursos, sorteos... y con alumnas y alumnos... lo fundamental.

Problemas propuestos

Problemas o juegos, pues juego fue para Eliseo la resolución de problemas, con los que nos ha hecho cavilar y disfrutar en un terreno siempre cercano.

¿Difícil viajar?

En cierto país andan escasos de divisas. El Ministerio de Turismo, para restringir los viajes al exterior, somete a una prueba de azar a quienes quieren viajar.

A cada candidato le ofrecen seis cuerdas iguales, de la misma longitud, que alguien tiene cogidas por la mitad, con la mano cerrada, dejando ver los extremos superiores e inferiores de las cuerdas.

El aspirante a viajero tiene que atar las cuerdas al azar, de dos en dos por arriba y también de dos en dos por abajo. Recibe permiso para salir del país solamente si después de haber hecho los seis nudos, al abrir la mano, las seis cuerdas quedan formando un solo anillo.

¿Crees que es muy difícil que una persona reciba autorización para viajar? ¿Qué porcentaje de personas podrán salir del país?"

También le gustaba acercarnos a la realidad, al conocimiento de algunos fenómenos físicos, a la importancia de construir y utilizar modelos, técnicas e instrumentos para simular.



Forges

Desintegración

La desintegración de los átomos de las sustancias radiactivas es un fenómeno estadístico: no se puede saber de antemano qué átomos se van a desintegrar en un instante determinado, aunque cuanto más tiempo transcurra mayor es la probabilidad de que se desintegren los átomos existentes. Además la cantidad que se desintegra en cada momento es proporcional a la materia que existe en ese momento.

Este fenómeno puede simularse mediante el lanzamiento de dados, cada uno de los cuales representará un átomo.

Toma 100 dados y simula su desintegración. (Un dado se desintegra cuando sale 6, por ejemplo)

¿Cuánto tiempo tardará en reducirse a la mitad la cantidad inicial?

Soluciones a los problemas del número anterior

Mari Carmen Martin, hija de matemática, hermana de matemático, discípula de Eliseo en los cursos de Formadores de Formadores, mantiene el espíritu docente que le venía de casta y que selló con su fuerte vinculación al Grupo Cero. Desde ese bagaje, hizo un intento de aportar su saber-hacer al proyecto ESTALMAT de la Comunidad Valenciana. Veamos cómo funcionó el primero de los problemas propuesto por ella:

a. Al lanzar una moneda regular, ¿es igual de fácil obtener cara que obtener cruz?

La respuesta unánime es afirmativa

Lanzamos una moneda regular 100 veces: ¿cuántas caras y cuántas cruces, más o menos, esperamos obtener?

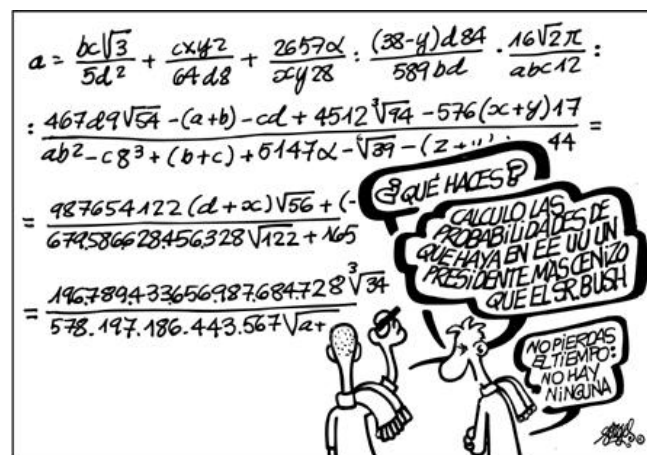
Pronto se observa lo tedioso del lanzamiento repetido un centenar de veces. Se buscan alternativas equivalentes más eficaces. Puesto que en el aula no hay ordenadores, se reparten tablas de números aleatorios. Quien lleva calculadora científica puede utilizarla.

Hecha la simulación del lanzamiento con las tablas, toda la clase se inclina por la probabilidad $\frac{1}{2}$, aunque muchos no le encuentran mucha gracia, ya que la simetría de la moneda les daba suficiente seguridad en este resultado, antes de proceder a la simulación.

Si lanzamos dos monedas distintas de forma consecutiva 100 veces, ¿qué resultados podemos conseguir y cuántas veces esperamos que ocurra cada uno de ellos? Expresa también el resultado en porcentajes y en tantos por uno.

	cara	cruz
cara	(c,c)	(c,+)
cruz	(+,c)	(+,+)

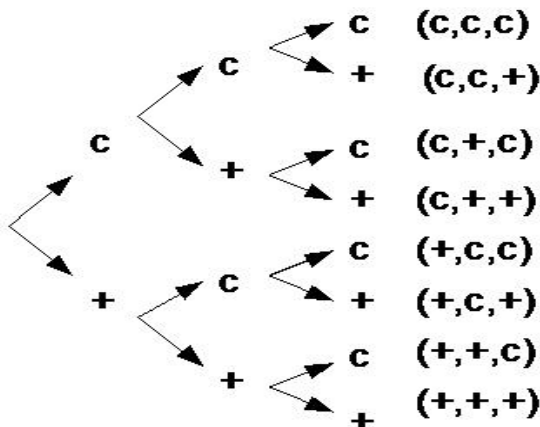
Se ponen a “lanzar” monedas por parejas, cada miembro de la pareja hace su elección en su tabla. 100 lanzamientos parecen suficientes para aventurar la conjetura 0,25 para caras, 0,25 para cruces y 0,50 para cara-cruz o cruz-cara.



Forges

¿Y si lanzamos tres monedas? ¿Existe alguna relación con el primer caso?

La simulación, ahora se hace por tríos, pero los sucesos posibles demuestran la eficacia del diagrama de árbol.



Si dos jugadores A y B juegan de modo que, al lanzar dos monedas, si salen los dos resultados iguales gana A y si salen distintos gana B, ¿Es equitativo el juego?

Este apartado no ofrece ninguna dificultad al alumnado de este grupo.

¿Y si la moneda estuviera trucada y hubiera más probabilidad de que saliera cara?

Cada alumno/a decide, tras un atasco, generado por “la falta de datos”, asignar una probabilidad mayor de 0,5 al suceso “salir cara”.

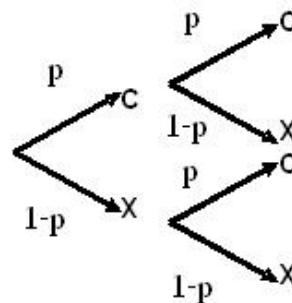
Algunos alumnos pasan directamente al diagrama de árbol, otros quieren simular pero no aciertan a utilizar la tabla adecuadamente, piden ayuda y siguen. Poco a poco, levantan las manos unos y otros, espero a que terminen todos. Todos dan como respuesta que entonces gana A.

La profesora pregunta entonces ¿Y si la probabilidad de salir cara fuese menor que la de salir cruz, qué pasaría? Antes de simular el juego conjeturan que ganará B. La simulación les contradice, llevamos los resultados a una gráfica, les resulta paradójico.

Se les pide que lo demuestren, que supongan que la probabilidad de cara es p y la de cruz $1-p$. Son alumnos y alumnas de 1º de ESO, dicen que no “han dado álgebra”

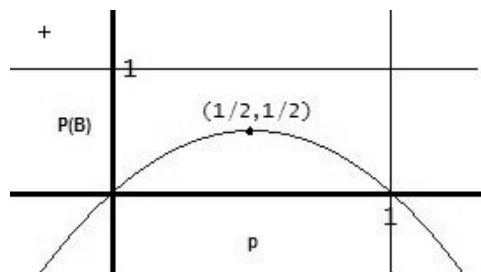
Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y aceptado en septiembre de 2010 para su publicación.

Hacemos el árbol:



De él se desprende que $P(A) = p^2 + (1-p)^2$ y que $P(B) = 2p(1-p)$

Con la calculadora gráfica o con el ordenador obtenemos:



Luego $P(B) < 1/2$ siempre que p es distinto de $1/2$, tanto si es mayor como si es menor.

Conclusiones:

1. Tal vez es más rico plantear el problema sin los diagramas de árbol en el enunciado.
2. La generalización formal tendrá que esperar a otro curso, pero, la conjetura puede establecerse a partir de la simulación y reforzarse con ayuda de un procesador matemático sencillo.

Este artículo ha sido elaborado por:

Vicente Calixte Juan, Juan Carlos Orero, Pilar Moreno y Xaro Nomdedeu Con la colaboración de todas las personas en él citadas y aún de otras que han preferido no ser nombradas.

EL HILO DE ARIADNA ■

NOTAS

1 Para quienes consideran obsoleto hablar de clases sociales en nuestro país, recomendamos la lectura del artículo de Vicenç Navarro *¿Existen Clases sociales?*, aparecido en el Diario Público del 05-03-2010 y que se puede leer íntegramente en <http://www.vnavarro.org/?p=737>