suma+ 65
Noviembre 2010, pp.99-104

Matemáticas para afinar instrumentos musicales

A pesar de toda la experiencia que pueda haber adquirido en música por haber estado vinculado a ella durante tanto tiempo, debo confesar que mis ideas se aclararon sólo con la ayuda de las matemáticas.

J. P. Rameau (1683 – 1764)

Cuando se habla de *afinación* se hace referencia a dos realidades diferentes en música. Una tiene que ver con la selección de las frecuencias que se consideran notas musicales, dando lugar a los sistemas de afinación, y la otra representa la acción de poner en tono justo los instrumentos musicales en relación con una nota fijada, a la que se llama diapasón. Evidentemente, para que un instrumento suene afinado hace falta que se tengan en cuenta las dos acepciones anteriores. Se debe conseguir que el instrumento sea capaz de producir notas afinadas entre sí, es decir que las distancias entre unas notas y otras se correspondan con las de algún sistema de afinación. Pero además, el intérprete, o el técnico, debe conseguir que las notas producidas se ajusten al diapasón, puesto que de otro modo no podrían sonar varios instrumentos a la vez. Para distinguir estos dos tipos de afinación, a la primera, que depende en mayor medida del constructor, le llamaremos *afinación estructural* y a la otra *afinación de ajuste*.

Para que la distinción entre los dos tipos de afinación sea más clara, nos centraremos en una guitarra. Hay una parte estructural encargada de que los trastes se coloquen de manera que, para una cuerda, al ir presionando sucesivamente los trastes de modo ascendente el sonido suba cada vez un semitono. La parte de ajuste es la que corresponde al intérprete, quien debe aumentar la tensión de la cuerda hasta que ésta produzca un sonido fijado por el sistema de afinación.

Hasta ahora, en varios trabajos aparecidos en *Musymáticas* sólo se han utilizado los sistemas de afinación y la afinación de ajuste, porque la forma con la que se templa cada instrumento depende mucho de las características particulares del mismo. Sin embargo, a pesar de que somos conscientes de que las reflexiones que presentaremos aquí son muy incompletas, creemos interesante estudiar el uso de las matemáticas en la afinación de dos instrumentos muy conocidos: la guitarra y el piano. Ambos afinan aproximadamente en el sistema temperado de 12 notas y las posiciones para ejecutar las notas vienen determinadas por posiciones fijas de los dedos en los trastes o en las teclas.

Los problemas de afinar con el sistema temperado

Desde un punto de vista matemático, plantear los objetivos de la afinación temperada resulta sencillo. Partimos de una nota, por ejemplo el Do con f_0 =261,62 Hz. Para obtener el resto de notas de la octava en el sistema temperado basta con multiplicar por f_0 las potencias que aparecen en la tabla siguiente[1]:

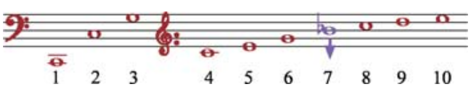
Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

Do	Do#	Re	Mib	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	Sib	Si
1	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$

Una vez tenemos las frecuencias de las notas dentro de la octava $[f_0, 2f_0[$, si queremos subir n octavas multiplicaremos por 2^n y si lo que queremos es bajarlas, la operación será dividir entre 2^n.

Podría pensarse que, dado que la tecnología actual lo permite, conseguir instrumentos afinados de forma muy precisa consiste en tener en cuenta mediciones de frecuencias y productos por potencias de 2. Sin embargo, como veremos, la realidad no es tan sencilla.

En el mundo real los sonidos puros no existen, ni siquiera cuando se supone periodicidad en las ondas, como ocurre en el caso de las notas musicales. De hecho, en el siglo XIX, J. B. Fourier (1768 – 1830) demostró que cualquier función periódica continua se puede descomponer en funciones periódicas simples. Esto significa que si un instrumento ideal produce una nota, la onda sonora se puede descomponer en ondas simples con frecuencias $1f$, $2f$, $3f$..., denominadas *armónico primero (fundamental), segundo,* etc. La amplitud de cada uno de los armónicos es lo que configura el timbre del instrumento y hace que distingamos el Do de un piano del Do de una trompeta. Así, si tomamos como nota fundamental, o primer armónico, el Do_2 con una frecuencia f = 130,81 Hz, los primeros armónicos que se producen son los siguientes: Do_2, Do_3, Sol_3, Do_4, Mi_4, Sol_4, Sib_4, Do_5, Re_5, Mi_5, etc. Ahora bien, estas notas no se corresponden exactamente con las de ningún sistema de afinación (Goldáraz Gaínza, 2004; Liern, 2008).



Primeros armónicos del Do_2

Por ejemplo, la frecuencia del Mi_4 como quinto armónico del Do_3 es 5·130,81=654,05 Hz. Si calculamos la frecuencia del Mi_4 en el sistema temperado tenemos que multiplicar la frecuencia de Do_2 por $2^{4/12}$ y subirlo dos octavas, para lo cuál hay que multiplicar por 2^2, es decir que su frecuencia es $2^2 \cdot 2^{4/12} \cdot$ 130,81=654,241 Hz.

Como hemos explicado en otras ocasiones, podemos medir la diferencia de sensación sonora entre las notas de frecuencias f_1 y f_2 hercios de la forma siguiente (Liern, 2009):

$$d(f_1, f_2) = 1200 \cdot \left| \log_2 \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \right| \text{ cents}$$

Entonces, la distancia en cents entre 654,05 y 659,241 es

$$d(659{,}241;654{,}05) = 1200 \cdot \log_2 \left(\frac{659{,}241}{654{,}05} \right) = 13{,}68627 \text{ cents.}$$

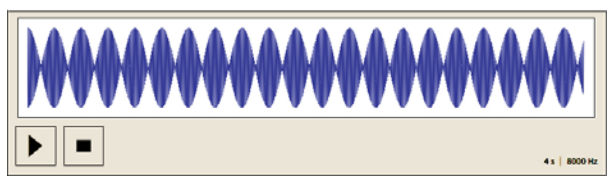
Un oído humano entrenado puede percibir diferencias superiores a 4 cents (Piles, 1982). Por lo tanto, en este caso, la diferencia en la afinación entre las dos versiones del Mi_4 sería perfectamente apreciable. Si un piano fuese perfecto y estuviese afinado en el sistema temperado, al tocar las teclas del Do_2 y Mi_4 a la vez, la frecuencia del Mi_4 temperado (659,241 Hz) se estaría mezclando con la del quinto armónico del Do_2 (654,05 Hz) y esto produciría interferencias en las ondas llamada *batimiento*.

En el mundo real los sonidos puros no existen, ni siquiera cuando se supone periodicidad en las ondas, como ocurre en el caso de las notas musicales.

Cuando se superponen dos ondas con frecuencias muy parecidas se produce una nueva onda cuya frecuencia es aproximadamente el promedio de las dos, pero con una fluctuación periódica de su intensidad o trémolo. Esto es lo que se conoce como *batimiento lento*. Sin embargo, cuando la diferencia entre las frecuencias es mayor, y se encuentra dentro del registro audible[2], además de la onda con frecuencia promedio aparece un nuevo sonido, a este fenómeno se le llama *batimiento rápido*. Para escuchar el trémolo al que hacíamos referencia, podéis utilizar, por ejemplo, el programa Mathematica®. Si escribimos:

```
Play[Sin[654.05*2*Pi*t], {t, 0, 4}]
```

la salida del programa es un sonido puro de 654,05 Hz que dura 4 segundos.



Salida gráfica del programa Mathematica® al superponer el Mi_4 temperado y el que se obtiene como quinto armónico del Do_2.

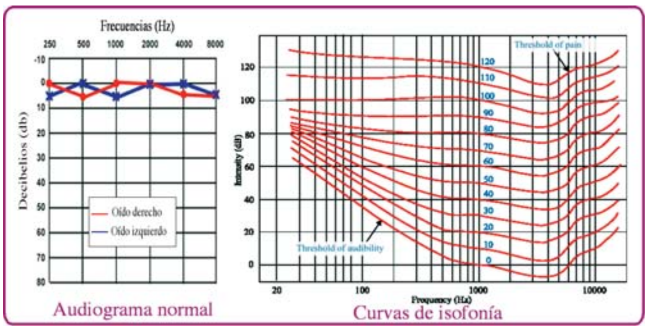
Si queremos que los dos sonidos anteriores se superpongan, escribiremos

```
Play[Sin[654.05*2*Pi*t]+Sin[659.241*2*Pi*t], {t, 0, 4}]
```

La salida de Mathematica® muestra el gráfico de una nueva onda en la que se puede escuchar como se produce el trémolo[3].

Este fenómeno, que en principio parecería que sólo proporcionaba dificultades, lo cierto es que se puede utilizar para afinar instrumentos. Volviendo al caso de la guitarra, al pulsar por ejemplo la sexta cuerda en el quinto traste debe sonar igual que la quinta cuerda al aire. Si hacemos sonar ambas cuerdas juntas y se produce un trémolo, es que no están bien afinadas y hay que modificar las tensiones hasta que este batimiento desaparezca.

Pero la superposición de ondas no es la única dificultad. Sabemos que el oído humano no percibe los sonidos de forma lineal, sino que la percepción depende, entre otras magnitudes, de la frecuencia de éste. De hecho, un sonido de muy poca intensidad puede provocar la misma sensación sonora que otro de mayor intensidad si las frecuencias de cada uno son diferentes (curvas de isofonía). Además, la percepción respecto de la altura tampoco es lineal, como podemos comprobar cuando se hace una audiometría.



Ejemplos de no linealidad en la percepción auditiva

Si a lo anterior le añadimos que la temperatura, el grado de humedad, la resonancia de la sala, etc. afectan mucho a los instrumentos, está claro que conseguir una afinación muy precisa no es tarea fácil. Veamos a continuación cómo se resuelven algunos de estos problemas con la guitarra y con el piano.

La afinación de la guitarra

Mucho antes de que J. S. Bach (1685 – 1750) diese a conocer definitivamente el sistema de afinación temperado con el Clave bien temperado, musicólogos e instrumentistas de los siglos XVI y XVII desarrollan métodos que permitían situar los trastes de instrumentos musicales de manera que sonasen con el sistema de afinación que ahora utilizamos.

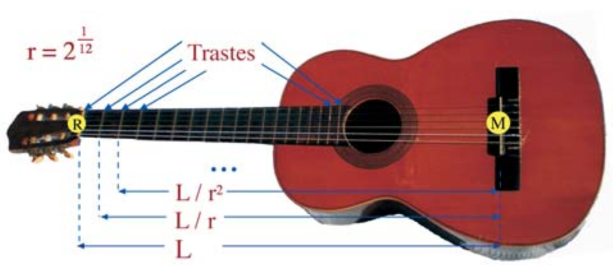
Desde el punto de vista técnico, el problema con el que contaban estos fabricantes de instrumentos era que sus técnicas eran artesanales y puramente empíricas, sin más base geométrica que las construcciones con regla y compás. Por esta razón, la propuesta de Vincenzo Galilei (1520 –1591) de considerar semitonos iguales dados por el número racional

$$\frac{18}{17} \cong 1{,}0588223529$$

fue una de las técnicas más utilizadas durante siglos. Sin embargo, tanto músicos como teóricos sabían que este método originaba pequeñas desafinaciones[4]. Consciente de esto, el filósofo, matemático y musicólogo Marin Mersenne (1588 –1648), propone aproximar el semitono por

$$\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}} \cong 1{,}059732672$$

Desde luego, el nuevo valor para el semitono estaba mejor ajustado y, a pesar de la aparente complejidad de la propuesta, sólo aparecen raíces cuadradas y por tanto puede construirse con regla y compás. Sin embargo, lo cierto es que los errores de construcción se iban acumulando y resultó poco operativo. Fueron varios los procedimientos ideados en el siglo XVIII para conseguir operatividad y precisión. De hecho, I. Stewart (Fauvel *et al.*, 2003) recoge y compara varios de estos métodos y analiza un método geométrico ideado por Daniel Strähle (1700 – 1746) que resultó ser muy preciso.



Posición de los trastes de una guitarra

Actualmente, la tecnología permite que la posición de los trastes se haga directamente teniendo en cuenta las frecuencias del sistema temperado. Si nos fijamos en la colocación de los trastes de la figura, está claro que a medida que nos alejamos de R éstos tienen una separación menor. Las matemáticas y las técnicas actuales permiten colocar los trastes de forma sencilla: si las cuerdas miden L desde R hasta M (como en la figura), para fijar el lugar de los trastes basta con calcular

$$\frac{L}{2^{0/12}}, \frac{L}{2^{1/12}}, \frac{L}{2^{2/12}}, \ldots$$

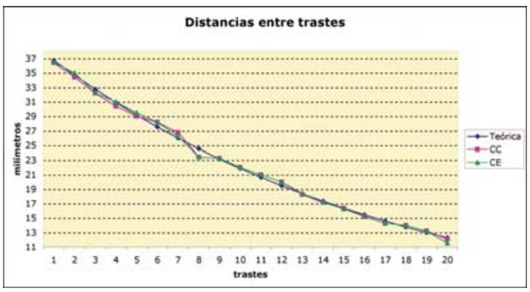
Lo que se hace es situar el traste 0 y a partir de ahí, para conseguir que la cuerda suene un semitono más alta cada vez, se divide sucesivamente entre $2^{1/12}$. Entonces, la distancia entre dos trastes consecutivos viene dada por

$$d(t_n, t_{n-1}) = \frac{L}{r^{n-1}} - \frac{L}{r^n} = L \cdot \frac{(r-1)}{r^n}, \quad n \geq 1$$

donde L es la longitud de la cuerda y $r = 2^{1/12}$.

Con lo dicho hasta aquí podría parecer que el problema de afinar una guitarra ya está resuelto, pero no es así.

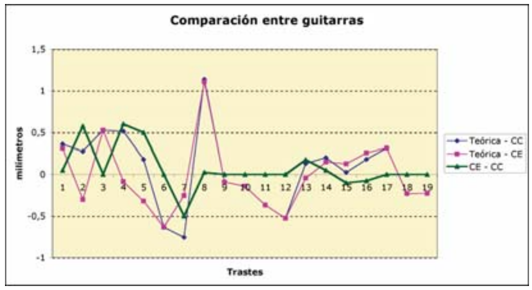
Para saber si los constructores actuales colocan los trastes de acuerdo con la progresión geométrica que hemos descrito antes, hemos medido los trastes de varias guitarras. Para simplificar los resultados aquí sólo reproduciremos lo obtenido para dos de ellas: una guitarra clásica de estudio (CE) fabricada por Instrumentos Musicales Gaspar y otra clásica de concierto (CC) elaborada por Amalio Burguet. La razón por la que hemos seleccionado sólo éstas es que se simplifican mucho los gráficos y en ambos casos las cuerdas miden 655 mm.



Comparación entre los trastes de dos guitarras y la colocación teórica

Si comparamos la distancia entre los trastes que propone la teoría y la de cada una de las guitarras, se comprueba que realmente son muy parecidas. Sin embargo, basta observar el gráfico anterior para comprobar que se producen desajustes en algunos trastes, por ejemplo el octavo. ¿Podemos atribuir estas diferencias a problemas de imprecisión en el proceso de fabricación? Para responder a esta pregunta hemos calculado las diferencias, en mm., entre la colocación de los trastes de cada guitarra y la guitarra teórica.

En el gráfico se ve claramente que las distancias son mucho menores cuando comparamos entre sí las guitarras reales que cuando las comparamos con las posiciones teóricas de los trastes. Este hecho, que ha ocurrido con las ocho guitarras analizadas, nos hacen pensar que se trata de una desviación hecha voluntariamente para conseguir disminuir los batidos y aumentar con ello la calidad acústica del instrumento.



Diferencias entre las distancias de los trastes de cada guitarra y la colocación teórica

La afinación del piano

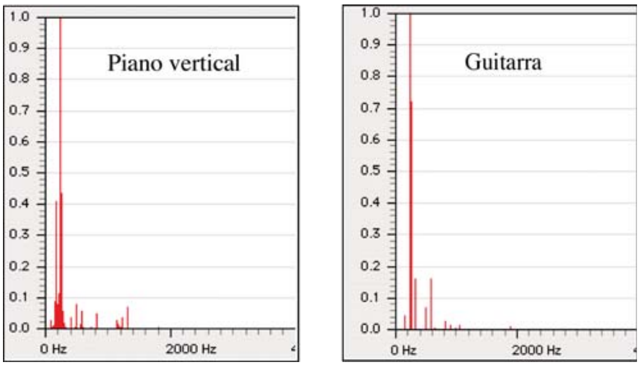
Así como en la guitarra resulta imposible fijar sus orígenes con precisión, no ocurre lo mismo con el piano. Su creación se atribuye a Bartolomeo Cristofori di Francesco (1655 – 1731) a principios del siglo XVIII. Aunque a partir de finales de este siglo el instrumento sufrió grandes cambios, tanto mecánicos como acústicos, la esencia del piano no ha variado. El sonido se genera a partir de cuerdas vibrantes, está compuesto por una caja de resonancia, a la que se ha agregado un teclado mediante el cual se percuten las cuerdas de acero con macillos forrados de fieltro produciendo el sonido.

La afinación de un instrumento no puede hacerse sólo utilizando tecnología y cálculo, es necesario recurrir al oído para que la calidad de la afinación sea óptima.

Sabemos que al comparar dos cuerdas, igualmente tensadas y con el mismo grosor, si una de ellas dos veces más larga que la otra, la cuerda más larga vibra con una octava más baja que la cuerda más corta. Sin embargo, si se empleara este principio para diseñar un piano sería imposible incluir las cuerdas de las notas graves en cualquier marco de tamaño razonable. Además, con ese gigantesco piano, las cuerdas más graves deberían hacer tal recorrido vibrando que se golpearían unas a otras. En lugar de ello, los fabricantes de pianos se aprovechan del hecho de que una cuerda gruesa vibra más lentamente que una delgada de idéntica longitud y tensión, por lo tanto, las cuerdas de un piano varían de longitud y grosor, siendo más largas y gruesas para las notas graves que para las agudas. Como medida estándar, las cuerdas de las notas agudas más altas suelen tener una décima parte del grosor de las cuerdas de las notas más graves.

Actualmente existen, básicamente, dos tipos de pianos: los de cola (que se pueden clasificar según las dimensiones de ésta) y los verticales o de pared. Independientemente del tipo, un piano estándar tiene 88 teclas que van desde el La_{-2} de 27,5 Hz hasta el Do_7 de 4186,01 Hz. Suele haber tres cuerdas de acero planas para cada nota o tecla en las cinco octavas superiores, lo que sería aproximadamente desde el Do_2 hasta el Do_7, dos cuerdas enrolladas para cada nota que va del Si_{-1} hasta el Si_2 y una cuerda enrollada o bordona para el rango de frecuencias restante.

La primera dificultad para afinar un piano surge porque al utilizar cuerdas más largas y gruesas que las de la guitarra y tener una caja de resonancia mucho mayor que ésta, los sonidos tienen más armónicos, tal y como se muestra en el gráfico de los armónicos de la figura. Y al aumentar el número de armónicos también aumenta el número de interferencias con otras notas.



Espectro de la nota más grave de la guitarra (el mi de la sexta cuerda) interpretada con una guitarra de estudio y un piano vertical Yamaha.

Para afinar un piano hay que ajustar las tensiones de las cuerdas para que los intervalos entre sus tonos sean adecuados y que a su vez se corresponda con una altura prefijada, por ejemplo el La de 440 Hz. Pero con este instrumento se hace muy patente que no es suficiente conseguir un conjunto fijo de alturas, sino que se requiere una evaluación de la interacción entre las notas, que es diferente para cada piano particular, de modo que en la práctica requiere alturas ligeramente diferentes a las empleadas en cualquier estándar teórico. Esto hace que los pianos, por lo general, se afinen en una versión modificada con el temperamento igual de 12 notas.

Por otro lado, como el sonido real de una cuerda de piano al vibrar no es sólo un tono simple, sino la superposición de varios armónicos, dos cuerdas que están cercanas a una proporción de un armónico, como una quinta justa, producirán batimientos en los tonos más altos. Una manera de afinar el piano es lograr que el número de batimientos sea adecuado, porque evitarlos completamente es imposible.

Curvas de Railsback que marcan la desviación óptima respecto del sistema temperado

O. L. Railsback diseñó una gráfica, conocida como *curva de Railsback*, que indica la desviación entre la afinación habitual de un piano y la escala de temperamento igual. Es decir, para cada nota producida en el piano, la curva señala la desviación óptima entre el tono de la nota y su tono en el temperamento igual expresada en cents. Realmente, el trabajo de Railsback iba más allá, porque expresó claramente cómo se llevaban los resultados del análisis de Fourier a la práctica. La serie armónica es perfecta cuando la función es periódica, pero en la naturaleza la periodicidad es aproximada, y en instrumentos de un gran registro, como es el caso del piano, la imprecisión se percibe perfectamente. Debido a que los defectos en la periodicidad, los armónicos del piano son más agudos de lo que deberían, por esta razón la curva de Railsback es una función creciente que tiene una pendiente menor en la parte central y más grande en los extremos.

Un método práctico de afinación del piano comienza con el ajuste de un conjunto de cuerdas en el registro medio del piano haciéndolo coincidir con las notas del sistema temperado. Una vez que estas cuerdas están ajustadas, el afinador puede continuar modificando los demás tonos comparando intervalos de octava con esa octava temperada. Esto es conveniente, porque la octava es el intervalo más fácil de afinar porque tiene la proporción más simple (2:1) y es el único intervalo en el que coinciden el sistema temperado y la serie armónica.

Yamaha Tuning Scope PT-100II empleado por los técnicos para la afinación de pianos

A partir de ahí se obtiene la afinación del resto de notas. Por ejemplo, con la ayuda de una afinador específico (como el que se muestra en la figura), una vez fijado el diapasón (por ejemplo La = 440 Hz), a partir de las dimensiones del piano se determina la curva de Railsback que vamos utilizar. Una vez determinada ésta, sabemos cuantos cents debe desviarse cada nota para que el número de batimientos sea adecuado.

Pero la afinación es algo más que Matemáticas

En la mayoría de los elementos de la música, considerar sólo los aspectos acústicos o matemáticos supondría despreciar una buena parte de su esencia, quizá la más importante. Es innegable que en el caso de la afinación ocurre lo mismo. No se puede despreciar la naturaleza artística de la música para la que la sensibilidad del músico resulta fundamental.

Como afirma Francisco Belenguer, el técnico en afinación que me asesoró en la elaboración de este trabajo, la afinación de un instrumento no puede hacerse sólo utilizando tecnología y cálculo, es necesario recurrir al oído para que la calidad de la afinación sea óptima. Pero, lo cierto es que gracias a las matemáticas y actualmente al apoyo de la electrónica, cada día se está consiguiendo que los instrumentos afinen con mayor precisión, e incluso que se recuperen formas de afinar de otras épocas que confieren a las interpretaciones una fidelidad respecto de la obra original como nunca se había dado.

Por otro lado, desde un punto de vista estrictamente práctico, gracias a la cuantificación del proceso de afinación, los técnicos pueden ahorrar muchos esfuerzos para conseguir resultados que antes habrían supuesto muchas horas de trabajo. Y al permitir modificaciones mucho más rápidas, cada vez hace más posible adaptar la afinación de los instrumentos a la sala y las condiciones de temperatura, humedad, etc. en las que va a tener lugar la audición.

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a D. Francisco Belenguer Rubio, técnico en afinación de la empresa CENTROMÚSICA S.A., por la ayuda prestada. Además, agradezco al Ministerio de Ciencia e Innovación por haber subvencionado parcialmente este trabajo a través del proyecto de investigación TIN2008-06872-C04-02.

MUSYMÁTICAS ■

NOTAS

1 Empleamos las notas Mi^b y Si^b (en lugar de sus equivalentes Re$^\#$ y La$^\#$), porque ésta es la manera habitual de hacerlo en los tratados de musicología. La razón es que hay sistemas de afinación en los que Mi^b=Re$^\#$ y Si^b=La$^\#$. Para estos sistemas tiene sentido marcar la diferencia, pero en el sistema que presentamos no existe distinción alguna.

2 El registro audible o campo auditivo de un oído normal se sitúa entre 20 y 16.000 Hz., aproximadamente.

3 Cuando se solapan ondas sencillas como éstas, basta utilizar igualdades trigonométricas para comprobar que el sonido resultante es

$$\mathrm{sen}(2\pi f_1 t)+\mathrm{sen}(2\pi f_2 t)=2\cos\left(2\pi\left(\frac{f_1-f_2}{2}\right)t\right)\mathrm{sen}\left(2\pi\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)t\right)$$

Si $|f_1-f_2|$ es menor de 20 Hz, no está en el registro audible y en este caso se trata de una onda de frecuencia la media de f_1 y f_2 modulada en su amplitud por otra de frecuencia la media de la diferencia entre ellas, y ésta última es la que produce el batimiento.

4 La longitud exacta para el semitono temperado es $\sqrt[12]{2}\approx 1{,}059463$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fauvel, J., Flood, R., Wilson, R. (2003). *Music and Mathematics. From Pythagoras to Fractals*. Nueva York: Oxford University Press Inc.

Goldáraz Gaínza, J. J. (2004). *Afinación y temperamentos históricos*. Madrid: Alianza Editorial.

Liern, V. (2008). La Música y el número siete. Historia de una relación controvertida. *Suma*, 58, 85– 88.

Liern, V. (2009). Las matemáticas de los músicos, *Suma*, 60, 129–134.

Randel, D. (1999). *Diccionario Harvard de música*. Madrid: Alianza Editorial.

Piles Estellés, J. (1982). *Intervalos y gamas*. Valencia: Ed. Piles.

Internet

http://es.wikipedia.org/wiki/Acústica_del_piano
http://es.wikipedia.org/wiki/Afinación_del_piano
http://es.wikipedia.org/wiki/Batimiento

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y fue aceptado en septiembre de 2010 para su publicación.