suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 95-98

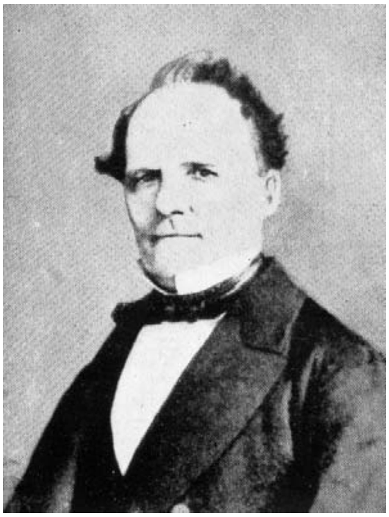
Kummer: los números ideales camino del teorema de Fermat

Hace doscientos años nacía en Sorau, un pueblecito alemán del principado de Brandenburgo, Ernst Eduard Kummer, que habría de jugar un papel importante en el desarrollo de la aritmética, necesario para la solución del gran teorema de Fermat.

Dominaban todavía Europa por aquel entonces los ejércitos napoleónicos, y ello no iba a ser ajeno a la vida de Ernst Eduard. El padre de Eduard ejercía como médico en Sorau, cuando se vio en la necesidad de atender a los enfermos del tifus que había dejado como secuela el gran ejército de Napoleón, en su retirada desde Rusia, y a su paso por Alemania. El hecho es que el propio médico adquirió la enfermedad y acabó muriendo de ella, cuando Eduard contaba solo tres años de edad.

La familia Kummer, la madre y sus dos hijos todavía muy pequeños, se vio sumida de pronto en una terrible pobreza. No obstante, los desvelos de la señora Kummer consiguieron que Eduard ingresara en el instituto local. Incluso, al acabar sus estudios secundarios, ya con 18 años, consiguió la madre enviarlo a la Universidad de Halle para seguir los estudios de teología. Debido a su falta de medios económicos, el joven Kummer no podía residir en la propia Universidad, y debía trasladarse todos los días a pie desde Sorau, mochila al hombro, cargado con sus libros.

Por una de esas casualidades que deciden a veces los destinos humanos, Kummer se encontró con un profesor de Matemáticas, H. Ferdinand Scherk, que era un gran entusiasta del Álgebra y de la teoría de números. Contagiado por el ardor matemático de este joven profesor, decidió Kummer abandonar los estudios teológicos por los de Matemáticas, ya que, recordando a Descartes, decía que "Los simples errores y los falsos conceptos no pueden intervenir en la Matemática."



Santiago Gutiérrez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
hace@revistasuma.es

Realizó los estudios con brillantez, y ya en su tercer año de Universidad obtuvo un premio por la resolución de un problema propuesto a modo de concurso.

A los 21 años consiguió el título de doctor, y, no habiendo ninguna vacante universitaria de profesor, comenzó su carrera docente en su antiguo Instituto. El año siguiente se trasladó al Instituto de Liegnitz, donde enseñó Matemáticas durante diez años. Precisamente en este Instituto conoció e inició en el saber matemático a Kronecker, quien más tarde iba a colaborar en los trabajos de Kummer. Durante este tiempo realizó importantes descubrimientos de los que hizo partícipe a eminentes matemáticos de la época, como Jacobi entre otros. Estos, dándose cuenta de la genialidad de Kummer, consiguieron para él una plaza de profesor de Matemáticas en la Universidad de Breslau. Era el año 1842 y allí enseñó Kummer hasta el año 1855, en que la muerte de Gauss ocasionó múltiples desplazamientos por las universidades alemanas: Dirichlet, de Berlin a Göttingen, para suceder a Gauss; Kummer, de Liegnitz a Berlin; etc.

Kummer era un hombre sencillo, de buen humor y bonachón. Debido a su modestia, no alardeaba nunca de sus originales trabajos y menos aún se le ocurría presentarse a premio alguno de los que entonces empezaban a menudear. Seguramente es el único matemático que consiguió un premio al que no se había presentado. Así dice el informe de la Academia Francesa de Ciencias de 1857 en la resolución del concurso para el Gran Premio en Ciencia Matemática:

> El concurso fue abierto para el año 1853 y prorrogado para 1856. No habiendo encontrado la comisión una obra digna del premio entre los solicitantes, propone a la Academia premiar a M. Kummer por sus bellas investigaciones sobre los números complejos compuestos de raíces de la unidad y números enteros.

Si modesto era como matemático, bueno y solidario se mostró siempre como profesor. No olvidó nunca Kummer las penurias de sus primeros años y los sacrificios que tanto él como su madre habían tenido que soportar para que el niño Eduard pudiera salir adelante. De él se ha dicho con razón que no solo fue un padre para sus alumnos sino un hermano para los padres de estos. Sus desvelos ante las circunstancias personales adversas de sus alumnos quedan bien puestos de manifiesto en la siguiente anécdota. En cierta ocasión, efectivamente, se enteró de que un joven no había podido acudir a Berlín para conseguir su título de doctor en Matemáticas, debido a haber sido atacado de viruela. El joven por este motivo había tenido que volverse a su casa de Posen. Kummer buscó a un amigo suyo, le dio el dinero necesario para el viaje y lo envió a Posen a socorrer en lo posible al joven matemático.

El teorema de Fermat y los números algebraicos

Desde que Fermat enunciara su famosa conjetura y añadiera que estaba en posesión de una maravillosa prueba, los matemáticos no cesaron de afrontar la demostración. Pero ninguno de ellos, ni Euler ni Lagrange ni el mismo Gauss, se dio cuenta de las posibilidades que se abrían con la ampliación del campo de los números reales al de los números complejos.

> *Seguramente es el único matemático que consiguió un premio al que no se había presentado.*

Euler había demostrado la conjetura para n=3, Dirichlet y Legendre para n=5. Gauss lo había intentado para n=7, y como quiera que no lo había conseguido, disgustado por su fracaso, en una carta dirigida a Olbers, le decía:

> Confieso que, por supuesto, el teorema de Fermat, como una proposición aislada, tiene muy poca importancia para mí, ya que es fácil formular una buena cantidad de tales proposiciones que uno no puede demostrar.

Semejante actitud soberbia de Gauss contrasta con la sencilla y humilde del que fuera alumno suyo, Kummer. Este abordó el problema de la conjetura de Fermat desde un nuevo punto de vista. Partió de los números algebraicos, esto es, los números r que son solución de ecuaciones del tipo:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

donde las a_i son números racionales, con $a_n \neq 0$, de modo que las r no son solución de ninguna otra ecuación de grado menor que n. Son números algebraicos de grado n. Si $a_n = 1$ el número es un *entero algebraico.*

Así, $1+\sqrt{-5}$ es un número algebraico de grado 2, este caso entero algebraico, pues es solución de la ecuación $x^2-2x+6=0$. El número

$$\frac{1}{2}+\frac{1+\sqrt{-5}}{2}$$

es también un número algebraico de grado 2, pero no entero, pues es solución de la ecuación $2x^2-2x+3=0$ cuyo primer coeficiente es distinto de 1.

Asociado al número algebraico r de grado n, define Kummer el *campo numérico algebraico de grado n* como el conjunto de todos los números algebraicos que se pueden construir a partir de r, por adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones sucesivas (excepto la división por cero).

El problema central de la teoría de números algebraicos es investigar las leyes de divisibilidad de los enteros algebraicos en el campo numérico algebraico en el que están definidos. Kummer dio definiciones adecuadas de enteros, la divisibilidad entre enteros, enteros primos, etc.

Atacó entonces la conjetura de Fermat, haciendo uso de sus números algebraicos, descomponiendo el binomio x^p+y^p, con p primo, en factores de primer grado, como ya hicieran otros matemáticos:

$$x^p+y^p=(x+y)(x+ry)\ldots(x+r^{p-1}y)$$

El caso es que, con su teoría de los números ideales, Kummer logró demostrar la conjetura de Fermat para algunos números primos.

Creyó incluso haber demostrado la conjetura de Fermat. Y así se lo comunicó a Drichlet en 1843, señalando que para su demostración le fue necesario suponer que en el campo de los números algebraicos se mantiene la factorización única. Pero, Dirichlet le informó de que tal suposición solo es válida para ciertos primos p. Un sencillo ejemplo, permite verlo. En el campo de los enteros algebraicos de $a+b\sqrt{-5}$, se tiene:

$$6=2\cdot 3=(1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5})$$

donde los cuatro factores son primos.

Otros eminentes matemáticos, como el caso de Cauchy, incurrieron en este mismo error, y abandonaron por ello la empresa. No ocurrió lo mismo con el joven Kummer, que siguió trabajando en el tema, por suerte para las matemáticas, como tendremos ocasión de ver.

Los números ideales

Para conseguir la factorización única creó Kummer la teoría de los números ideales. En realidad, al estilo de Gauss, Kummer trabajó con números concretos, y fue publicando sus trabajos en diversos artículos durante el año 1844.

¿Cómo lograr, por ejemplo, que la factorización de 6 sea única?

Partió Kummer del campo citado de los enteros algebraicos de $a+b\sqrt{-5}$, e introdujo los números:

$$a=\sqrt{2} \quad b_1=\frac{1+\sqrt{-5}}{\sqrt{2}} \quad b_2=\frac{1-\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$$

No se trata ya de enteros algebraicos, y a estos nuevos números los llamó *números ideales*. Aquí, la factorización de 6 ya es única, puesto que

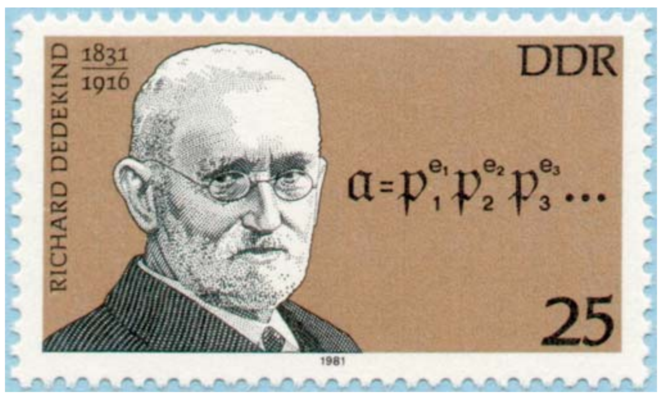
$$2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} \qquad 3=\frac{1+\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$$

Es decir, 2 y 3 no son primos, y entonces:

$$6=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1+\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{-5}}{\sqrt{2}}$$

De este modo, la expresión de 6 como producto de cuatro factores es única.

Los números ideales, en tanto que números ordinarios, permiten demostrar algunos de los resultados obtenidos en la aritmética ordinaria, incluso en campos que carecen de factorización única. Como se ha señalado anteriormente, Kummer trabajó con números concretos y en ninguno de sus ensayos definió los números ideales de forma general.



El caso es que, con su teoría de los números ideales, Kummer logró demostrar la conjetura de Fermat para algunos números primos. Concretamente, lo consiguió para los primos menores que cien, excepto para 37, 59 y 67, si bien lo demostró también para estos en un ensayo posterior (de 1857).

Era tal la valoración que el propio Kummer hacía de sus números ideales que escribió:

> Vemos, por tanto, que los factores primos ideales revelan la esencia de los números complejos, los hacen, por así decir, transparentes, y descubren su estructura cristalina interna.

De Kummer a Dedekind

Kummer no logró su propósito de demostrar la conjetura de Fermat, pero en sus intentos por conseguirlo abrió profundos caminos a las matemáticas que otros iban a saber recorrer con eficacia. Kummer no estaba solo en esta aventura. Su contemporáneo y colega, Kronecker, por ejemplo, abordó en 1845 la teoría de la divisibilidad en ciertos campos muy singulares.

Pero fue Dedekind el que más lejos supo llevar las profundas ideas de Kummer. Richard Dedekind, 21 años más joven que Kummer, llegó a tiempo todavía de recibir lecciones de Gauss. Abordó el problema de la factorización única de una forma nueva y original. Empezó por generalizar la teoría de los enteros complejos de Gauss y de los números algebraicos de Kummer y, a continuación, introdujo los conceptos de cuerpo y de anillo.

Para conseguir la factorización única, en lugar de números ideales, como Kummer, aunque inspirado en las ideas de este, considera clases de números algebraicos, a las que llama *ideales*, en honor a Kummer. Así, por ejemplo, entre los números enteros, en lugar de *5* toma la clase *5p*, donde *p* es cualquier entero. Establece la divisibilidad y las operaciones entre las clases. Y define la estructura de ideal de la siguiente manera:

> Un conjunto de enteros A de un cuerpo K es un ideal si para cualquier par de enteros, α y β, de A, se verifica que $a\alpha+b\beta$, donde a y b son de K, también pertenece a A. Aplica esta noción a los números algebraicos, de modo que un ideal A se dice generado por los enteros algebraicos $a_1, a_2,.., a_n$, del cuerpo K si A está constituido por elementos de la forma: $\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+...+\lambda_n a_n$ donde los λ_i pertenecen a K.

Sobre la importancia de la obra de estos tres grandes, Kummer, Kronecker y Dedekind, escribió E. T. Bell lo siguiente:

> …con su invención de la teoría moderna de los números algebraicos, ampliando el alcance de la Aritmética *ad infinitum*, y llevando las ecuaciones algebraicas dentro de los límites del número, hicieron por la Aritmética superior y la teoría de las ecuaciones algebraicas lo que Gauss, Lobachewsky, Bolyai y Riemann hicieron por la Geometría al emanciparla de la estrecha esclavitud de Euclides. Y, lo mismo que los inventores de la Geometría no euclideana revelaron vastos y hasta entonces insospechados horizontes a la Geometría y a la ciencia física, así también los creadores de la teoría de los números algebraicos arrojaron una luz completamente nueva que iluminó toda la Aritmética y aclaró la teoría de ecuaciones, de los sistemas de curvas y superficies algebraicas y la verdadera naturaleza del número mismo sobre la firme base de claros y simples postulados.

Otros muchos trabajos realizó Kummer en su larga vida, tanto en el terreno teórico como en las aplicaciones prácticas. Una de sus creaciones es la de la superficie de cuarto grado en la Geometría euclideana, inspirada en la obra de Hamilton sobre los sistema de rayos ópticos. Pero, también se dedicó a aplicar sus conocimientos a la Balística, así como a enseñar sus resultados a los oficiales del ejército alemán en la Escuela de Guerra de Berlín. Desde el Análisis y la Geometría a la Física, su obra ha sido abundante.

Pasó los últimos nueve años de su vida en completo aislamiento de sus compañeros y de todo lo que había constituido su tarea profesional, eso sí, rodeado por su mujer y los nueve hijos que le sobrevivieron. Murió víctima de una gripe a la edad de 83 años.

HACE ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Kline M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Madrid: Alianza Universidad

Bell E. T. (2009): *Los grandes matemáticos*. Buenos Aires: Losada

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y aceptado en septiembre de 2010 para su publicación.