suma+ 65
Noviembre 2010, pp. 87-94

Historias de al-Khwārizmī (4ª entrega). El proyecto algebraico.

Problema problematum

El libro de François Viète (1540-1603) *Introducción al arte analítica* (*In artem analyticem Isagoge*)[1], que se considera por muchos historiadores como el que comienza el álgebra simbólica, termina enunciando cuál es la ambición del proyecto algebraico:

> 29. Denique fastuosum problema problematum ars Analytice, triplicem Zetetices, Poristices & Exegetices formam tandem induta, iure sibi adrogat, Quod est, NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE.
>
> [29. Finalmente, el Arte Analítica, una vez ha sido presentada en su triple forma de Zetética, Porística y Exegética[2], se apropia a justo título del fastuoso problema de los problemas, que es: NO DEJAR NINGÚN PROBLEMA SIN RESOLVER] (Viète, 1591, p. 9r).

La declaración de Viète es pues explícita: de lo que se trata es de tener una manera de trabajar, un arte, que garantice que todos los problemas pueden ser resueltos. De la misma naturaleza es el propósito de Descartes expresado en su libro inacabado y publicado sólo póstumamente *Reglas para la dirección del espíritu* (*Regulæ ad directionem ingenii*)[3], cuyas reglas pueden reescribirse de manera que sean la descripción precisa y metódica de cómo resolver cualquier problema transformándolo en un sistema de ecuaciones[4].

El *Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala* (*Libro conciso de cálculo de restauración y oposición*), el libro de álgebra de al-Khwārizmī, es el primer libro que conocemos del que se puede decir que se plantea ese proyecto, que lo que pretende es que todos los problemas puedan ser resueltos.

29 Denique fastuosum problema problematum ars Analytice, triplicem Zetetices Poristices & Exegetices formam tandem induta, iure sibi adrogat, Quod est, NVLLVM NON PROBLEMA SOLVERE.

Último párrafo del libro de Viète *In artem analyticem Isagoge*

Luis Puig
Universitat de València Estudi General

El proyecto algebraico

Como dice Viète, esa pretensión de resolver *problema problematum*, el problema de los problemas, es fastuosa, desmesurada. ¿Cómo se puede estar seguro de que todos los problemas pueden resolverse? ¿Con qué medios puede abordarse ese *problema problematum*? ¿Cómo lo hace en concreto el álgebra?

Los matemáticos griegos ya tuvieron esa pretensión y forjaron para ello el método de análisis y síntesis. Ahora bien, el método de análisis y síntesis es un método heurístico, es decir, sirve para descubrir, ése es el significado del verbo griego *heuriskō* del que se deriva la palabra "heurística". Concebido como un método de resolución, sirve para descubrir la solución de los problemas[5], pero como es un método heurístico lo que hace es transformar el problema original en otros problemas, sin que dé garantías de que esos otros problemas puedan ser resueltos[6]. El proyecto algebraico necesita transformar el método de análisis y síntesis y completarlo, si quiere tener éxito con el problema de los problemas.

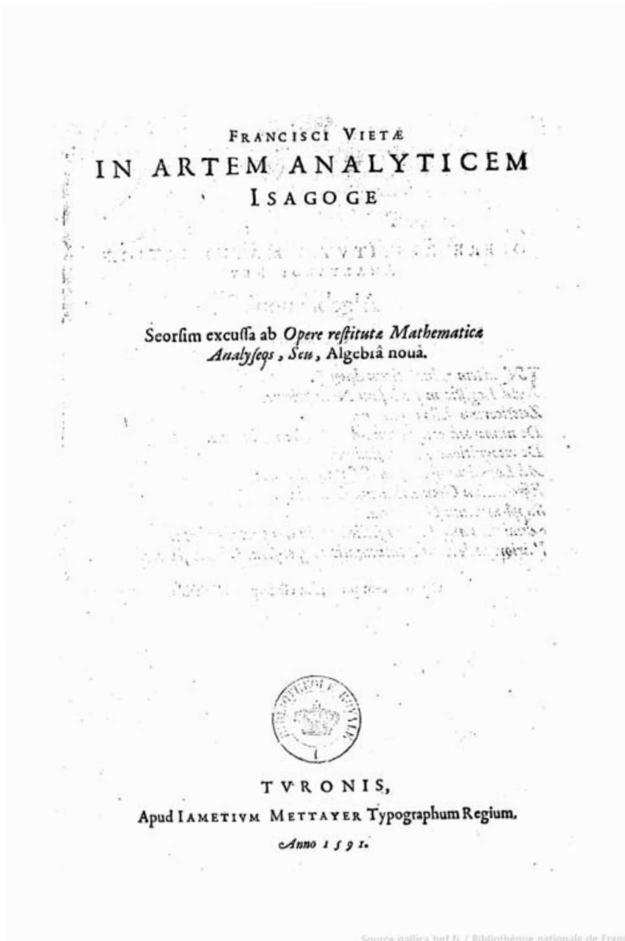
Una parte crucial de esa transformación del método de análisis y síntesis es superar la concepción griega de la necesidad de tratar con objetos que estén dados. Klein (1968) explica cuál es el escollo: la síntesis sólo puede realizarse en la concepción griega con magnitudes que han sido dadas[7]. Cuando el análisis se realiza en problemas que tratan con objetos geométricos, el carácter de "dado" puede tomarse como "*posibilidad* de haber sido dado" al trazar la figura de análisis que da la construcción por ya realizada y constituye el primer paso del análisis:

> Esta "posibilidad de haber sido dado" aparece en el análisis geométrico en el hecho de que la construcción que se considera como ya efectuada [...] no necesita el uso de magnitudes "dadas" como unívocamente determinadas, *sino sólo como que tienen el carácter de haber sido "dadas"* (Klein, 1968, p. 164).

Ahora bien, Klein se pregunta cómo puede transferirse esa situación al análisis en el terreno de la aritmética, y responde:

> Claramente de esta manera: que los números "dados" en un problema se consideren sólo en su carácter de haber sido dados, y no como precisamente esos números determinados (Klein, 1968, p. 164).

Es decir, que, cuando los problemas pertenecen al terreno de la aritmética, es necesario para efectuar el análisis que los números se consideren como dados, pero no determinados. Pero, se pregunta Klein ahora, "¿cómo puede ser que números *dados* y por tanto *determinados* desempeñen un papel *indeterminado*?" (Klein, 1968, p. 165). La manera de Viète de superar este escollo es abandonar el cálculo con números, lo que él llama *Logistica*[8] *numerosa*, y crear un cálculo con *especies* de números, lo que él llama *Logistica especiosa*, que es otro nombre para su nueva álgebra. Las especies de números no representan números concretos, sino formas distintas que los números pueden adoptar cuando se calcula con ellos, son, en ese sentido, indeterminados. Las incógnitas de los problemas aritméticos, que son números desconocidos, pero determinados, ya que están dados por las relaciones del enunciado del problema, pueden convertirse así en el objeto del cálculo: por el intermedio de considerarlas no como números, sino como especies de números, y por tanto su carácter de dado está tomado como posibilidad de haber sido dado.


FRANCISCI VIETÆ
IN ARTEM ANALYTICEM
ISAGOGE
Seorsim excussa ab *Opere restitutæ Mathematicæ Analyseos, Seu*, Algebrâ nouâ.
TVRONIS,
Apud IAMETIVM METTAYER Typographum Regium.
Anno 1591.

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

Portada del libro de Viète *In artem analyticem Isagoge*

Esta ruptura con el escollo de la concepción griega de con qué puede calcularse, le permitirá a Descartes, poco después de Viète, zanjar el asunto estableciendo que en el análisis hay que tratar de la misma manera lo conocido y lo desconocido, y decir que ahí reside el meollo del método:

> [...] totum huius loci artificium consistet in eo, quod ignota pro cognitis supponendo possimus facilem & directam quærendi viam nobis proponere, etiam in difficultatibus quantumcumque intricatis[9]. (Descartes, 1701, pp. 61-62)

El proyecto algebraico usa pues, para resolver el problema de los problemas, un cálculo con especies de números que permite tratar de la misma manera lo conocido y lo desconocido en el análisis de los problemas, y ese cálculo con especies se establece como un lenguaje, un sistema de signos, específico. En Viète, el sistema de signos está en el umbral de lo simbólico, casi se puede calcular con él en el terreno de la expresión sin recurrir al terreno del contenido, en Descartes ya es plenamente simbólico[10].

El uso de un cálculo con especies ya está presente en las *Aritméticas* de Diofanto[11], y en este libro de Diofanto, las especies de números se representan mediante abreviaturas de sus nombres. El sistema de signos es, por tanto, sincopado, en este sentido, y no permite el cálculo en el nivel de la expresión. El álgebra de al-Khwārizmī también está basada en un cálculo con especies, que veremos de inmediato.

Pero, aunque este desarrollo de un cálculo con especies sea un elemento crucial del proyecto algebraico, no basta para resolver el problema de los problemas. Para ello es necesario contar al menos con otras dos cosas. Por un lado, el cálculo con especies es un lenguaje, un sistema de signos, distinto del lenguaje natural en el que están expresados los problemas. Así que hace falta que el nuevo método establezca cómo traducir el enunciado de cualquier problema a una expresión en ese nuevo sistema de signos. Por otro lado, las expresiones que resultan de la traducción de los problemas son ecuaciones, de modo que hace falta saber resolver todas las ecuaciones.

Es decir que, una vez establecido el procedimiento de traducción de enunciados de problemas a ecuaciones en el método de análisis, el problema de los problemas queda reducido a tener un procedimiento de solución de todas las ecuaciones. Pero ese problema sigue siendo fastuoso, casi tan desmesurado como el problema de los problemas, ya que hay un sinnúmero de ecuaciones. Sin embargo, el lenguaje del álgebra tiene una estructura y una sintaxis que permite hacer con sus expresiones algo que no puede hacerse con el lenguaje vernáculo. La infinidad de ecuaciones distintas que pueden aparecer como traducción de los enunciados de problemas se pueden clasificar en conjuntos finitos de ecuaciones representados por formas canónicas. El problema de los problemas se reduce entonces a dos cosas: saber resolver todas las formas canónicas, y tener un cálculo que permita transformar cualquier ecuación en una de las formas canónicas.

Resumiendo todo lo dicho, el proyecto algebraico de resolución del problema de los problemas consiste en:

- La elaboración del concepto de especie de número.
- La elaboración de un sistema de signos específico para tratar el cálculo con especies.
- El establecimiento de un procedimiento de traducción del enunciado de un problema a una ecuación.
- La clasificación de las ecuaciones en formas canónicas, y el establecimiento de todas las formas canónicas.
- La elaboración de un cálculo que garantice transformar cualquier ecuación en una forma canónica.
- La resolución de todas las formas canónicas.

El proyecto algebraico de al-Khwārizmī

El propio orden con el que organiza al-Khwārizmī su *Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala* (*Libro conciso de cálculo de restauración y oposición*) es una indicación de que se está planteando resolver el problema de los problemas. En efecto, el libro podemos dividirlo en las siguientes partes[12]:

1. Introducción.
2. Las especies de números.
3. Las (seis) formas canónicas, simples y compuestas.
4. Los algoritmos de solución de las formas canónicas.
5. Las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas compuestas.
6. Sobre la multiplicación [de expresiones con especies].
7. Sobre la adición y la substracción [de expresiones con especies y con radicales].
8. Sobre la división [de radicales].
9. Los seis problemas [ejemplos de las seis formas canónicas].
10. Varios problemas.
11. Transacciones mercantiles[13].
12. Medida[14] [de áreas y volúmenes].
13. Testamentos[15].
14. Devolución de dotes.

Al-Khwārizmī comienza efectivamente definiendo las especies de números con las que va a calcular. En la introducción, tras indicar que el libro lo escribe por encargo del califa al-Ma'mūn, dice que quiere exponer "lo que las gentes necesitan en sus herencias, legados, repartos, arbitrajes, comercios […] medida de tierras, perforación de canales, medición y otras cosas que dependen del cálculo" (Rashed, 2007, p. 94-95[16]). A continuación presenta las especies de números como las formas que adoptan los números que se necesitan en el cálculo:

> He encontrado que los números que se necesitan en el cálculo de *al-jabr* y *al-muqābala* son de tres especies, que son: raíces, tesoros y números simples no relacionados con raíz ni con tesoro. La raíz (*jidr*) es cualquier cosa que se multiplica por sí misma, como la unidad, o los números, que le son superiores, o las fracciones[17], que le son inferiores. El tesoro (*māl*) es todo lo que resulta de la raíz multiplicada por sí misma. El número simple (*ʿadad mufrad*) es todo lo que, entre los números, es expresable y que no se relaciona con raíz ni con tesoro (Rashed, 2007, p. 96-97; Hughes, 1986, p. 233[18]).

Traduzco las palabras que usa al-Khwārizmī para designar las tres especies de números, *jidr*, *māl*, y *ᶜadad mufrad*, de forma bastante literal, por 'raíz', 'tesoro'[19] y 'número simple'. Cabe identificar sin más las tres especies de números con los tres términos de la forma canónica de una ecuación de segundo grado, y decir entonces que la raíz es la incógnita, x, que *māl* es la segunda potencia de la incógnita, el cuadrado, x^2, y que "número simple" es el término independiente, pero esta identificación es anacrónica. Aunque traducir así las especies de números hace más legible el texto de al-Khwārizmī para un lector actual, es aras de la legibilidad se sacrifica la posibilidad de comprensión de cuáles eran los conceptos que al-Khwārizmī elaboraba y usaba; más aún, traducir así hace poco patente que se trata de especies de números.

Si examinamos las definiciones de al-Khwārizmī y el uso que hace de esos términos en el libro, podemos ver que la raíz no es la incógnita, al-Khwārizmī tiene otro nombre para la incógnita, *shay'*, cosa, que no aparece hasta el apartado "Sobre la multiplicación", que en nuestra división del libro en partes es la sexta. La cosa se identificará con la raíz, pero si hay que identificar esos dos términos es porque de entrada no son idénticos: "cosa" designa una cantidad desconocida, "raíz" es una especie de número.

Un número es de la especie *jidr*, "raíz", si en algún momento de los cálculos se multiplica por sí mismo: lo que hace que se califique a un número de "raíz" no tiene nada que ver con que sea o no sea una cantidad desconocida de un problema, "raíz" no designa a una incógnita como hace la x en el sistema de signos actual del álgebra. De hecho, cuando al-Khwārizmī está definiendo qué es una raíz, está hablando de números, que son por tanto, cantidades conocidas, dadas, no está hablando de cantidades desconocidas, de incógnitas, y lo que está definiendo es la forma que tiene un cierto tipo de números cuando se usan en cálculos aritméticos.

Correlativamente, un número es de la especie *māl*, "tesoro", si en algún momento de los cálculos se ha obtenido como resultado de que un número se ha multiplicado por sí mismo (número que será la raíz de ese tesoro). Finalmente, un número es de la especie *ᶜadad mufrad*, número simple, si en el curso de los cálculos no se ha multiplicado por sí mismo ni ha sido el resultado de la multiplicación de un número por sí mismo.

Si queremos que la traducción conserve en la medida de lo posible los conceptos de al-Khwārizmī, no podemos por tanto leer las especies de números como potencias de la incógnita. Además, en el caso de *māl*, su traducción por 'cuadrado' es inconveniente por más motivos. Høyrup (1991) da tres razones de peso para no hacerlo. En primer lugar, 'cuadrado' tiene un significado geométrico del que *māl* carece por completo, con lo que traducir *māl* por 'cuadrado' hace incomprensible el esfuerzo de al-Khwārizmī (en la parte del libro en que demuestra los algoritmos) para explicar que *māl* puede representarse mediante un cuadrado. La segunda potencia de la incógnita y la figura geométrica se nombran en castellano con la misma palabra 'cuadrado', pero en el árabe matemático, hay dos palabras distintas para dos conceptos de ámbitos distintos: *māl* es una especie de número y el cuadrado, figura geométrica, se dice *murabᶜ*. En segundo lugar, el significado de x^2 como cuadrado de la incógnita, propio del álgebra elemental actual, hace que para un lector actual carezca de sentido considerar el cuadrado como incógnita; por lo tanto, una consecuencia de traducir *māl* por 'cuadrado' es que entonces no se entiende por qué al-Khwārizmī, después de encontrar la raíz, calcula también el *māl*, cuando es éste la incógnita del problema. En tercer lugar, la identificación de *māl* con x^2 conlleva la identificación de la raíz con la raíz de la ecuación, cuando para al-Khwārizmī es la raíz del *māl*, la raíz del tesoro.

Esta inconveniencia de traducir *māl* por cuadrado no es de hecho una novedad. Ya Gerardo de Cremona, en el siglo XII, tradujo *māl* por *census*, y no por *quadratus*, y la traducción de Gerardo de Cremona hizo tal fortuna que la palabra *census*, que en latín significa "patrimonio", "riqueza", fue usada en libros de álgebra escritos en latín en la época medieval, y también más adelante cuando en el Renacimiento empezaron a aparecer libros de álgebra en lenguas vernáculas. En éstos, la palabra *census*, convertida en término técnico, cuyo significado en el lenguaje natural ya carecía de importancia, no se tradujo sino que se castellanizó (censo[20]), catalanizó (cens) o italianizó (censo)[21].

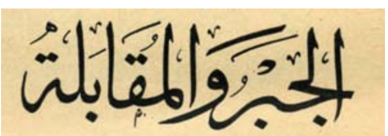
El libro de al-Khwārizmī presenta pues un primer rasgo de lo que he llamado el proyecto algebraico ya que comienza definiendo especies de números con las que va a calcular, así que no va a tener que calcular con números dados, sino que va a poder hacerlo con formas de números, que tienen carácter indeterminado. Pero en esto al-Khwārizmī no es distinto de Diofanto, que también comienza sus *Aritméticas* de forma parecida, e incluso con una lista más larga de especies de números[22]. Sin embargo, hay algo que los distingue y que no se encuentra en ningún libro conocido anterior al de al-Khwārizmī. Diofanto dice que muchos de los problemas aritméticos se pueden tratar con cálculos aritméticos con las especies y resuelve un gran número de problemas, desarrollando técnicas para ello. Al-Khwārizmī pretende resolverlos *todos*, y para ello comienza por establecer cuáles son todas las posibilidades de combinación de las especies de números. Ese gesto combinatorio sitúa el proyecto de al-Khwārizmī en el corazón de lo que hemos llamado el proyecto algebraico: la determinación de cuáles son todas las posibilidades es el paso fundamental para poder resolver el *problema problematum*, el problema de los problemas, resolver todos los problemas.

Al-Khwārizmī encuentra que todas las posibilidades son seis, tres simples (Rashed, 2007, pp. 96-97 Hughes, 1998, p. 233), y tres compuestas (Rashed, 2007, pp. 100-101 Hughes, 1998, p. 234), a saber:

tesoro igual a raíces
tesoro igual a número
raíces igual a número
tesoro y raíces igual a número
tesoro y número igual a raíces
raíces y número igual a tesoro

Esas seis posibilidades son otras tantas formas canónicas, a las que se tratará de que mediante el cálculo de *al-jabr* y *al-muqābala* se pueda reducir cualquier ecuación que resulte de traducir un problema a este lenguaje algebraico[23]. Al-Khwārizmī prosigue el libro, como hemos indicado al dividirlo en partes, enunciando una regla algorítmica para resolver cada una de las formas canónicas y demostrando los algoritmos. Con ello, todas las ecuaciones que se pueden transformar en las seis formas canónicas se pueden resolver, y éstas son todas las formas canónicas. Precisemos: *todas* dentro de un dominio acotado previamente, el de las tres especies de números de las que parte al-Khwārizmī. Al-Khwārizmī no resuelve pues el problema de los problemas, pero sí que presenta en un mundo de problemas manejable un modelo de cómo abordarlo. La continuación está implícita: basta con ampliar el conjunto de especies de números y aplicar de nuevo una combinatoria que garantice que se están considerando todas las formas canónicas para ese nuevo conjunto de formas canónicas.

Eso es exactamente lo que hace ^{c}Umar al-Khayyām (1048-1131) unos dos siglos más tarde en su *Tratado de álgebra y al-muqābala* (Rashed y Vahebzadeh, 1999): habla de una lista de especies más larga, que se prolonga "tan lejos como se quiera", y de la que se sabe que están en proporción continua "la razón del número a las raíces es igual a la razón de las raíces a los tesoros y es igual a la razón de los tesoros a los cubos, y es igual a la razón de los cubos a los tesoro-tesoros, y esto tan lejos como se quiera" (Rashed y Vahebzadeh, 1999 pp. 120-123), y luego establece todas las formas canónicas hasta la especie siguiente a las consideradas por al-Khwārizmī, es decir, hasta el cubo.



al-jabr wa'l-muqābala

La lista de todas las posibilidades tiene veinticinco formas canónicas (Rashed y Vahebzadeh, 1999 pp. 124-129):

número igual a raíz
número igual a tesoro
número igual a cubo
raíces igual a tesoro
tesoros igual a cubo
raíces igual a cubo

tesoro y raíz igual a número
tesoro y número igual a raíz
raíz y número igual a tesoro
cubo y tesoro igual a raíz
cubo y raíz igual a tesoro
cubo igual a raíz y tesoro
cubo y raíz igual a número
cubo y número igual a raíz
número y raíz igual a cubo
cubo y tesoro igual a número
cubo y número igual a tesoro
número y tesoro igual a cubo

cubo y tesoro y raíz igual a número
cubo y tesoro y número igual a raíz
cubo y raíz y número igual a tesoro
cubo igual a raíz y tesoro y número
cubo y tesoro igual a raíz y número
cubo y raíz igual a tesoro y número
cubo y número igual a raíz y tesoro

El proyecto algebraico tropieza con un escollo: ^{c}Umar al-Khayyām no encuentra algoritmos para todas las formas canónicas. Sin embargo, sí que es capaz de encontrar, cuando el algoritmo no está disponible, un procedimiento de construcción de la solución mediante intersecciones de cónicas. Admirable solución, pero que no satisface el proyecto algebraico. No es éste el lugar para exponer la continuación de la historia que conduce a la teoría de Galois y el álgebra moderna. Volvamos al libro de al-Khwārizmī.

Hasta esta altura de su libro, al-Khwārizmī no ha resuelto aún ningún problema concreto, pero ya ha puesto las bases del proyecto algebraico. Para resolver problemas concretos le falta poder traducir cualquier enunciado a una expresión del cálculo con especies y transformar las expresiones en una de las formas canónicas. Los capítulos siguientes del libro se dedican a ello, y en ellos aparece un nuevo término técnico, *shay'*, cosa, que en el occidente medieval cristiano acabará constituyendo otro nombre del álgebra cuando no se quiera usar su nombre bárbaro: el arte de la cosa. Trataremos de ello en la próxima entrega de estas historias.

HISTORIAS ■

NOTAS

[1] Viète publicó en 1591 a sus expensas (era un hombre de negocios en buena situación económica y se publicada él mismo sus escritos) este libro, que tiene el tamaño de un manifiesto: 9 folios. Esta edición original latina está disponible en Gallica, http://gallica.bnf.fr/, la biblioteca digital de la Biblioteca Nacional de Francia. Existe una traducción al francés hecha poco después de la muerte de Viète por Vaulézard, con largos comentarios de éste intercalados en la traducción, en un volumen titulado *La nouvelle algèbre de M. Viète*, que también contiene otro libro de Viète que continúa éste. De esa traducción francesa hay una edición facsímil reciente (Vaulézard, 1986). Hay una traducción inglesa de J. Winfree Smith incluida como apéndice de la edición inglesa del clásico estudio de Jakob Klein *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, que está accesible en una reedición barata de la editorial Dover (Klein, 1968).

[2] Viète pretende en este libro “restaurar el análisis matemático” de los griegos, y así lo subtitula, como una parte de su “restauración del análisis matemático”. Para ello parte del texto de Pappus en el que éste describe el método de análisis y síntesis, y lo transforma a su manera mediante el álgebra, que transforma a su vez en lo que él llama “logística especiosa” o cálculo con especies. La zetética, la porística y la exegética son los tres términos que Viète introduce para caracterizar las tres partes del nuevo análisis. Pappus distingue entre dos tipos distintos de análisis: el problemático (cuando se trata de resolver un problema) y el teorético (cuando se trata de demostrar un teorema). Viète toma la palabra *zētētikón* (que significa “investigación”) de la descripción del análisis teorético y la palabra *poristikón* (que significa “obtención”) de la descripción del análisis problemático, para las partes de su nuevo análisis en el que se plantea una ecuación (por la zetética), y se examina la verdad del teorema que expresa la ecuación (por la porística), y añade una tercera parte cuyo nombre, exegética, viene de una palabra griega que significa “mostrar”, y que consiste en resolver la ecuación para obtener los valores concretos. La terminología de Viète es bastante idiosincrásica, lo que hizo que apenas hiciera escuela y que no se haya conservado en absoluto. Estos tres términos introducidos para las tres partes del nuevo análisis son una buena muestra de su uso idiosincrásico de la terminología, ya que el término usado para la parte del nuevo análisis en que se examina un teorema está tomada del análisis problemático, y el término usado para la parte del análisis en que el problema se traduce a una ecuación está tomado del análisis teorético.

[3] La edición canónica de las obras de Descartes es la de Charles Adam and Paul Tannery, *Œuvres de Descartes*, cuyo volumen X contiene el original latino de las *Reglas*, que no se publicó en vida de Descartes. La primera vez que las Reglas se imprimieron fue en una colección de textos no publicados que se editó en Holanda en 1701, con el título *Opuscula posthuma physica et mathematica* (Descartes, 1701).

[4] En la entrega anterior de estas historias (Puig y Navarro, 2010) ya citaba mi caracterización del método cartesiano en forma de una serie de pasos que describen la conducta del sujeto ideal y, por tanto, pueden considerarse como un modelo de competencia en la resolución (algebraica) de problemas. En Puig (2003) y Puig y Rojano (2004) expongo con un cierto grado de detalle cómo derivar ese modelo de competencia de lo que dice Descartes en las *Regulæ* y en la *Geometría*, reelaborando y modificando lo que ya presentó Pólya en el capítulo “The cartesian pattern” del volumen primero de su libro *Mathematical Discovery* (Pólya, 1962).

[5] En su exposición del método de análisis y síntesis, Pappus distingue entre el análisis problemático y el teorético, ya se trate de resolver problemas o demostrar teoremas. Siguiendo en esto a Polya, yo considero que problemas y teoremas son ambos problemas (unos “de encontrar” y los otros “de demostrar”), con lo que el método de análisis y síntesis es un método de resolución de problemas (Puig, 1996; Polya, 1945).

[6] Sobre esta característica de la heurística, ver Puig (1996, p. 46) y Polya (1965, p. 84).

[7] Euclides escribió un libro que se suele conocer con su nombre latino *Data*, pero que se titula en griego *Dedomena*, el participio pasado pasivo en plural del verbo “dar”, y significa, por tanto, “que han sido dados”. Pappus lo consideraba como uno de los libros que formaban parte del “Tesoro del Análisis”. Sobre el significado de *dedomenon*, ver mi texto sobre otro libro, este medieval, que también trata de lo que sido dado: el *De Numeris Datis* de Jordanus de Nemore (Puig, 1994)

[8] En la tradición griega hay dos disciplinas distintas que tratan con números: la Aritmética y la Logística. La Aritmética estudia la naturaleza de los números y los clasifica, la Logística estudia los cálculos con números. En los *Elementos* de Euclides sólo hay aritmética, no hay nada de logística, de hecho, todas las proposiciones de los libros aritméticos de los *Elementos* acaban con la frase “como queríamos demostrar”, es decir están tratadas como teoremas. Por el contrario, el libro de Diofanto que se conoce con el nombre de las *Aritméticas*, es, desde este punto de vista, un libro de logística, no de aritmética.

[9] Juan Manuel Navarro Cordón traduce de esta manera: “[…] el artificio entero de esta exposición consistirá en que, suponiendo lo desconocido como conocido, podamos preparar un camino de investigación fácil y directo, incluso en las dificultades más intrincadas que se quiera” (Descartes, 1984, p. 161).

[10] Ver en el apartado “Una historia de la simbolización” de Puig y Rojano (2004) cómo la creación del actual sistema de signos del álgebra combina elementos del sistema de signos de Viète y del de Chuquet-Bombelli, pero cómo a cada uno de ellos le falta una característica, que el otro posee: en el caso de Viète, las especies se representan mediante abreviaturas de sus nombres, en vez de mediante números, lo que no permite el cálculo en la expresión; en el caso de Chuquet-Bombelli, no hay ningún signo para representar las cantidades, sólo se representa de qué especie es una cantidad, lo que impide representar más de una cantidad con signos distintos.

[11] La edición canónica es la de Tannery (1893). Hay una traducción castellana reciente en Nívola (Diofanto de Alejandría, 2007).

[12] Las cinco primeras partes no aparecen como capítulos en el libro.

[13] Las traducciones latinas de Gerardo de Cremona (Hughes, 1986) y de Robert de Chester (Hughes, 1989) sólo llegan hasta aquí. La de Robert de Chester titula este capítulo de transacciones mercantiles “Regula de tribus”, es decir, “Regla de tres”; de hecho, los problemas planteados están todos resueltos mediante una regla de tres.

[14] Moreno (Al-Jwarizmi, 2009) traduce este capítulo como “Capítulo de geometría”. Rosen (1831) y Rashed (2007) traducen ambos por “medida”. En el texto árabe la palabra que aparece es *masāhat*, que significa medición, área; la palabra árabe que se usa para geometría es *handasa*. Solomon Gandz traduce *masāhat* por “área” en el texto en que mantiene que este capítulo del libro de al-Khwārizmī es simplemente una versión del *Mishnat ha Middot*, la primera geometría escrita en hebreo alrededor del año 150, y lo demuestra traduciendo el texto de al-Khwārizmī como apéndice a su edición y traducción inglesa del texto hebreo del *Mishnat ha Middot*, y comparando ambos textos (Gandz, 1932). Por supuesto que Roshdi Rashed opina, por el contrario, que el *Mishnat ha Middot* es un texto mucho más tardío, que depende de fuentes árabes, y que al-Khwārizmī no lo usa (Rashed, 2007, p. 57).

[15] Este capítulo y el siguiente que tratan de problemas de repartos de herencias y devolución de dotes, siguiendo lo establecido por la ley islámica, ocupan la mitad del libro, y están desglosados en varios capítulos, que no detallo aquí.

[16] En la edición de Rashed, el texto árabe está en las páginas impares y su traducción francesa en las páginas pares; en las citas, indico ambas páginas.

[17] Las fracciones, cuando no se especifica más, son fracciones propias, por tanto, menores que la unidad. De hecho, en la matemática árabe se llamaban fracciones “expresables” las fracciones unitarias, que además eran “expresables” en el sentido de que la lengua árabe tiene palabras para expresar esas fracciones; las otras fracciones se llamaban “inexpresables” o “sordas”, calificadas con la misma palabra que también se usaba para calificar los números que nosotros llamamos “irracionales”: *asamm*.

[18] Como mi conocimiento de la lengua árabe es limitado, la versión castellana del texto de al-Khwārizmī la he compuesto utilizando el texto árabe de Rashed (2007), que está construido utilizando todos los manuscritos que actualmente se conocen como describo en Puig (2008b), su traducción francesa, y la traducción latina de Gerardo de Cremona editada por Hughes (1986), que se supone que es más cercana al texto original de al-Khwārizmī que cualquiera de los manuscritos árabes que se conservan. No utilizo la traducción castellana de Moreno, aparecida en Nívola en 2009, por dos motivos: porque está hecha a partir del único manuscrito árabe que se había editado y traducido antes del trabajo de Rashed (2007), pero, sobre todo, porque ha adoptado decisiones de traducción contrarias a las que yo arguyo que son necesarias para no ser anacrónicos, y poder entender los conceptos algebraicos de al-Khwārizmī.

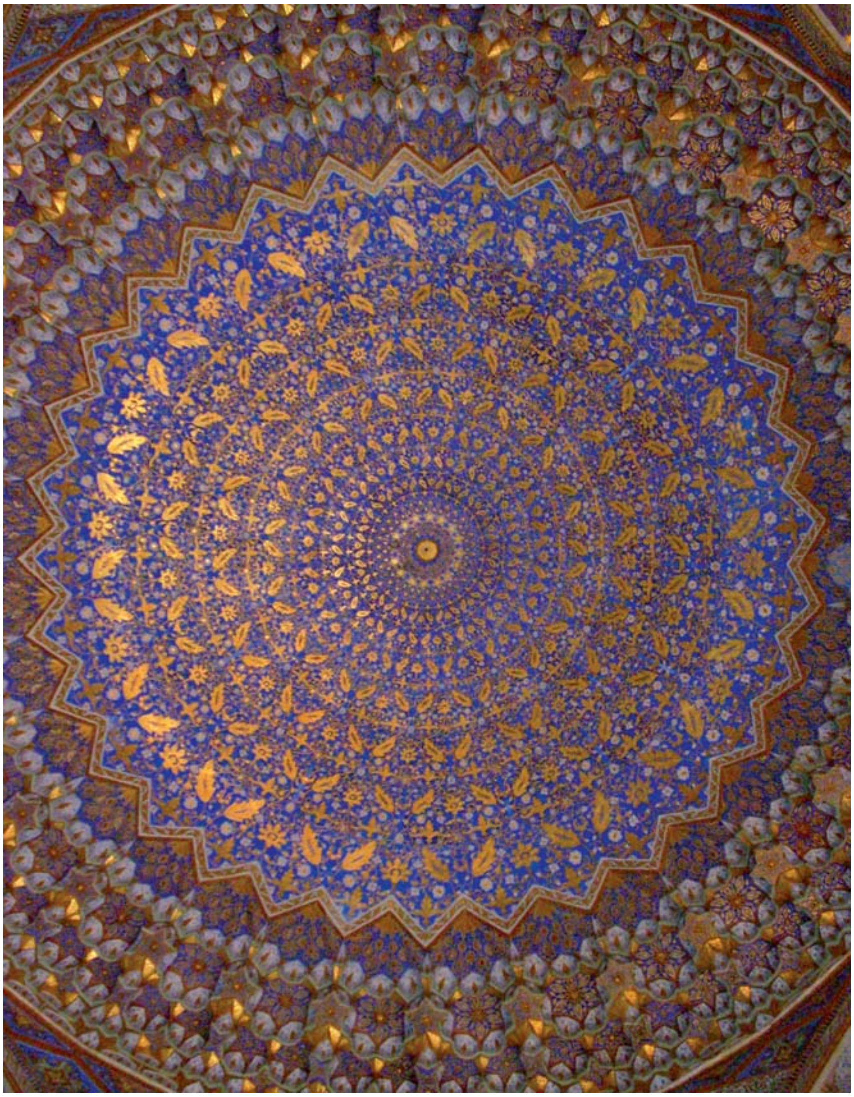
[19] Fuera del significado técnico en el álgebra, *māl* en árabe significa ‘fortuna’, ‘patrimonio’, ‘cantidad de dinero’, ‘bien’.

[20] Así aparece en los tres primeros libros en que se trata el álgebra en castellano, escritos por Marc Aurel, Pedro Nunes y Pérez de Moya, y todos ellos publicados en el siglo XVI.

[21] Robert de Chester, que también tradujo en el siglo XII el libro de al-Khwārizmī, tradujo *māl* por *substantia*. Un caso más curioso es el de Mordecai Finzi, que tradujo al hebreo en el siglo XIV el álgebra de Abū Kāmil (Levey, 1966). Mordecai Finzi era probablemente un judío español o que trabajaba en España ya que usó una palabra castellana transliterada al hebreo, y no una palabra hebrea para traducir *māl*: "algo" (אלגו). Quienes se han preocupado de distinguir *māl* de "cuadrado" han usado en inglés "treasure", "fortune", "wealth", "possession"; en francés, "bien" (así lo hace, por ejemplo, Ahmed Djebbar en su libro de 2005 *L'algèbre arabe. Genèse d'un art*), "possession"; en alemán, "Vermögen"; palabras que todas ellas tienen el significado de "cantidad de dinero". Rashed, aunque menciona la especificidad del término *māl* como término del lenguaje del álgebra, lo traduce por "carré", pero lo distingue de la figura geométrica escribiendo *carré*, en cursiva, cuando traduce *māl*, y sin cursiva cuando traduce *murab*^{c}. Rosen traduce *māl* por 'square', y lo que hace para distinguir *māl* de *murab*^{c} es traducir esta última palabra por 'quadrate'.

[22] Es interesante señalar, de paso, que Diofanto habla de las especies de números dos veces, lo que Viète hará de forma explícita en su *In artem Analyticen Isagoge*. En la definición de las especies de números por la que comienza, éstos son números dados, que se clasifican en formas, en especies: "[…] todos los números están compuestos por una determinada cantidad de unidades, admitiendo claramente cualquier agregación hasta el infinito. De manera que, entre ellos, los hay que son cuadrados (*tetragōnōn*), resultantes de la multiplicación de un número denominado lado (*pleurà*) del cuadrado por sí mismo […]" (Diofanto, 2007, p. 18). Luego dice que "se sabe que cada uno de aquellos números recibe una designación más breve cuando es un elemento genérico del cálculo aritmético" (Diofanto, 2007, p. 18), e introduce las abreviaturas de los nombres de las especies. Diofanto le cambia el nombre a la especie que primero ha llamado "cuadrado", cuando se trata de elementos de la teoría aritmética: "Denominaré así *dynamis* al cuadrado (*tetragōnos*) y lo denotaré mediante una letra Δ con un superíndice Υ, es decir, Δ^{Υ} [las dos primeras letras griegas de la palabra *dynamis*]" (Diofanto, 2007, p. 19). La lista de especies de números de Diofanto continúa con el cubo, y las combinaciones de cuadrado y cubo, cuadrado-cuadrado, cuadrado-cubo y cubo-cubo, y se completa con "el número a secas, que no posee ninguna de estas propiedades y consta de una cantidad de unidades indeterminada [que] se llamará simplemente número (*arithmòs*)" y "aún queda otro signo para denotar una cantidad determinada y constante" [formado por las dos primeras letras de la palabra griega *monás*, que significa "unidad"] (Diofanto, 2007, p. 19). Diofanto también define las especies inversas de éstas por analogía con cómo se construyen en la lengua griega los nombres de las fracciones unitarias a partir de los nombres de los números: de *arithmòs*, *arithmostón*; de *dynamis*, *dynamostón*; etc.

[23] En Puig (1998, 2008a) he explicado cómo las operaciones del cálculo están concebidas para transformar cualquier ecuación a una de las formas canónicas.



Madrasa Ulugbek de Samarkanda (Uzbekistán). Foto: Marisa Fernández

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Al-Jwarizmi, M. b. M. (2009). *El libro del Álgebra*. Traducción, introducción y notas de Ricardo Moreno Castillo. Madrid: Nívola.

Descartes, R. (1701). *Opuscula posthuma physica et mathematica*. Amsterdam: Typographia P. & Blaev J.

Descartes, R. (1984). *Reglas para la dirección del espíritu*. Introducción, traducción y notas de Juan Manuel Navarro Cordón. Madrid: Alianza Editorial.

Descartes, R. (1996). *Regulæ ad Directionem Ingenii.* En *Œuvres de Descartes*. Tome X. Édition de Charles Adam et Paul Tannery. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Diofanto de Alejandría (2007). *La Aritmética y el libro Sobre los números poligonales*. Versión en castellano, introducción, notas y apéndices de Manuel Benito Muñoz, Emilio Fernández Moral y Mercedes Sánchez Benito. Tomo I y Tomo II. Madrid: Nívola.

Djebbar, A. (2005). *L'algèbre arabe. Genèse d'un art*. Paris: Vuibert / Adapt.

Gandz, S. (Ed. trans.) (1932). The Mishnat ha Middot, the First Hebrew Geometry of about 150 C. E., and the Geometry of Muhammad ibn Musa al-Khowarizmi, the First Arabic Geometry <c. 820>, Representing the Arabic Version of the Mishnat ha Middot. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*. Abteilung A: Quelle, 2. Band. Berlin: Julius Springer

Høyrup, J. (1991). 'Oxford' and 'Cremona': On the relations between two versions of al-Khwârizmî's Algebra. *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter*. 3. Række: Preprint og Reprints nr. 1.

Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's translation of al-Khwārizmī's al-jabr: A critical edition. *Mediaeval Studies 48*, 211-263.

Hughes, B. (1989). *Robert of Chester's translation of al-Khwārizmī's al-jabr: A new critical edition*. Boethius, Band XIV. Stuttgart, Germany: Franz Steiner Verlag.

Klein, J. (1968). *Greek Mathematical Thought and the Origins of Algebra*. Cambridge, MA: MIT Press. [Reprinted in New York: Dover, 1992.]

Levey, M. (ed.) (1966). *The Algebra of Abû Kâmil, in a Commentary by Mordecai Finzi.* Hebrew text and translation, and commentary. Madison, WI: The University of Wisconsin Press.

Polya, G., 1945, *How to Solve It.* (Princeton University Press: Princeton, NJ). [Traducción castellana de Julián Zugazagoitia, *Cómo plantear y resolver problemas.* (Trillas: México, 1965).]

Polya, G., 1962-1965, *Mathematical Discovery. 2 vols*. (John Wiley and Sons: New York).

Puig, L. (1994). El *De Numeris Datis* de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos. *Mathesis,* 10, pp. 47-92.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas.* Granada: Comares.

Puig, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131). México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, y A. Vallecillos (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108)*.* Granada: Universidad de Granada.

Puig, L. (2008a). History of algebraic ideas and research on educational algebra. In M. Niss (Ed.) *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education. CD-version*. Roskilde: IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University.

Puig, L. (2008b). Historias de al-Khwārizmī (2ª entrega). Los Libros. *Suma*, 59, pp. 105-112.

Puig, L. y Navarro, T. (2010). Protoálgebra en Babilonia (2ª entrega). Métodos de solución. *Suma*, 64, pp. 97-104.

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Boston / Dordrecht / New York / London: Kluwer Academic Publishers.

Rashed, R. (Ed.) (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre.* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Rashed, R., y Vahebzadeh, B. (1999). *Al-Khayyâm mathématicien*. Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Rosen, F. (1831). *The algebra of Mohammed Ben Musa.* London: Oriental Translation Fund.

Tannery, P. (Ed.) (1893). *Diophanti Alexandrini opera omnia cum graecis commentariis* (Reprinted 1974, Vols. 1-2). Stuttgart, Germany: B. G. Teubner.

Vaulézard, J.-L. (1986). *La nouvelle algèbre de M. Viète*. Paris: Fayard.

Vieta, F. (1591). *In artem Analyticem Isagoge*. Turonis: Iametium Mettayer Typographum Regium.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en julio de 2010 y aceptado en octubre de 2010 para su publicación