suma+ 65
Noviembre 2010, pp.49-52

Cuadraturas de cruces, letras y estrellas

En el principio…

Hay ocasiones en las que los proyectos que trabajamos en el taller no están pensados inicialmente por el profesor sino que provienen de situaciones que nos plantean los alumnos. El caso de los puzzles que vamos a proponer hoy es un claro ejemplo de esto.

Uno de los días en que tocaba taller se nos presentó un alumno con un puzzle formado por cuatro piezas iguales, como las que aparecen en la imagen siguiente.

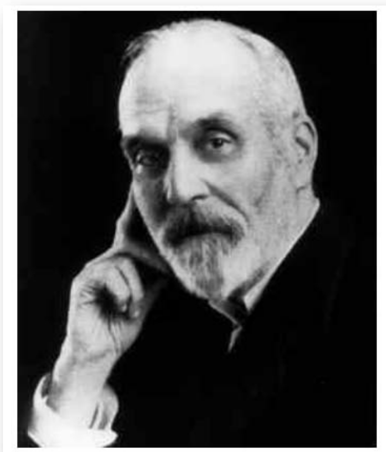
Imagen 1

Muy orgulloso, el alumno planteó que era posible hacer con todas las piezas tanto un cuadrado como una cruz. A la pregunta de qué tipo de cruz se obtenía, el alumno nos comentó que era una cruz rara, que no era normal porque tenía los cuatro brazos iguales como la Cruz Roja. Tras comentarle que eso se llamaba cruz griega y que estaba formada por cinco cuadrados iguales, el puzzle fue pasando de mano en mano para que lo manipulara el resto de los compañeros.

El puzzle ya nos era conocido pues aparecía en un libro de Dudeney y podía ser aprovechado cuando trabajáramos los polígonos en el bloque de Geometría, por lo que en su momento volvimos sobre él.

Henry Dudeney

Henry Ernest Dudeney (1857-1930), inglés, fue uno de los creadores de acertijos y pasatiempos matemáticos más importantes de finales del siglo XIX y principios del XX. Fue contemporáneo de otro gran inventor de problemas matemáticos, Sam Loyd, llegando durante algún tiempo a colaborar en publicaciones, hasta que esta relación se rompió cuando Dudeney acusó a Loyd de publicar con su nombre problemas que él había inventado.



Grupo Alquerque de Sevilla

Constituido por:

Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos@revistasuma.es

Autodidacta y sin más formación que una instrucción básica, tenía un especial interés por las matemáticas y su historia, que las estudió en su tiempo libre. Dudeney aprendió a jugar ajedrez a una edad temprana y se convirtió en un experto creador de problemas de ajedrez.

Durante más de veinte años tuvo con gran éxito una sección de puzzles matemáticos en la revista mensual *The Strand Magazine*. En español están editados *Los acertijos de Canterbury, Diversiones matemáticas* –publicado en tres partes: *El acertijo del mandarín, Los gatos del hechicero* y *El misterio del muelle*– y *Acertijos, desafíos y tableros mágicos.*

Los puzzles de la cruz griega

Revisando el libro *El acertijo del mandarín*, que contiene una recopilación tomada del libro de Dudeney *Amusements is Mathematics*[1], encontramos todo un apartado dedicado a este juego con el título de “Puzzles de la cruz griega”. En él se nos explica la historia de este puzzle.

Desde hace más de 3000 años se conoce el llamado *Problema hindú*, y que, según cuenta Dudeney en el libro citado, forma parte del sello de la Universidad de Harvard, en el que se divide una cruz griega en cinco trozos que permiten así mismo construir un cuadrado, tal como vemos en la imagen 2.

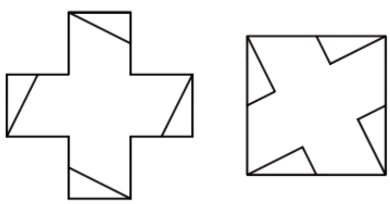


Imagen 2

Aproximadamente a mediados del siglo XIX comienza a plantearse el reto de conseguir dividir la cruz griega en cuatro trozos de forma que con ellos se pueda construir también un cuadrado. Una de las primeras disecciones que aparecieron la podemos ver en la imagen 3 y cumple que las cuatro piezas son iguales.

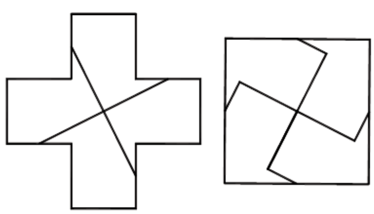


Imagen 3

Podemos comprobar que este puzzle coincide con el que nos presentó el alumno. Además de tener las cuatro piezas iguales tiene la peculiaridad de obtenerse el símbolo de la esvástica, un símbolo que, antes de ser desprestigiado por los nazis, era considerado desde muy antiguo como símbolo de la buena suerte y puede encontrarse en las pirámides de Egipto, en restos de la cultura Maya, en las ruinas de Troya o en restos antiguos de China o India, entre otros.

Dudeney nos explica en su libro que se puede dividir la cruz griega, para obtener un cuadrado a partir de sus piezas, de infinitas maneras y lo presenta de la siguiente forma.

Partimos de una cruz griega y en un acetato o film transparente, dibujamos cuatro cuadrados de forma que el lado ***cd*** del cuadrado tenga la misma longitud que la medida que va de ***a*** hasta ***b*** en la cruz.

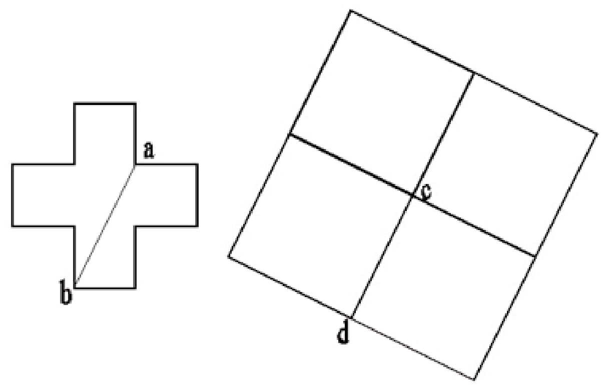


Imagen 4

Basta pasar el acetato por encima de la cruz manteniendo siempre la línea ***cd*** paralela a la línea ***ab*** para obtener una división cualquiera de la cruz que se puede cuadrar.

En concreto Dudeney plantea que si se coloca el punto ***c*** sobre el ***a*** se obtiene la disección de la imagen 5 que es la única en la que, si consideramos que la cruz griega está construida en papel o cartulina, puede dividirse en cuatro trozos con solo dos cortes de tijera.

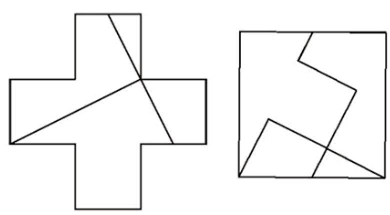


Imagen 5

Más expresamente, Dudeney indica que si las divisiones del corte se producen colocando el punto c dentro del cuadrado interior de la cruz griega, que aparece punteado en la imagen 6, siempre se puede obtener una disección de la cruz griega en cuatro trozos que componen a su vez un cuadrado. Él indica que incluso se podría conseguir una división en cuatro piezas colocando el punto c en el punto ***e*** de la imagen y señala que las uniones en ***a*** y ***f*** podrían ser tan finas como se quiera, pero en nuestra modesta opinión es imposible construir ese puzzle sin que al final tengamos seis piezas en lugar de cuatro.

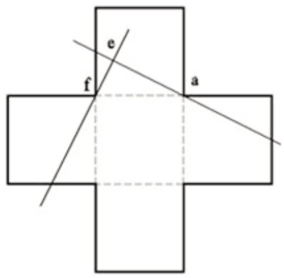


Imagen 6

Investigando con Dudeney en el aula

Después de hablar sobre Dudeney y explicar su procedimiento para obtener cuadraturas de una cruz griega planteamos la siguiente investigación.

¿Cuántas disecciones distintas se pueden encontrar, utilizando el procedimiento de Dudeney, que cumplan las siguientes restricciones:

- Las líneas de cortes únicamente pasen por los vértices o los puntos medios de los lados de la cruz griega.
- El puzzle resultante sólo tenga cuatro o cinco piezas?

Los alumnos en el taller se lanzaron a obtener disecciones aplicando las reglas dadas sin orden ni concierto. Esto, como les hemos explicado varias veces, hace imposible realizar un trabajo exhaustivo que nos permita encontrar todas las posibilidades. Por ello tuvimos que lanzar varias preguntas para reconducir el trabajo:

- ¿Cuáles son todas las posibles líneas de corte que pasan por los vértices o los puntos medios de los lados de la cruz?
- ¿De todas esas líneas, cuáles dan disecciones distintas?
- ¿Cómo se forma el cuadrado con cada una?

Teniendo en cuenta cómo debe ser el lado del cuadrado resultante que, como ya vimos en la imagen 4, comenzamos a trazar líneas como respuesta a la primera pregunta y nos apareció el entramado que podemos ver en la imagen 7. A partir de todas esas líneas teníamos que seleccionar las que respondían a la segunda pregunta.

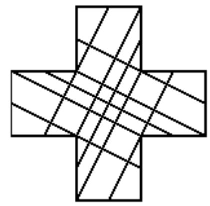
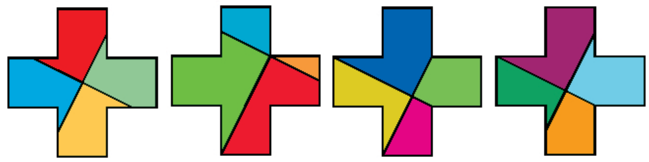


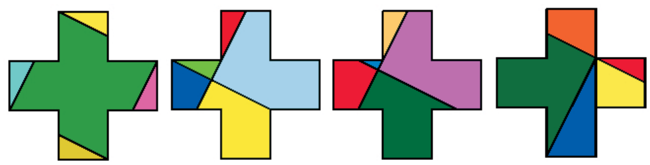
Imagen 7

Una vez estudiados los casos nos aparecieron cuatro disecciones distintas de cuatro piezas. En ellas estaban incluidas, como no podía ser de otro modo, las dos presentadas por Dudeney en su libro.

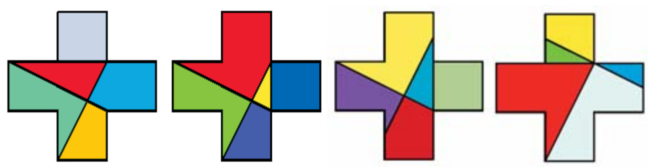


C1 C2 C3 C4

Como también quisimos trabajar con los puzzles formados por cinco piezas, en esta ocasión encontramos bastantes más casos.



C5 C6 C7 C8

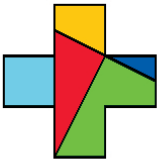


C9 C10 C11 C12

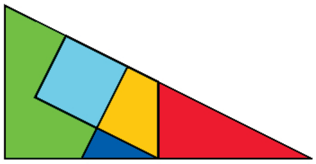
Para distinguir las distintas disecciones les hemos asignado un número. Algunas de ellas se obtienen cortando en dos partes una de las piezas de las disecciones de cuatro trozos. Podemos observar que a partir de la C2 se obtienen la C8 y C12, de la C3 salen la C9 y C10 y de la C4 resulta la C11.

Comentar también que si trabajáramos con la “finura” que comentaba Dudeney en su libro, las opciones C6 y C7 se podrían considerar formadas por sólo cuatro piezas.

De todas las disecciones que se construyeron, la C13, que aparece a continuación, que se obtiene a partir de la C2, es a la que más juego le hemos encontrado, pues como se puede ver en las imágenes siguientes, no sólo permite formar una cruz griega o un cuadrado sino también se pueden construir: un triángulo rectángulo, un romboide, un trapezoide, un trapecio isósceles y un pentágono.


C13


Cuadrado


Triángulo rectángulo


Romboide


Pentágono

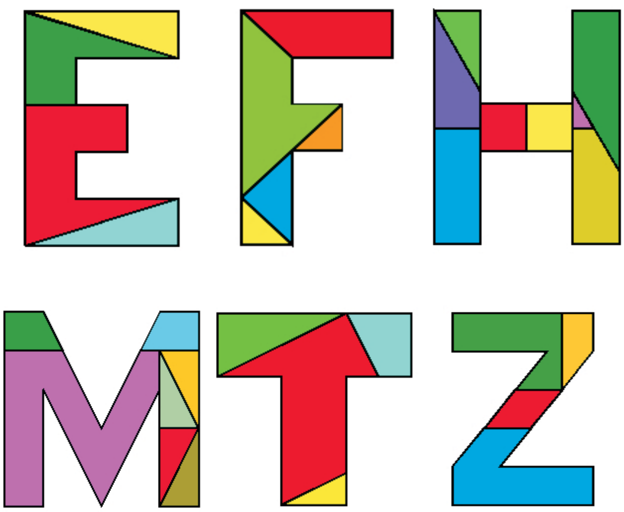

Trapecio isósceles


Trapezoide

Cuadrando letras

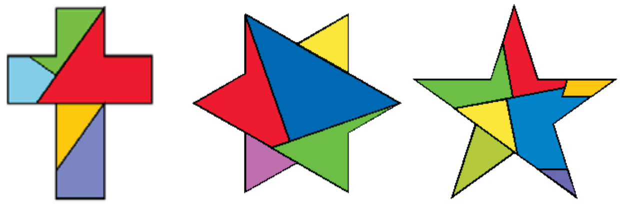
El trabajo de las cruces y la lectura de los escritos de Dudeney nos hicieron seguir ahondando en el tema de las cuadraturas. ¿Cualquier figura se puede dividir en partes para formar un cuadrado? En clase ya habíamos trabajado con algunos tangrams correspondientes a letras, por ejemplo el tangram F. Por ello alguien planteó la línea para ampliar la investigación: ¿qué letras del abecedario se puede diseccionar para formar un cuadrado?

La búsqueda de respuestas a la anterior pregunta dio lugar a otro trabajo curioso. El proceso de trabajo fue similar al anterior y para no extendernos, las cuadraturas de las letras que hemos encontrado, por ahora, son: E, F, H, M, T y Z. A continuación aparecen algunas de las disecciones de dichas letras, aunque de algunas de ellas ha aparecido más de una solución.



Ya puestos a cuadrar…

Esta entrega de cuadraturas la queremos completar con estas tres llamativas disecciones: las cuadraturas de una cruz latina y de las estrellas de cinco y seis puntas.



Las cuadraturas de todos estos puzzles os los ponemos de deberes y entretenimiento y si alguno se resiste, o la construcción no nos ha salido todo lo bien que quisiéramos, las plantillas y soluciones de todos ellos se pueden encontrar en la web del Grupo Alquerque: http://www.grupoalquerque.es/

Si alguien cree que con los artículos que hemos dedicado a las cuadraturas a lo largo de la historia de esta sección está todo trabajado, puede visitar la página *Geometric Dissections* de Theobald Gavin en donde puede alucinar viendo lo que puede dar de si esta idea.
http://home.btconnect.com/GavinTheobald/Index.html

NOTAS

1 Existe una versión web de este libro en inglés que puede consultarse en la página http://www.gutenberg.org/files/16713/16713-h/16713-h.htm.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dudeney, H. E. (1993). *El acertijo del Mandarín*. Madrid: Zugarto ediciones.

Hans, J. A., Muñoz, J., Fernández-Aliseda, A., Blanco, J. y Aldana, J. (2003). "Rompecabezas del Teorema de Pitágoras", Suma, 43, pp. 119-122.

Hans, J. A., Muñoz, J., Fernández-Aliseda, A. (2005). "Cuadraturas de polígonos regulares", Suma, 48, pp. 65-68.

Van Delft, P., Botermans, J. (1995). *Creative puzzles of the World*. New York: Key Curriculum Press.

JUEGOS ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2010 y aceptado en septiembre de 2010 para su publicación.