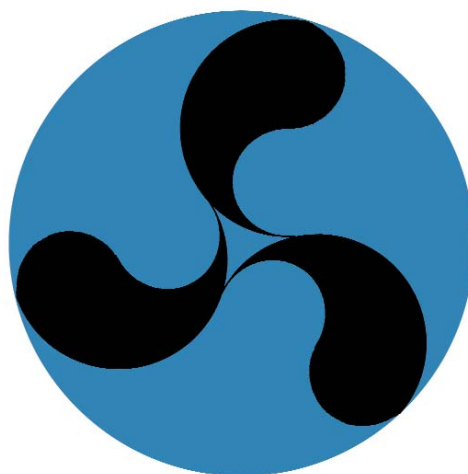


Triskel:
Símbolo cíclico,
Rueda solar,
Amuleto de Arian(Ro)ad:
Corona de plata,
A espaldas de Pendragón:
De las osas protector,
Matador del fiero Ladón:
Guardián de áureas manzanas,
Por las hadas cultivadas,
En el reino de Ávalon

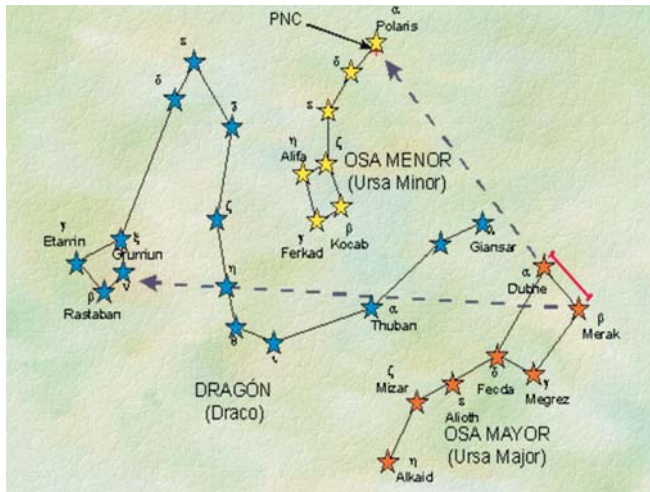
Ro:



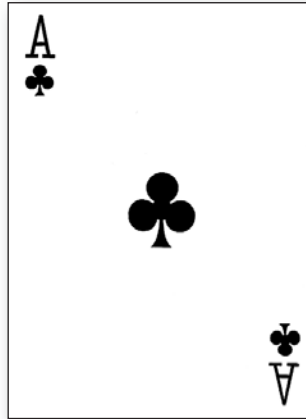
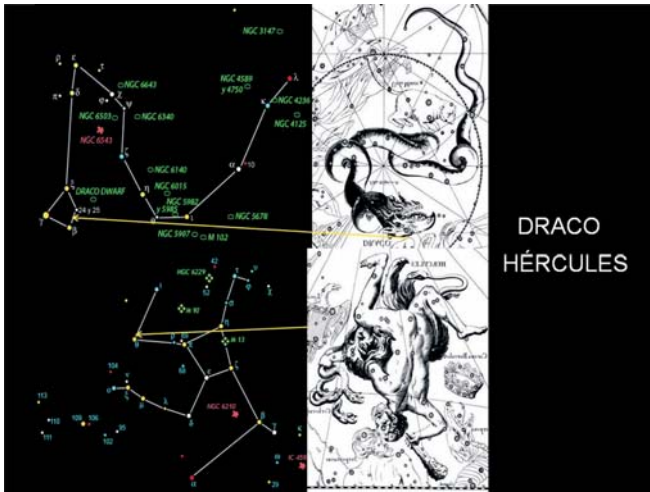
Seguir con la rueda de las coronas es una restricción que me impulsa a saltármela. En el número anterior hice un pequeño amago: a punto estuve de titular el artículo como “La rueda de los años”, me sometí a la condición y pasé a “La corona anual”. Ahora, tomando impulso en aquel salto que no di, salto a la rueda, una rueda que evoca a la corona porque es dorada y es cíclica y porque es la molécula básica de un anillo. Abro la restricción: coronas, ruedas, anillos, círculos, ciclos, grupos cíclicos:

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana “Al-Khwarizmi”
ariadna@revistasuma.es



Un manzano, con tres manzanas de oro, siete hespérides y un dragón:



El triskel tiene simetría cíclica de orden 3. Los giros que dejan invariante la forma del triskel forman un grupo isomorfo al de las clases residuales módulo 3, clases que son la base del código cesáreo, cifrado y descifrado en la aritmética modular, en un reloj analógico de tres horas.

El triskel es el símbolo de la suerte de la mitología céltica, nosotros tenemos otro símbolo de la suerte similar al triskel: el trébol, que es un grupo diédrico también de tercer orden:

Es por todas estas cosas que tanto el triskel como el trébol son símbolos de buena suerte, ¡falta nos hace! La suerte está relacionada con el azar así que los problemas propuestos en este número girarán en torno a la aritmética modular, los grupos de simetría y la probabilidad.



Héroes y dragones: la leyenda se repite cíclicamente. No aprendemos

Problemas propuestos

Moneda

Problema propuesto por M^a Carmen Martin para ESTALMAT C.V.

a. Al lanzar una moneda regular ¿es igual de fácil obtener cara que obtener cruz?

Lanzamos una moneda regular 100 veces: ¿cuántas caras y cuántas cruces, más o menos, esperamos obtener?

Si lanzamos dos monedas distintas de forma consecutiva 100 veces, ¿qué resultados podemos conseguir y cuántas veces esperamos que ocurra cada uno de ellos? Expresa también el resultado en porcentajes y en tantos por uno.

¿Y si lanzamos tres monedas? ¿Existe alguna relación con el primer caso?

Si dos jugadores A y B juegan de modo que, al lanzar dos monedas, si salen los dos resultados iguales gana A y si salen distintos gana B, ¿es equitativo el juego?

¿Y si la moneda estuviera trucada y hubiera más probabilidad de que saliera cara?

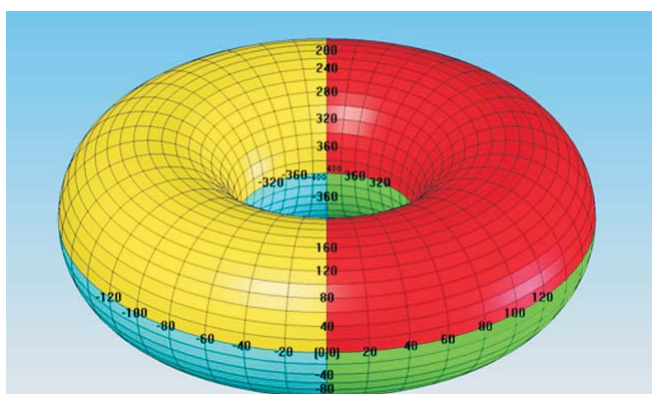
b. Dos jugadores apuestan a cara o cruz. El jugador que primero llega a cinco puntos gana la apuesta. El juego se interrumpe en un momento en que A tiene 4 puntos y B tiene 3. ¿Cómo deben repartir la cantidad apostada para ser justos?

Problema con historia

Construye cuatro triángulos aritméticos de 20 filas. En el primero colorea en rojo los números pares, en el segundo colorea en verde los múltiplos de 4, en el tercero colorea en amarillo los números congruentes con 3 módulo 6, y por último, en el cuarto elige tú el color y las condiciones.

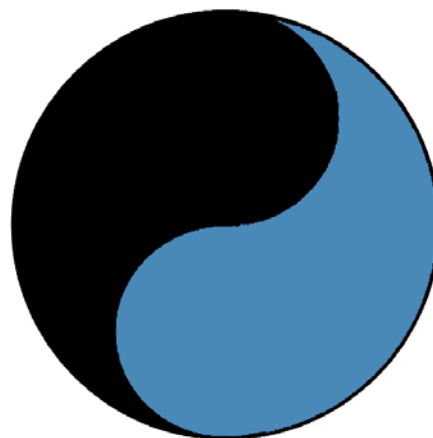
Flotador

Toma un flotador de forma tórica. Dibuja sobre él el círculo exterior máximo y un círculo transversal, análogamente a la figura adjunta. Toma el toro como espacio bidimensional; considera los círculos dibujados como ejes cartesianos; pon marcas en estos círculos para que funcionen como relojes modulares de 5 horas; señala con pegatinas los puntos (0,4) y (4,3); dibuja la recta $y=2x+3$; ¿podrías dibujar todas las rectas paralelas a ella?



Ying-yang

El Ying-Yang, relacionado geoméricamente con la rueda solar céltica, muestra dos mitades del círculo, congruentes y simétricas respecto al centro del círculo circunscrito. ¿Serías capaz de cortar dos mitades de manzana de manera que quedaran simétricas especularmente y que además no fueran congruentes? (Puedes utilizar manzanas del Paraíso, del Jardín de las Hespérides o de la isla de Avalon, si tienes dificultades para encontrarlas, te bastará una manzana golden, que también es de oro.)



Soluciones a los problemas del número anterior

Pensando en Infantil



La pequeña Clara jugaba con sus relojes y cantaba los versos del venerable Wang Wei. Clara tenía una docena de relojes viejos que no tenían ninguna maquinaria. Había dibujado en ellos números, letras, figuritas o colores. Movía sus manecillas y las canciones y los poemas se podían escribir de mil maneras distintas. A veces las cantaba, a veces las pintaba, a veces las escribía.

Tomo el reloj de las vocales y, con su rostro iluminado, decía "Con la a: Santada sala an la racandata aspasara ..." y seguía, así, hasta el final de la canción. *Movía su reloj y la oías: "... teñe el leed e entene en lergue quente...". Movía nuevamente su reloj y continuaba, poniendo ahora cara de ogro, "...On lo hondoro dol bosco..." Movié finalmente su reloj para terminar diciendo: "...lu lunu cluru vuunu u ulumunurmu" Hasta que le dolían los labios apretados y, como a ella le gustaba decir: "Tenía que parar para reírse sin parar."*

Como las niñas y los niños de infantil juegan a entender lo oculto, así funciona el reloj de las vocales. Cambia cada vocal por la que elijas en tu reloj. Es fácil de codificar, sin embargo, se tarda más en decodificar.

Pensando en Primaria

Tomó una cinta del pelo la enrolló en un palito y escribió sería, letra a letra, la canción sobre la cinta. Satisfecha, desenrolló la cinta y la miró fijamente. Ponía:

SDARD SROUT NOOHR BEEBU AELAE AEEIP AEDOL
CEOAO NLENR NURNS NCTET LYNA A NNDSA
OLAAE MMTOL OASAL EORN L DEQDS ACVAI
EALAN EUÑAN UGTA ULUIA LLIIN

Un tanto preocupada, la ató a la rama del almendro, para ver si el viento entendía el misterio."



La *scitala* es un viejo sistema espartano de ocultar mensajes. Se enrolla una cinta alrededor de un bastón (la *scitala*), dejando que cada vuelta sea visible. Escribimos el mensaje a lo largo del bastón. Cuando desenrollamos la cinta quedan las letras desordenadas.

Para practicar en el aula, usamos pequeños listones de perfil cuadrado. Enrollamos una tira de papel a su alrededor que fijamos con chinchetas. Escribimos a lo largo de una cara del prisma. Cuando se termina el papel giramos el listón o continuamos escribiendo en la siguiente cara, letra a letra.

Existe un modo de simular el resultado con papel y lápiz. Basta con anotar el mensaje, letra a letra, en columnas. Por ejemplo, cada letra en una columna de 5 casillas (cinco caras en nuestra *scitala*).

1ª	2ª	3ª	4ª	...
S	D	A	R	D
E	A	E	E	I
N	S	N	C	T
T	O	L	O	A
A	L	A	N	...

Para leer el mensaje cifrado hay que saber el número de líneas que usamos en nuestra *Scitala*, el periodo de nuestro reloj y leer posición a posición.

Pensando en Secundaria

Un tanto dubitativa recitó los números:

19 4 13 20 0 3 0 19 15 11 0 4 13 11 0 18 4 2 15 13 3 8 20 0
4 19 16 4 19 21 18 0 20 0 14 15 4 11 11 0 21 3 25 4 13 20
15 13 15 21 13 11 0 18 6 15 2 0 13 20 15 4 13 11 0 7 15 13
3 21 18 0 3 4 11 1 15 19 17 21 4 13 0 3 8 4 11 15 19 0 1 4
11 0 11 21 13 0

Pareció tranquilizarse. Tomó otro de sus relojes e hizo girar una de sus manecillas. Leyó el número 3, "El número del emperador que nunca fue emperador" y escribió la canción así:

VHPWDGDV RÑDHPÑDUHF RPGLWDHVS
HVXUDWDQRHÑÑDXGBHPWRPRXPÑD
UJRFDPWRHPÑDKRPGXUDGHÑERV TXH
PDGLHÑRVDEHÑDÑXPDFÑDUDYLPH
DLÑXOLPDUOH

Dobló el papelito y lo metió en el hueco del álamo.

Introduzcamos los números. Una sencilla manera será cambiar letras por números.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	



Si no separas los números tendrás muchos problemas. También puedes cambiar el orden alfabético o usar un orden azaroso.

Usa un reloj para hacer cambios en las asignaciones. Coloca dos círculos concéntricos de distinto radio divididos en partes iguales (tantas partes como letras quieras usar). Unimos los dos círculos mediante un eje que permita hacer girar el pequeño dentro del grande. Colocamos el alfabeto en uno de ellos y los números en el otro. Bastará elegir una posición para cambiar los números asignados para cada letra.

Pensando en Secundaria

Miró al sol y finalmente colocó tres de sus relojes en POE, para que convertir los versos de la canción de Wang Wei en indescifrables:

SQJOHPHSAOICZEHSGBHXIETHTT
HYHOXPCSTZOPJHÑSQJDQJQAQVV
DGPBXESQAOLEBHKGESSOQDWGJIC
OHXSOEHEQSOPZYCOGAOVPKMTBI
PWOKAMCOVBS

Los anotó en una cinta de papel. La dobló en forma de pentágono y la puso sobre una hoja grande y dejó que el agua de la atarjea se lo llevara lejos.”

Si colocamos el número 3 sobre la letra “A”, tendremos el cifrado de César, el primer emperador romano que cambiaba cada letra del alfabeto por aquella que estaba tres posiciones por delante y cuando el alfabeto se terminaba volvía a la posición inicial.



Podemos usar un Rotador, ideado por el gran arquitecto renacentista Leon Battista Alberti, donde los círculos concéntricos tienen los alfabetos anotados.

Así, podemos sumar letras con letras.

Usando la aritmética modular, cualquier número entero tendrá asignada una letra. Tomemos un alfabeto de 27 letras. Diremos que el periodo del cifrado será 27. ¿Que letra le corresponde al número 100, por ejemplo?

El resto de la división entre 100 y 27.

$$100 = 3 \cdot 27 + 19.$$

El resto de dicha división es 19, por tanto, el número 100 será la letra “S”.

El cifrado de César será “sumar” a cada letra del mensaje la letra “D”.

Es el mismo razonamiento que empleamos al usar los relojes. Con periodos de 12 para las horas o de 60 para los minutos. Por eso la aritmética modular también se le llama la aritmética del reloj.

Pensando en Bachillerato

Cerró los ojos y silvó la canción: “El albergue entre bambúes”.

Sentada sola en la recóndita espesura
taño el laúd y entono un largo canto.
En la hondura del bosque, nadie lo sabe,
la luna clara viene a iluminarme.

Contando con varios relojes podemos realizar el cifrado de Vigenere, que durante muchos siglos se llamó “el indescifrable”.

Usamos distintas posiciones del reloj para cada letra del mensaje. Por ejemplo si usamos clave “POE”, significa que las tres primeras letras del mensaje las cifraremos mediante la “suma” de “P”, “O” y “E”, donde P = 16, O = 15 y E = 4.

Para cifrar se usará la siguiente función:

$$C(x) = \begin{cases} x + 16(\text{mod}27) & \text{si } x \text{ está en posición } 1,4,7,\dots \\ x + 15(\text{mod}27) & \text{si } x \text{ está en posición } 2,5,8,\dots \\ x + 4(\text{mod}27) & \text{si } x \text{ está en posición } 3,6,9,\dots \end{cases}$$

Para el mensaje “EL AZAR”,

$$\begin{aligned} E = 4 &\rightarrow 4 + 16 = 20 \rightarrow T \\ L = 11 &\rightarrow 11 + 15 = 26 \rightarrow Z \\ A = 0 &\rightarrow 0 + 4 = 4 \rightarrow E \\ Z = 26 &\rightarrow 26 + 16 = 42 \rightarrow O \\ A = 0 &\rightarrow 0 + 15 = 15 \rightarrow O \\ R = 18 &\rightarrow 18 + 4 = 22 \rightarrow V \end{aligned}$$

y quedará “TZEOOV”.

Y para descifrar ¿qué función podríamos usar?

EL HILO DE ARIADNA ■



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aranda, P. Damián & De la Fuente, M. (2001). *Matemáticas Naturaleza y Arte*. Córdoba: Junta de Andalucía.
Caballero Gil, P. (2002). *Introducción a la Criptografía*. Madrid: RA-MA

Internet

<http://www.juliagalan.com/ro.pdf>
<http://mitologiacelta.idoneos.com/index.php/316426#Arianrod>

Este artículo fue solicitado por SUMA en enero de 2010 y aceptado en mayo de 2010 para su publicación.