

El arte, en vez de declinar, debe conquistar la esfera de la tecnología.

Otto K. Wagner (1841 – 1918)

Ya hace dieciséis años que la revista *Suma* publicó el artículo *La música y sus materiales: una ayuda para las clases de matemáticas* (Liern, 1994). Desde entonces, los gustos musicales y los contenidos matemáticos de los diferentes planes de estudio han cambiado mucho, pero estos cambios resultan insignificantes si los comparamos con el tercer aspecto que trata el artículo: los materiales.

Es innegable que los estudiantes actuales conviven con la tecnología como nunca lo habían hecho anteriormente. De hecho, han incorporado a sus vidas el material electrónico con tal naturalidad, que a los que pertenecemos a otras generaciones sigue sorprendiéndonos (no sin cierta envidia) su destreza. Si la Música despierta un interés que podemos aprovechar para las clases de Matemáticas, los procesos tecnológicos que hay detrás de ella, pensamos que también pueden utilizarse en el mismo sentido.

La propuesta que hacemos en este trabajo es aprovechar los gustos y las habilidades de nuestros estudiantes para potenciar la comprensión de algunos conceptos que manejan en las clases de Matemáticas, intentando, en la medida de nuestras posibilidades, que dejen de percibir los contenidos de las clases como algo ajeno a sus vidas cotidianas.

De la música en directo al audio digital

El sonido se origina a partir del movimiento de los objetos, por ejemplo un diapasón que vibra al ser golpeado. El movimiento del diapasón genera cambios en la presión del aire que lo rodea. Esta presión, que varía con el tiempo, se propaga por el aire en todas las direcciones y cuando llega a otro objeto (por ejemplo, el tímpano) provoca que éste se mueva de la misma forma que lo hizo el diapasón, sólo que algo más tarde ya que la señal necesita un poco de tiempo para propagarse a través del aire. Así, podemos pensar en el sonido como en una presión que varía con el tiempo. Igual que sucede con las ondas que se producen cuando se tira una piedra en un estanque, las ondas de sonido van debilitándose en amplitud conforme van alejándose de su punto de origen.

José L. Godofredo Pérez

Conservatorio Superior de Música de Valencia "Joaquín Rodrigo"

Teresa León Mendoza

Vicente Liern Carrión

Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

El sonido, como la luz o la energía, es una señal que tiene una variación continua; se trata, por tanto, de una señal analógica que se puede representar mediante una función matemática continua del tiempo, $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$. Esta función se puede discretizar simplemente observándola en una sucesión finita de puntos, $\{f_k\}_{k=1}^N$, y está claro que cuantos más puntos elijamos, más se parecerán la función y la sucesión.

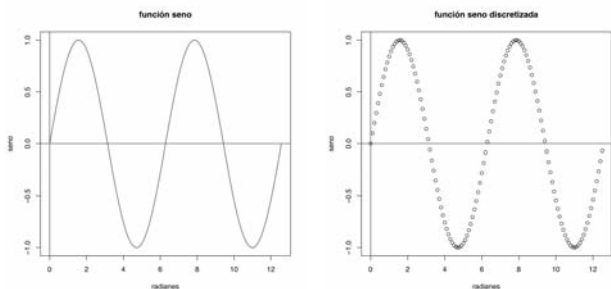


Gráfico de una discretización de la función seno

El audio digital es la representación de señales sonoras mediante un conjunto de datos binarios. Un sistema completo de audio digital comienza habitualmente con un transceptor (micrófono) que convierte la onda de presión que representa el sonido en una señal eléctrica analógica. Esta señal analógica atraviesa un sistema de procesamiento analógico de señal, en el que se puede realizar algunas transformaciones para que se asemeje mucho más a la señal audio original.

...podemos mostrar al estudiante que analizar la periodicidad de una función no sólo es útil para conocer una de sus cualidades (que permite, por ejemplo, dibujarla con más facilidad), sino que en esta propiedad radica la esencia de la música que escuchamos todos los días.

Tras el procesamiento analógico, la señal se muestrea, se cuantifica y se codifica. El muestreo toma un número discreto de valores de la señal analógica por segundo (*tasa de muestreo*) y la cuantificación asigna valores analógicos discretos a esas muestras. La codificación asigna una secuencia de bits a cada valor analógico discreto.

La tasa de muestreo es el número de muestras por unidad de tiempo, generalmente se mide en Hercios o kHz (muestras o miles de muestras, respectivamente, por segundo). Por ejemplo, para tener la calidad de un CD comercial se realiza un muestreo a 44,1 kHz. La telefonía por Internet por lo general tiene velocidades de muestreo de alrededor de 8 kHz. A medida que aumenta la frecuencia de muestreo, mejora la calidad del sonido, sin embargo para el oído humano no tiene demasiado sentido emplear frecuencias de muestreo muy superiores a 40 kHz.

En cuanto a los valores muestreados de la función, éstos se almacenan en el ordenador como enteros, siendo habitual, hasta hace bien poco, adjudicar 16 bits a cada valor. Sin embargo, hoy en día, con la mejora de los equipos informáticos, ya se utilizan 64 bits para aparatos de gran calidad.

El sistema de audio digital suele terminar con el proceso inverso al descrito. A partir de la representación digital almacenada se obtienen el conjunto de muestras que representan. Estas muestras pasan por un proceso de conversión digital-analógica proporcionando una señal analógica que tras un procesamiento (filtrado, amplificación, ecualización, etc.) inciden sobre el transceptor de salida (altavoz) que convierte la señal eléctrica en una onda de presión que representa el sonido.



Esquema del sistema de audio digital

La tasa de muestreo y el número de bits por muestra son dos de los parámetros fundamentales a elegir cuando se quiere procesar digitalmente una determinada señal de audio. Para comprobar la influencia que tienen en la calidad del proceso la tasa de muestreo y el número de bits utilizado, podemos escuchar (en <http://www.music.informatics.indiana.edu/courses/I547>) el mismo fragmento del segundo movimiento del Concierto para oboe de Mozart con diferentes profundidades de bits y frecuencias de muestreo.

Veamos a continuación algunos ejemplos prácticos de los procesos que hemos descrito.

La sustitución eventual del intérprete: el muestreo

Hace poco más de dos décadas era impensable que un músico pudiera disponer en su casa de herramientas técnicas que le permitieran hacer uso de los instrumentos de la orquesta, de un grupo de pop o de cualquier sonido de la naturaleza que

podamos imaginar. En la actualidad, el músico cuenta con herramientas informáticas sencillas y asequibles de las que, a continuación, daremos algunos ejemplos.

En la primera mitad del s. XX, K. Stockhausen (1928 – 2007) inició una corriente, dentro del ámbito de la vanguardia clásica, en la que las composiciones incluían elementos sonoros de instrumentos electrónicos y acústicos, al estilo se le denominó *Música electroacústica*. Sin embargo, hubo que esperar hasta la década de los setenta para que grupos como *Kraftwerk* ('central energética' en alemán) comenzaran a utilizar en sus composiciones los primeros *sintetizadores*, instrumentos de teclado en los que el sonido producido era generado a partir de componentes electrónicos. Desde entonces, la industria electrónica no ha parado de innovar en busca de mejores resultados, tanto en la reproducción del sonido como en su grabación. Aunque hoy en día los primeros sintetizadores han quedado obsoletos, siempre hay quien desea despolvarlos y utilizarlos, por nostalgia quizá.

Algo más tarde que los sintetizadores surgieron los *samplers* (muestreadores). Su aparición a mediados de los ochenta, introdujo una nueva perspectiva en la fabricación de aparatos musicales electrónicos puesto que se abrió un nuevo campo de aplicaciones y prestaciones.



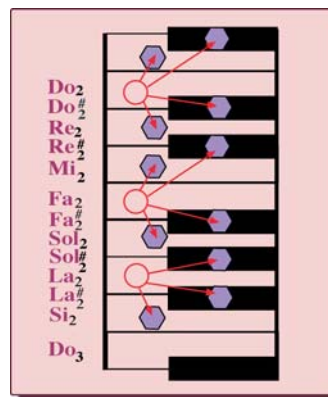
Imagen de un sampler sin teclado

Los samplers son capaces de tomar muestras de cualquier fuente sonora, a través de un micrófono o bien, reproduciendo bibliotecas de samplers, realizadas en estudios de grabación en las mejores condiciones y que luego se comercializan, para que los usuarios puedan tener muestras de cualquier instrumento acústico o electrónico. Con esto, el compositor tiene la posibilidad de escuchar su creación con el timbre de los instrumentos que intervienen en su obra. Desaparece así el inconveniente de algunos compositores antiguos, que nunca oyeron su obra porque no hubo ninguna agrupación orquestal que tuviese interés por montar y estrenar su composición.

El sampler tiene la cualidad de grabar muestras de notas, por ejemplo, de un chelo y asignar dichas notas a la octava correspondiente en el teclado. Desde luego, a pesar de lo que pudiera parecer, la idea no consiste en grabar todas las notas que puede producir un chelo, sino que, se graban algunas y a partir de ellas se obtiene el resto. La razón por la que se hace así es que con ello se consigue reducir sustancialmente el uso de memoria.

Las notas contiguas a las que se han muestreado se obtienen de la muestra más cercana, aumentando o disminuyendo la frecuencia sonora de la muestra. Por ejemplo, grabando tres notas por octava (que pueden ser el Do, Fa, La) pueden obtenerse el resto de notas con buena calidad. El proceso, que se esquematiza en el gráfico, es el siguiente:

1. Se muestrea el Do₂ de la cuarta cuerda del chelo y se asigna a la tecla y octava correspondiente del teclado.
2. Las notas Do₂[#] y Re₂ se consiguen a partir de la nota Do₂ muestreada, ya que el propio aparato aumenta la frecuencia (medio tono y un tono respectivamente) y se la asigna a las teclas Do₂[#] y Re₂, sonando perfectamente afinadas.
3. A continuación obtenemos una muestra de la nota Fa₂ y la asignamos a su correspondiente octava y tecla.
4. Las notas Fa₂[#] y Sol₂ se obtienen al aumentar medio tono y un tono el Fa. Si además disminuimos medio tono y un tono se obtienen, respectivamente, las notas Re₂[#] y Mi₂. Posteriormente se asigna a cada nota una tecla.
5. Repetimos el proceso grabando el La₂ y generando las notas La₂[#], Si₂ y Sol₂[#].



Esquema del funcionamiento de un sampler. Las circunferencias representan las notas grabadas y los hexágonos las notas que se obtienen subiendo o bajando las anteriores

Los sonidos obtenidos al aumentar o disminuir una muestra, no tienen la misma calidad que la propia muestra, pero mientras que no se aumente o disminuya más de un tono, el sonido queda tímbricamente aceptable, además de perfectamente afinados. A partir del tono el sonido pierde calidad y se desvirtúa. De este modo, tomando tres o cuatro muestras por octava el resultado puede quedar bastante real. Lo ideal sería tener una muestra por cada nota de la octava, pero esto implicaría una cantidad de memoria elevada y haría que el aparato fuese lento y muy costoso.

Respecto a la *frecuencia de muestreo* y la *profundidad de bits* a la que hacíamos referencia en el apartado anterior, los samplers han pasado en pocos años de los 8 bits, y una frecuencia de 44.1 kHz a los 64 bits lineales y una frecuencia de muestreo de hasta 192 kHz. Con estas características, los sonidos que se obtienen son de una calidad suficiente como para que se utilicen habitualmente en la música pop tanto para realizar grabaciones en estudios como para ofrecer conciertos en directo.

El compositor tiene la posibilidad de escuchar su creación con el timbre de los instrumentos que intervienen en su obra.

Actualmente los samplers se comercializan con o sin teclado físico y tanto en hardware como en software. Estos últimos, al manejarse desde el ordenador, permiten escribir música y hacer que se *disparen* los sonidos a partir de un programa apropiado (Cubase, Protools, Logic...) que está en el mismo ordenador en el que se almacenan las muestras sonoras. Sin embargo, en conciertos en directo, sigue utilizándose un teclado maestro (que sustituye al programa de escritura musical) que conectado al ordenador, dispara las muestras sonoras.

A pesar de que creemos que con estos ejemplos se puede ver la gran utilidad de la tecnología en la música, no nos gustaría dar la impresión de que por interesantes que resulten los procesos informáticos y matemáticos, sólo podemos participar de ellos como espectadores. Lo cierto, es que en las clases de matemáticas podemos realizar prácticas sobre estos temas que pueden resultar atractivas y formativas para nuestros alumnos. A continuación veremos algunas de ellas.

Ruido frente a música

La distinción entre música y ruido, que se intenta explicar desde los primeros cursos de Música, no es clara y depende de la sociedad en que se analice. Puede suceder que algunas personas consideren como ruido lo que otras personas consideraran como música e incluso pueden aparecer mezclados voluntariamente. Por ejemplo, el timbre de bicicleta aparece en la canción *Bicycle race* del grupo británico Queen.

¿Cuál es la diferencia esencial entre música y ruido? Para describirla, a continuación representamos las ondas que se producen al golpear una bola de béisbol y al reproducir un fragmento de *Guárdame las vacas*, en la versión de Luis de Narváez (aprox. 1500 -1550), interpretado con una vihuela.

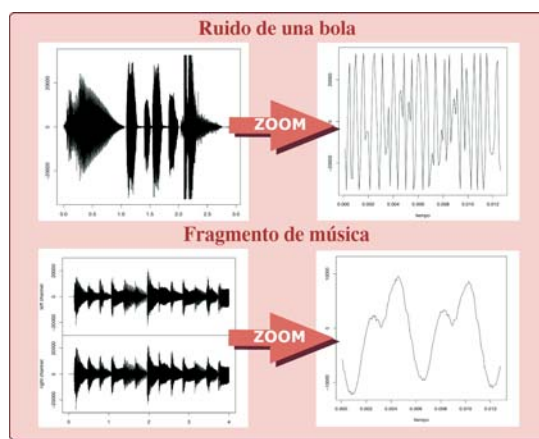


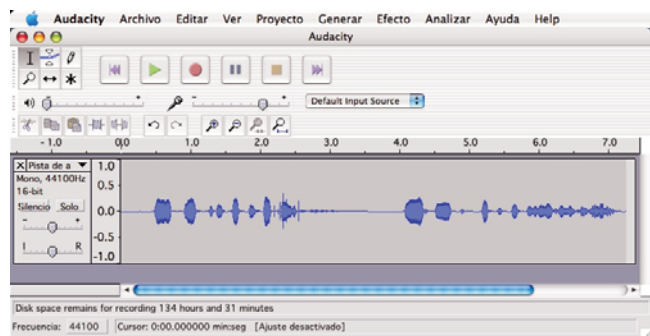
Gráfico de las ondas sonoras producidas por ruidos y música

La primera diferencia es que los ruidos están grabados en mono (sólo hay un canal por el que nos llega el sonido) mientras que la música lo está en estéreo (nos llega por dos canales, izquierdo y derecho), sin embargo eso no es lo que marca la diferencia más importante. Si ampliamos con más detalle un fragmento de las ondas que aparecen a la izquierda de la gráfica encontramos la característica fundamental que distingue ambas ondas: para la música la función es periódica, mientras que para el ruido no es así.

A partir de este ejemplo podemos mostrar al estudiante que analizar la periodicidad de una función no sólo es útil para conocer una de sus cualidades (que permite, por ejemplo, dibujarla con más facilidad), sino que en esta propiedad radica la esencia de la música que escuchamos todos los días.

En el aula podéis hacer prácticas con el programa Audacity® que funciona con Windows, Macintosh, Linux y se puede descargar de forma gratuita¹. El programa es sencillo de manejar, está parcialmente en castellano y entre sus herramientas está la posibilidad de grabar sonidos o importarlos de un archivo,

por ejemplo de un CD, analizar las frecuencias o realizar un zoom de las ondas sonoras.



Pantalla del programa Audacity®

Si somos capaces de que el alumno compruebe que las ondas que aparecen con este u otro programa no son más que un caso particular de las gráficas de funciones que explicamos en clase, estamos dando un paso más en la labor de convencerlo de que las Matemáticas están presentes en su vida cotidiana. Pero no es ésta la única utilidad del ejemplo. El hecho de que la música requiera que las funciones sean periódicas, nos va a permitir que seamos capaces de crear notas con algunos conceptos vistos en clase.

Construyendo notas musicales en clase de Matemáticas

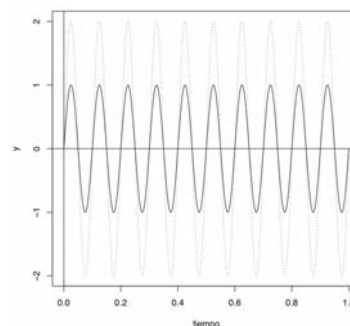
Jean Baptiste Fourier (1768-1830) demostró que toda función periódica se puede expresar como suma de funciones de amplitudes y fases iniciales conocidas. En concreto, un sonido musical está formado por la suma de varias funciones sinusoidales cuyas frecuencias son múltiplos enteros de una frecuencia fundamental. A estas ondas se les llama fundamental y armónicos. La frecuencia más baja es la fundamental y es la frecuencia a la que la onda completa vibra. Los armónicos vibran más deprisa que el tono fundamental y lo hacen con múltiplos enteros del fundamental para que la onda final tenga el mismo ciclo.

Los armónicos son los que dan lugar al timbre característico de una fuente de sonido y permiten diferenciar una fuente sonora de otra. Así por ejemplo, si un trombón y un piano interpretan un Re_3 , a pesar de que la onda fundamental sea la misma (la que produce el Re_3), el resto de armónicos nos permiten distinguir entre el sonido del trombón y del piano.

Teniendo en cuenta esta idea, en el aula podemos construir notas musicales y, si disponemos de ordenadores y altavoces, podemos escuchar el resultado de nuestra construcción.

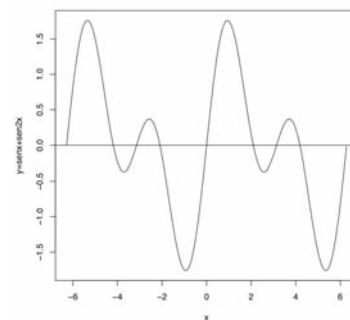
Como la función $sen(t)$ es una función periódica que completa su ciclo cada 2π radianes, si el tiempo t se mide en segundos, $sen(2\pi t)$ oscila una vez por segundo, $sen(2\pi 2t)$ oscila dos veces por segundo y $sen(2\pi ft)$ oscila f veces por segundo.

Si consideramos $sen(2\pi 440t)$ estaremos creando una nota pura de 440 Hz (el La con el que afinan las orquestas). Tanto desde el punto de vista matemático como el musical, resulta interesante que el alumno distinga entre $sen(2 \cdot 2\pi 440t)$ y $2sen(2\pi 440t)$. En el primer caso estamos produciendo una nota que es una octava más alta que $sen(2\pi 440t)$, pero no hemos modificado su intensidad sonora, mientras que en el segundo caso la altura es la misma y sólo se modifica la amplitud de la onda, por tanto ahora sonará más fuerte.



Representación de las funciones $sen(2\pi ft)$ y $2sen(2\pi ft)$

Como sabemos, en general, un sonido musical no está producido por ondas puras, sino que está constituido por vibraciones periódicas no sinusoidales, por tanto resulta conveniente que construyamos funciones que se puedan descomponer como suma de varias funciones sinusoidales. Por ejemplo, podemos reducir la onda a dos sumandos $y=sen(x)+sen(2x)$. La onda producida es la que se muestra en el gráfico.



Representación de una función periódica no sinusoidal, $y=sen(x)+sen(2x)$

Si añadimos más sumandos y además los multiplicamos por diferentes valores, por ejemplo

$$y = 3\text{sen}(2\pi 440t) + 0.8\text{sen}(2\pi \times 2 \times 440t) + 3\text{sen}(2\pi \times 3 \times 440t)$$

estamos construyendo notas que cada vez se parecen más a las que producen los instrumentos musicales.

Para poder escuchar los sonidos que hemos creado debemos recurrir a programas informáticos que tengan esta opción. Por ejemplo, usando la función $\text{sin}()$ incluida en la librería `tuneR` del programa² R se pueden generar diferentes ondas sinusoidales. O si se prefiere, con el programa Mathematica[®] basta con escribir

```
Play[Sin[2*Pi*440*t], {t, 0, 2}]
```

para que suene una frecuencia de 440 Hz durante 2 segundos.

Podéis encontrar muchos más ejemplos en la página creada por el profesor C. Raphael de la Universidad de Indiana <http://www.music.informatics.indiana.edu/courses/I547/>.

Para acabar, nos gustaría hacer una última reflexión acerca de

la polémica tecnología *versus* arte. No querríamos dejar la falsa impresión de que la Informática o las Matemáticas pueden sustituir al artista, en este caso el músico. Hay que pensar que la interpretación humana está tan llena de matices y rasgos expresivos, que para recogerlos sería necesario almacenar tal cantidad de información que excedería con mucho la memoria que podemos manejar. Por ejemplo, en la cuerda frotada están el *staccato*, el *legato*, el *pizzicato*, etc. y esto junto con las características propias de cada instrumento, de cada estado anímico o de cada sala... en definitiva, que el proyecto resultaría inviable. Sin embargo, debemos ver en la informática una aliada, tanto del músico como del profesor de Matemáticas, ya que con ella se pueden conseguir con menos dificultad resultados que hace poco tiempo resultaban impenables.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos de investigación TIN2008-06872-C04-02 y TIN2009-14392-C02-01 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

MUSYMÁTICAS ■



NOTAS

1 Audacity[®] puede descargarse por ejemplo en <http://audacity-portable.softonic.com/descargar#pathbar>.

2 El programa R puede bajarse de forma gratuita desde <http://cran.r-project.org> y funciona con Windows, Macintosh y Linux

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Benson, D. (2006). *Music: a Mathematical Offering*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Liern, V. (1994). La música y sus materiales: una ayuda para las clases de matemáticas. *Suma*, 14/15, pp. 60– 64.
- Randel, D. (1999): *Diccionario Harvard de música*. Madrid: Alianza Editorial.
- Raphael, C. (2010): *Class Notes for Music Information Processing: Audio*. Bloomington: Ed. Indiana University.

Internet

- <http://cran.r-project.org>
http://en.wikipedia.org/wiki/Digital_Audio
<http://www.wolfram.com/>
<http://www.music.informatics.indiana.edu/courses/I547/>

Este artículo fue solicitado por SUMA en enero de 2010 y fue aceptado en mayo de 2010 para su publicación.