suma+ 64
Junio 2010, pp. 99-106

Protoálgebra en Babilonia (2ª entrega): métodos de resolución

En la primera entrega de esta serie, quedó planteado el problema de darle sentido a la solución que aparece en la tablilla babilónica TMS XIII, que está analizada en Høyrup (2002, pp. 207-208). A eso vamos a dedicar esta segunda entrega.

Recordemos que la solución viene expresada en la tablilla como una serie de operaciones, sin más indicaciones, por lo que nuestro problema consiste en averiguar qué calculan esas operaciones, qué sentido tiene hacer esos cálculos para resolver el problema y, a ser posible, hacer hipótesis sobre cómo se ha llegado a descubrir que esos cálculos permiten resolver el problema.

Recordemos que la solución es la siguiente, y recordemos también que, como no nos interesa abordar las dificultades derivadas del sistema metrológico babilónico, las unidades están substituidas por litros y gramos, que son más familiares para nosotros. Mantenemos, sin embargo, los números escritos en el sistema sexagesimal[1]:

> Tú coloca 4 litros de aceite y coloca el beneficio 40 gramos
>
> Inverso de 40, 1´30´´, ves.
>
> 1´30´´ por 4 multiplica, 6´, ves.
>
> 6´ por 12`50, el aceite, multiplica, 1`17, ves.
>
> ½ de 4 rompe, 2, ves
>
> 2 cuadra, 4, ves
>
> 4 a 1`17 añade, 1`21, ves.
>
> ¿Cuál es el lado igual? 9 es el lado igual.
>
> 9 el equivalente coloca.
>
> ½ de 4, que has separado, rompe, 2, ves.
>
> 2 al primer 9 añade, 11, ves.

Luis Puig
Universitat de València Estudi General
Maria Teresa Navarro Moncho
IES Veles e Vents. Torrent
historias@revistasuma.es

Del segundo quítalo, 7, ves.

11 litros cada gramo has comprado, 7 litros cada gramo has vendido.

¿Plata equivalente a qué? ¿Qué a 11 litros [por gramo] puedo poner que 12`50 de aceite me dé?

1´10 coloco 1´10 gramos de plata.

¿Por 7 litros cada gramo de plata que vendes de aceite, los 40 gramos de plata a qué equivalen?

40 por 7 multiplica. 4`40, ves, 4`40 de aceite.

El enunciado del problema que está resuelto así, eliminando las unidades babilónicas y dejando los números expresados en el sistema sexagesimal, es el siguiente:

12`50 litros de aceite he comprado.

De la compra de 1 gramo de plata, 4 litros, de cada (gramo), de aceite he separado.

40 gramos de plata como beneficio he visto.

¿Con qué equivalencia he comprado y con qué equivalencia qué he vendido?

En la anterior entrega de esta serie vimos también que este problema puede analizarse reduciéndolo a la siguiente lista de cantidades y de relaciones entre ellas:

cantidad comprada y vendida: m (l),
tasa de compra: t_c (l/gr)

tasa de venta: t_v (l/gr)

importe de la compra: i_c (gr)

importe de la venta: i_v (gr)

beneficio total expresado en plata (protodinero): b_{td} (gr)

beneficio unitario expresado en mercancía por unidad de plata: b_{um} (l/gr).

$$i_c = \frac{m}{t_c} \text{ o } i_c \times t_c = m$$

$$i_v = \frac{m}{t_v} \text{ o } i_v \times t_v = m$$

$$b_{td} = i_v - i_c \text{ o } i_v = b_{td} + i_c$$

$$b_{um} = t_c - t_v \text{ o } t_c = b_{um} + t_v$$

Y que esta red de cantidades y relaciones podemos representarla mediante el grafo[2] de la figura 1.

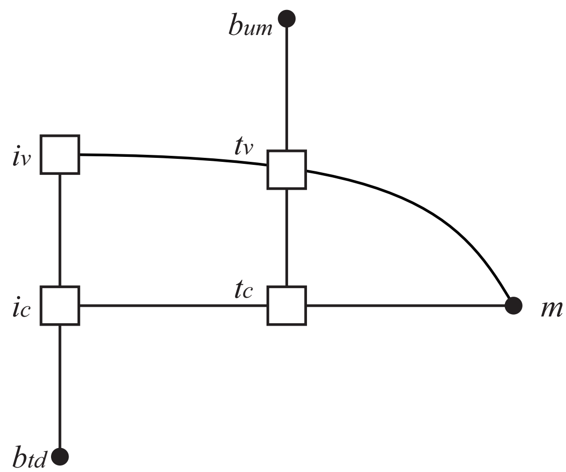

Figura 1

Estudiamos también que, como los importes de la compra y la venta están relacionados con las tasas de compra y venta por una proporcionalidad inversa

$$i_c \times t_c = i_v \times t_v = m,$$

no es posible dar sentido a las relaciones de proporcionalidad entre importes, tasas y beneficios

$$b_{td} : b_{um} :: i_c : t_v :: i_v : t_c,$$

en el contexto de compra y venta de mercancías que narra el enunciado del problema.

Lo que nosotros podemos hacer: el Método Cartesiano en acción

Antes de abordar el darle sentido a la solución babilónica, vamos a resolver el problema por métodos algebraicos actuales para usar nuestra solución como referencia de comparación. La resolución algebraica de un problema de enunciado verbal aritmético-algebraico está guiada por lo que acostumbramos llamar el método cartesiano, y un usuario competente de ese método recorre los pasos siguientes (que expresamos tal y como aparecen en Filloy, Puig y Rojano, 2008):

1. Una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.
2. Elección de una cantidad que se va a representar con una letra (o de unas cuantas cantidades que se van a representar con letras distintas).

3. Representación de otras cantidades mediante expresiones algebraicas que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras que ya han sido previamente representadas por una letra o una expresión algebraica.
4. Establecimiento de una ecuación (o tantas como letras distintas se haya decidido introducir en el segundo paso), igualando dos expresiones, de las que se han escrito en el tercer paso, que representen la misma cantidad.
5. Transformación de la ecuación en una forma canónica.
6. Aplicación de la fórmula o algoritmo de solución a la ecuación en forma canónica.
7. Interpretación del resultado de la ecuación en términos del problema.

La lectura analítica (paso 1) ya la hemos presentado en el apartado anterior, y nos ha dejado el enunciado del problema convertido en la red de cantidades y relaciones entre ellas que está representado en la figura 1. Con ello el texto del enunciado del problema, escrito en lenguaje vernáculo, ha quedado preparado para su traducción al lenguaje del álgebra simbólica. Traduzcámoslo pues (y traduzcamos también la cantidad de aceite comprada, 12`50 litros, del sistema de numeración babilónico al nuestro: $12 \times 60 + 50 = 770$ litros).

Decidimos (paso 2) designar la tasa de venta, t_v, con la letra x (figura 2).

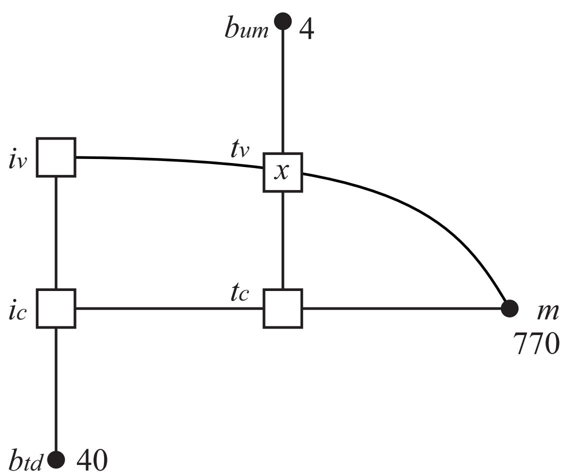

Figura 2

Escribimos expresiones algebraicas para las otras cantidades usando las relaciones (paso 3):

– usando la relación $t_c = b_{um} + t_v$ (en rojo en la figura 3) escribo t_c, la tasa de compra, $x + 4$;
– usando la relación $i_c \times t_c = m$ (en azul en la figura 3) escribo i_c, el importe de la compra:

$$\frac{770}{x+4};$$

– usando la relación $i_v \times t_v = m$ (en verde en la figura 3) escribo i_v, el importe de la venta:

$$\frac{770}{x};$$

– usando la relación $i_v = b_{td} + i_c$ (en amarillo en la figura 3) escribo b_{td}, el beneficio total expresado en plata:

$$\frac{770}{x} - \frac{770}{x+4}.$$

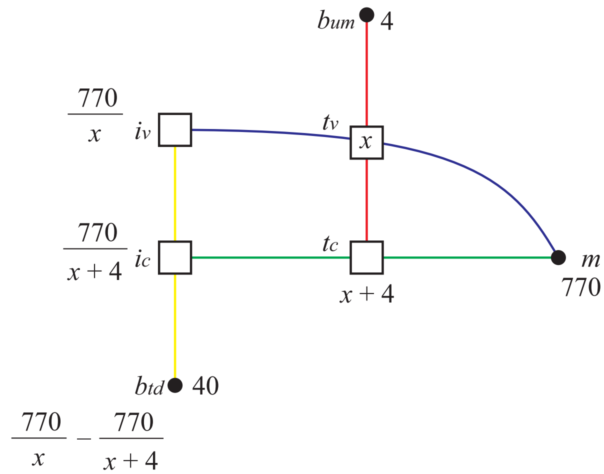

Figura 3

Como tenemos dos expresiones para b_{td}, el beneficio total expresado en plata, en este caso una expresión algebraica compuesta y un número, podemos escribir una ecuación (paso 4, figura 4):

$$\frac{770}{x} - \frac{770}{x+4} = 40.$$

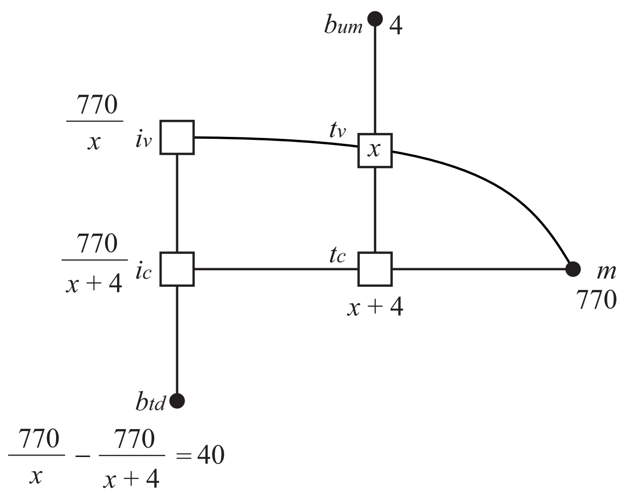

Figura 4

Una vez obtenida la ecuación la transformamos en una ecuación que esté en forma canónica (paso 5). Para ello, nos olvidamos del significado de las cantidades y de las relaciones con las que la hemos construido, y aplicamos transformaciones algebraicas que sólo tienen sentido en el mundo de significados de las relaciones aritmético algebraicas:

$770(x+4)-770x=40x(x+4)$
$770x+770\cdot 4-770x=40x^2+4\cdot 40x$
$770\cdot 4=40x^2+4\cdot 40x$
$77=x^2+4x$
$x^2+4x-77=0$

En efecto, la expresión que hemos obtenido carece de sentido en el mundo de las transacciones comerciales, la tasa de venta multiplicada por sí misma no significa nada. Pero nuestras acciones tienen sentido porque sabemos que tenemos un procedimiento para resolver una ecuación escrita en forma canónica, y que las transformaciones algebraicas, que hemos realizado transforman la ecuación que habíamos obtenido como traducción del enunciado, en ecuaciones equivalentes.

De hecho, tenemos dos procedimientos de solución disponibles: la fórmula de la ecuación de segundo grado y el procedimiento de completar cuadrados (paso 6).

Si aplicamos la fórmula, obtenemos dos valores para la x:

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(-77)}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+308}}{2}=$$
$$=\frac{-4\pm\sqrt{324}}{2}=\frac{-4\pm 18}{2}$$

$x = 7$ o $x = -11$

Si completamos cuadrados, obtenemos (los mismos) dos valores:

$x^2+4x+4-4-77=0$
$x^2+4x+4=81$
$(x+2)^2=81$
$x+2=\pm 9$
$x = 7$ o $x = -11$

Una vez resuelta la ecuación, volvemos al enunciado del problema para interpretar el resultado (paso 7), lo que nos lleva a rechazar el valor -11, ya que no tiene sentido que la tasa de venta sea una cantidad negativa. La tasa de venta es, por tanto, 7 l/gr. Como la tasa de compra es igual a la tasa de venta más el beneficio por unidad, b_{um}, que vale 4 l/gr, la tasa de compra será 11 l/gr. La compra se ha hecho pues a 11 litros por cada gramo de plata, y la venta se ha hecho a 7 litros por cada gramo de plata.

Lo que hace el matemático babilónico

El matemático babilónico comienza operando con dos datos, b_{um} y b_{td}:

> Tú coloca 4 litros de aceite y coloca el beneficio 4 gramos.
>
> Inverso de 40, 1´30´´, ves
>
> 1´30´´ por 4 multiplica, 6´, ves.

Parece que se pretende encontrar el valor de:

$$\frac{b_{um}}{b_{td}}=\frac{4}{40}.$$

La división en la matemática babilónica es una operación difícil, por lo que se hace buscando el inverso del divisor en una tabla de inversos, y multiplicando por él, para dividir 4 entre 40 pues, primero se calcula el inverso de 40 y luego se multiplica por 4.

Si pasamos del sistema sexagesimal al sistema decimal, podemos entender mejor las operaciones realizadas:

$$1'\,30''=\frac{1}{60}+\frac{30}{3600}=\frac{1}{60}+\frac{1}{120}=\frac{3}{120}=\frac{1}{40}$$

(Inverso de 40)

$$6'=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$$

$$1'30''\times 4=\frac{1}{40}\times 4=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}=6'$$

A continuación, el matemático babilónico multiplica el valor que ha obtenido por el otro dato del problema, la cantidad de aceite comprada y vendida, m.

> 6´ por 12`50, el aceite, multiplica, 1`17, ves.

Estas dos operaciones podemos ver que se derivan de la relación:

$$\frac{b_{td}}{b_{um}}=\frac{m}{t_v t_c}$$

que obtuvimos formalmente en el análisis del problema que hicimos en la primera entrega . En efecto, despejando $t_v t_c$, se obtiene:

$$t_v t_c=\frac{b_{um}}{b_{td}}\times m=6'\times 12`50=1`17$$

Y expresando las cantidades en el sistema decimal, tenemos:

$$t_v t_c=\frac{b_{um}}{b_{td}}\times m=\frac{4}{40}\times 770=77$$

Ya que, 12` 50 = 12 × 60 + 50 = 770 y 1`17 = 1 × 60 + 17= 77.

Éstas son efectivamente las operaciones que ha hecho el matemático babilónico, pero no parece razonable hacer la hipótesis de que las ha derivado de la relación indicada, ya que el matemático babilónico carece del lenguaje simbólico que nos ha permitido a nosotros derivar formalmente esa relación. Por otro lado, no cabe una derivación que no sea formal, es decir, hecha en un lenguaje más abstracto que el lenguaje vernáculo, ya que, por ejemplo, la cantidad $t_v t_c$ carece de sentido en la historia que narra el problema. Nosotros derivamos formalmente mediante transformaciones algebraicas esa relación a partir de las relaciones de proporcionalidad inversa que existen entre importes, tasas y beneficios, y de ellas obtuvimos además las relaciones de proporcionalidad:

$$b_{td} : b_{um} :: i_c : t_v :: i_v : t_c.$$

La derivación "formal" de esas relaciones que hace el matemático babilónico usa un lenguaje distinto del nuestro: las relaciones de proporcionalidad inversa $i_c \times t_c = m$ e $i_v \times t_v = m$ se pueden representar como dos rectángulos que tienen la misma área (figura 5).

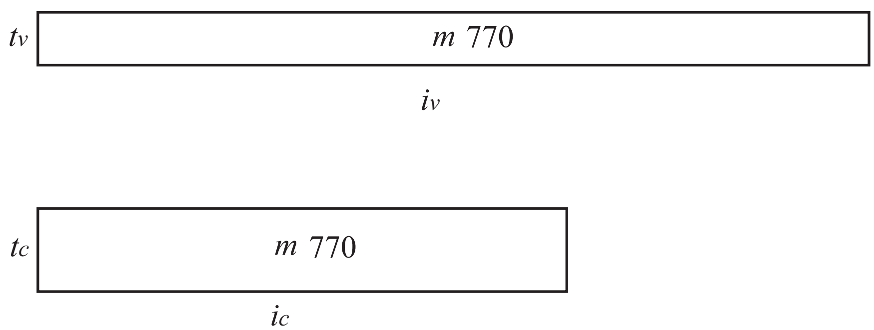

Figura 5

Si superponemos los dos rectángulos (figura 6) de manera que en sus lados se representen las relaciones $i_v = b_{td} + i_c$ y $t_c = b_{um} + t_v$, los rectángulos coloreados en rojo tienen la misma área, ya que ambos se han obtenido de los anteriores quitándoles el rectángulo de lados i_c y t_v, y por tanto $b_{td} \times t_v = b_{um} \times i_c$, o, expresado como una proporción, $b_{um} : b_{td} :: t_v : i_c$. Al tener esos rectángulos la misma área, los dos rectángulos superpuestos forman la figura que en la matemática griega se conoce con el nombre de gnomon[3], y el gnomon se puede completar rellenando la esquina para formar un rectángulo más grande (figura 7), en la que los rectángulos en torno a la diagonal son semejantes y semejantes al rectángulo grande, y los otros dos rectángulos tienen la misma área y se conocen con el nombre de paraplerómata. Al completar así la figura del gnomon, se ve también que t_c e i_v están también en la misma razón, de modo que $b_{um} : b_{td} :: t_v : i_c :: t_c : i_v$.

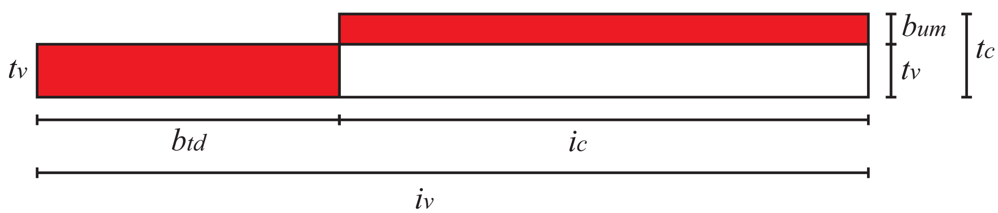

Figura 6

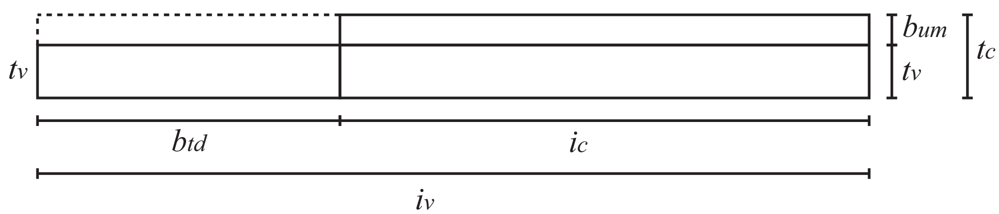

Figura 7

Esto nos da cuenta de cómo pueden darse sentido a las relaciones de proporcionalidad inversa y directa sin disponer del lenguaje del álgebra simbólica: mediante la representación en un lenguaje de lados y áreas de rectángulos. Una vez se tienen presentes esas relaciones, que, cuando no tienen sentido en la historia del problema, lo encuentran en las configuraciones geométricas, es posible desprenderse de los significados de la transacción mercantil y realizar operaciones en el lenguaje (más abstracto) de las configuraciones geométricas, buscando una configuración geométrica que ya se sepa cómo resolver. Esto es lo que podemos ver que hace el matemático babilónico, si representamos ahora las operaciones que ha hecho como la transformación de un rectángulo de lados t_v e i_v, y área, por tanto, *m*, conocida, en otro rectángulo de lados t_v y t_c, mediante un cambio de escala en una de sus dimensiones. El cambio de escala se puede hacer gracias a las relaciones de proporcionalidad que acabamos de considerar, y lo que se calcula es el área del nuevo rectángulo. El producto de t_v por t_c carece de sentido en la historia del problema, pero lo tiene en el sistema de signos al que se ha traducido el enunciado del problema: es el área de un rectángulo (figura 8).

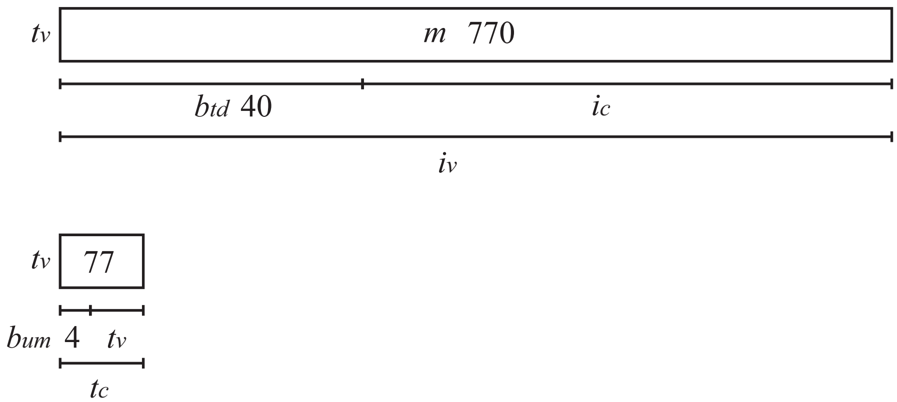

Figura 8

Además, la nueva configuración es canónica, en el sentido de que es una configuración para la que se tiene un algoritmo de solución: se trata de encontrar el largo y el ancho de un rectángulo del que se conoce su área y la diferencia entre el largo y el ancho. El matemático babilónico sabe que esa configuración se resuelve con el "método akadio", que no es sino el precursor del procedimiento de completar cuadrados que hemos hecho nosotros en el sistema de signos del álgebra y que el matemático babilónico realiza cortando, desplazando y pegando rectángulos, así:

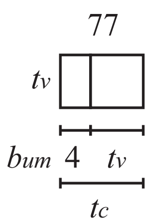

Figura 9

½ de 4 rompe, 2, ves

Se divide el rectángulo pequeño en dos rectángulos iguales

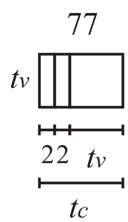

Figura 10

y se desplaza uno para formar un gnomon, tal como aparece en la figura 11.

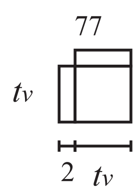

Figura 11

2 cuadra, 4, ves.

4 a 1`17 añade, 1`21, ves.

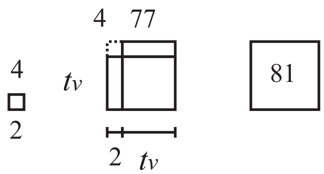

Figura 12

Se ha calculado pues lo que hace falta para completar el cuadrado. En el sistema decimal 1`21=60+21=81, luego 4+1`17 se convierte en 4 +47=81.

Si realizamos estas operaciones en las figuras, obtenemos un cuadrado de lado 2 + t_v y cuya área es 81, lo que equivale a resolver la ecuación $(x+2)^2 = 81$, equivalente a la anterior.

¿Cuál es el lado? 9 es el lado igual.

½ de 4, que has separado, rompe, 2, ves.

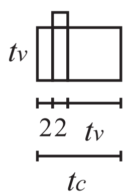

Figura 13

2 al primero añade, 11, ves. ($t_c = 11$)

Del segundo quítalo, 7, ves. ($t_v = 7$)

Luego la base del rectángulo es 11 y la altura 7.

11 litros cada gramo has comprado, 7 litros cada gramo has vendido.

En nuestra resolución del problema, terminamos aquí, pero el matemático babilónico aún continúa:

¿Plata equivalente a qué? ¿Qué a 11 litros [por gramo] puedo poner que 12`50 de aceite me dé?

Volviendo al planteamiento del problema y utilizando la relación $i_c \times t_c = m = 770 = 12`50$, el matemático babilónico calcula el importe de la compra:

$$i_c = \frac{770}{t_c} = \frac{770}{11} = 70\text{gr.}$$

1`10 coloco 1`10 gramos de plata

En decimal, 1`10 = 1 × 60 + 10 = 70, lo que podemos representar en la figura 14.

¿Por 7 litros cada gramo de plata que vendes de aceite, los 40 gramos de plata a qué equivalen?

El beneficio, en la relación $b_{um} = t_c - t_v$ es 11 − 7 = 4 l/gr y expresa el beneficio por unidad de plata.

Con cualquiera de los productos iguales $b_{td} \times t_v = i_c \times b_{um}$ se puede obtener el beneficio expresado de otro modo. Lo que el matemático babilónico hace es

40 por 7 multiplica, 4`40, ves, 4`40 de aceite.

Es decir, $40 \times 7 = b_{td} \times t_v$ litros, que expresa el beneficio total en litros de aceite. El resultado que da está expresado en el sistema sexagesimal, su equivalente en decimal es:

4`40 = 4 × 60 + 40 = 240 + 40 = 280

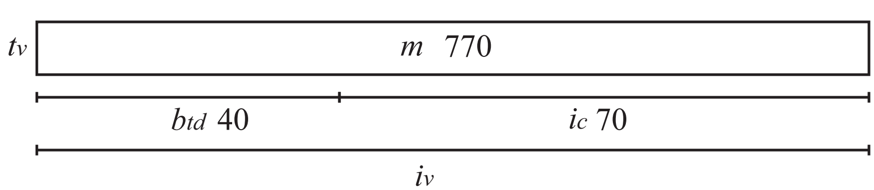

Figura 14

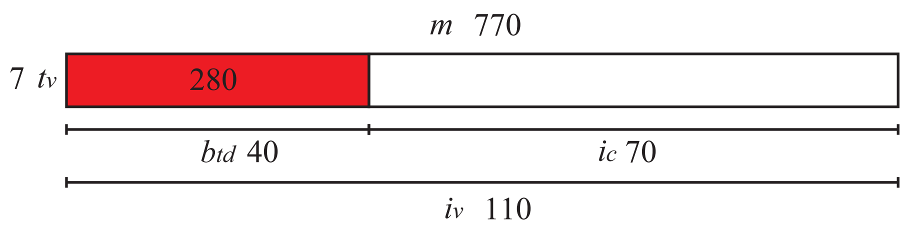

Figura 15

Y dicha ganancia en mercancía de 280 litros de aceite también se puede representar en el rectángulo en el área coloreada (Figura 15).

Parece pues que el matemático babilónico tienen también presentes en esta situación la cantidad “beneficio total expresado en mercancía”, que nosotros no hemos utilizado en nuestra solución, ni hemos pensado en calcular. Cabe pensar, a la vista de la representación en el rectángulo, que también esté presente la cantidad que se representaría en el resto del rectángulo, es decir, la que podríamos llamar cantidad de mercancía con la que se recupera la inversión (designémosla por m_r), de modo que también estarían consideradas las relaciones que se ven en el rectángulo $m_r = t_v \times i_c$ y $m = m_r + b_{tm}$.

Protoálgebra en Babilonia

La resolución nuestra, hecha según establece la competencia en el método cartesiano, y la resolución del matemático babilónico no son iguales; sin embargo, comparten algunos rasgos que caracterizan lo que hemos acabado llamando resolución algebraica de problemas.

Los cálculos que se hacen carecen de sentido en el contexto de la historia que narra el enunciado del problema en determinados momentos del proceso. Y esto se debe a que el problema se ha traducido a un sistema de signos (más abstracto) en el que se puede operar sin recurrir a fundar las operaciones en los significados de la historia que narra el problema. Esas operaciones, no obstante, no son sin sentido: adquieren su sentido en ese sistema de signos más abstracto. En nuestro caso en el mundo del álgebra, en el que los significados de las transformaciones algebraicas están fundados en los teoremas que establecen que esas transformaciones dejan las ecuaciones equivalentes. En el caso babilónico, en los significados asociados a las relaciones entre las áreas de las figuras que se cortan, desplazan y pegan, o se estiran o encogen según un factor de escala.

Además, esos cálculos se hacen con un sentido: transformar la ecuación (o la configuración) obtenida al traducir el enunciado al sistema de signos abstracto, a una forma canónica, ya que las formas canónicas ya se sabe cómo resolverlas mediante un procedimiento fijado por una fórmula o un algoritmo.

En ese sentido, podemos dar sentido al título que le hemos puesto a esta serie: lo que hace el matemático babilónico lo vemos desde nuestra álgebra simbólica como protoálgebra.

HISTORIAS ■

NOTAS

[1] Høyrup representa los números en el sistema sexagesimal indicando mediante el signo ` la posición 60, `` la posición 60^2, etc. y mediante el signo ´ la posición 60^{-1}, ´´ la posición 60^{-2}, etc., de modo que, por ejemplo 70'5 lo escribe 1` 10 30´.

[2] En Filloy, Rojano and Puig (2008) o en Filoy, Puig y Rojano (2008) se describe el uso de esos grafos para la representación de la red de relaciones entre cantidades, que se obtienen al analizar el texto del problema con el fin de traducirlo al sistema de signos del álgebra.

[3] El gnomon está definido en los *Elementos* de Euclides, libro II, definición segunda.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Filloy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Filloy, E., Puig, L., & Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*(3), pp. 327-342.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*. New York: Springer.

Este artículo fue solicitado por SUMA en diciembre de 2009 y aceptado en mayo de 2010 para su publicación.