suma+ 64
Junio 2010, pp. 85-88

Dulces

Desde hace mucho los aeropuertos son los lugares comunes de todo viajero. Lugares de cuyo aspecto es prácticamente imposible deducir su localización. El tiempo que uno pasa en ellos transcurre entre caminatas, paseos y, sobre todo, consumiciones de todo tipo: bebida, comida, prensa, conexiones a Internet, moda, videojuegos, llamadas telefónicas. Muchos tenemos la impresión de que los aviones saltan verticalmente sobre ellos porque tras algunos altibajos y sacudidas, siempre vuelves a encontrarte en el mismo sitio. ¿En qué se distinguen dos aeropuertos? Sólo en el diseño exterior. En todos hay las mismas tiendas, los mismos bares, los mismos mostradores de facturación, los mismos controles policiales... Entre el embarque y el desembarque nada ha cambiado. Has volado para estar en el mismo sitio. Los aeropuertos son un limbo para transeúntes cuyas cápsulas móviles, llamadas aviones, poseen la propiedad de cambiar el espacio exterior que los rodea. Llegas, te subes a la cápsula, pasan unas horas, y, al salir del *finger*, estás en otro país.

Precisamente es en las cápsulas donde uno halla rescoldos de diferencias. Me hallaba bien atado a mi asiento de turista a casi 10.000 metros de altitud cuando una azafata deslizó una bandeja sobre mi mesilla desplegada. Contenía pocas cosas: una taza con café aguado, un sobrecito de azúcar y una servilleta de papel pulcra y bien doblada. Nada que no hubiese visto ya cientos de veces. Mientras me armaba de coraje para saborear de nuevo ese café que sabe a hace veinte años reparé en unos signos escritos en el sobre de azúcar. Se trataba de una curiosidad matemática (figura 1). Un regalo por encima de las nubes.

Figura 1: ¿Sabías que ...?

La cuestión escrita en el papel era una ampliación de la regla para multiplicar un número de dos cifras por 11. Todo el mundo sabe que para multiplicar un número de dos cifras AB por 11 basta con intercalar la suma de las cifras A y B entre ambas. Así, para multiplicar 25 por 11 basta con sumar 2+5=7 e insertar ese 7 entre el 2 y el 5. El resultado es 275.

Miquel Albertí Palmer
IES Vallés, Sabadell
adherencias@revistasuma.es

Efectuando la multiplicación del modo tradicional se aprecia el motivo de su eficacia. Para multiplicar por 11 hay que escribir el número dos veces. La primera corresponde a la unidad de la cifra 1 del once. La segunda, correspondiente a la decena 1 del once, se anota un espacio a la izquierda y debajo de la anterior. El primer 25 se queda igual, pues son 5 unidades y 2 decenas. Sin embargo, el segundo 25 es en realidad 250. En lugar de escribir el 0, lo que se hace es desplazar ese 25 un espacio hacia la izquierda del otro. Al final, todo se resume en sumar decenas:

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 11 \\ \hline 25 \\ 250 \\ \hline 275 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times\ 11 \\ \hline 25 \\ 25\ \ \\ \hline 275 \end{array}$$

Si la suma de los dos dígitos supera la decena, se añade una unidad a la cifra de la izquierda, la correspondiente a las centenas:

$$79{\cdot}11 \Rightarrow 7+9=16 \Rightarrow [7+1][6][9]=869$$

Lo mismo ocurre cuando el número que multiplica a 11 tiene más cifras:

$$\begin{array}{cccccc} & & a & b & c & d \\ \times & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & a & b & c & d \\ & a & b & c & d & \\ a & b & c & d & & \\ \hline a & (a+b) & (a+b+c) & (b+c+d) & (c+d) & d \end{array}$$

Si se multiplica 111 por 111, la multiplicación se convierte en una suma de filas de unos cuyas columnas contienen 1, 2, 3, 2 y 1 cifras. El resultado es un número capicúa, 12.321:

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 1 & 1 \\ \times & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

El sobrecito del avión extendía esa situación hasta completar la serie con las nueve cifras. Se trata de sumar filas con un 1, dos 1, tres 1, …, ocho 1, nueve 1, ocho 1, siete 1, … dos 1 y un 1. El resultado es 12.345.678.987.654.321, el número capicúa con todas las cifras salvo el cero:

$$\begin{array}{r} 111.111.111 \\ \times\quad 111.111.111 \\ \hline 111111111 \\ 111111111\ \ \\ 111111111\ \ \ \ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 111111111\qquad\qquad \\ \hline 12345678987654321 \end{array}$$

Sólo falta la cifra 0. El cero podría completar tres números capicúas:

$$X=0123456789876543210$$
$$Y=1234567890987654321$$
$$Z=012345678909876543210$$

> *...reparé en unos signos escritos en el sobre de azúcar. Se trataba de una curiosidad matemática. Un regalo por encima de las nubes.*

Es fácil arreglar tres matrices o tres series de filas y columnas con unos y ceros cuyas columnas sumen X, Y y Z, respectivamente, pero esto no significa que se correspondan con productos de dos números cuyos resultados sean X, Y , Z. Esto depende de su factorización.

X se obtiene multiplicando por 10 uno de los factores de la multiplicación precedente y añadiendo un irrelevante 0 a la izquierda del resultado del producto:

$$X=1.111.111.110\times 111.111.111$$

Lo mismo puede decirse de Z dando por hecho que ya disponemos de Y.

Sin embargo, no es posible arreglar un producto de dos números hechos exclusivamente con unos y ceros cuyo producto dé como resultado *Y*. La solución al problema pasa inevitablemente por la factorización de *Y*. Una tarea imposible de ejecutar a mano, pero que el software reduce a un instante:

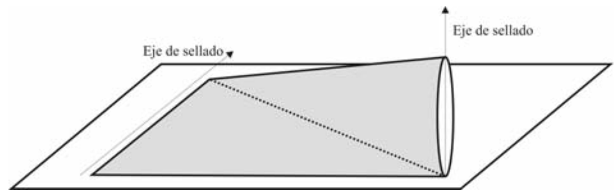
$$Y=3^2{\cdot}7{\cdot}19{\cdot}928163{\cdot}1111211111$$

Así que $Y=1.111.011.111\times 1.111.211.111$ y ya disponemos de otra curiosidad numérica para endulzar nuestro café italiano:

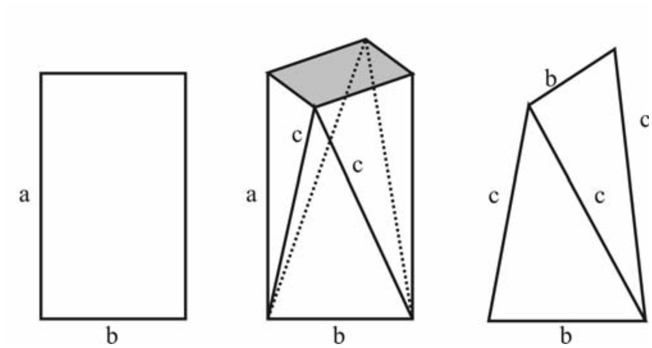
¿Lo sapevi che
1.111.011.111×1.111.211.111=1.234.567.890.987.654.321?

A la hora del recreo muchos profesores salimos del centro para tomarnos un café. Se forman diferentes grupos que se dirigen a los distintos establecimientos que hay en las cercanías de mi centro de trabajo, el *Institut Vallès* de Sabadell. En general, cada grupo tiene la costumbre de dirigirse siempre al mismo establecimiento, pero fue precisamente un día en que cambié de grupo y, como consecuencia de lugar, que mi café vino acompañado de un sobrecito de azúcar cuya forma me resultó insólita. Ése día fui al bar *La Bruixa* con el grupo de profesores de Lengua y Literatura. El sobre de azúcar no era plano, sino tetraédrico (fig. 2). El cambio es productivo, pensé. Meses después me topé con idéntica maravilla en otro bar muy lejos de Sabadell.

Los sobrecitos corrientes se cierran sellando los extremos de un tubito de papel según ejes situados en un mismo plano. Las líneas de cierre son paralelas. El sobrecito tridimensional no se había construido así. Los extremos del tubito de papel se habían pegado según ejes perpendiculares correspondientes a planos también ortogonales. El resultado era un tetraedro irregular. Un poliedro tan simple como raro de ver en libertad:

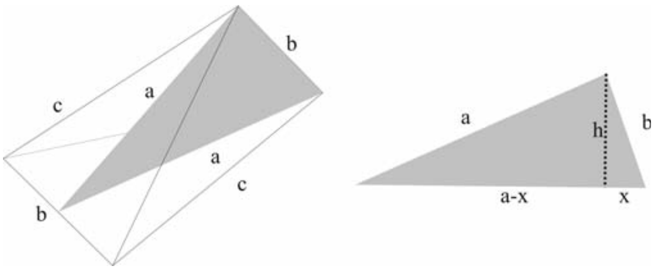


Puesto que el origen del sobre era también un rectángulo de papel enrollado, enfatizando las aristas del proceso de construcción se aprecia mejor su esencia tetraédrica:



Puede calcularse el volumen del tetraedro irregular que es ese envoltorio mediante el teorema de Pitágoras. Primero hallamos su altura:

Figura 2: Dulces tetraedros



$$\begin{cases} h^2 = b^2 - x^2 \\ h^2 = a^2 - (a-x)^2 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{b^2}{2a} \Rightarrow h = \frac{b}{2a}\sqrt{4a^2 - b^2}$$

Una vez conocida la altura, el volumen es el de una pirámide cuya base es un triángulo isósceles:

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} \cdot \frac{b}{2a}\sqrt{4a^2 - b^2} = \frac{b^2}{12}\sqrt{4a^2 - b^2} =$$
$$= \frac{b^2}{12}\sqrt{(2a+b)(2a-b)}$$

Si el rectángulo de partida es cuadrado (*a*=*b*), la expresión del volumen es mucho más sencilla:

$$V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$$

Sin embargo, que el sobre plano sea cuadrado no significa que el tetraedro obtenido vaya a ser regular. Lo será si las aristas *b* y *c* del poliedro resultante son iguales:

$$\left.\begin{array}{l} c = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2} \\ b = c \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De dicha proporción entre *a* y *b* se deduce que el tetraedro regular solamente se obtiene a partir de un rectángulo de lados inconmensurables. Mientras *a*/*b* sea un número racional, el tetraedro no será regular. Este teorema y adherencia inspira otras preguntas. Por ejemplo: ¿qué volumen tiene el tetraedro que puede formarse doblando la boca del sobre de un CD?

Los extremos del tubito de papel se habían pegado según ejes perpendiculares correspondientes a planos también ortogonales. El resultado era un tetraedro irregular.

No sé si esas adherencias harían más dulces las Matemáticas de mis alumnos, pero desde luego endulzan mi tarea como profesor. Y eso, tomando el adjetivo dulce como sinónimo de bueno y agradable pese a que yo prefiero lo salado. La realidad matemática de nuestro entorno es tan rica como sorprendente. Por un euro que valía entonces un café, ¡el teorema me salió por una ganga!

ADHERENCIAS ■

Este artículo fue solicitado por SUMA en febrero de 2010 y aceptado en abril de 2010 para su publicación.