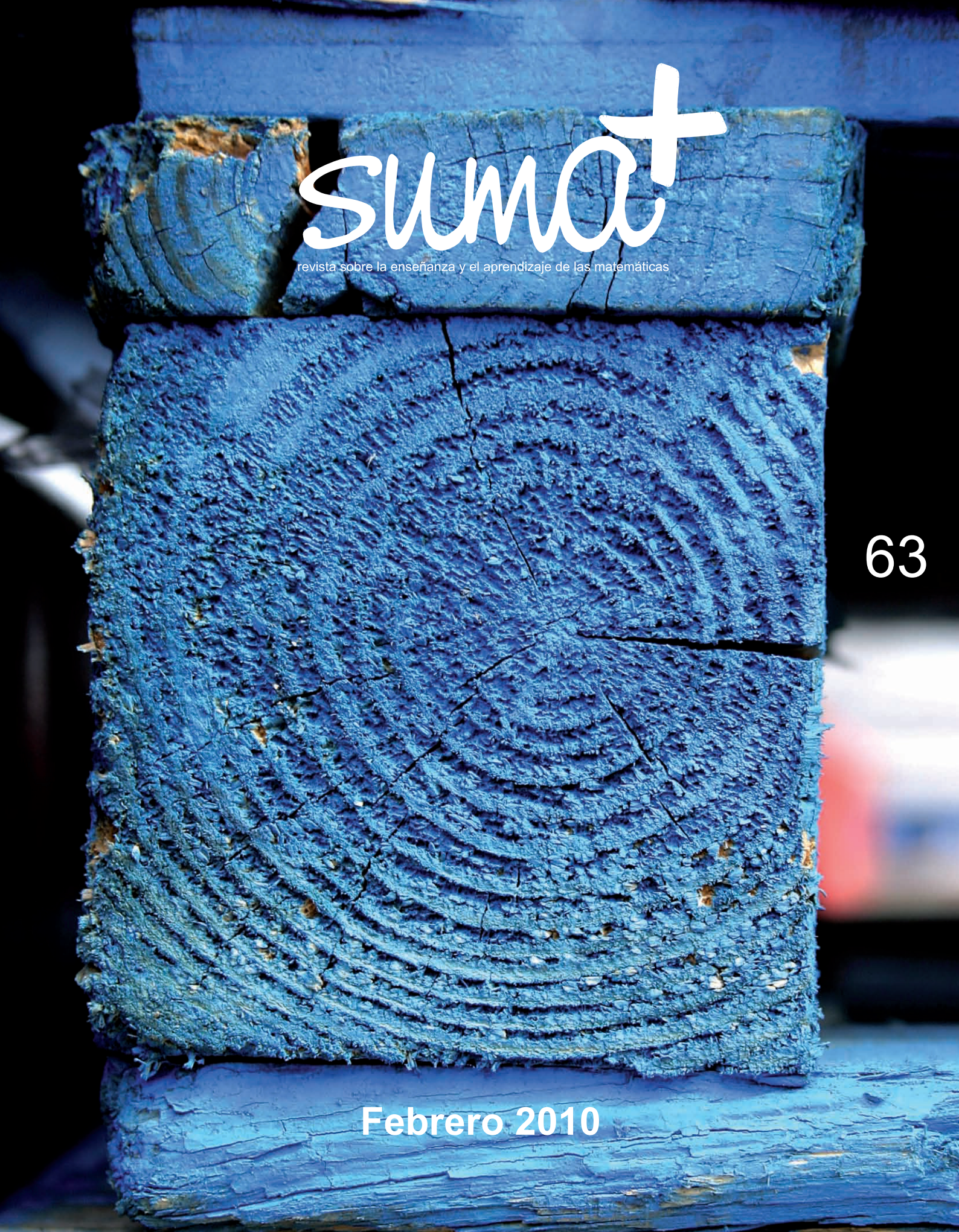


suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

63

Febrero 2010

suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Índice

Directores
Onofre Monzó del Olmo
Tomás Queralt Llopis
direccion@revistasuma.es
Administrador
Gregori García Ferri
administracion@revistasuma.es
Consejo de redacción
Salvador Caballero Rubio
(CEFIRE d'Alacant)
Marisa Fernández Villanueva
(IES Veles e Vents, Torrent)
Bernardo Gómez Alfonso
(Universitat de València Estudi General)
Floreal Gracia Alcaine
(IES Politècnic, Castelló)
José Antonio Mora Sánchez
(IES San Blai, Alacant)
Luis Puig Espinosa
(Universitat de València Estudi General)
Consejo Editorial
Serapio García Cuesta
(Presidente de la FESPM)
Francisco Martín Casalderrey
(IES Juan de la Cierva, Madrid)
Inmaculada Fuentes Gil
(IES Ágora, Madrid)
Ricardo Luengo González
(Universidad de Extremadura)
Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada: *O. Monzó*
Fotografía de la portada:
Pilar Moreno
Maquetación
T. Queralt y O. Monzó
Revista Suma
Apartado 498
E-46900-Torrent (España)
Fax:*+(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Depósito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

63 *Febrero 2010*

Editorial 3-4

artículos

Las elecciones generales de 2008 y el juego del parlamento
Mikel Álvarez Mozos, José María Alonso Meijide 7-15

Algunas demostraciones geométricas de la irracionalidade de $\sqrt{2}$
Natalia Casás Ferreño 17-20

Polilóbulos y competencias básicas
Inmaculada Fernández Benito 21-28

Evolución de las matemáticas acompañando a la educación secundaria
Fernando Tébar Cuesta 29-33

Errores *correctos* en la simplificación de fracciones: reflexión sobre algunas prácticas docentes en matemáticas
Jesús Beato Sirvent 35-41

Una división en que todos ganan: un caso de división justa
C. Miguel Ribeiro 43-48

poliedro

JUEGOS: Mac Mahon y las matemáticas en colores
Grupo Alquerque de Sevilla 51-57

El clip: Tazas, cucharas y los vasos del Starbucks Coffee
Claudi Alsina 59-61

Literatura y Matemáticas Cuentos del cero o *Las Matemáticas están llenas de vida(s)*
Constantino de la Fuente 63-74

MatemásTIC: Actividades TIC de aplicación directa en el aula
Mariano Real Pérez 75-82

Arte con ojos Matemáticos: Masaccio y la perspectiva matemática
Francisco Martín Casalderrey 83-88

Adherencias Horizontales
Miquel Albertí 89-93

Biblioteca: Mi biblioteca particular.
Escaparate 1: Un recorrido por el sorprendente mundo de la geometría
Escaparate 2: Una conjetura indomable
Escaparate 3: Retrospectiva ácrona de un profesor de matemáticas
Daniel Sierra (Coord.), Miquel Albertí Palmer 97-106

Hace: Janos Bolyai: la revolución de la geometría no euclídea
Santiago Gutiérrez 107-112

Musymáticas: Técnicas estadísticas aplicadas a la música
Vicente Liern Carrión 113-118

Cinemateca: El humor geométrico de Jacques Tati
José María Sorando Muzás 119-123

El hilo de Ariadna: La corona anual
Xaro Nomdedeu Moreno 125-132

actividades de la FESPM

Las XIV JAEM de Girona
Crónica de las XIV JAEM 135-140

IX Jornadas de Educación Matemática de la Comunitat Valenciana SEMCV "Al-Khwarizmi"
Primer Anuncio. Valencia, 10 al 12 de septiembre de 2010 141-142

Las I Jornadas de Matemáticas de La Rioja
Elena Ramirez 143

Relación de Sociedades federadas 124
Normas de Publicación 133
Boletín de suscripción 144

Asesores

Claudi Aguadé Bruix
Amador Álvarez del Llano
David Arnau Vera
Carmen Azcárate Jiménez
Luis M. Botella López
Encarnación Castro Martínez
Abilio Corchete González
Manuel Díaz Regueiro
Alejandro Fernández Lajusticia
Olimpia Figueras
Mª José Fuente Somavilla
Horacio Gutiérrez Álvarez
Arturo Mandly Manso
Rafael Martínez Calafat
Ricardo Moreno Castillo
Miguel Ángel Moreno Redondo
Maite Navarro Moncho
Mª Jesús Palacios de Burgos
Pascual Pérez Cuenca
Antonio Pérez Sanz
Ana Belén Petro Balaguer
Luis Puig Mosquera
Mariano Real Pérez
Francesc A. Rosselló Llompart
Manuel José Sastre Álvarez
Carlos Oswaldo Suarez Alemán
Francisco Villegas Martín

SUMA es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral, cuyo objetivo es tratar sobre aquellos aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje, destinada al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en Torrent (Valencia) - ESPAÑA

no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

suma+ 63
Febrero 2010

Tecnología y aprendizaje de las matemáticas

El colectivo formado por el profesorado de matemáticas es uno los que más se ha involucrado tradicionalmente en la utilización de las NNTT, y probablemente sólo se haya visto superado por los profesores de informática de reciente incorporación, y también, por supuesto, por el del alumnado que en estos temas siempre anda por delante gracias a su disponibilidad de tiempo y la capacidad para la experimentación que va asociada a la curiosidad y a la ausencia de miedo al error.

Las investigaciones en educación matemática han demostrado que ni las calculadoras ni los ordenadores oxidan el cerebro de los estudiantes. Muy al contrario, han puesto de relieve que ofrecen grandes posibilidades para apoyar y mejorar el aprendizaje de las matemáticas escolares, ya que con estas herramientas podemos aumentar la diversidad de experiencias, analizar situaciones más realistas y cercanas al estudiante y prestar más atención a los conceptos involucrados y a las estrategias de resolución de los problemas.

Durante los últimos años hemos asistido, a veces incluso como actores, a diversos planes de introducción de los ordenadores en la enseñanza basados en distintos sistemas operativos y con la incorporación de nuevo software matemático. En algunos casos suponían un apoyo ocasional y en otros llegaban a cambiar completamente la fisonomía de las clases. Ahora el cambio que se vislumbra va más allá: parece que nos dirigimos a un futuro en el que cada alumno trabajará en clase con su ordenador portátil, aunque no todas las CCAA se implican por igual en estos planes.

Si dejamos de lado la miopía educativa de algunos de nuestros dirigentes políticos, ya disponemos de una buena colección de experiencias que, una vez evaluadas producirán gran cantidad de información que muestre el camino a seguir. Para ello es necesario analizar diversas variables: resultados obtenidos, grado de utilización, coste económico del material, inversión necesaria y esfuerzo personal que ha realizado el profesorado en su

formación o los cambios que se han producido en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En este sentido, hay que valorar positivamente el proyecto de la Comunidad Europea Intergeo *en el que participan varias universidades europeas y en España tiene sede en la Universidad de Cantabria. Uno de sus principales objetivos consiste en evaluar, catalogar y difundir los recursos existentes en el campo de la Geometría Dinámica para hacer más accesibles materiales de calidad que apoyen el trabajo del profesorado en las clases de matemáticas.*

El análisis de las variables que afectan a la introducción de las NNTT en el aula también debe incluir la valoración del grado de competencia de nuestro alumnado en la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación tal como señala la Ley Orgánica de Educación, sin esperar a que un informe PISA nos muestre una radiografía poco favorecedora: pensemos que un estudio de ese tipo no sólo va a hacer un diagnóstico de los estudiantes y centros más avanzados en estos temas, sino que también recoge datos de aquellos que no disponen de medios o de los que, aún teniéndolos, no se involucran suficientemente en los planes establecidos para apoyar el uso de las NNTT en el aula.

Por último, y refiriéndonos al campo del software matemático, queremos dar la bienvenida a los Institutos de GeoGebra de Cantabria y Andalucía y a la Asociación Catalana de GeoGebra, organismos integrados en el International GeoGebra Institute (IGI). Desde Suma queremos animar al profesorado de estos organismos, en su mayoría pertenecientes a alguna de las Sociedades de Matemáticas Federadas, a exponer en estas páginas sus investigaciones y experiencias.

suma+

Manuscrito de Pedro Puig Adam

Las elecciones generales de 2008 y el juego del parlamento	*M. Álvarez, J.M. Alonso*
Algunas demostraciones geométricas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$	*Natalia Casás*
Polilóbulos y competencias básicas	*Inmaculada Fernández*
Evolución de las matemáticas acompañando a la Educación Secundaria	*Fernando Tébar*
Errores *correctos* en la simplificación de fracciones: reflexión sobre algunas práctica docentes en matemáticas	*J. Beato*
Una división en que todos ganan: un caso de división justa	*C. Miguel Ribeiro*

artículos

suma+ 63
Febrero 2010, pp. 7-15

Las elecciones generales de 2008 y el juego del parlamento

En este artículo analizamos el resultado de las elecciones generales desde un punto de vista Teórico de Juegos. Para cuantificar el poder que cada partido tiene en el nuevo Parlamento introducimos tres conceptos, los índices de poder de Shapley-Shubik, de Banzhaf-Penrose y de Deegan-Packel. De esta forma, podemos saber cuál es el partido más decisivo y comparando los resultados obtenidos con los de las elecciones de 2004, qué partidos han aumentado o disminuido más poder. Para terminar se proponen extensiones al modelo propuesto.

Palabras Clave: Teoría de juegos, juegos de mayoría ponderada, índices de poder, elecciones, aplicaciones a las Ciencias Sociales.

The general elections of 2008 and the game of parliament

In this paper we analyze the result of the elections for the Spanish Parliament in a Game Theoretical approach. In order to measure the power each party has in the new Parliament we introduce three concepts, the Shapley-Shubik, Banzhaf-Penrose and Deegan-Packel power indices. In this way, we are able to know which the most decisive party is and comparing the result with the elections of 2004, we conclude which party has gain and which has lost more power. At last, we present different extensions of the proposed model .

Key words: Game Theory, weighted majority games, power indices, elections, applications in Social Sciences.

Introducción

El nueve de marzo de 2008 se celebraron las elecciones generales en las que hemos podido decidir los parlamentarios y senadores que nos representarán los próximos cuatro años. Ellos a su vez fueron los encargados de elegir al gobierno que legislará y gestionará la administración pública hasta las elecciones venideras.

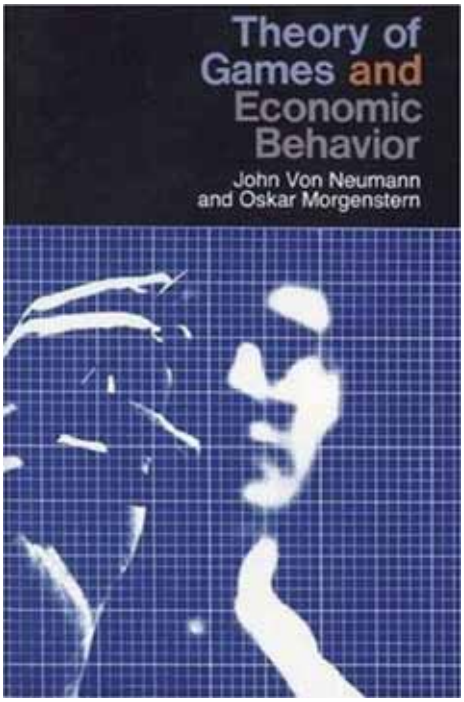
Las matemáticas se emplean como herramienta en muchos campos de conocimiento, incluyendo la política. Durante la campaña electoral, los candidatos a la presidencia de los distintos partidos han tratado de convencernos de lo bien que lo hicieron hasta el momento y de lo mejor que lo harán si llegan a formar gobierno. Con este fin, bombardean a la población con todo tipo de datos estadísticos, muchos referidos a cifras económicas. Cada candidato incluye en su discurso aquellos datos que más le interesan, lo cual por ejemplo hace que mucha gente tenga dificultades en saber si el paro ha subido o bajado. En este sentido, puede parecer que las matemáticas se usan como herramienta para manipular la realidad.

Por el contrario, las matemáticas son útiles esencialmente para entender la realidad y no para manipularla. Con el propósito de resolver problemas que plantean las diferentes actividades humanas, se han desarrollado nuevas disciplinas matemáticas. Gracias a una de esas disciplinas conocida como Teoría de Juegos, existen diversas formas de calcular los llamados *índices de poder*, que básicamente tratan de cuantificar el peso o fuerza que tienen los diferentes partidos políticos partiendo de la cantidad de parlamentarios conseguidos. Este será el objetivo principal de nuestro trabajo.

La Teoría de Juegos es una rama de las Matemáticas que se dedica al estudio de los problemas de decisión en los que interaccionan varios decisores. Muchos sitúan el nacimiento de esta disciplina en 1944 cuando John Von Neumann y Oscar Morgestern publican *Theory of games and economic behaviour*. En este trabajo se sientan las bases de lo que conocemos por jugador racional, jugador que toma decisiones consecuentes ante las alternativas que se le presentan. Dichas

Mikel Álvarez Mozos
José María Alonso Meijide
Universidad de Santiago de Compostela

decisiones son consecuentes con respecto a la función de utilidad, que nos determina el beneficio de cada jugador conociendo la estrategia que cada uno de los decisores adopta. Otro gran avance de la teoría de juegos fue la tesis doctoral de John Nash leída en 1951, en ella se introduce el equilibrio de Nash y se prueba su existencia para juegos finitos. Podríamos decir que ahora, el jugador racional asume la racionalidad de los demás jugadores hasta el punto de coordinar las estrategias de cada uno para alcanzar el equilibrio, en el cual ningún jugador se beneficia al modificar su estrategia unilateralmente.



Hace pocos años, el gran impacto que la Teoría de Juegos ha tenido en el desarrollo de la Economía moderna quedó oficialmente reconocido al ser concedidos tres Premios Nobel de Economía a teóricos de juegos, el primero en 1994 a John Nash, Reinhard Selten y John Harsany, el segundo en 2005 a Robert Aumann y Thomas Schelling y el más reciente en 2007 a Leonid Hurwicz, Eric S. Maskin y Roger B. Myerson. Pero no es la Economía el único ámbito en el que la teoría de Juegos se ha aplicado con éxito, existen aplicaciones en campos tan dispares como la biología, la sociología o la política. En este artículo podrás comprobar la aplicación a la política a través de un ejemplo interesante.

Los diferentes juegos se clasifican en dos grandes grupos, los juegos cooperativos y los no cooperativos. En este artículo nos centraremos en los primeros, juegos que cumplen la propiedad de que el beneficio obtenido por una coalición no puede empeorar si esta aumenta, lo cual quiere decir que la cooperación es beneficiosa o que como mínimo no es perjudicial. Entre los juegos cooperativos tenemos los juegos simples, que se caracterizan por asignar a cada cooperación posible de jugadores un resultado de tipo *victoria* o *derrota,* o equivalentemente, 1 o 0. A pesar de ser juegos simples, son muy útiles, ya que existe una gran cantidad de situaciones que se pueden explicar basándose en ellos.

Un ejemplo de lo dicho es el Parlamento. Podemos ver la situación como un juego en el que el objetivo es el poder, o dicho con otras palabras, la formación de un gobierno con apoyos suficientes para poder legislar. Una vez formado el gobierno, el objetivo sigue siendo contar con los apoyos suficientes para poder aprobar las propuestas que interesen a cada partido. Por lo tanto, en nuestro juego, los jugadores son los partidos políticos con representación parlamentaria, y la regla que nos determina si una coalición de jugadores es ganadora o no, es la regla de la mayoría simple. En consecuencia, y de modo natural nos hacemos la pregunta: ¿cómo medir la fuerza que cada jugador tiene a la hora de cambiar el resultado de una votación? Para responder a esta pregunta recurrimos a los conocidos como *índices de poder*. Existen muchas formas de cuantificar este poder pero en este trabajo nos vamos a centrar en tres que nos parecen más interesantes. Una buena revisión de las distintas herramientas que la Teoría de Juegos aporta al análisis de los parlamentos la podemos encontrar en Owen y Carreras (1995). Otros trabajos en los que se ha empleado la Teoría de Juegos para analizar situaciones en las que las decisiones se toman por votación son Espinel (1999a, 1999b, 2000a, 200b,2002) y Rodríguez y Espinel (2005).

En base a esto, hemos estructurado el resto del artículo en tres apartados: el segundo, *Preliminares*, dedicado a introducir todos los elementos necesarios para entender el tercer apartado, relativo a los *Resultados*, en el que se presenta la situación del Parlamento y se calculan los índices de poder que hemos considerado. En el último apartado, *Conclusiones*, introducimos las extensiones que se podrían hacer al modelo propuesto.

Preliminares

Esta sección la dedicaremos a introducir la notación y los resultados básicos que usaremos en nuestro análisis de la situación en el parlamento.

Para empezar, definimos formalmente un juego cooperativo con utilidad transferible (juego TU), que es un par $G=(N,v)$ donde $N=\{1,2,\ldots,n\}$ es el conjunto de jugadores y $v: P(N)\rightarrow\mathbb{R}$ la función característica que asigna a cada subconjunto S de N un número real $v(S)$ con la condición de que $v(\varnothing)= 0$. Esta función nos da la utilidad que los jugadores de la coalición S pueden obtener del juego si cooperan, independientemente de lo que hagan el resto de los jugadores.

Decimos que un juego TU es un juego simple cuando,

s1) $v(S)\in\{0, 1\}, \forall\ S\subseteq N$
s2) $v(N)=1$
s3) $v(T)\leq v(S), \forall\ T\subseteq S$

En un juego simple, si $v(S)=1$ decimos que S es una coalición ganadora y si $v(S)=0$, que es perdedora. Una coalición ganadora se dice que es minimal ganadora si toda subcoalición propia de S es perdedora, es decir, si todos los jugadores de S son necesarios para que S sea ganadora. Denotaremos por W al conjunto de coaliciones ganadoras y por W_m al conjunto de coaliciones minimales ganadoras. Utilizando esta última notación, un juego simple queda definido dando el par (N,W), así como (N, W_m).

En estos juegos podemos considerar ciertos jugadores especiales. Así, decimos que un jugador i es un dictador si la coalición $\{i\}$ es ganadora y $N\setminus\{i\}$ perdedora. Por otro lado, un jugador i tiene veto, si dada una coalición S a la que no pertenece i, S es una coalición perdedora. Llamamos a i jugador nulo, si no pertenece a ninguna coalición minimal ganadora. Dada una coalición S, decimos que es un swing, si S es ganadora y $S\setminus\{i\}$ perdedora. Esto implica que si en un juego simple tenemos a un dictador, éste será el único jugador swing de cualquier coalición. Por último decimos que dos jugadores i y j son simétricos si para toda coalición S que no contenga a i ni a j se cumple que, $S\cup\{i\}$es ganadora si y solo si $S\cup\{j\}$ lo es.

Una familia muy interesante de juegos simples son los juegos de mayoría ponderada. Un juego de mayoría ponderada es un juego simple en el que cada jugador i, tiene asignado un peso $w_i\geq 0$ y en el que existe una cantidad $q>0$ denominada cuota, de modo que una coalición S es ganadora si su peso, que es la suma de los pesos de los jugadores de S, es igual o superior a la cuota fijada. En esta familia,

- Un jugador i es un dictador si $w_i\geq q$.
- Un jugador i tendrá veto si:

$$\sum_{\substack{j\in N\\ j\neq i}} w_j < q$$

- Un jugador i será nulo si para toda coalición no ganadora S a la que no pertenece i tenemos que:

$$w_i + \sum_{j\in S} w_j < q$$

- Un jugador i es un swing para una coalición ganadora S si:

$$\sum_{j\in S\setminus\{i\}} w_j < q$$

En un juego de mayoría ponderada una coalición es minimal ganadora si su peso es mayor o igual que q y su peso menos el peso del jugador con menor peso (dentro de la coalición) es menor que q. No todos los juegos simples pueden reescribirse como juegos de mayoría ponderada.

Una vez introducidos los juegos de mayoría ponderada, vamos a explicar con algo de detalle lo que se conoce por *índices de poder*. La mayoría de los índices de poder miden el poder o la influencia a-priori del voto individual, estos índices cuantifican el poder que tiene un jugador (partido político) basándose únicamente en su peso (número de parlamentarios) y en la regla de decisión del juego (mayoría simple) e ignoran ciertos factores que pueden influir en la realidad, como por ejemplo, la naturaleza de los asuntos sobre los que se requiere opinar, los intereses o ideología de los partidos, la capacidad de persuasión, las afinidades e incompatibilidades, etc. Tampoco podemos olvidar que en la forma en la que hemos definido el juego, los jugadores solo tienen la posibilidad de votar sí o no, mientras que normalmente suele haber otras alternativas como la abstención. Todas estas cuestiones son extensiones del caso más sencillo que estudiaremos aquí en profundidad, y hablaremos de ellas en el apartado de conclusiones.

Definición: Un índice de poder del jugador i, es una aplicación $\phi_i: SG\rightarrow\mathbb{R}^+$, es decir, una función real no negativa definida sobre el conjunto de juegos simples.

Felsenthal y Machover (1998) propusieron las siguientes condiciones, como conjunto de propiedades mínimas que todo índice de poder razonable debe cumplir.

i. Iso-invarianza (INV): Sean $G=(N, v)$ y $G'(N', v')$ dos juegos isomorfos, es decir, juegos tales que existe una biyección h de N sobre N' tal que para todo $S\subseteq N$, $v(S)=1$ si y sólo si $v'(h(S))=1$. Entonces $\phi_i(G)=\phi_{h(i)}(G')$.
ii. Ignorar jugadores nulos (IGN): Para todo juego simple $G= (N, V)$ y todo jugador nulo $d\in N$ se tiene que

$\phi_i(G)=\phi_i(G_{-d})$ para todo $i\in N\setminus\{d\}$, dónde G_{-d} se obtiene excluyendo del juego G el jugador d.

iii. Nulidad sólo para jugadores nulos (NSN): Para todo juego simple $G=(N, V)$, $\phi_i(G)=0$ si y sólo si $i\in N$ es un jugador nulo.

La propiedad de INV significa que cualquier reordenamiento de los jugadores no modifica el índice de poder de ninguno de ellos, es decir, que la influencia que un jugador puede tener en el resultado de una votación sólo depende de su peso. Lo que la propiedad IGN implica es que suprimir del juego cualquier jugador cuyo voto no puede influir en el resultado de la votación no cambia el índice del resto de jugadores. Por último, ya sabemos que el índice de poder de un jugador no puede tomar valores negativos, por lo tanto NSN implica que este valor alcanza su límite inferior 0 solo ante jugadores nulos.

Para terminar con este apartado, a continuación introducimos los tres índices que vamos a utilizar para estudiar la composición del parlamento al que dio lugar el resultado de las elecciones generales del nueve de marzo del 2008, que son, el índice de Shapley-Shubik, el de Banzhaf-Penrose y el de Deegan-Packel.

El índice de Shapley-Shubik, propuesto por Lloyd S. Shapley y Martin Shubik (1954) se basa en el Valor de Shapley que introdujo Shapley un año antes. En su trabajo, Shapley y Shubik parten de la idea de aplicar el conocido Valor de Shapley a los juegos simples, para lo que introducen la idea del jugador swing que es un jugador decisivo para que cierta coalición resulte ganadora. El cálculo del índice se basa en todas las posibles permutaciones de los jugadores sobre las que se analizan las posiciones "decisivas" para un jugador i. La suma de todas las posiciones en las que i es "decisivo" se divide por las ordenaciones posibles sobre el conjunto de jugadores, lo que resulta en la siguiente expresión;

$$\phi_i = \sum_{\substack{S\subseteq N \\ i\in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\Big[v(S)-v(S\setminus\{i\})\Big]$$

donde $s=|S|$.

Cada swing, se pondera por:

$$\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$$

y el índice de i es la media ponderada de todos los swings.

Existen interesantes interpretaciones probabilísticas de ϕ_i. Si denotamos por p_i la probabilidad de que i vote a favor de una propuesta dada, y suponemos que ésta sigue una distribución uniforme en [0,1]. Si además todos los jugadores tienen la misma probabilidad de votar a favor de la propuesta, es decir, si $p_i = p$, para todo jugador i (asunción de homogeneidad) la probabilidad de que el voto del jugador i afecte el resultado de la votación es ϕ_i.

El índice de Shapley-Shubik cumple la propiedad de normalidad, lo que significa que sumando los índices de todos los jugadores obtenemos 1. Esto hace que se pueda comparar fácilmente con otros índices.

La idea que subyace en el valor absoluto de Banzhaf-Penrose fue presentada por L.S. Penrose en su trabajo en 1946 (Penrose, 1946), pero pasó décadas inadvertido hasta que fue redescubierto en los años ochenta. Hoy en día es más conocido como el índice absoluto de Banzhaf. Éste resulta de sumar todos los swings del jugador i y de dividirlo por 2^{n-1};

$$\beta_i = \frac{\sum_{\substack{S\subseteq N \\ i\in S}} \Big[v(S)-v(S\setminus\{i\})\Big]}{2^{n-1}}$$

El denominador representa el número de coaliciones (tanto ganadoras como perdedoras) de las que i forma parte. Por otro lado podemos ver β_i como el número de coaliciones en las que i es un swing dividido por la cantidad máxima que este número puede alcanzar.

Este índice también tiene una interesante interpretación probabilística. Supongamos que p_i (probabilidad de que i vaya a votar a favor de una propuesta) sigue una distribución uniforme en [0,1] y que la decisión de i no tiene nada que ver con lo que pueda decidir cualquier otro jugador (asunción de independencia), entonces, la probabilidad de que el voto de i sea decisivo sobre el resultado de la votación es β_i.

En este último caso no se cumple la propiedad de normalidad ya que la suma de los índices de todos los jugadores no suma uno, esto se puede solucionar dividiendo la expresión por una cantidad adecuada.

El último índice que vamos a considerar es el que propusieron Deegan y Packel (1979) en su trabajo. Este índice recoge la idea de que el poder de un jugador se basa exclusivamente en su participación en la formación de coaliciones minimales ganadoras, y que, a priori, todas estas coaliciones minimales ganadoras son igualmente plausibles. Para definir este índice de poder, se suponen las siguientes condiciones. La primera es que sólo originan una "victoria" las coaliciones minimales ganadoras. La segunda es que todas las coaliciones minimales ganadoras son equiprobables. Y la última es que los jugadores que constituyen una coalición "victoriosa" se dividen el "botín" a partes iguales. Estas condiciones parecen razonables en muchos casos. La primera condición es aplicable en el sentido de que los jugadores racionales quieren maximizar su

poder y, por lo tanto, sólo se formarán coaliciones minimales ganadoras. La segunda condición dice que todas las coaliciones minimales ganadoras juegan el mismo papel y, finalmente, la última propiedad establece que todos los jugadores de una coalición minimal ganadora sean tratados por igual. Estas propiedades dan lugar a la siguiente expresión:

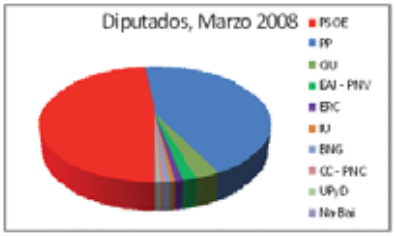
$$\rho_i = \frac{1}{|W_m|} \sum_{S \in W_m(i)} \frac{1}{|S|}$$

donde $W_m(i)=\{S \in W_m : i \in S\}$.

Resultados

Sobre los resultados de todas las elecciones existen interpretaciones y conclusiones para prácticamente todos los gustos. Cada partido hace uso de la cantidad de votos obtenidos, del porcentaje de votos, de la cantidad de diputados o incluso del índice de abstención mostrando, la mayoría de los casos, la interpretación que arroja resultados más favorables a sus intereses. Nosotros en cambio, vamos a intentar medir la fuerza de cada partido a la hora de influir en la toma de decisiones del parlamento y comparar ésta con la que tenían hasta entonces. Este fue el reparto de escaños resultante de las últimas elecciones:

Partido político		Diputados
PSOE		169
PP		154
CiU		10
EA - JPNV		6
ERC		3
IU		2
CC - PNC		2
BNG		2
UP y D		1
Na - Bai		1



Tenemos 10 jugadores, que son, todos los partidos políticos con representación parlamentaria en un juego de mayoría ponderada donde la cuota la fija la mayoría simple, que es en este caso la mitad más un parlamentario, es decir, 176. Ninguno de los jugadores es capaz por su propio peso de alcanzar esta cuota, lo que significa que en este juego no tenemos ningún jugador dictador. Por otro lado, es fácil comprobar que tampoco tenemos ningún jugador con veto, ya que para que esto sucediera necesitaríamos un partido con un mínimo de 175 parlamentarios. En cambio si la regla fuera de 2/3 en lugar de la mayoría simple, el PSOE y el PP serían jugadores con veto. En cuanto a jugadores simétricos, por ahora podemos decir que IU, BNG y CC-PNC por un lado y UPyD y Na-Bai por otro son simétricos ya que tienen exactamente el mismo peso en el juego de mayoría simple.

A continuación se indican las coaliciones minimales ganadoras que se podrían formar, 29. Toda coalición ganadora en la que participe el PP y no el PSOE necesita también el apoyo de CiU y de EAJ-PNV. En esta tabla resumimos todas las combinaciones que dan lugar a coaliciones minimales ganadoras:

PSOE; PP	
PSOE; CiU	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; IU; BNG
PSOE; EAJ-PNV; ERC	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; IU; CC-PNC
PSOE; EAJ-PNV; IU	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; BNG; CC-PNC
PSOE; EAJ-PNV; BNG	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; IU; UPyD
PSOE; EAJ-PNV; CC-PNC	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; IU; Na-Bai
PSOE; EAJ-PNV; UPyD	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; BNG; UPyD
PSOE; EAJ-PNV; Na-Bai	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; BNG; Na-Bai
PSOE; ERC; IU; BNG	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; CC-PNC; UPyD
PSOE; ERC; IU; CC-PNC	PP; CiU; EAJ-PNV; ERC; CC-PNC; Na-Bai
PSOE; ERC; BNG; CC-PNC	PP; CiU; EAJ-PNV; IU; BNG; CC-PNC
PSOE; ERC; IU; UPyD; Na-Bai	PP; CiU; EAJ-PNV; IU; BNG; UPyD; Na-Bai
PSOE; ERC; BNG; UPyD; Na-Bai	PP; CiU; EAJ-PNV; IU; CC-PNC; UPyD; Na-Bai
PSOE; ERC; CC-PNC; UPyD; Na-Bai	PP; CiU; EAJ-PNV; BNG; CC-PNC; UPyD; Na-Bai
PSOE; IU; BNG; CC-PNC; UPyD	
PSOE; IU; BNG; CC-PNC; Na-Bai	

A partir de esta tabla ya empezamos a obtener resultados interesantes, pudiendo observar que el número de coaliciones minimales ganadoras en las que participa el PP es 14 al igual que CiU, además, en 13 de ellas están ambos y en la restante, si sustituyéramos estos dos partidos la correspondiente coalición seguiría siendo minimal ganadora. Esto indica que el PP y CiU son jugadores simétricos en el juego de mayoría ponderada que hemos considerado.

Otro resultado inmediato a la vista de la tabla de coaliciones minimales ganadoras, es el hecho de que todos los partidos, por pequeño peso que tengan, están en alguna coalición minimal ganadora, de aquí concluimos que no existe ningún jugador nulo. Es decir, no tenemos ningún partido cuyo voto vaya a ser siempre irrelevante para el resultado de cualquier votación. Los dos partidos que cuentan únicamente con un parlamentario, UPyD y Na-Bai, están presentes en nada menos que 11 coaliciones minimales ganadoras, lo que implica que son swings de todas ellas.

Para hacernos una idea del poder de cada grupo parlamentario, antes de calcular los correspondientes índices de poder vamos a presentar el número de swings de cada uno de los partidos, es decir, el número de coaliciones ganadoras en las que el jugador en cuestión es decisivo.

Partido político	Swings
PSOE	437
PP	75
CiU	75
EAJ - PNV	73
ERC	35
IU	21
BNG	21
CC - PNC	21
UPyD	11
Na - Bai	11

La tabla confirma lo observado hasta ahora. El PP y CiU son jugadores simétricos por tener el mismo número de swings y no tenemos ningún jugador nulo, ya que todos los partidos son swings de alguna coalición. Asimismo se observa que los dos partidos más pequeños son swings en 11 ocasiones, que resultan de las 11 coaliciones minimales ganadoras listadas anteriormente, esto sucede siempre que el peso de los partidos sea una unidad.

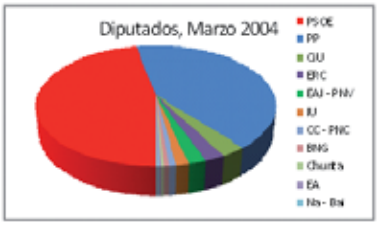
A continuación presentamos en una tabla los tres índices descritos anteriormente, calculados para cada partido:

Esta tabla, confirma la condición de jugadores simétricos de los grupos parlamentarios del PP y de CiU, ya que ambos jugadores tienen los mismos índices de poder. Esto resulta realmente sorprendente ya que entre ambos grupos hay una diferencia de 144 diputados, que representan un 41% del total de parlamentarios. Este hecho es un capricho de la regla de la mayoría. Por otro lado, si nos fijamos en el índice de Deegan-Packel, resulta que EAJ-PNV, con sólo 6 diputados, tiene más poder que CiU y por tanto también que el PP. Esto se explica, si nos fijamos en la tabla de coaliciones minimales ganadoras expuesta con anterioridad, con el hecho de que EAJ-PNV está en un número mayor de coaliciones minimales ganadoras que CiU o PP. Concretamente EAJ-PNV forma parte de 19 y tanto CiU como PP de 14.

	Índices de poder		
Partidos políticos	Shapley-Shubik	Banzhaf-Penrose	Deegan-Packel
PSOE	0,5377	0,8535	0,1638
PP	0,1179	0,1465	0,0895
CiU	0,1179	0,1465	0,0895
EAJ-PNV	0,1040	0,1462	0,1412
ERC	0,0345	0,0684	0,1098
IU	0,0214	0,0410	0,0880
BNG	0,0214	0,0410	0,0880
CC-PNC	0,0214	0,0410	0,0880
UPyD	0,0119	0,0215	0,0711
Na-Bai	0,0119	0,0215	0,0711

Para terminar vamos a comparar estos resultados con la situación del parlamento en la anterior legislatura. Antes de empezar con la comparación, nótese que en el juego que había hasta las últimas elecciones teníamos un jugador más que ahora, 11. Este era el reparto de escaños a los que dieron lugar las elecciones de 2004:

Partido político		Diputados
PSOE		164
PP		148
CiU		10
ERC		8
EAJ - PNV		7
IU		5
CC - PNC		3
BNG		2
Chunta		1
EA		1
Na - Bai		1



A primera vista, se observa que tanto el PSOE como el PP han aumentado su número de diputados en comparación con las anteriores elecciones, el PSOE en cinco y el PP en seis. En consecuencia los partidos minoritarios han pasado de sumar 38 parlamentarios (un 10,86%) a 27 (7,71%). Esto en principio podría resultar en que el poder se concentre más en los dos partidos mayoritarios que hasta ahora.

En la siguiente tabla, se presentan los resultados de calcular los índices de poder a los que da lugar el reparto de parlamentarios.

	Índices de poder		
Partidos políticos	Shapley-Shubik	Banzhaf - Penrose	Deegan-Packel
PSOE	0,4849	0,8301	0,1636
PP	0,1357	0,1699	0,0681
CiU	0,1052	0,1602	0,1101
ERC	0,0770	0,1289	0,1041
EAJ-PNV	0,0639	0,1074	0,0866
IU	0,0460	0,0684	0,0717
CC-PNC	0,0341	0,0566	0,0964
BNG	0,0210	0,0352	0,0798
Chunta	0,0107	0,0176	0,0732
EA	0,0107	0,0176	0,0732
Na-BAi	0,0107	0,0176	0,0732

Si nos fijamos en los índices del PSOE y el PP, vemos que a pesar de que como ya hemos comentado, ambos partidos han aumentado su representación, el PP disminuye sus índices de poder de Shapley-Shubik y Banzhaf-Penrose mientras que el PSOE incrementa los tres índices considerablemente. Esto indica que el PSOE es ahora más decisivo de lo que venía siendo y que la influencia del voto del PP es menor de lo que era hasta el nueve de Marzo.

Por otro lado, la situación que había antes de las últimas elecciones es bastante similar al de ahora en el sentido de que antes tampoco había ningún jugador dictador ni con veto ni tampoco nulo. En cambio la condición de jugadores simétricos que en la actualidad existe entre el PP y CiU ha sido un cambio muy relevante ya que hasta ahora el poder que tenía el PP y el que tenía CiU eran muy diferentes.

En cuanto a los partidos minoritarios, se pueden extraer muchas conclusiones más. En general CiU y EAJ-PNV han aumentado su poder, en el caso de EAJ-PNV considerablemente, en ambos casos a pesar de haber reducido el número de votos. El aumento del poder de estos partidos nacionalistas está estrechamente relacionado con la disminución de la influencia de otros partidos minoritarios como ERC, IU o CC-PNC. En el caso de estos tres, la disminución de sus índices ha ido acompañada de una considerable pérdida del número de escaños. En cambio, si analizamos la influencia que el BNG puede tener sobre el resultado de una votación, concluimos que a pesar de tener el mismo número de diputados en ambas legislaturas, en esta última es un jugador mucho más decisivo de lo que era antes del nueve de marzo, ya que es uno de los tres partidos que ha aumentado todos los índices que estamos considerando. Una situación similar le sucede a la coalición Na-Bai, la cual, a pesar de continuar con los mismos escaños que hasta ahora, ha aumentado su poder de influencia al ser swing de un mayor porcentaje de coaliciones de lo que era antes.

Así pues, como conclusión general, podemos decir para empezar que hay algo más de bipartidismo del que había hasta ahora, ya que la influencia de los partidos minoritarios, en conjunto, ha disminuido. Para continuar, también se concluye que el PSOE ha salido reforzado, ya que aumenta sus índices de poder, sobre todo respecto al PP. Y por último, entre los partidos minoritarios se puede decir que ha habido un flujo de poder hacia CiU y EAJ-PNV ya que ahora es muy probable que el apoyo de alguno de estos grupos determine el resultado de una votación en la que PSOE y PP mantienen posturas enfrentadas.

Conclusiones

Hoy en día, las matemáticas están presentes en prácticamente todas las disciplinas del conocimiento humano. Este trabajo trata sobre las matemáticas electorales o matemáticas en la vida política, que abordan diversos aspectos relacionados con las elecciones y la actividad política desarrollada por un parlamento. En este ámbito, podemos señalar dos situaciones particulares muy conocidas, en donde se aplican herramientas matemáticas. La primera de ellas trata sobre la relación existente entre el número de votos que recibe un partido y el número de representantes que dicho partido va a tener. Algunos de los problemas estudiados son el de la distribución del número de escaños por circunscripción y el del método elegido para asignar estos escaños. La segunda situación, en la que nos hemos centrado en este trabajo, está relacionada con la capacidad que tiene un partido para poder ganar las diferentes votaciones que se plantean en el Parlamento. Se pretende obtener una medida que proporcione una forma de cuantificar la relación existente entre el número de representantes de un partido y la capacidad que tiene dicho partido para ser decisivo en una votación.

En este trabajo hemos empleado la Teoría de Juegos, en particular, los juegos simples, para abordar algunos de los problemas considerados anteriormente. Una de las principales aplicaciones de los juegos simples es que sirven como modelo

matemático para representar y analizar diferentes sistemas de votación. El interés de los juegos simples se centra en el estudio del poder que tienen los diferentes agentes en el proceso de toma de decisiones. Para medir este poder, se emplean los denominados índices de poder, que proporcionan diferentes medidas de la capacidad que tiene cada uno de los agentes para convertir una coalición ganadora en perdedora. De los diferentes índices que existen en la literatura hemos presentado las definiciones e interpretaciones de tres de ellos: el índice de Shapley-Shubik, el índice de Banzhaf-Penrose y el índice de Deegan-Packel.

En la segunda sección del trabajo, hemos calculado estos tres índices de poder para los diferentes partidos con representación parlamentaria tras las elecciones legislativas celebradas en España el nueve de marzo de 2008. Con este ejemplo se ha puesto de manifiesto que el poder de los diferentes partidos no es siempre proporcional al número de escaños. Además, hemos comparado los resultados obtenidos con los correspondientes a las anteriores elecciones, celebradas en marzo de 2004.

Resulta evidente que la realidad es más compleja de lo que hemos supuesto en este trabajo. No hemos considerado ni la ideología, ni la capacidad de persuasión de los distintos partidos. Existen diferentes formas de incluir en el modelo matemático información adicional a la proporcionada por el número de escaños, para que refleje de forma más fidedigna la situación real. A su vez, se han definido modificaciones de los diferentes índices, que tienen en cuenta estos condicionamientos exógenos para medir el poder de los jugadores. Comentamos brevemente algunos de los modelos existentes en la literatura.

Los juegos simples con uniones a priori, vienen dados por la terna (N, v, P), en donde P es una partición del conjunto de jugadores, que determina la estructura de cooperación a priori entre los jugadores implicados. En un juego, algunos agentes tendrán propuestas similares a las planteadas por otros, por lo que parece lógico suponer, que en estos casos la cooperación será más fácil que con aquellos otros agentes con los que existan diferencias importantes. En el ejemplo concreto que hemos considerado, la partición de los jugadores podría venir definida por las diferentes ideologías de los partidos.

Los juegos simples con grafo de afinidades (y/o de incompatibilidades) vienen dados por la terna (N, v, g) (o por la cuaterna $(N, v, g1, g2)$ si consideramos conjuntamente un grafo de afinidades y un grafo de incompatibilidades). En este caso, el grafo representa la afinidad (o incompatibilidad) entre los distintos pares de jugadores. De esta forma, si el grafo es de comunicación, determina caminos que unen a aquellos partidos que, en principio, tienen mayor probabilidad de llegar a acuerdos. Si el grafo es de incompatibilidad, cada arco del grafo une jugadores para los que la cooperación es prácticamente imposible. También podrían considerarse situaciones más complejas, representadas por (N, v, P, g) o, incluso, por $(N, v, P, g1, g2)$.

El estudio de estos modelos ha abierto en el campo de la Teoría de Juegos una fructífera línea de investigación, ya que se hace necesario definir las modificaciones adecuadas de los diferentes índices de poder así como estudiar las diferentes propiedades que verifican cada uno de ellos. Al igual que ocurría para los índices originales, el cálculo de estas modificaciones origina un elevado número de operaciones matemáticas, por lo que también se trabaja en diferentes métodos para facilitar el cálculo de estos nuevos índices.

Los índices de poder pueden resultar muy útiles para trabajar con alumnos de secundaria o bachillerato. Los modelos más sencillos de juegos de mayoría ponderada son una buena forma de ver aplicaciones de las matemáticas a las Ciencias Sociales. Un ejercicio interesante podría consistir en analizar el consejo escolar del centro. Para ello en primer lugar necesitaremos conocer la composición de este, es decir, necesitamos saber la cantidad de representantes que cada grupo (profesores, alumnos, PAS, etc.) posee en el citado órgano. Para poder representar cada uno de los grupos por un jugador en el juego tendremos que suponer que cada grupo votará por una enmienda dada en bloque, es decir, supondremos una perfecta disciplina de voto dentro de cada grupo. A continuación se podría aprovechar para ver las diferentes reglas básicas de votación existentes como son, la regla de la mayoría, la de la popularidad o el criterio de Condorcet (ganará aquella alternativa que sea preferida por una mayoría cuando se enfrenta a cada una de las mociones restantes en votaciones dos a dos). Trabajos interesantes en los que se estudian las diferentes reglas de elección son Nortes (2001) y Espinel (2000b). Como primera aproximación del poder se puede calcular el porcentaje de votos que cada grupo posee. A continuación se procederá a calcular los diferentes índices de poder presentados. Cabe resaltar los diferentes conceptos que se trabajan al calcular los índices de Shapley-Shubik, Banzhaf-Penrose y Deegan-Packel, sería interesante introducir en este sentido

nociones básicas de combinatoria como son la cantidad de subconjuntos de $N\backslash\{i\}$ con $i \in N$ o el número de posibles ordenaciones de estos subconjuntos. También sería interesante dedicar cierto tiempo a explicar la idea de las coaliciones minimales ganadoras, que constituyen la base del índice de Deegan-Packel. Para finalizar se podrían comparar los índices de poder con el número de representantes y obtener conclusiones interesantes.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer el apoyo económico recibido a través del proyecto ECO2008-03484-C02-02/ECON y el programa FPU del Ministerio de Ciencia e Innovación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Deegan, J. y Packel, E.W. (1979). A New Index of Power for Simple n-Person Games. *International Journal of Game Theory*, 7(2): pp. 113-123.

Espinel Febles, M.C. (1999a). El poder y las coaliciones. *Revista Suma*, 31: pp. 109-117.

Espinel Febles, M.C. (1999b). Sistema de reparto de poder en las elecciones locales. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, 39: pp. 13-19.

Espinel Febles, M.C. (2000a). El poder de las coaliciones en algunas instituciones, *Uno*, 23: pp. 57-67.

Espinel Febles, M.C. (2000b). Elecciones y matemáticas. *Las matemáticas del siglo XX. Números*, 43 y 44: pp. 381-384.

Espinel Febles, M.C. (2002). Formación del profesorado e investigación en educación matemática. "Estudio didáctico de la estructura de algunas instituciones mediante los juegos cooperativos", pp. 143-157.

Felsenthal, D. y Machover, M. (1998). *The Measurement of Voting Power*, Edward Elgar, Cheltenham.

Nortes Checa, A. (2001). Matemáticas electorales: desproporcionalidad y alianzas. *Revista Suma*, 36: pp. 43-50.

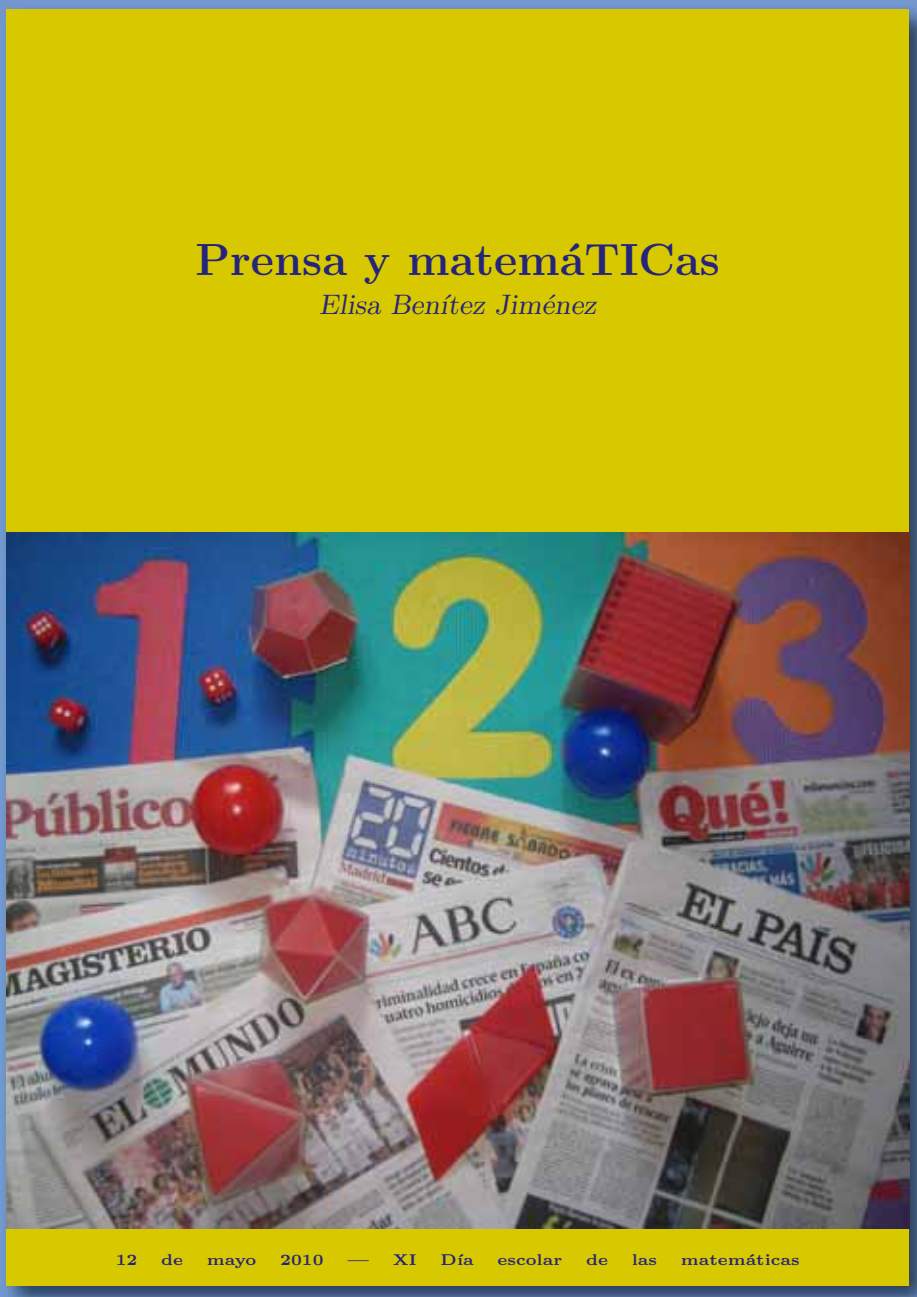
Owen, G. y Carreras, F. (1995). Valor coalicional y estrategias parlamentarias. *Revista española de investigaciones sociológicas*, 71-72: pp. 157-176.

Penrose, L.S. (1946). The Elementary Statistics of Majority Voting. *Journal of the Royal Statistical Society*, 109: pp.53-57.

Rodriguez Cruz, R. y Espinel Febles M.C. (2005). Votaciones Y desarrollo de los valores democráticos. *Números*: pp. 25-39.

Shapley, L.S. y Shubik, M. (1954). A Method of Evaluating the Distribution of Power in a Committee System. *American Political Science Review* 48(3): pp. 787-792.

Este artículo fue recibido en *SUMA* en Mayo de 2008 y aceptado en Junio de 2009



Servicio de Publicaciones de la FESPM
Apartado de Correos 590
06080 Badajoz
Información y pedidos: *publicafespm@wanadoo.es*

Día Escolar de las Matemáticas
12 de mayo de 2010
Prensa y matemáTICas

suma+ 63
Febrero 2010, pp. 17-20

Algunas demostraciones geométricas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$

El objetivo de este artículo es presentar varias pruebas visuales sobre la irracionalidad de $\sqrt{2}$, las cuales no son muy conocidas comparadas con otras pruebas, como por ejemplo, las demostraciones del teorema de Pitágoras. Además, esas demostraciones pueden ser útiles como una alternativa a la clásica demostración griega y de esta forma se intentará llamar la atención de los alumnos.

Palabras Clave: Innovación didáctica, raiz cuadrada de 2, número irracional, demostración geométrica, secundaria y bachillerato.

Some geometric proofs of the irrationality of $\sqrt{2}$

The aim of this article is to present several visual proofs about the irrationality of $\sqrt{2}$, which are not very well-known, on the contrary to other visual proofs, such as the proofs of Pythagoras's theorem. What´s more, these proofs can be useful as an alternative to the classical greek proof and in this way pupils interest will be captured.

Key words: Educational innovation, square root of 2, irrational number, geometric proof, secondary and high school.

Introducción

De todo lo que aprendí leyendo el magnífico libro *La proporción áurea* (Livio, M., 2006) destacaría al menos dos cosas: la primera es que el lector no debe fiarse de lo que se escribe en la sobrecubierta de un libro, pues si allí dice "…se ha demostrado que (la proporción áurea) la utilizaron los creadores de las pirámides y del Partenón" en el interior el autor argumenta precisamente todo lo contrario ("Como conclusión diremos que es altamente improbable que los antiguos babilonios o los antiguos egipcios descubrieran la Proporción Áurea y sus propiedades" p. 72, "¿Se utilizó la Proporción Áurea en el diseño del Partenón? Es difícil afirmarlo con total seguridad… Sin embargo no hay ninguna certeza de ello, como a algunos libros les gustaría hacernos creer, y carece del apoyo de las dimensiones reales del Partenón", p. 86). Parece que el trabajo serio y documentado de Mario Livio resulta menos atractivo para vender su libro que repetir ciertos mitos no contrastados en torno al número áureo. La segunda cosa que me llamó la atención fue la demostración geométrica (ya conocida por los griegos) de la irracionalidad del número áureo:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

y que aparece en el Apéndice 2 del libro.

Se sabe que el descubrimiento de los números irracionales (*inconmensurables*) por Hipaso de Metaponto, miembro de la escuela pitagórica, causó una tremenda conmoción en esta comunidad, pues contradecía la máxima pitagórica: *"Todo es número"*. La historia, posiblemente legendaria, afirma que Hipaso murió ahogado al ser lanzado por la borda, como castigo por haber introducido un elemento de desorden en un universo que los pitagóricos pretendían reducir a los núme-

Natalia Casás Ferreño
IES Santísima Trinidad, Baeza.

ros naturales y sus proporciones. Suele afirmarse que $\sqrt{2}$, la diagonal de un cuadrado de lado uno, fue el primer número irracional descubierto por los pitagóricos. Sin embargo la demostración griega clásica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, recogida en los Elementos de Euclides y que sigue siendo la más conocida y enseñada hoy en día, es de carácter aritmético (por cierto, clasificada en séptimo lugar entre los 24 teoremas más bellos según los lectores de la revista *The Mathematical Intelligencer*). Por ello los expertos consideran que realmente fue ϕ, la razón entre la diagonal y el lado del pentágono regular, el primer número irracional descubierto por Hipaso, ya que la demostración geométrica de este hecho resultaba más accesible y adecuada a la manera de razonar de los pitagóricos (para una discusión más detallada véase Von Fritz, 1945).

La discusión anterior nos lleva de forma natural a plantearnos la siguiente cuestión: si existe una demostración geométrica de la irracionalidad del número áureo, ¿existirá también alguna demostración geométrica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ más allá de la demostración aritmética habitual? La respuesta sorprendente es que no solo existe una sino varias diferentes. Como es natural, al igual que la irracionalidad de ϕ está relacionada con las propiedades del pentágono, la irracionalidad de $\sqrt{2}$ está relacionada con las propiedades de triángulos y cuadrados. El objetivo de este trabajo es presentar algunas de estas demostraciones geométricas que parecen no ser demasiado conocidas, al contrario que otras demostraciones visuales, como por ejemplo, las del teorema de Pitágoras (véanse Nelsen, 2001 y Alsina y Nelsen, 2006) y que pueden servir como alternativa a la demostración tradicional para captar el interés de los alumnos.

Además resulta llamativo que estas demostraciones hayan sido publicadas a lo largo de las últimas décadas y que una de ellas sea de una fecha tan reciente como el año 2000. Este hecho nos sirve como un magnífico ejemplo para poner de manifiesto a aquellos alumnos que piensan que las matemáticas ya están acabadas desde hace siglos que, incluso en un tema tan clásico como la irracionalidad de $\sqrt{2}$, también es posible hacer investigación y encontrar nuevas demostraciones hoy en día.

$\sqrt{2}$ no es racional: tres demostraciones geométricas

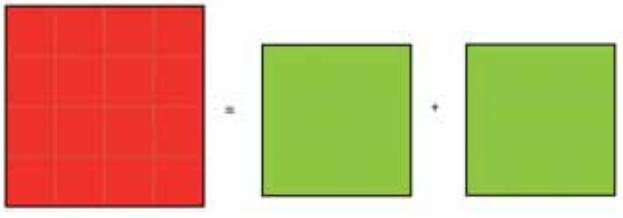
La primera demostración que vamos a discutir (Apostol, 2000) fue publicada por Tom Apostol, el autor del famoso libro de texto *Calculus* usado como bibliografía básica en cualquier curso universitario de Cálculo.

Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ fuese racional, entonces $p^2=2q^2=q^2+q^2$.

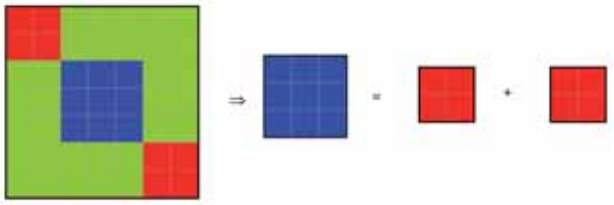
Por el Teorema de Pitágoras esta última igualdad es equivalente a la existencia de un triángulo rectángulo isósceles natural (es decir, un triángulo rectángulo con los dos catetos iguales y cuyos lados tienen como longitud un número natural. En concreto, la hipotenusa mediría p y los catetos serían iguales a q). Por tanto si $\sqrt{2}$ es racional tiene que existir el triángulo rectángulo isósceles natural con los lados más pequeños posibles. La idea de la demostración de Apostol consiste en construir dentro de ese triángulo rectángulo isósceles natural mínimo (figura de la izquierda) otro triángulo rectángulo isósceles natural más pequeño (figura de la derecha), llegando así a una contradicción. De esta forma $\sqrt{2}$ no puede ser un número racional.

Veamos como se construye: partimos de un triángulo rectángulo isósceles natural como el que aparece en la figura de la izquierda. El triángulo pequeño que aparece en la figura de la derecha se construye trazando un arco circular, centrado en el vértice superior y de radio igual a uno de los catetos, hasta intersecar a la hipotenusa en un punto, desde el cual se traza una perpendicular a la hipotenusa hasta la base del triángulo. Todos los segmentos que aparecen en esta figura tienen de longitud un número natural y los segmentos dibujados en azul tienen la misma longitud (dos de ellos son tangentes a un círculo desde un mismo punto). Por tanto el triángulo más pequeño también es un triángulo rectángulo isósceles natural.

Una demostración esencialmente similar a la de Apostol, pero que puede ser de gran interés para motivar a los alumnos porque se realiza plegando una hoja de papel, puede encontrarse en la página 183 del libro (Conway y Guy, 1996). Precisamente a John Conway se debe la popularización de una demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ (debida a Stanley Tennenbaum) de gran belleza visual y que por su sencillez presentamos como una demostración sin palabras

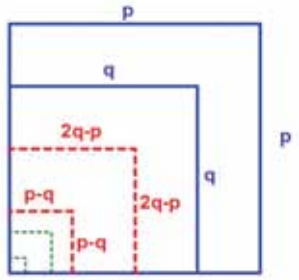


$p^2 = q^2 + q^2$



$$(2q-p)^2 = (p-q)^2 + (p-q)^2$$

La tercera demostración geométrica que vamos a discutir, y que está relacionada con la anterior, se debe a Barbara Turner (Turner, 1977) y se basa en la siguiente propiedad de los cuadrados naturales: si un cuadrado natural S contiene un cuadrado natural más pequeño cuya área es exactamente la mitad de S, entonces dentro de S existe otro cuadrado natural con la misma propiedad.



Si $p^2 = 2q^2$, entonces $(2q-p)^2 = 2(p-q)^2$

Por tanto repitiendo esta operación podríamos construir una secuencia infinita de cuadrados naturales cada vez más pequeños contenidos dentro de S, lo cual no puede suceder porque un cuadrado natural solo puede contener en su interior un número finito de cuadrados naturales. De todo ello deducimos que no puede existir un cuadrado natural que contenga a otro cuya área sea la mitad, lo que equivale a decir que $\sqrt{2}$ no es racional.

Comentarios finales

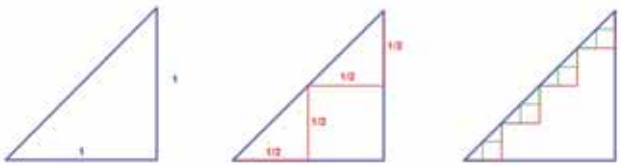
Las tres demostraciones geométricas anteriores comparten varios elementos en común: todas ellas son demostraciones por reducción al absurdo, emplean el método del descenso infinito y esencialmente se reducen al siguiente hecho algebraico:

si $\frac{p^2}{q^2} = 2$ entonces, $\frac{(2q-p)^2}{(p-q)^2} = 2$ con $0<2q-p<p$ y $0<p-q<q$.

De esta forma si suponemos que p y q son los números naturales más pequeños con la propiedad de que el cuadrado de su cociente es 2, llegaríamos a una contradicción pues $(2q-p)$ y $(p-q)$ serían números naturales más pequeños con la misma propiedad.

En este breve artículo no hemos pretendido ser exhaustivos. Para conocer muchas otras demostraciones de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, tanto de carácter geométrico, como aritmético o algebraico, recomendamos al lector interesado que consulte los magníficos artículos (Gardner, 1997) y (Bogolmony, 2009).

Finalmente, y después de haber presentado tres demostraciones geométricas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, terminamos este trabajo con una "demostración" visual de que $\sqrt{2}$ es en realidad... ¡un número natural! Por el Teorema de Pitágoras sabemos que $\sqrt{2}$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos tienen longitud 1 (figura de la izquierda).



Ahora bien, la línea quebrada que aparece en la figura central tiene longitud igual a la suma de los catetos, o sea 2, y repitiendo este proceso en cada uno de los triángulos rectángulos isósceles más pequeños que se forman obtenemos una sucesión de líneas quebradas todas ellas de longitud 2 que convergen a la hipotenusa (figura de la derecha). Entonces pasando al límite se obtiene que la longitud de la hipotenusa es igual a 2, con lo cual $\sqrt{2} = 2$. ¿Puede el lector descubrir cuál es la falacia presente en la argumentación anterior? (Como indicación, recuerde que el proceso de intercambiar una función con un límite no es válido en general si la función no es continua). ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. y Nelsen, R. B. (2006). *Math made visual*, Washington : MAA.

Apostol, T. M. (2000). Irrationality of The Square Root of Two — A Geometric Proof. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 107, nº 9, 841-842.

Bogomolny, A. (2009). Square Root of 2 is Irrational, *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*, disponible en http://www.cut-the-knot.org/proofs/sq_root.shtml

Conway, J. H. y Guy, R. K. (1996). *The Book of Numbers*. New York: Springer-Verlag.

Fritz, K. von (1945) The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., Vol. 46, nº 2, 242-264.

Gardner, M. (1997). The Square Root of Two=1.41421 35623 73095 ... *Math Horizons*, April, 5-8.

Livio, M. (2006). *La proporción áurea*. Barcelona: Ariel.

Nelsen, R. B. (2001). *Demostraciones sin palabras*. Granada. Proyecto Sur.

Turner, B. (1977). A Geometric Proof That $\sqrt{2}$ Is Irrational. *Mathematics Magazine*, Vol. 50, nº 5, 263.

Este artículo fue recibido en SUMA en Abril de 2008 y aceptado en Noviembre de 2009

suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Apartado de correos 498
46900-TORRENT (España)

Fax: (+34)911 912 879
direccion@revistasuma.es
administracion@revistasuma.es

Soneto gastronómico-numérico

Me gustan los sonetos con bizc... 8
y los quintetos con chocolate unta...2
Las rosquillas me como en parea... 2
con epigramas y moscatel trasn... 8

Mientras el cinturón me desabr... 8
pienso que no irán mal acompaña... 2
Los serventesios con el cordero asa...2
y el arte menor, con calim... 8

Las odas con pescados de Nept... 1
Besugo al madrigal o al roman... 0
el vino blanco será muy oport... 1

En mi cocina versos y números ma...0
y pues comer y escribir es todo ... 1
en la mesa: cuchillo tenedor y lapi...0

Soneto ingenioso numérico

Existiendo sonetos tan varia... 2
busqué entre las estrellas un luc... 0
una gota, sin par, de un agua... 0
unos versos con números rim... 2

Con sus catorce versos ordena... 2
macerando el amor con el a... 0
ligados el segundo y el ter... 0
y el primero y el cuarto parea... 2

Estudié con rigor el roman... 0
a Lope y a Quevedo, a Unam... 1
a Cervantes siguió mi lapic... 0

Miré mil libros, sin dejar ning... 1
mas querido lector, a ser sin... 0
con números no hallé soneto alg... 1

El autor de estos sonetos, Antonio Box Finís, es médico, ilusionista y poeta en Burgos.

suma+ 63
Febrero 2010, pp. 21-28

Polilóbulos y competencias básicas

Se presenta un ejemplo de desarrollo de las competencias básicas en el alumnado de educación secundaria a través del estudio geométrico de polilóbulos. En primer lugar se examina la nueva terminología educativa de tales competencias básicas y posteriormente se formula una propuesta didáctica sobre el trazado de polilóbulos –con referencias de nuestro entorno arquitectónico–, así como algunas actividades con enunciados y soluciones, completándose todo ello con la apertura de caminos para pequeñas investigaciones en torno a esos mismos contenidos geométricos.

Palabras Clave: Competencias básicas, geometría, actividades didácticas, polilóbulos y arquitectura.

Polylobes and basic competences

An example of development of the basic competences is presented to the secondary education students, across the geometric study of polylobes. First it is examined the new educational terminology of such basic competetences and later a didactic offer is formulated on the tracing polylobes -by references of our architectural environment-, as well as some activities in terms of reference and solutions, all this being completed by the opening way for small researches concerning the same geometric contents.

Key words: Basic competences, geometry, didactic activities, polylobes and architecture.

Aprender es aprender a pensar
(J. Dewey)

Introducción

La Unión Europea considera que el desarrollo de las competencias básicas es un eje fundamental de la enseñanza y clave para el aprendizaje permanente, por ello, la LOE las incorpora como integrantes del currículo en la Educación Obligatoria (Anexo I del Real Decreto 1631/2006).

En este contexto se considera que una competencia es la capacidad para aplicar conocimientos, habilidades y actitudes en diferentes contextos. Las competencias básicas son aprendizajes imprescindibles desde un planteamiento integrador y orientado a la aplicación de los saberes adquiridos.

Las ocho competencias básicas, que se fijan en la LOE y que los alumnos deberán haber adquirido al finalizar la enseñanza básica son:

- Competencia en comunicación lingüística.
- Competencia matemática.
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
- Tratamiento de la información y competencia digital.
- Competencia social y ciudadana
- Competencia cultural y artística.
- Competencia para aprender a aprender.
- Autonomía e iniciativa personal.

Para conseguirlo, en los currículos de todas las materias se deben programar objetivos e introducir contenidos que potencien la adquisición de todas las competencias y entre ellas la matemática, lo que constituye una importante innovación respecto a leyes educativas anteriores. En los próximos cursos será muy interesante analizar estos cambios y sus efectos educativos

Por otro lado, los currículos de Matemáticas de los cuatro cursos de la ESO deben elaborarse de forma que los alumnos desarrollen la totalidad de competencias y no sólo, como parece evidente, la competencia matemática.

Inmaculada Fernández Benito
IES Núñez de Arce. Valladolid

En mi opinión, a este último imperativo de que el currículo de Matemáticas contribuya a formar a los estudiantes y les permita integrar los aprendizajes cuando les sean necesarios en diferentes situaciones y contextos, se viene dando cumplimiento por buena parte de su profesorado, como prueba la existencia de esta revista o los numerosos congresos, jornadas y seminarios de educación matemática que organizan la Federación o las Sociedades de profesores de Matemáticas.
El informe PISA 2006 menciona en varias ocasiones el término competencia matemática definiéndolo de la siguiente forma: *"Competencia matemática* es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos".

Propuesta didáctica

Presentación

La propuesta didáctica que sigue, trata contenidos de geometría plana que se pueden adecuar a prácticamente todos los niveles de la Secundaria Obligatoria. Se incluyen actividades didácticas cuyas pautas metodológicas se corresponden respectivamente con estas competencias básicas.

Competencia matemática:
- Aplicar estrategias de resolución de problemas.
- Aplicar procesos matemáticos a situaciones cotidianas.
- Comprender elementos matemáticos.
- Comunicarse en lenguaje matemático.
- Justificar resultados.
- Razonar matemáticamente.

Competencia en comunicación lingüística:
- Redactar procesos matemáticos y soluciones a problemas.

Competencia digital y del tratamiento de la información:
- Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) para el aprendizaje y la comunicación.

Competencia cultural y artística:
- Analizar expresiones artísticas visuales desde el punto de vista matemático.
- Conocer otras culturas, especialmente en un contexto matemático.

Competencia para aprender a aprender:
- Ejercitar técnicas de estudio, de trabajo intelectual, …
- Estar motivado para emprender nuevos aprendizajes.
- Hacerse preguntas que generen nuevos aprendizajes.
- Ser conscientes de cómo se aprende.

Competencia en autonomía e iniciativa personal.
- Buscar soluciones con creatividad.
- Detectar necesidades y aplicarlas en la resolución de problemas.

Polilóbulos

Definimos polilóbulo como un conjunto de varios arcos de circunferencia que delimitan una región cerrada. En esta ocasión trabajaremos con polílóbulos formados por arcos de circunferencia del mismo radio y dispuestos concéntricamente alrededor de un punto.

Según el número de arcos o lóbulos que lo forman, se denominarán: trilóbulos (3 lóbulos), cuadrilóbulos (4 lóbulos), etc… En la figura 1 se muestra un octalóbulo en la parte central del rosetón rodeado de ocho cuadrilóbulos.

Figura 1. Rosetón formado por polilóbulos.

Para estudiar geométricamente estas formaciones, vamos a proponer algunos modelos de trazado a partir de polígonos regulares.

Trilóbulos a partir de un triángulo equilátero.

En las figuras 2 y 3 se aprecian distintos ejemplos de trilóbulos.

Figura 2. Santa María de Piasca (Cantabria).

Figura 3. Catedral de Burgos.

Podemos construir estos trilóbulos según los modelos siguientes, todos ellos diseñados a partir de un triángulo equilátero (Figura 4).

a. Los centros de los tres arcos de circunferencia son los puntos medios de los lados del triángulo base y el radio de cada uno de ellos es la mitad del lado de dicho triángulo.
b. Los centros son los vértices del triángulo equilátero y los radios la mitad del lado, como en el modelo anterior.
c. Los centros son los vértices del triángulo inicial y los radios son el lado del hexágono regular que tiene por vértices los del triángulo inical y los de su girado 60º alrededor del centro.

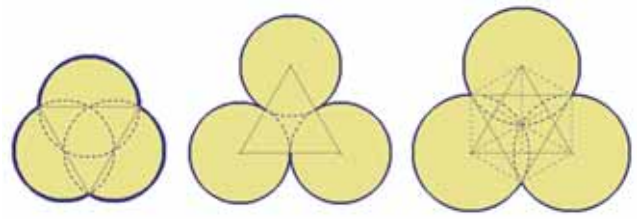


Figura 4. Modelos geométricos de trilóbulos: a, b y c.

Cuadrilóbulos a partir de un cuadrado.

Los cuadrilóbulos que se muestran en las figuras 5 y 6 pueden considerarse formados por cuatro arcos de circunferencia trazados a partir de un cuadrado según se especifica a continuación:

Figura 5. Catedral de Burgos.

Figura 6. Estella (Navarra) y Brujas (Bélgica).

a. Los centros de las circunferencias son los puntos medios de los lados del cuadrado y sus radios la mitad del lado de éste.
b. Los centros son los vértices del cuadrado y los radios la mitad de su lado.
c. Los centros son los vértices del cuadrado y los radios la mitad de la diagonal de dicho cuadrado.
d. Los centros son los vértices del cuadrado inicial y los radios el lado del octógono cuyos ocho vértices coinciden con los del cuadrado de partida y su girado 45º.

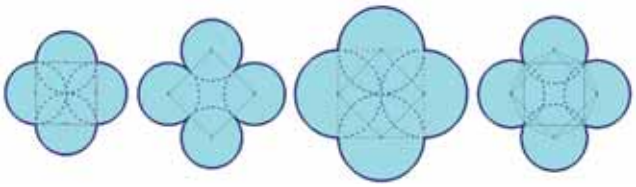


Figura 7. Ejemplos de trazados de cuadrilóbulos a, b c, y d.

Curvas epicicloides.

Algunas curvas epicicloides presentan formas lobuladas de apariencia similar a la de los polilóbulos formados por arcos de circunferencia. En general la epicicloide es la curva descrita por un punto P de una circunferencia, de radio r, cuando rueda sin deslizarse por el exterior de otra circunferencia fija de radio R.

Su ecuación paramétrica es:

$$\begin{cases} x(t) = (R+r)\cos t - r\cos\left(\dfrac{R+r}{r}t\right) \\ y(t) = (R+r)\,sent - r\,sen\left(\dfrac{R+r}{r}t\right) \end{cases}$$

donde la variable t es el ángulo que forma la recta que une los centros de ambas circunferencias con la parte positiva del eje de abscisas.

En los casos particulares en que $R = 3r$ y $R = 4r$ las curvas epicicloides adoptan las formas que aparecen en la figura 8.

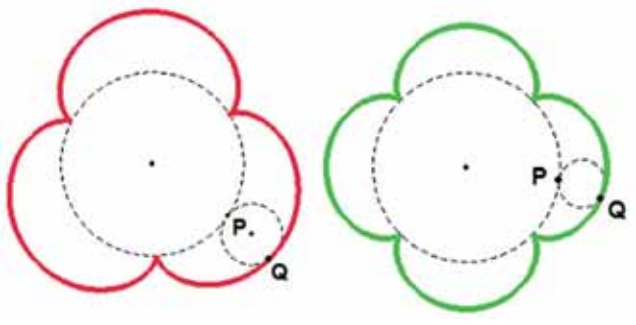


Figura 8. Epicicloides de tres y cuatro hojas.

En la figura 9 se presenta una vidriera diseñada por el artista alemán Alberto Durero, entusiasta geómetra y conocedor de las curvas y sus aplicaciones, quien pudo utilizar la epicicloide de tres hojas como base para este trabajo.

Figura 9. Alberto Durero, *Autorretrato y grabado en vidirera*

Actividades para el aula

Actividad 1

Enunciado: Obtén fórmulas generales para calcular el área de un sector circular de radio R que abarca un ángulo α y la longitud del segmento circular correspondiente.

Solución: Estableciendo las relaciones de proporcionalidad entre las áreas de las regiones circulares o sus longitudes de arco y las correspondientes amplitudes en grados sexagesimales, se obtienen las expresiones siguientes:

$$A_S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \text{ y } L_S = \frac{2\pi R}{360}\alpha = \frac{\pi R}{180}\alpha$$

Actividad 2.

Enunciado: Calcula el área encerrada por los trilóbulos de la figura 4, así como su longitud, según las propuestas de trazados indicadas en los apartados a, b y c del epígrafe *Trilóbulos*. Toma el lado del triángulo de partida de dos unidades de longitud

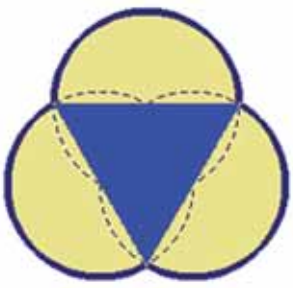


Figura 10. Tilóbulo a

Solución: Utilizando el teorema de Pitágoras se obtiene que la altura del triángulo base es:

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \sqrt{3}$$

El trilóbulo del apartado a. (ver figura 10) tiene por área la suma del área del triángulo:

$$A_T = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,u^2$$

y la de tres semicírculos de radio 1u:

$$A_S = \frac{\pi\, 1^2}{2} = \frac{\pi}{2}\,u^2$$

Por tanto se obtiene:

$$A = \left(\sqrt{3} + \frac{3\pi}{2}\right)u^2$$

Teniendo en cuenta que el contorno del trilóbulo lo forman tres semicircunferencias cuyo radio mide una unidad, se tiene que su longitud es:

$$L = 3\,\frac{2\pi 1}{2} = 3\pi\,u$$

En el caso del trilóbulo diseñado en el apartado b. se procede de forma similar al del caso anterior, con la única diferencia de que, en éste, los sectores y segmentos circulares abarcan ángulos de 300º (Figura 11). Utilizando las fórmulas de la actividad 1, se tendrá:

Figura 11. Tilóbulo b

$$A = A_T + 3\cdot A_S = \sqrt{3} + 3\,\frac{\pi\cdot 1^2}{360}300 = \left(\sqrt{3} + \frac{5\pi}{2}\right)u^2$$

y

$$L = 3\,\frac{\pi\cdot 1}{180}300 = 5\pi\,u$$

La última propuesta corresponde al trilóbulo del apartado c. En primer lugar se debe calcular el lado y la apotema del hexágono determinado por los dos triángulos equiláteros, para ello, basta observar en la figura 12 que el centro del hexágono

es el baricentro del triángulo equilátero inicial y por lo tanto, el radio del hexágono medirá 2/3 de la altura y a la vez mediana del triángulo, es decir: $L=2\sqrt{3}/3$. La apotema del hexágono regular mide una unidad, este resultado se puede obtener, o bien, observando en la figura 12 que la longitud de la misma es la mitad que la del lado del triángulo (que mide dos unidades), o bien, utilizando el teorema de Pitágoras de la forma habitual cuando se conoce el lado y el radio de un polígono regular.

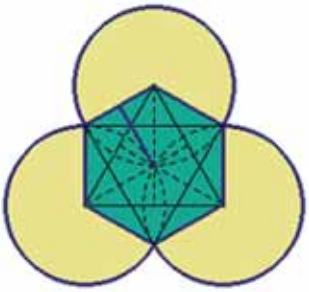


Figura 12. Trilóbulo c

El área encerrada por el trilóbulo será la suma de las áreas del hexágono regular y el de tres sectores circulares que abarcan ángulos de 240º, por tanto se tiene:

$$A = A_H + 3\cdot A_S = \frac{6\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 1}{2} + 3\,\frac{\pi\cdot\frac{4}{3}}{360}\,240 = \left(2\sqrt{3}+\frac{8\pi}{3}\right)u^2$$

La longitud del trilóbulo c será la suma de las longitudes de tres segmentos circulares que abarcan ángulos de 240º, es decir:

$$L = 3\,\frac{\pi\,\frac{2\sqrt{3}}{3}}{180}240 = 3\,\frac{8\sqrt{3}\,\pi}{9} = \frac{8\sqrt{3}\,\pi}{3}\,u$$

Actividad 3.

Enunciado: Calcula el área y la longitud de los tres primeros cuadrilóbulos de la fgura 7, correspondientes a los trazados propuestos en los apartados a, b y c del epígrafe *Cuadrilóbulos*. Toma el lado del cuadrado de partida de medida dos unidades.

Solución: En el diseño del apartado a, el área del cuadrilóbulo es la suma de las áreas del cuadrado de dos unidades de lado y de cuatro semicírculos cuyo radio mide una unidad. Por lo tanto se tiene:

$$A = A_C + 4\cdot A_S = 2^2 + 4\,\frac{\pi\,1^2}{2} = \left(4+2\pi\right)u^2$$

La longitud de este cuadrilóbulo es la de cuatro semicircunferencias de radio uno obteniéndose el siguiente valor:

$$L = 4\,\frac{2\pi 1}{2} = 4\pi\,u$$

El cuadrilóbulo del apartado b tendrá por área la del cuadrado base más la de cuatro sectores circulares de amplitud 270º, (Fig. 13) es decir:

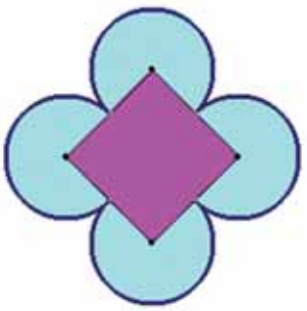


Figura 13. Cuadrilóbulo b

$$A = A_C + 4\cdot A_S = 2^2 + 4\,\frac{\pi\,1^2}{360}270 = \left(4+3\pi\right)u^2$$

y la longitud será la de cuatro segmentos circulares de la misma amplitud:

$$L = 4\,\frac{\pi 1}{180}270 = 6\pi\,u$$

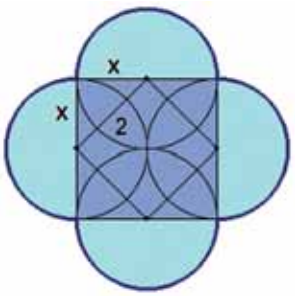


Figura 14. Cuadrilóbulo c

La región determinada por el cuadrilóbulo del apartado c se puede descomponer, como aparece en la figura 14, en un cuadrado de lado $2x$, y en cuatro semicírculos de radio x. Para calcular el valor de x se aplica el teorema de Pitágoras, se obtiene:

$$2x^2=2^2 \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2}$$

Una vez calculada la medida del lado del nuevo cuadrado, $2\sqrt{2}$, y la del radio de los círculos, $\sqrt{2}$, se puede determinar el área del cuadrilobulo:

$$A = A_C + 4 \cdot A_S = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 4\,\frac{\pi\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = \left(8 + 4\pi\right) u^2$$

La longitud total es la de cuatro semicircunferencias de radio $\sqrt{2}$, resultando por tanto:

$$L = 4\,\frac{2\pi\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}\,\pi u$$

Nótese que para la siguiente actividad los alumnos precisan conocimientos de Trigonometría, siendo por ello más apropiada para los que cursan Matemáticas I de 1º de Bachillerato.

Actividad 4.

Enunciado: Calcula el área y la longitud del cuadrilóbulo situado a la derecha de la figura 7, cuyo trazado está propuesto en el apartado d del epígrafe *Cuadrilóbulos*. Toma el lado del cuadrado de partida con medida una unidad.

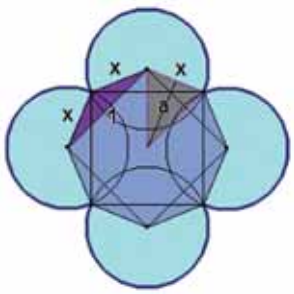


Figura 15. Cuadrilóbulo d

Solución: En la figura 15 se observa que el área del cuadrilóbulo es la suma del área del octógono generado de lado *x*, y de la de cuatro sectores circulares de radio también *x*.

Para calcular el valor de *x* aplicamos el teorema del Coseno al triángulo isósceles de lados *x*, *x*, 1, teniendo en cuenta que el ángulo interior de un octógono regular α mide 135º. Resultando así:

$$1^2 = x^2 + x^2 - 2x\,x\cos 135^\circ = 2x^2 - 2x^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = x^2\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

de donde,

$$x^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

Al mismo resultado se llega a partir del valor del *cos*22´5º (ángulo mitad de 45º) en el triángulo rectángulo que resulta al trazar la altura en el triángulo isósceles anteriormente considerado.

Si tenemos en cuenta que el ángulo central del octógono regular es 45º, se calcula la apotema de éste, aplicando que:

$$tg\,22{,}5^\circ = \frac{x/2}{a}$$

Utilizando la fórmula de la tangente del ángulo mitad y sustituyendo en la expresión anterior resulta:

$$a = \frac{x}{2\,tg\,22{,}5^\circ} = \frac{\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2}}}{2\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$$

Finalmente el área encerrada por el cuadrilóbulo será:

$$A = A_O + 4 \cdot A_S = \frac{8\,\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\,\dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}}{2} + 4\,\frac{\pi\,\dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}}{360}225 =$$

$$= \left(\sqrt{2} + \frac{5(2 - \sqrt{2})}{4}\pi\right) u^2$$

La longitud del cuadrilóbulo es la de cuatro segmentos circulares de ángulo 225º y radio

$$x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

Por tanto:

$$L = 4\,\frac{\pi\,\dfrac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2}}}{180}225 = \left(\frac{5\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\pi\right) u$$

Actividad 5.

En el trazado del trilóbulo a, propuesto en el epígrafe *Trilóbulos*, se produce una división del triángulo equilátero de partida en cuatro triángulos semejantes a él y de lado la mitad de su lado. En el centro de la figura se ha determinado un triángulo curvo (ver Figura 16), conocido como triángulo de Reuleaux. En el contexto del estudio de polilóbulos podemos considerar que el triángulo de Reuleaux es un trilóbulo, al estar formado por tres arcos de circunferencia. En la figura 17 se puede apreciar el espléndido triángulo de Reuleaux del hastial norte de la Catedral de León.

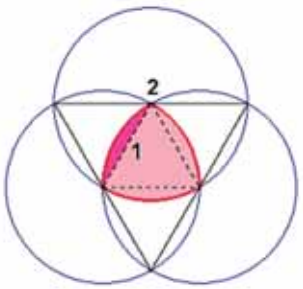


Figura 16. Triángulo de Reuleaux.

Figura 17. Catedral de León.

Enunciado: Calcula el área y la longitud del triángulo de Reuleaux suponiendo, como en la Actividad 2, que el triángulo equilátero de partida mide dos unidades de lado.

Solución: La superficie del plano delimitada por el triángulo de Reuleaux central (Figura 16), está formada por un triángulo equilátero de lado 1 y de altura $\sqrt{3}/2$, y por tres regiones como la sombreada en oscuro. El área de esta región A_R se calcula restando el área triángulo equilátero anterior a la de un sector circular de radio 1 y de ángulo 60º. Por tanto, finalmente, resulta:

$$A = A_T + 3\,A_R = A_T + 3\left(A_S - A_T\right) = 3A_S - 2A_T =$$
$$= 3\frac{\pi 1^2\, 60}{360} - 2\frac{1\,\sqrt{3}/2}{2} = \left(\frac{\pi - \sqrt{3}}{2}\right)u^2$$

La longitud del triángulo de Reuleaux es la de tres segmentos circulares de radio 1 y de ángulo 60º, siendo su valor:

$$L = 3\frac{\pi 1}{180}60 = \pi\, u$$

Investigaciones

En este apartado se proponen enunciados más abiertos y creativos que los de las actividades anteriores cuya resolución requiere el empleo de programas informáticos de geometría dinámica. Estas actividades, que podrían considerarse pequeñas investigaciones y realizarse en grupos de dos o tres alumnos, son las más adecuadas para el desarrollo de las competencias básicas porque, para llevarlas a cabo, los alumnos deben incorporar todos los conocimientos aprendidos, a la vez que detectan la necesidad de adquirir otros nuevos, fomentando un aprendizaje donde se consoliden al mismo tiempo actitudes positivas y se profundize en el vínculo existente entre los conocimientos teóricos y sus aplicaciones prácticas.

Propuesta 1. Los cuadrilóbulos estudiados anteriormente están trazados a partir de un cuadrado y cuatro circunferencias centradas en los vértices o puntos medios de los lados de dicho cuadado. En los modelos de la figura 7, los radios de las circunferencias están determinados en función del lado o de la diagonal del cuadrado.

a. Con un programa de geometría dinámica (CABRI o GEOGEBRA) construye un cuadrado de lado L y diagonal D y cuatro circunferencias centradas en sus vértices, investiga las diferentes construcciones que se generan al ir variando el radio R de las circunferencias. Prueba, por ejemplo, con:

$$R = \frac{L}{4}\left(R < \frac{L}{2}\right),\quad R = \frac{L}{2},\quad R = \frac{D}{2},\quad R = L, \ldots$$

Constrúyelo de forma que al ir desplazando el punto P sobre el lado del cuadrado (ver Figura 18) se obtengan los cuatro modelos. Busca algunos elementos geométricos que se generan en estos trazados y realiza cálculos a partir de ellos.

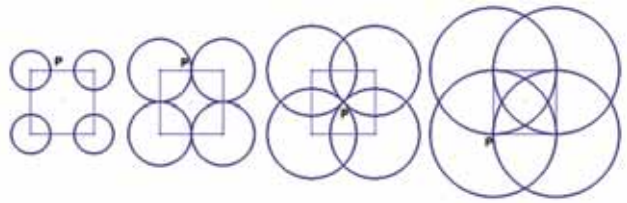


Figura 18. Modelos de círculos con centros en los vértices de un cuadrado.

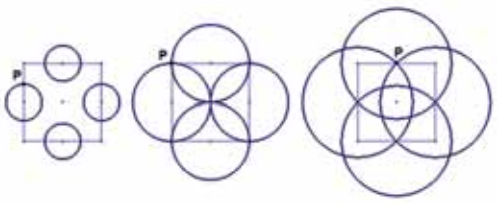


Figura 19. Modelos de círculos con centros en los puntos medios de los lados de un cuadrado.

b. Investiga los posibles trazados que resultan al tomar, como centros de las circunferencias, los puntos medios de los lados del cuadrado y radios variables. Realiza la construcción dinámica de la misma forma que en el apartado anterior. Observa la figura 19 y calcula el radio de las circunferencias en los tres casos mostrados y determina otros posibles elementos geométricos que aparecen.

Figura 20. Diseño de pavimento.

c. Busca diseños cotidianos y artísticos que puedan ajustarse a los modelos descritos anteriormente, como el de la figura 20.

Propuesta 2. En la figura 1 aparece un rosetón con polilóbulos de varios tipos (cuatro u ocho lóbulos). A partir de polígonos regulares de diferente número de lados, traza polilóbulos con los criterios expuestos en la *propuesta 1*.

En al figura 21 se muestran diseños para el pentágono y hexágono regulares.

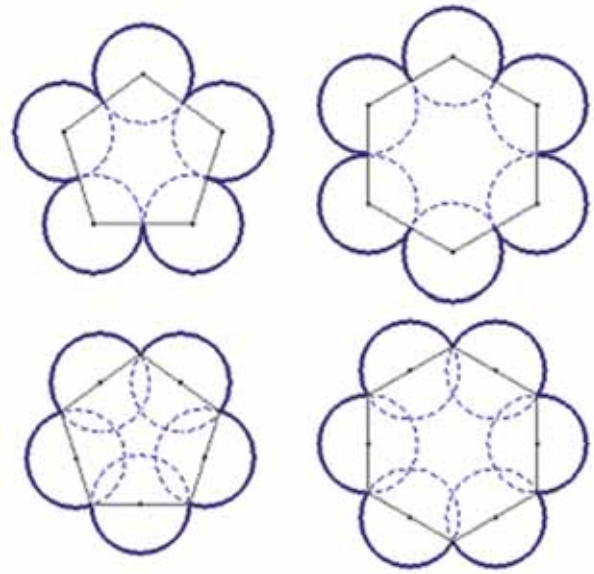


Figura 21. Pentalóbulos y hexalóbulos.

Para terminar

Dada la importancia que el nuevo sistema educativo reserva a las competencias básicas, entendiéndolas no como simples constructos teóricos, sino como aprendizajes que capacitan para adaptar dinámicamente lo que se sabe al contexto en que el alumno estudia y vive, se han presentado en estas páginas algunas líneas de trabajo concreto desde el campo de la geometría, con elementos que pueden insertarse tanto en el currículo de Matemáticas de ESO como en el de Bachillerato. Si en realidad el aprendizaje es, como decía Dewey, "aprender a pensar" bien se puede concluir que en el lento proceso de la construcción del pensamiento, en el que las matemáticas siempre han desempeñado un relevante papel, el estudio de la geometría aplicada a las cosas de la vida real constituye una aportación interesante a lo que hoy entendemos por desarrollo de las competencias básicas en la educación secundaria.

Este artículo fue recibido en SUMA en Noviembre de 2008 y aceptado en Julio de 2009

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOE (4/5/06): LOE , Ley orgánica de Educación de 3 de mayo de 2006.

BCyL (23/5/07): Decreto 52/2007, currículo ESO de Castilla y León.

Chamoso, J., Fernández, I. y Reyes, E. (2009): *Burbujas de Arte y Matemáticas*. Tres cantos (Madrid): Nivola.

Fernández Benito, I. (2003):La matemática del entorno: números y proporciones. En *Premios Nacionales 2001 a la innovación educativa.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Fernández, I., Reyes, E. (2003): *Geometría con el hexágono y el octógono*. Granada: Proyecto Sur de Ediciones.

Fernández, I. Reyes, E. (2005): Polígonos y formas estrelladas, Suma nº 49, 7-14.

Fernández Benito, I. (2006): Formas estrelladas y de otros tipos en elementos artísticos. En *Enfoques actuales en la didáctica de las matemáticas.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

suma+ 63
Febrero 2010, pp. 29-33

Evolución de las matemáticas acompañando a la educación secundaria

La Constitución de Cádiz (1812) inicia el origen de la enseñanza secundaria en España. Dichos estudios corren parejos con el desarrollo de la burguesía como clase diferenciada, y como tal se identifican los nuevos estudios con la nueva clase social. Paralelamente al nacimiento de la secundaria, los contenidos en Matemáticas de los programas, se van abriendo paso y quitando horas a los tradicionales de humanidades.
El recorrido histórico termina con la trascendental Ley Moyano en 1857.

Palabras Clave: Enseñanza secundaria, burguesía, planes de estudio, aritmética, álgebra, geometría y trigonometría, Ley Moyano.

Accompanying evolution of mathematics in secondary education

The constitution of Cadiz (1812) is the starting point of the secondary education in Spain. These studies run with the development of the middle class as a new and differentiated social group, and the new studies are identified with this new social class.
In parallel with this birth of the secondary studies, the mathematics contents in the programs grow and consequently, the traditional humanities contents are reduced.
This historic stage ends with the far-reaching Moyano's Law in 1857.

Key words: Secondary education, middle class, study plans, arithmetic, algebra, geometry and trigonometry, Moyano's Law.

Durante siglos, la Iglesia utilizó tanto las imágenes como las esculturas para transmitir su mensaje, pero con la llegada de la imprenta, el libro se convertiría en su mejor aliado gracias a la lectura de la Biblia. Se suele citar[1] como origen de la enseñanza obligatoria y gratuita la Carta de Lutero "a la nobleza cristiana de la nación alemana para la mejora del espíritu cristiano" (1520), en la que se hace un "llamamiento a los consejeros municipales de todas las ciudades del pueblo alemán para establecer escuelas cristianas". La educación como un instrumento para conseguir la transmisión de valores se deja en manos de los curas, y progresivamente, y no sin grandes conflictos que llegan hasta la actualidad, irá pasando paulatinamente a manos de los maestros. Aparte de la cuestión ideológica, también estaba la económica, pues la manutención del cura, que además de servir eclesiásticamente debía tener formación adecuada para desempeñar eficazmente la docencia, corría a cargo de la Iglesia, mientras que al maestro había que pagarle o bien directamente a través de las familias o bien por medio del municipio, con lo que lo normal era acudir al cura.

Pero para el tema que nos interesa aquí, el nacimiento y desarrollo de la educación secundaria en España, habrá que esperar al final del siglo XVIII para que se inicien unas enseñanzas específicas asociadas a una nueva clase política, la burguesía.

Como en otras ocasiones España era diferente, así, mientras Francis Bacon proponía que la Ciencia debería ser aplicable a la industria, al comercio, y a la tecnología, en España los ilustrados asociaban el desarrollo económico con el sector agrícola. Se critica a la clase inútil (clero, nobleza) y sus saberes inútiles (metafísica, teología), y se potencia la clase útil (burguesía) y sus saberes útiles (medicina, agricultura).

Hasta que no termina la guerra de la independencia (1808), y dado el nivel de desarrollo del país, no se podían esperar muchos logros en lo referente a la Educación, pero sí hay que agradecer que la Constitución de Cádiz (1812) le dedicara un título específico, el IX: "De la Instrucción pública"[2]. En las Cortes de Cádiz, se crea una "Comisión de Instrucción Pública" que, entre otros, estará formada por figuras como G.M. de Jovellanos[3], Manuel Quintana o el catedrático de matemáticas José Rebollo. Dicha comisión elabora por una

Fernando Tébar Cuesta
Inspector de Edución de Madrid

parte, un documento conocido como Informe Quintana[4], y por otra el "Dictamen y proyecto de decreto sobre el arreglo general de la enseñanza pública", leído en las Cortes en abril de 1814, en los que se asientan las bases del futuro sistema educativo:

a. Diferenciación de la enseñanza pública (la costeada por el estado) de la enseñanza en los centros privados.
b. Gratuidad de la enseñanza pública.
c. Continuidad de la educación después de la "segunda enseñanza", de manera que se puede seguir estudiando por el camino tradicional de las Universidades Mayores (Teología, Jurisprudencia) o por la nueva vía de los colegios o escuelas para estudiar profesiones de la vida civil (medicina, agricultura, comercio).
d. Creación la Dirección General de Estudios para administrar el sistema educativo.

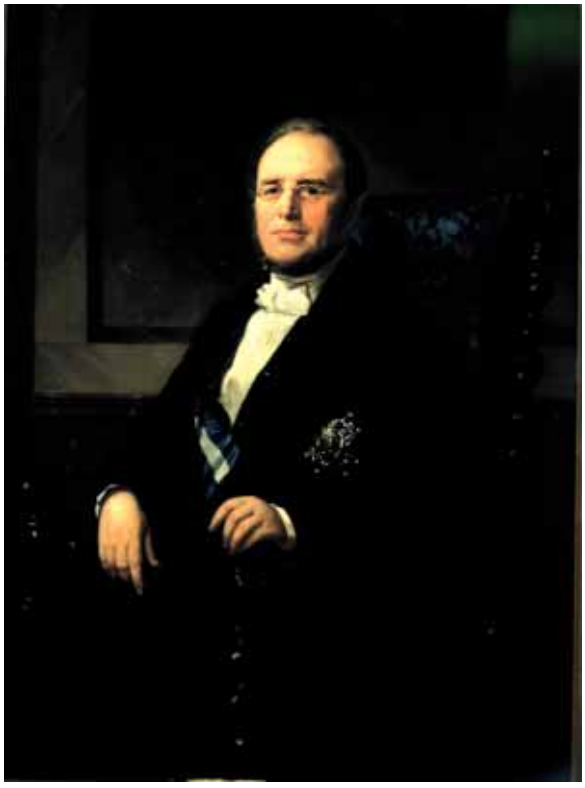
Introducida la "segunda enseñanza" como diferente o novedosa respecto a la situación previa, es preciso determinar algunos aspectos de su regulación:

a. Concepto y objetivos: preparación para estudios superiores y que sean estudios que "constituyan la civilización general de una nación", en otras palabras, cultura general.
b. Se impartirá en las "Universidades de provincia", (que luego serán los I.E. Media).
c. Se establece un plan de enseñanza secundaria estructurado en torno a las áreas:
    i. *Ciencias matemáticas y física*; matemáticas (aritmética, álgebra, geometría y trigonometría), por su valor doble, útil y formativo-racional, junto con física general, mecánica aplicada, historia natural, botánica y química.
    ii. *Literatura y artes*; gramática española, lengua latina, literatura, geografía, historia, lógica y dibujo.
    iii. *Ciencias morales y políticas*.

De 1814 a 1821 con la publicación del *Decreto de 29 de junio de 1821* con el título de *Reglamento general de Instrucción pública,* existe una gran laguna en la reglamentación de la enseñanza. El Plan de estudios de 1821[5] se estructuraba en torno a tres áreas: A) Materias humanístico-literarias, B) Materias científico-naturales, y C) Materias ideológico-filosóficas, sorprendiendo que entre las científico naturales se estudiase Física, Química, Mineralogía, Botánica y Agricultura y Zoología, pero no Matemáticas.

Aparte de concretar las materias a estudiar, por primera vez se habla de la distribución de la financiación de la enseñanza, la cual, con ligeras modificaciones, todavía tenemos en la actualidad. Así, para sostener económicamente al nivel educativo primario se dispone que sean los Ayuntamientos los que se hagan cargo de su financiación, a los Institutos se les asocia con las Diputaciones provinciales y para las Universidades será la Administración Central la encargada. Posteriormente en 1887 la segunda enseñanza, junto con la Inspección de Enseñanza Primaria, pasaran a depender de la Administración central, y en 1902 pasará el pago de los maestros de la enseñanza primaria a depender también de la Administración Central por problemas financieros y de independencia política de los maestros respecto de los alcaldes. En todo caso, en los tres niveles todo lo referente a normas, contenidos y organización, dependería del Estado.

Como otras tantas paradojas, el *Arreglo provisional de estudios* que debía regir sólo para el curso 1836-1837, se convirtió no en provisional, sino que tendría vigencia hasta el Plan de 1845, lo cual dados los cambios políticos de la época fue todo un triunfo. Con todo eso, el plan de estudios se había quedado otra vez desfasado, y si bien no se pretendía cambiar el sistema, sí había que reformar los contenidos, especialmente los referentes al área científico natural, donde se preveía estudiar en el primer año *Elementos de Matemáticas* (con una carga horaria de 6 horas semanales, lección diaria), *Geometría aplicada al dibujo lineal* (con carga horaria de 3 horas); en el segundo, *Elementos de matemáticas* (con una carga horaria de 6 horas semanales), física experimental, química y *Geografía matemática y física* con tres lecciones semanales, y en el tercer año filosofía, religión, historia y literatura[6].



Pedro José Pidal

Destaca en este período de creación de la segunda enseñanza[7], la consideración de no tener finalidad en sí misma, sino que ésta sería la de preparar a los alumnos para la Universidad. Posteriormente se irá autoalimentando para dar la base necesaria para acceder a la vida profesional o proporcionarles una cultura general.

Desde el Arreglo hasta el Plan Pidal, se van creando institutos en las ciudades más importantes, no sólo en las capitales de provincia, y con las Órdenes de creación de los mismos, se establece un plan de estudios mínimo, con lo que no se dispone de un sistema coherente, organizado y normalizado, y será con Gil de Zárate[8] al frente de la Instrucción Pública cuando se presente al ministro Pedro José Pidal el *Real Decreto de 17 de septiembre de 1845*, desarrollado posteriormente por un Reglamento. (Es interesante acudir al Preámbulo del Plan para observar que algunas cuestiones que parecen de rabiosa actualidad, llevan más de cien años sin resolverse: "La enseñanza de la juventud no es una mercancía que puede entregarse a la codicia de los especuladores, ni debe equipararse a las industrias en que domina sólo el interés privado. Hay en la educación un interés social….").

Gil de Zárate

Tras la publicación del Plan se suceden toda una profusión de publicaciones referentes a horarios, cátedras, oposiciones, etc, y por otra parte, enseguida se empieza a modificar el Plan en 1847[9], en 1850, 1852, 1854,… no alcanzándose un documento estable hasta 1857 con Claudio Moyano como Ministro de Fomento (Ministerio donde habían ido a parar las competencias sobre instrucción pública en 1854), y donde, la normativa en materia de instrucción pública, para evitar las continuas reformas educativas que los sucesivos gobiernos introducen, se fijaría por el Legislativo.

Respecto a la evolución de la consideración de las matemáticas en los diversos planes de estudio, hay que tener en cuenta[10]:

a. El plan del Duque de Rivas se limitaba a enumerar las materias sin asignarles carga horaria, así se estudiaría Aritmética y Geometría en 1º y 4º.

b. El Plan Pidal divide la enseñanza secundaria en dos partes, la elemental (que será la secundaria propiamente dicha, especialmente a partir de la Ley de Instrucción Pública de 1857) y la de ampliación (que dará lugar a la enseñanza universitaria a través de la secundaria). Las Matemáticas se estudian en 1º con cuatro clases semanales de hora y media, y en 4º, con seis clases también de hora y media.

En el Plan de 1847 se estudian Matemáticas en los cursos 3º (con 3 horas semanales), 4º (con 6 horas semanales) y 5º (con 5 horas semanales).

Sello conmemorativo de Claudio Moyano

c. En la Reforma de 1849 las Matemáticas se estudian en los cursos 3º y 4º, ambas con la misma carga horaria de 6 horas semanales.

d. El Plan de 1850 copia el de 1849 en lo referente a Matemáticas.

e.También el Plan de 1852 repite otra vez casi el de 1849 en lo referente a Matemáticas. (Sin embargo, al pasar las matemáticas al 2º período de tres años, se dificulta su estudio, ya que para pasar de un período a otro, es preciso superar un examen de Latín y Humanidades, con lo que la dedicación de alumnos y profesores no se centra en las matemáticas en sí, sino en la prueba que hay que superar).

f. El Plan de 1857 ya presenta una variación significativa, pues de los seis cursos que consta la secundaria, se estudia Aritmética y Álgebra en 4º curso con 6 lecciones

semanales, y Geometría en 5º, con las mismas lecciones semanales.

Plan	Materia	Curso en el que se imparte					
		1º	2º	3º	4º	5º	6º
Arreglo de 1836	Elementos de Matemáticas	6	9				
Plan de 1845	Aritmética	x			x		
	Geometría	x			x		
Plan de 1847	Matemáticas			3	6	5	
Reforma de 1849	Matemáticas			6	6		
Plan de 1850	Matemáticas			6	6		
Plan de 1852	Matemáticas				6	6	
Plan de 1857	Aritmética y Álgebra				6		
	Geometría					6	

Denominación de la materia y distribución horaria en los planes de estudio.

Se puede observar el escaso protagonismo de las matemáticas en los años de nacimiento de la enseñanza secundaria, donde, al igual que ocurría en Europa, los planes de estudio estaban basados en las humanidades clásicas, que tenían mayoritario predominio en el bachillerato[11] por tradición secular. Dicha situación, bien por inercia, bien por tradición frente a lo novedoso, o bien por cuestiones tan prácticas como no disponer de profesorado competente (al estar marginados los estudios científicos, era lógica la escasez de profesores para atender la docencia de las materias de ciencias), se prolongará casi hasta nuestros días en las sucesivas reformas y leyes educativas.

En esta primera fase de desarrollo de la enseñanza secundaria, se puede afirmar que las matemáticas se establecen según las cuatro áreas de Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría[12]con los contenidos[13]:

Aritmética:
- Operaciones con números naturales
- Propiedades de los números naturales: potenciación, divisibilidad, números primos, mcd y mcm.
- Operaciones con quebrados
- Raíces cuadrada y cúbica de números
- Teoría de las proporciones y sus aplicaciones

Algebra:
- Operaciones con expresiones algebraicas
- Ecuaciones y problemas de primer grado
- Potencias y raíces de las cantidades algebraicas
- Ecuaciones de segundo grado
- Logaritmos y progresiones

Geometría:
- Geometría plana
- Geometría del espacio

Trigonometría:
- Teoría de las líneas trigonométricas
- Resolución de problemas de triángulos.

Monumento a Claudio Moyano y Samaniego en la Cuesta Moyano de Madrid

El 17 de julio de 1857 el Legislativo aprobaría una de las leyes más importantes en la historia de la educación en nuestro país, su antecedente es la denominada *Ley de Bases* presentada por el ministro Claudio Moyano en la que se autorizaba al Gobierno a promulgar un texto articulado, (que no tardaría en aparecer: el 9 de septiembre), que culminó con la *Ley de Instrucción Pública* con arreglo a dichas bases. La Ley consta de 307 artículos, y ha pasado a la historia de la educación con el nombre de Ley Moyano. Dada la trascendencia que la ley ha tenido, nos detendremos a señalar los aspectos más importantes:

- Con ella se consolida la segunda enseñanza como etapa educativa independiente.

- La segunda enseñanza comprendería dos ramas:
  – Estudios generales, (a los que se accedía con nueve años) divididos en dos períodos de dos y cuatro años, al final de los cuales se obtenía el título de bachiller en artes (hasta 1870 no quedaría como "bachiller"), el cual permitía el acceso a las Facultades donde los estudios se dividían en tres ciclos progresivos en los que se titulaba como Bachiller, Licenciado o Doctor.
  – Estudios de aplicación a las profesiones industriales, al final de los cuales se obtenía el título de perito.
- Los Institutos de segunda enseñanza impartirían los dos tipos de estudios.

La Ley Moyano, fue posible gracias al consenso existente entre todos los partidos políticos, lo que contribuyó a que fuera una de las más longevas de nuestro sistema educativo, pues con modificaciones para adaptarla a las distintas realidades temporales, perduraría hasta 1970 en que se aprobaría la *Ley general de educación*. Pero esa Ley fue especial, no sólo por su repercusión posterior, sino porque vino a acompañar al desarrollo de la sociedad, que había avanzado enormemente en cuanto a lo social, cultural y económico, se necesitaba pues una ley que facilitara que el bachillerato dejara de ser un nivel exclusivo de las clases pudientes, y se convirtiera en unos estudios al alcance de toda la población, elevando su nivel cultural y abandonando las consideraciones elitistas y distintivas de épocas anteriores.

Este artículo fue recibido en SUMA en Febrero de 2009 y aceptado en Noviembre de 2009

NOTAS

[1] Viñao Frago, A. (1982). "*Política y educación en los orígenes de la España contemporánea*"

[2] "Artículo 366: *En todos los pueblos de la Monarquía se establecerán escuelas de primeras letras, en las que se enseñará a los niños a leer, escribir y contar, y el catecismo de la religión católica, que comprenderá también una breve exposición de las obligaciones civiles*"

[3] Jovellanos en su "*Plan para la educación de la nobleza y las clases pudientes españolas*" (1915), es partidario de la pronta introducción de las Matemáticas, señalando las materias a) Aritmética, como forma de expresión de la cantidad, b) Geometría, como lenguaje de la forma, y c) Trigonometría rectilínea para resolver todo tipo de triángulos.

[4] Manuel José Quintana es una figura clave en la introducción de las Matemáticas en la segunda enseñanza, así en el Informe contempla las partes que debe incluir un curso de matemáticas: aritmética, álgebra, geometría y trigonometría.

[5] Artículo 22. *La segunda enseñanza se proporcionará en establecimientos a los que se dará el nombre de Universidades de provincia.*
Artículo 24. "*En todas las Universidades de provincia destinadas a la segunda enseñanza, se establecerán las cátedras siguientes: dos de matemáticas puras, ….*"

[6] La evolución de los currículos se describe con detalle en Sanz Díaz, F. (1985), "*La segunda enseñanza oficial en el siglo XIX*" Madrid, MEC.

[7] Se suele fijar su nacimiento en el Plan de 4 de Agosto de 1836.

[8] "*De la Instrucción Pública en España*" " …porque digámoslo de una vez, la cuestión de la enseñanza es una cuestión de poder: el que enseña domina; puesto que enseñar es formar hombres, y …."

[9] El art 38 establece que *se llamarán Institutos los establecimientos en que se dé la segunda enseñanza*. A los centros de enseñanza privados se les denominará *Colegio* o *Liceo*.

[10] Fernando Vea Muniesca, (1986) "Las Matemáticas en los planes de estudios de enseñanza secundaria en España en el siglo XIX".

[11] J.L. Peset, S. Garma, y J.S. Pérez . (1978) "*las matemáticas, durante los siglos XVII y XVIII, habían progresado intensamente en manos de matemáticos de los países europeos como Francia, Países Bajos, Italia,... en el resto de países de Europa, se vieron obligados a jugar el papel de receptores y comentadores*" en "Las matemáticas en el siglo XIX".

[12] En ésta época, las obras de: José M. Vallejo: "*Tratado elemental de Matemáticas*" y "*Compendio de Matemáticas*"; y de Juan Cortázar: "*Tratado de Aritmética*", "*Tratado de Álgebra elemental*", "*Tratado de Geometría analítica*", "*Tratado de Trigonometría rectilínea y esférica*", tuvieron una gran vigencia y fueron las más reeditadas en la España del siglo XIX . Ambos impulsaron la utilización masiva del libro de texto.

[13] Fernando Vea Muniesca (1995) "Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX" *Cuadernos de Historia de la Ciencia*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gil de Zárate, A (1855). *De la Instrucción Pública en España*. Madrid: Imprenta del Colegio de sordomudos. [Reedición en (1995) Oviedo:Pentalfa].

Jovellanos, G. M. (1798). *Plan para la educación de la nobleza y las clases pudientes españolas*. Aranjuez: Cía Iberoamericana de publicaciones.

Peset, J.L., Garma, S., y Pérez, J.S. (1978). Las matemáticas en el siglo XIX. En *Ciencias y Enseñanza en la revolución burguesa*. Madrid: Ed. Siglo XXI.

Sanz Díaz, F. (1985), "*La segunda enseñanza oficial en el siglo XIX*" Madrid: MEC.

Vea Muniesca, F. (1986). Las Matemáticas en los planes de estudios de enseñanza secundaria en España en el siglo XIX. En *Cuadernos de Historia de la Ciencia nº 2*, Universidad de Zaragoza.

Vea Muniesca, F. (1995). Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX. En *Cuadernos de Historia de la Ciencia*. Facultad de ciencias matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Viñao Frago, A. (1982). *Política y educación en los orígenes de la España contemporánea* Madrid: Siglo XXI de España Editores, s.a.

Publicaciones recibidas

Bollettino di storia delle scienze matematiche
Fabrizio Serra, editore
Anno XXIXN.º 2, Pisa, diciembre 2009
ISSN: 0392 - 4432

Regresión y diseño de experimentos
Daniel Peña
Alianza Editorial
Madrid, 2010
ISBN: 978-84206-9386-7
744 páginas

Revista Matemática Complutene
Publicaciones Universidad Complutense de Madrid
Vol. 22 N.º2, 2009
Madrid
ISSN: 1139-1138

L'educazione Matematica
Centro di recerca e sperimentazione dell'educazione matematica di Cagliari
Anno XXX Serie 1 Vol. 1 n. 1
Giugno 2009
Cagliari
ISSN: 1120-4850

Premisa
Sociedad Argentina De Educación Matemática
Año 11 n.º 4 Noviembre 2009
Buenos Aires
ISNN 1668-2904

EVOLUCIÓN HISTÓRICA DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS (EXACTAS) EN LA UNIVERSIDAD CENTRAL
Enrique Outerelo Dominguez
Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM
Madrid, 2009
ISBN: 978-84-692-2421-2
598 páginas

suma+ 63
Febrero 2010, pp. 35-41

Errores *correctos* en la simplificación de fracciones: reflexión sobre algunas prácticas docentes en matemáticas

Tomando como punto de partida un curioso error cometido por los alumnos en la simplificación de fracciones numéricas, en este trabajo se reflexiona sobre algunas prácticas docentes en matemáticas. Se presenta una experiencia de investigación con alumnos de Educación Secundaria Obligatoria para adultos y se propone el manejo de un programa de cálculo simbólico de software libre.

Palabras Clave: Error, simplificación, fracción, práctica docente, software libre.

Correct mistakes in fractions simplification: a reflection about some teaching practice in Mathematics

The starting point is a curious mistake made by the students about the simplification of numerical fractions. In this paper it is reflected about some teaching practice in Mathematics. We present a research experience with students of Secundary School for Adults and it is proposed the hang of a simbolyc calculus programme of free software.

Key words: Mistake, simplification, fraction, teaching practice, free software.

El problema y sus causas

Una sesión de matemáticas en un aula de ESO es siempre una buena ocasión para la sorpresa. Alguna que otra vez, trabajando con fracciones, los alumnos me han sorprendido haciendo una simplificación de fracciones que podríamos calificar, como mínimo, de poco ortodoxa. Ocurre cuando se trata de simplificar fracciones con numerador y denominador comprendidos entre 10 y 99 y alguna cifra repetida en numerador y denominador y consiste en tachar la misma cifra en ambos números. Así se obtienen resultados como:

$$\frac{25}{15}=\frac{2}{1};\quad \frac{25}{53}=\frac{2}{3};\quad \frac{25}{32}=\frac{5}{3};\quad \frac{25}{27}=\frac{5}{7}$$

Hay un hecho que observo con estupor. En contra de lo que podría esperarse, atribuyendo este error a la bisoñez matemática, éstos suelen producirse en los últimos cursos de ESO. Durante este curso escolar 2008/2009 ya se me ha presentado este error en una ocasión en un grupo de Educación Secundaria Obligatoria para Personas Adultas, con un alumno de 19 años.

Creo que son tres las causas de esta forma incorrecta de simplificación y que las tres derivan de unas inapropiadas prácticas docentes algebraicas:

- La no utilización de ningún operador multiplicativo explícito cuando se trata de multiplicar números con letras o letras con letras. Solemos escribir, quizás demasiado pronto y a la ligera, *3a* y *ab* en lugar de *3·a* y *a·b*. Posiblemente, sería una buena reflexión pensar en alargar más el tránsito entre la notación multiplicativa exclusivamente numérica al que el alumno está acostumbrado en la etapa de primaria, a la hora de introducir el álgebra como aritmética generalizada.

- La poca insistencia en el desarrollo polinómico de un número, en nuestro caso, en base decimal. Cuando en

Jesús Beato Sirvent
IES Bahía de Cádiz. Cádiz
Facultad de Ciencias de la Universidad de Cádiz. Puerto Real.

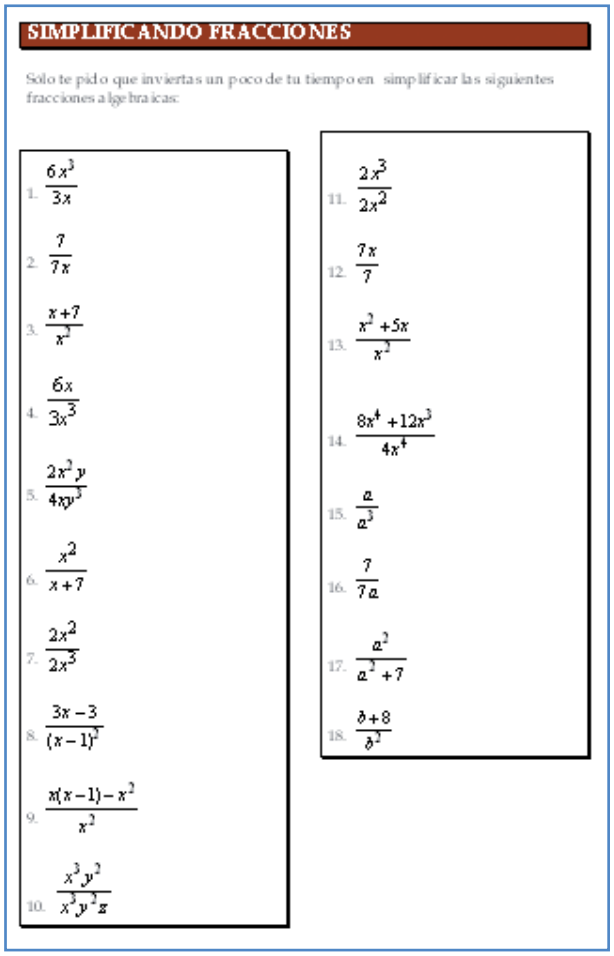
primaria se introducen las dos principales características de nuestro sistema de representación numérica decimal posicional, a saber, que el valor de una cifra depende del lugar donde está escrita y que 10 unidades de un orden constituyen una unidad de un orden superior, aún no se han trabajado las potencias y en secundaria sólo se trabaja la expresión polinómica como eso, simplemente como una expresión y el tipo de ejercicios suele ser directo, es decir, dado un número natural, expresarlo en forma de polinomio de base 10, donde los coeficientes de las sucesivas potencias de 10 sean las cifras del número. La siguiente ocasión en que se trabaja esta representación decimal de un número natural es en el bloque de álgebra, cuando se intenta que el alumno solucione algún problema[1] de enunciado donde la clave está en los valores de las cifras. Los que llevamos bastantes años en la docencia de las matemáticas sabemos que este tipo de problemas es inalcanzable, en primera instancia y por sí solos, para la gran mayoría de nuestros alumnos.

- La utilización de lo que denomino "operador tacha /" para la simplificación algebraica, fundamentalmente en sumas y cocientes. Esta imprecisión que asocia a un mismo símbolo dos valores distintos, impropia del lenguaje matemático, es, en sí misma, fuente de algunos problemas. Con idea de tener una muestra de las capacidades de simplificación de fracciones algebraicas de alumnos de distintas edades, pasé a alumnos de 4º de ESO, 1º de Bachillerato (de rama científica y tecnológica y de Ciencias Sociales) y 1º de una Licenciatura en Química este cuestionario de simplificación de fracciones algebraicas sencillas.

Este cuestionario constaba de 18 fracciones algebraicas. Se les hacía hincapié en que debían especificar, si se daba el caso, aquellas fracciones que no eran simplificables, haciéndolo notar en el cuestionario. Diez de ellas, {1, 2, 4, 5, 7, 10, 11, 12, 15, 16}, eran de simplificación directa, es decir, sólo había que dividir factores comunes en el numerador y en el denominador. Cuatro más, {8, 9, 13, 14} eran de simplificación directa si previamente sacaban factor común. Y las cuatro restantes no se podían simplificar, aunque la 3 y la 18 se podían descomponer en suma de fracciones, y simplificar una de ellas.

Desde luego, no se pretendía extraer conclusiones generales de carácter universal del análisis de este cuestionario, pues la muestra utilizada no era lo suficientemente representativa, pero sí podríamos observar, al menos, el estado de la cuestión en nuestro centro, que no es poco. De hecho, surgió un debate, a pequeña escala en el Departamento, sobre la necesidad o no de revisar el trato que estábamos dando a la simplificación algebraica. Pues bien, del análisis de las respuestas se observa:

- Obviamente el curso mejor es el universitario, con un 92,59% de alumnos que superan la prueba.
- El curso peor es 4º ESO, opción Matemáticas A con un 7,69% de aprobados.
- Las fracciones más fáciles de tratar han sido la 12 con un 89,8% de respuestas correctas y la 1, con un 83,67% de respuestas correctas. Ambas son de simplificación directa.
- Las fracciones más difíciles han sido la 8, con un 20,41% de aciertos y la 9, con un 21,43%. Ambas requerían sacar factor común o hacer alguna operación previa.
- A pesar de la insistencia, la mayoría de los alumnos no especifican las que no se pueden simplificar, limitándose a dejarlas en blanco, con la duda interpretativa que este proceder genera.

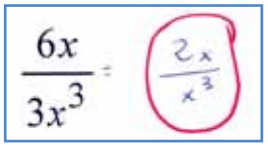

SIMPLIFICANDO FRACCIONES

Sólo te pido que inviertas un poco de tu tiempo en simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

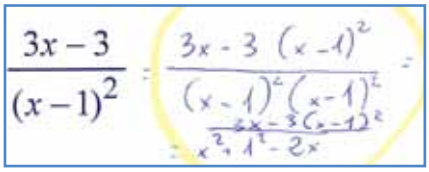
1. $\frac{6x^3}{3x}$
2. $\frac{7}{7x}$
3. $\frac{x+7}{x^3}$
4. $\frac{6x}{3x^3}$
5. $\frac{2x^2y}{4xy^3}$
6. $\frac{x^2}{x+7}$
7. $\frac{2x^2}{2x^3}$
8. $\frac{3x-3}{(x-1)^3}$
9. $\frac{x(x-1)-x^2}{x^2}$
10. $\frac{x^3y^2}{x^3y^2z}$
11. $\frac{2x^3}{2x^2}$
12. $\frac{7x}{7}$
13. $\frac{x^2+5x}{x^3}$
14. $\frac{8x^4+12x^3}{4x^4}$
15. $\frac{a}{a^3}$
16. $\frac{7}{7a}$
17. $\frac{a^2}{a^2+7}$
18. $\frac{\partial+8}{\partial^2}$

Cuestionario

- Los errores cometidos se pueden clasificar en ocho tipos:
  –Simplificar números, pero no letras.

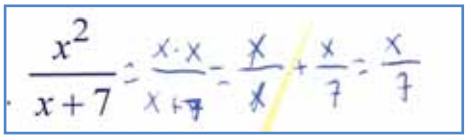


– Multiplicar el numerador por el denominador, posiblemente herencia de la operación "multiplicar numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador" o bien del proceso de racionalización cuando en el denominador hay una raíz cuadrada.

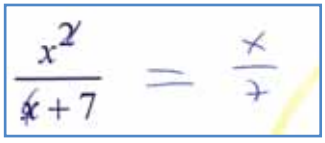


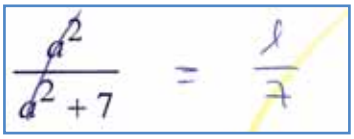
–No ver el factor común, y por tanto, la posibilidad de simplificación.

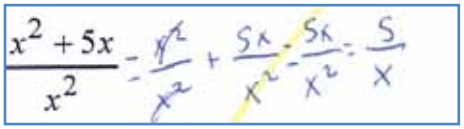
– Separa mal las fracciones en sumandos.

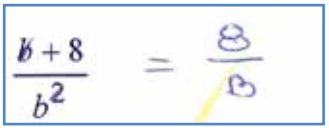


– Simplificar elementos del numerador con elementos del denominador, aunque no se trate de factores, sino de sumandos. Este ha sido, con diferencia, el error más cometido.

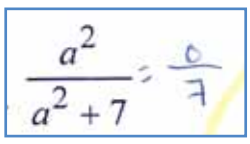


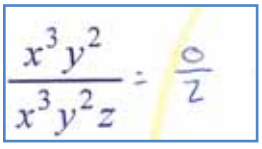




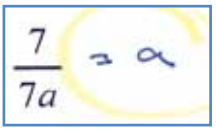


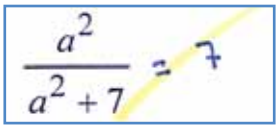
– *Cuando todo se va, queda el vacío...*



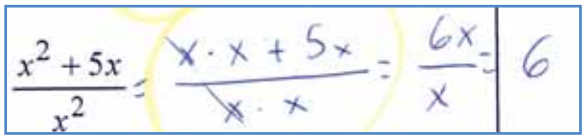


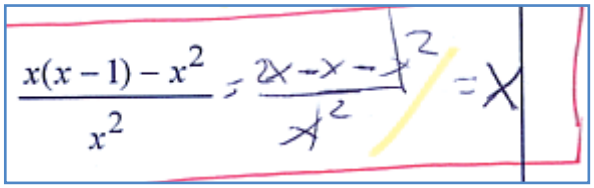
– *¡No puede quedar nada en el denominador!*





– *Chulerías algebraicas.*





En definitiva, no parece que el uso de este operador ayude mucho a la comprensión de los procedimientos de simplificación algebraica y a la toma de conciencia de las operaciones reales que sustentan dichos procesos. Alguien podría advertir que siempre se ha tachado y no parece que el daño ocasionado sea, ni siquiera considerable. ¿Por qué ahora habría de prestarse un especial cuidado? A esta objeción cabe oponerle una doble argumentación. Por un lado, el hecho de que una utilización incorrecta de un símbolo no cause demasiado perjuicio no es aval para su uso, y menos en una disciplina que tiene como uno de sus objetivos la concisión, la precisión y en definitiva la claridad. Hay tradiciones no del todo positivas. Por otro lado, se ha ido produciendo una diferencia, desde luego no sutil, entre la docencia de las matemáticas a estas edades. El peso de la manipulación algebraica, el estudio de los polinomios y muy especialmente las fracciones algebraicas ha ido perdiendo protagonismo hasta prácticamente desaparecer del currículo de Secundaria, al menos con el espacio y el tiempo que creo sería oportuno dedicarle y desde luego, es muy inferior al que se le dedicaba en anteriores etapas educativas. Es por eso, que esta práctica, antaño común tanto en profesores como en alumnos, ahora crea una inseguridad tan grande en el alumno, que le lleva, unida a la ansiedad por la simplificación, a resultados catastróficos[2].

Errores correctos

No obstante lo anterior, a veces se obtienen resultados correctos, que podríamos, en principio, atribuir a una suerte de casualidad numérica:

$$\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$$

¡¡ resultado correcto !!

En esta sección vamos a analizar en qué casos, esta forma, desde luego bárbara de simplificar, que a partir de ahora llamaremos *simplificación adulterada*, produce resultados correctos.

Convencido de que la mejor forma de eliminar un error es llegar a la esencia de la causa que lo produce, y aprovechando que tengo docencia en un instituto de Secundaria –con alumnos de Secundaria Obligatoria para Adultos- y en la Universidad –con alumnos de primero de la Facultad de Ciencias-, propuse en ambos niveles profundizar un poco más en este problema, pero mirándolo desde distintos puntos de vista. Lo que relato a continuación es el fruto de la investigación que llevaron a cabo tanto unos como otros, en la que jugué un papel de director de orquesta.

Nota: a partir de ahora, no emplearemos el operador tacha (/) en las simplificaciones, sin que con ello se pierda el sentido de lo expuesto.

En el Instituto

Mi idea era, desde el principio, aprovechar además esta cuestión para mostrar a los alumnos, en miniatura, cómo se desarrolla una posible investigación en matemáticas. Empecé por mostrarles que en la inmensa mayoría de las ocasiones, este tipo de simplificación produce resultados incorrectos. Para ello bastó con que comprobaran que:

$\frac{12}{25} \neq \frac{1}{5}$ ya que $12 \cdot 5 \neq 25 \cdot 1$.

A continuación, les enseñé un ejemplo de simplificación adulterada que produce un resultado correcto. Era el que encabeza esta sección, a saber:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

Lo siguiente fue pedirles que juguetearan un poco para poder encontrar otras fracciones en las que el numerador y el denominador fuesen números enteros de dos cifras y en las que la *simplificación adulterada* les proporcionase un resultado correcto. Para esto, los distribuí en grupos de cuatro y les di un cuarto de hora. Transcurrido este tiempo, sólo había dos respuestas que destacar:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$$

Un grupo había encontrado otro ejemplo esencialmente distinto, que era y en otro grupo, concretamente un alumno que no era muy brillante en mi ámbito, había propuesto como ejemplo, el formado por las fracciones inversas de las que yo había mostrado, a saber:

$$\frac{64}{16} = \frac{4}{1}$$

Rápidamente les hice que pensaran en si lo que ocurría en este ejemplo era generalizable y llegamos a nuestro primer resultado: *Si una fracción produce una simplificación adulterada correcta, la inversa también produce una simplificación adulterada correcta*. Decidimos ahora empezar por descartar "casos triviales":

Caso I: Si tanto numerador como denominador son múltiplos de 10, entonces la *simplificación adulterada* produce siempre resultados correctos:

$$\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$$

Caso II: Si el numerador y el denominador son iguales, la *simplificación adulterada* produce siempre resultados correctos:

$$\frac{23}{23} = 1$$

Aquí se produjo un parón en nuestra investigación. Para atajarlo, les propuse hacer un estudio un poco más sistemático, distinguiendo en principio los cuatro casos posibles, aunque después nos dimos cuenta que algunos de ellos nos conducían a los casos triviales descritos anteriormente. Además, en este momento, tuve que hacer un inciso importante para practicar la expresión polinómica de un número, de manera que se acostumbrasen a identificar la expresión de un número de dos cifras, con su valor. A lo largo de toda esta sección, serán guarismos.

- La cifra de las unidades de numerador es igual a la cifra de las unidades del numerador.

$$\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (10a+b)c = (10c+b)a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10ac + bc = 10ac + ba \Leftrightarrow bc = ba$$

Distinguimos ahora:

–Caso $b \neq 0 \Rightarrow c = a$. Nos conduce al caso trivial **Caso II**.

–Caso $b = 0$. Se trata del **Caso I**.

Caso III. La cifra de las unidades del numerador es igual a la cifra de las decenas del denominador.

$$\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow (10a+b)c = (10b+c)a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10ac + bc = 10ab + ac \Leftrightarrow c = \frac{10ab}{9a+b}$$

Habíamos llegado a un punto interesante. Esta fórmula nos daría las fracciones que andábamos buscando. El problema estaba en calcular para qué valores de a y b, se obtiene como valor de c un guarismo. Observamos que:

$$a = b \Rightarrow c = \frac{10a^2}{10a} = a = b$$

Y esto nos conduciría de nuevo al caso trivial Caso II. Por tanto, a partir de ahora supusimos que $a \neq b$. Con estas restricciones, les propuse elaborar una tabla de valores para c, a partir de los posibles valores de a y b.

a	b	c	a	b	c	a	b
1	1	1,00	2	1	1,05	3	1
1	2	1,82	2	2	2,00	3	2
1	3	2,50	2	3	2,86	3	3
1	4	3,08	2	4	3,64	3	4
1	5	3,57	2	5	4,35	3	5
1	6	4,00	2	6	5,00	3	6
1	7	4,38	2	7	5,60	3	7
1	8	4,71	2	8	6,15	3	8
1	9	5,00	2	9	6,67	3	9

a	b	c	a	b	c	a	b	c
4	1	1,08	5	1	1,09	6	1	1,09
4	2	2,11	5	2	2,13	6	2	2,14
4	3	3,08	5	3	3,13	6	3	3,16
4	4	4,00	5	4	4,08	6	4	4,14
4	5	4,88	5	5	5,00	6	5	5,08
4	6	5,71	5	6	5,88	6	6	6,00
4	7	6,51	5	7	6,73	6	7	6,89
4	8	7,27	5	8	7,55	6	8	7,74
4	9	8,00	5	9	8,33	6	9	8,57

a	b	c	a	b	c	a	b	c
7	1	1,09	8	1	1,10	9	1	1,10
7	2	2,15	8	2	2,16	9	2	2,17
7	3	3,18	8	3	3,20	9	3	3,21
7	4	4,18	8	4	4,21	9	4	4,24
7	5	5,15	8	5	5,19	9	5	5,23
7	6	6,09	8	6	6,15	9	6	6,21
7	7	7,00	8	7	7,09	9	7	7,16
7	8	7,89	8	8	8,00	9	8	8,09
7	9	8,75	8	9	8,89	9	9	9,00

En esta tabla, las celdas sombreadas en color azul, representan los casos triviales. Las celdas sombreadas en color magenta, nos proporcionan casos significativos. De este caso obtuvimos, pues, cuatro casos no triviales:

$$\left\{\frac{16}{64}, \frac{19}{95}, \frac{26}{65}, \frac{49}{98}\right\}$$

- La cifra de las decenas del numerador es igual a la cifra de las unidades del denominador. En este caso, obtenemos las inversas de las fracciones obtenidas en el caso anterior, que también serían válidas, según la primera propiedad que observamos en este tipo de *simplificación adulterada*.

  En efecto:

$$\frac{ab}{ca} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \left(\frac{ab}{ca}\right)^{-1} = \left(\frac{b}{c}\right)^{-1} \Leftrightarrow \frac{ca}{ab} = \frac{c}{b}$$

- La cifra de las decenas del numerador es igual a la cifra de las decenas del denominador. Por el miso motivo expuesto en el caso anterior, ahora obtendríamos las inversas de las fracciones correspondientes a los Casos I y II.

En resumen, en el instituto llegamos al siguiente resultado:

Salvo inversión y casos triviales, sólo hay cuatro fracciones, con las condiciones impuestas al inicio, que produzcan una simplificación adulterada correcta, a saber:

$$\left\{\frac{16}{64}, \frac{19}{95}, \frac{26}{65}, \frac{49}{98}\right\}$$

En la Facultad

Aprovechando que habíamos terminado el tema inicial de funciones reales de varias variables reales en el que se estudian las curvas de nivel y las gráficas de funciones para dos variables reales, les propuse realizar en casa el siguiente ejercicio, que en principio, era uno más. A propósito, aunque alguno me preguntó el porqué de esta propuesta, dejé las explicaciones para cuando estuvieran los ejercicios entregados.

Ejercicio: Dada la función:

$$f(x,y) = \frac{10xy}{9x+y}$$

Se consideran las curvas de nivel f(x, y)=c , para los valores c= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 y se pide:

- *¿En cuál/es de estas curvas de nivel hay puntos en los que las dos coordenadas sean números naturales comprendidos entre 0 y 9 –guarismos– (ambos inclusive)?*

- *¿Cuáles son los puntos del apartado anterior?*

- *¿Situación gráfica?*

Como es obvio, con este ejercicio pretendía abordar el problema que nos trae entre manos, pero desde una perspectiva totalmente distinta, ya que los puntos que les pedía se corresponderían, obviamente, a las fracciones que producen una simplificación adulterada correcta. Con la pregunta abierta sobre la situación gráfica, mi intención era que hiciesen alguna representación gráfica que respondiese a la situación planteada, o bien, la representación gráfica de la superficie en cuestión con los planos que producen las correspondientes curvas de nivel y en ellas los puntos que encontrasen, o bien una representación plana de las curvas de nivel seleccionadas y en ellas los puntos encontrados. Con ello, tendrían un motivo para usar el paquete de dibujo en 3 y 2 dimensiones del programa *Maxima* que estábamos estudiando en las clases de prácticas de informática.

El número de ejercicios presentados fue satisfactorio. De los 30 alumnos que asisten por término medio a mis clases, 21 presentaron una respuesta al ejercicio, observándose las siguientes apreciaciones:

- El 28,57% de los alumnos que realizaron el ejercicio encontraron sólo los puntos triviales, es decir, en todas las curvas de nivel encontraron puntos que satisfacían las condiciones impuestas, pero sólo dieron con los puntos (i,i) en la curva de nivel $f(x,y)=i$, para $i=1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Corresponden a los que hemos denominado anteriormente casos triviales.
- El 19,04% de los alumnos encontraron, además de los puntos triviales anteriormente citados, "casi" todos los puntos pedidos. No deja de ser curioso que todos dejaran de encontrar el mismo punto, a saber, (1,6) en la curva de nivel $f(x,y)=4$.
- El resto de los alumnos (52,39%), encontró todos los puntos pedidos.
- Un alumno busco soluciones naturales, aunque no cumpliesen las restricciones del enunciado. Así obtuvo por ejemplo puntos como (1,21) para $f(x,y)=7$ o (1,36) y (2,12) para $f(x,y)=8$. Estos puntos no llevan a ninguna generalización en nuestro problema de simplificación.
- En cuanto a la situación gráfica, destacar que ningún alumno hizo una representación tridimensional de la gráfica de la función, sino que los que aportaron algún elemento gráfico (61,90%), lo hicieron sobre 2 dimensiones.
  - 4 de estos alumnos hicieron una representación independiente de cada uno de las curvas de nivel, indicando en ellas los puntos señalados (figura 1).
  - 2 alumnos más hicieron una representación en forma de nube de puntos con los valores encontrados, que luego unieron de una forma aleatoria, obteniendo un gráfico sin sentido alguno (figura 2).

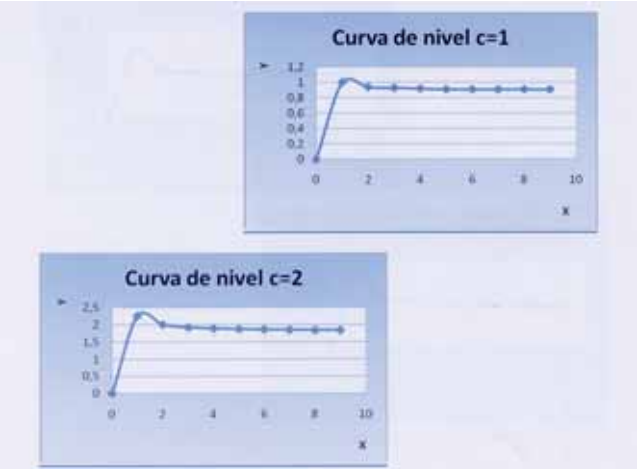


Figura 1

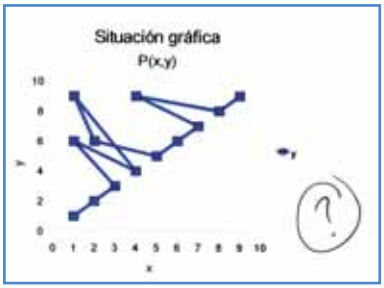


Figura 2

- En cuanto a la forma de encontrar los puntos, el método utilizado fue, en todos los casos salvo 1, el de ensayo y error, lo cual equivale, obviamente a la realización de una tabla como la utilizada en el caso del instituto. Un alumno hizo una tabla similar, también en formato Excel, pero no se percató de todos los puntos que había que encontrar sino que solo observó los puntos triviales.

Tengo que destacar con satisfacción que a los alumnos universitarios, pareció interesarles mucho el hecho de que un problema aparentemente numérico, pudiera tratarse también desde el punto de vista de las funciones de varias variables.

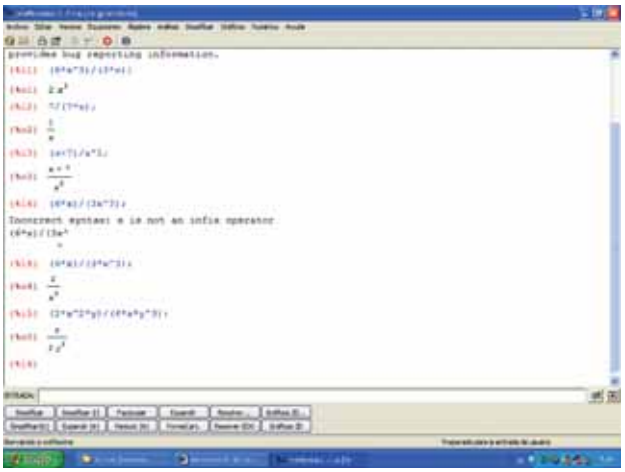
Las TICs pueden ayudar a resolver estos problemas

El uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TICs) para nuestra labor docente requiere un planteamiento serio, riguroso y de cierta continuidad. En general, en la enseñanza hay que huir de las improvisaciones, pero más aún con las TICs. En caso contrario, la clase se convierte bien en una pérdida de tiempo, pues no controlamos las interacciones de los alumnos con el ordenador o bien en una clase excepcional, y por tanto, con un componente de distracción añadido, desde luego, no deseable. Además, el uso de las TICs debe incluir la toma de decisiones sobre qué software utilizar, qué páginas webs visitar y sobre todo, qué actividades concretas van a permitir a los alumnos llenar de contenido el trabajo con las TICs.

En el tema que nos ocupa, yo propongo, como no podía ser de otra forma, la utilización de un programa de cálculo simbólico de software libre. Permite instalarlo en tantos ordenadores como sea conveniente y que el profesor comparta con sus alumnos, con toda legalidad, las herramientas utilizadas. Además, la ventaja fundamental es que el profesor cuenta con la garantía de que el programa podrá ser instalado por los alumnos en su propio domicilio. El programa cuyo uso propongo es Maxima. Se puede descargar desde la página http://maxima.sourceforge.net/. Se trata de un programa cuyos orígenes hay que buscar en 1967 en el MIT AI Lab (Laboratorio de Inteligencia Artificial del Instituto Tecnológico de Massachussets) como una parte del proyecto MAC (Machina Arded Cognition) y que en sus comienzos se llamó Máxima (MAC´s SYmbolic MAnipulator). Maxima es un potente motor de cálculo que, aunque en su origen no destacaba por tener una interfaz gráfica con los usuarios más allá de una simple pantalla de texto, con el tiempo ha ido cambiando y se han desarrollado distintos entornos de ejecución que intentan facilitar la interacción con los usuarios. Entre ellos, el que corresponde a la figura es el entorno wxMaxima, disponible en: http://wxmaxima.sourceforge.net (Rodríguez, 2007).

Volviendo al problema en torno al cual estamos reflexionando, las posibilidades que ofrece el uso de las TICs son enormes:

- Es un entorno mucho más atractivo que el lápiz y papel.
- Propuesta respuesta a nuestras acciones.
- Permite mayor cantidad de práctica con tareas rutinarias.
- Potencia la experimentación y el análisis de resultados.
- Proporciona una continua autoevaluación, basada en la confianza operativa que nos asegura su empleo.
- Altera los tiempos docentes. Si la excusa para no practicar la simplificación algebraica era el tiempo, ya no existe esta excusa.



Aprender a aprender

El Real Decreto 1631/2006 de 29 de Diciembre marcó un nuevo cambio en la concepción de los procesos de enseñanza y aprendizaje en la etapa Secundaria Obligatoria, al desplazar el punto de vista de la misma hacia los resultados, en el sentido más amplio de la palabra, y valorar éstos en forma de competencias. Entre estas habilidades está la de aprender a aprender. Me gustaría acabar este trabajo con una aportación a la contribución de las matemáticas a esta competencia. En las páginas anteriores se hecho una reflexión crítica a partir de un error cometido en clase por los alumnos. Y esta reflexión se ha llevado hasta sus últimas consecuencias. Es, sin duda, pienso yo, una buena forma de trabajar. ¡Qué mejor aprender a aprender, que aprender de nuestros errores! ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Rodríguez Galván, J. R. (2007) *Maxima con wxMaxima: software libre en el aula de matemáticas*. Oficina de Software Libre de la Universidad de Cádiz.

NOTAS

1 Hallar un número de tres cifras, sabiendo que suman 9; que si del número dado se resta el que resulta de invertir el orden de sus cifras, la diferencia es 198; y que además, la cifra de las decenas es media aritmética entre las otras dos.

2 Viendo el lado positivo, estos desastres algebraicos producen una buena cantidad de situaciones, cuando menos chistosas, que se difunden por la red. Ésta es una de ellas. Puede parecer esperpéntico, pero visto lo visto en los cuestionarios…

$$\frac{1}{n}\sin x = ?$$

$$\frac{1}{x}\sin x =$$

$$six = 6$$

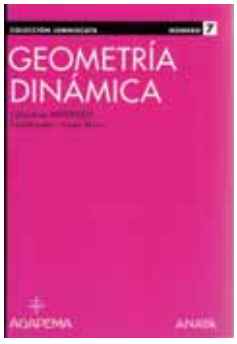
Este artículo fue recibido en SUMA en Julio de 2009 y aceptado en Enero de 2010

Libros recibidos

ESES Y CES. Geometría del hierro forjado
Antonio Ledesma López
Colectivo Frontera
Requena, 2009
ISBN: 978-84-692-1176-2
80 páginas

Matemáticas con calculadora gráfica. Unidades didácticas
Agustin Carrillo Albornoz (Editor)
SAEM "Thales"
Sevilla, 2008
ISBN: 978-84-935760-7-3
220 páginas

Matemáticas en la Catedral de Burgos.
Grupo Estalmat de Burgos
Caja Círculo obra social
Burgos, 2009
ISBN: 978-84-89805-30-9
166 páginas



Geometría Dinámica
Tomás Recio
Grupo ANAYA
Madrid, 2009
ISBN: 978-84-667-4120-0
185 páginas

Las matemáticas y la física del caos
Mauel de León y Miguel Á. F. Sanjuan
CSIC
Madrid, 2009
ISBN: 978-84-00-08927-6
101 páginas

suma+ 63
Febrero 2010, pp. 43-48

Una división en que todos ganan: un caso de división justa

Generalmente las actividades que introducen el concepto de división consideran ésta en partes iguales. En este artículo presentamos otra posibilidad. El texto se basa en el trabajo realizado en un taller donde se discutieron y resolvieron los problemas relacionados con un tipo de división, denominada justa, que puede ser considerado distinto de los estudiados tradicionalmente: partición, agrupamiento o medida, operación inversa de la multiplicación o razón. En estas divisiones, más que determinar qué parte (en cantidad) corresponde a cada individuo, se pretende encontrar una parte que permita garantizar que todos queden satisfechos.

Palabras Clave: Innovación didáctica, aritmética, resolución de problemas, división justa.

A win-win division: a case of fair division

Usually the introductory activities to the concept of division consider the division in equal parts. This paper presents a new possibility. It is based in one workshop in which have been discussed some problems involving fair division. This kind of division is distinct of the ones studied traditionally, as sharing, grouping or measure, inverse operation of the multiplication or as reason.
In this kind of division, more than determine which part fits to each individual, the goal is to guarantee that all are satisfied with their own part.

Key words: Educational innovation, arithmetic, problem solving, fair division.

Este artículo está basado en un taller presentado en un Encuentro Nacional para Profesores de Infantil y Primaria. En este encuentro se pretenden promover momentos de encuentro y reflexión entre docentes del Primer Ciclo de Enseñanza Básica,[1] Educadores de Infancia, estudiantes y otros profesionales vinculados a estos niveles de enseñanza y promover el intercambio de conocimientos y experiencias relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas durante los primeros años de escolaridad. En este texto, a pesar de estar basado en las actividades trabajadas en el taller presentado en ese encuentro, se efectúa un enfoque un poco más amplio, en el sentido de considerar las situaciones más generales, pero siempre basado en las tareas propuestas y en las actividades desarrolladas.

Desde que nacemos, todos nosotros sabemos realizar, aunque sea de manera informal, las operaciones aritméticas más básicas. Una de las operaciones aritméticas que tradicionalmente trae mayores complicaciones a nuestros alumnos es la división, al igual que la substracción. Sin embargo, este hecho no debería ocurrir pues es una de las primeras que interiorizamos (de modo no formal). Aprendemos muy pronto a dividir cosas (mucho antes incluso muchos de los que no somos hijos únicos); ya de bebés, las atenciones de los padres y abuelos; cuando somos un poco mayores, los juguetes, las golosinas, el cariño y las atenciones. A medida que nos hacemos mayores, aprendemos a dividir otras cosas tales como deberes, responsabilidades, culpa...

A nivel escolar, y a pesar de que la operación de la división forma parte del Programa de tercer curso de Primária (DEB, 2001) –particularmente el algoritmo– el contacto con el concepto de división debería acontecer lo antes posible, incluso ya en Infantil (DEB,1997), de modo que los alumnos vayan progresando a su ritmo en el aprendizaje y en la interiorización de estos conceptos en cuestión, aunque no sea necesariamente de forma explícita.

La división, tal como es entendida en el ámbito escolar, puede ser considerada como partición, agrupamiento o medida, operación inversa de la multiplicación o como razón. Las actividades que introducen el concepto de división (para que

C. Miguel Ribeiro
Centro de Investigação sobre Espaços e Organizações (CIEO)
Escola Superior de Educação e Comunicação da Universidade do Algarve (Portugal)

los alumnos construyan por sí solos los aprendizajes matemáticos significativos) están relacionadas con las actividades que consideran la división como partición en partes iguales.

Un problema típico de división es el de la división de lápiz (o de cualquier otro conjunto de objetos familiares para los estudiantes) por un determinado conjunto de alumnos. Si pretendemos dividir, por ejemplo, veinticuatro lápices entre cuatro alumnos, éstos afirman, con mayor o menor facilidad, que cada uno se queda con seis. Es necesario señalar, sin embargo, que esta respuesta no es la única correcta, ya que, a pesar de considerarlo obvio, y de que los alumnos lo sobrentiendan la mayoría de las veces, no se dijo que la partición tenía que ser equitativa, por lo que cualquier descomposición de 24 en cuatro conjuntos distintos es una respuesta admisible.

Consideremos ahora una situación en la que tengamos que dividir, no lápices iguales, sino veinticuatro caramelos entre cuatro alumnos: Ana, Pepe, Cinta y Luís. Si consideramos que los caramelos son sustancialmente diferentes (marcas, tamaños, colores, sabores, textura,…) y tenemos en cuenta los gustos propios de cada alumno, en este caso, ¿la respuesta seguiría siendo seis caramelos para cada uno, quedando todos satisfechos?

Para solucionar este tipo de problema, que tiene que ver con las características de lo que se pretende dividir, y con las preferencias y gustos de las personas entre las que se va a dividir, tendremos que efectuar una división para que todos queden satisfechos, no siendo ésta, por tanto, necesariamente equitativa en cantidad, sino en valor, pues será el modelo considerado por todos.

En este caso particular, dependiendo del tipo de caramelos, podrá haber alumnos que prefieran quedarse con una cantidad inferior, siempre que garantice que se queda con los que le gustan (los que no le gustan no tendrían, para él, ningún valor, por lo que le darían igual). Obsérvese que, si sustituimos los caramelos por: diamantes, obras de arte, terrenos, casas, coches,… tal vez pasemos a considerar que la división con estas características, de este modo, no es tan sencilla como parece a primera vista.

Este tipo de problemas se enmarca dentro de lo que se entiende por división justa.

Un poco de historia

Este tipo de problemas, de división justa, es antiquísimo, y una de sus representaciones más conocidas es la historia del Rey Salomón y de las dos mujeres que reclamaban como su hijo un bebé recién nacido. Adoptando una aparente postura de aplicación de la división como reparto en partes iguales, el rey Salomón propuso, como solución, que se cortase al niño a la mitad y que cada mujer recibiese una de las dos partes, una división totalmente inaceptable para la verdadera madre, que prefería que el niño se quedase con la otra mujer, a que lo matasen. De esta forma el rey Salomón no tuvo ninguna duda en entregar el niño a su verdadera madre.

Esta situación ilustra la gran diferencia entre considerar la división como partición equitativa (en número) o justa (equitativa en valor).

Matemáticamente, los problemas de división justa se pueden explicar de una forma relativamente sencilla:

> ¿Cómo puede dividirse algo (un bien o conjunto de bienes) entre un conjunto de partes de tal forma que cada una de ellas reciba una parte justa?

Independientemente de lo que estemos dividiendo (de manera justa), caramelos, obras de arte, coches, terrenos…, todos los problemas comparten los mismos elementos esenciales, a saber: (a) *Un conjunto de bienes que dividir, y que para facilitar denominamos S* y (b) *Un conjunto de n "jugadores" entre los que se dividirán las partes de S, jugadores que denominaremos P1, P2..., Pn*

Hay que destacar que cuando estamos realizando una división justa debemos considerar que ninguno de los jugadores tiene conocimiento de las preferencias de los restantes, pues, si eso sucediera, estaría en una situación de ventaja. Así, para que todos los *n* jugadores consideren que se realizó una división justa es necesario que cada uno de ellos reciba una parte que considere valer, para él mismo, por lo menos, *1/n* del total del valor del bien que se pretende dividir (*S*). En divisiones de este tipo –justas– sólo interesa el valor que cada jugador atribuye a la parte que le corresponde, siendo así irrelevante lo que los otros piensan.

Cuando pretendemos dividir un determinado conjunto de bienes, éste puede ser de varios tipos: continuo, discreto o mixto. Un conjunto de bienes es de tipo continuo cuando es divisible en un número infinito de modos (pasteles, pizzas, helados, terrenos,…), por lo que las partes pueden aumentar o disminuir; es de tipo discreto, cuando está compuesto por objetos indivisibles –por lo menos en el sentido de mantener su valor– (caramelos, bombones, cuadros, casas, coches, joyas…); es de tipo mixto, cuando está compuesto por objetos de los dos tipos anteriores.

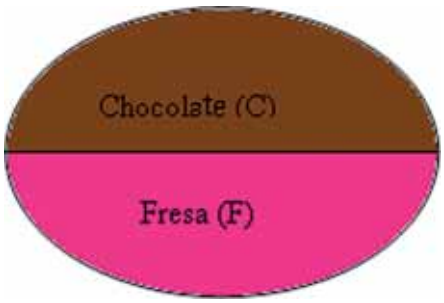
En este texto se presentan procesos para efectuar una división justa de tipo continuo o discreto. Estos procesos de resolución son necesariamente distintos, ya que tendremos que tener en cuenta no sólo las preferencias de los jugadores sino también la posibilidad, o no, de división de cada uno de los elementos del conjunto.

Veamos cada situación por separado, comenzando por la división de tipo continuo, en la cual presentamos dos situaciones (división entre dos jugadores o entre tres) y división de tipo discreto (división entre jugadores). En cuanto a la situación de la división de tipo continuo veremos dos procesos distintos.

En el caso de una división justa de tipo continuo vamos a considerar que pretendemos dividir una tarta entre dos o tres jugadores, y en la división de tipo discreto veremos cómo podemos dividir los 24 caramelos, atendiendo a sus características, entre cuatro alumnos, considerando asimismo las preferencias de estos últimos.

Para ilustrar el primer proceso imaginemos la siguiente situación:

> Para un concurso se preparó una tarta con dos sabores distintos: fresa y chocolate, distribuidos, cada uno de ellos entre cada una de las mitades de la tarta solamente. ¿Cómo podemos dividir la tarta entre Pepe y Cinta de modo que ambos queden satisfechos con la parte que les corresponde?



Este problema aparece con frecuencia cuando se pretenden abordar los racionales, pues a cada uno le tocará, obviamente, la mitad de la tarta. Sin embargo, en este contexto, lo importante es, además de eso, determinar qué mitad recibe cada uno, puesto que, más que la cantidad, lo importante, en este caso, es el valor que cada uno atribuye a la parte que le corresponde. Para realizar una división de este tipo (justa y continuo), y una vez que el bien, en este caso la tarta, se va a dividir en *n* partes (dos), alguien tendrá que dividirlo, por lo que, en primer lugar, es necesario decidir quién lo hará. Esa opción, puesto que es una situación de desventaja, deberá realizarse de manera aleatoria, por ejemplo, con el lanzamiento al aire de una moneda.

Después de elegir quién divide la tarta –el *divisor*– es el momento de efectuar la división. Para facilitar la operación consideremos que el divisor es Pepe y la que escoge, Cinta. De este modo, Pepe (divisor) divide la tarta en dos partes, que valen, para él, la mitad del valor que él da a la tarta. Cinta –*el elector*– escoge la parte que quiere, dejando la restante para Pepe.

Este proceso, normalmente conocido por "tú divides y yo elijo", cuando se hace honestamente (sin que el jugador conozca las preferencias del otro) garantiza que cada jugador se queda con una parte que considera valer, por lo menos, el 50% del valor total, y puede utilizarse siempre que exista un caso de división de tipo continuo. En esta situación, dependiendo de los gustos del divisor, y por tanto, de la división efectuada, el que elige puede escoger una parte que represente, para él, más de la mitad del valor total.

Un ejemplo, en la situación antes mencionada, en que el elector se queda con una parte que considera que vale más de la mitad del bien, es que a Cinta sólo le guste la fresa y que Pepe divida la tarta de modo que cada parte se quede sólo con un sabor. En este caso, Cinta se quedaría con una parte que representa, para ella, la totalidad de la tarta, pues dejaría a Pepe la parte de chocolate que no tiene, para ella, ningún valor.

Veamos cómo podemos dividir la tarta de la situación anterior no sólo entre Pepe y Cinta, sino también entre otro amigo (Luís), de modo que todos queden satisfechos con su parte, o sea, que les toque una parte que consideren que vale, por lo menos, 1/3 del valor de la tarta.

A semejanza de la situación en que sólo estaban los dos amigos, podemos utilizar el proceso de un divisor, y necesariamente dos electores (*divisor solitario)* o bien dos divisores y un elector (*elector solitario).*

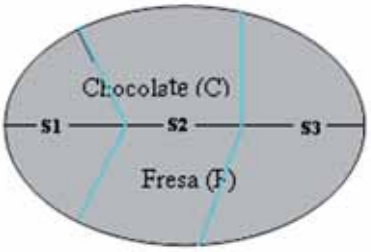
Se constata fácilmente que los métodos y las situaciones presentadas se pueden generalizar, sin gran dificultad, en situaciones donde aparecen más de tres jugadores, por lo que presentaremos cada uno de los métodos solamente para la situación en que haya tres jugadores.

Véase cómo realizar una división justa de tipo continuo aplicando los dos métodos.

Método del divisor solitario (un único divisor)

Como indica el nombre, en este método existe un único divisor que, tal y como ya se ha explicado anteriormente, debe elegirse al azar. Consideremos a Pepe el divisor y a Cinta y Luís los electores. Para realizar una división justa utilizando el método del divisor solitario tendremos que seguir tres pasos: dividir, escoger y, finalmente, distribuir.

En el primer paso el divisor (Pepe) divide el conjunto en tres partes, S1, S2 y S3.



El divisor tendrá mucho interés en dividir el conjunto S de modo que cada una de las tres partes tenga el mismo valor (por lo menos para él, pues para los otros dos jugadores pueden tener valores diferentes), ya que va a recibir una de esas partes.

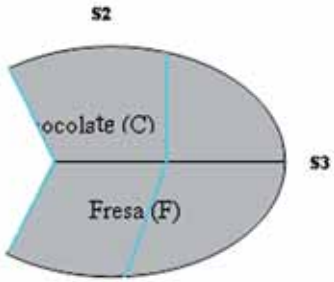
En el segundo caso cada elector lleva a cabo su elección. Ésta deberá efectuarse de forma secreta e independiente, pues en esta situación, vista en una perspectiva de juego, ambos quieren ganar, o sea, recibir la parte que tiene, para cada uno, mayor valor. Varias situaciones pueden ocurrir: los electores pueden escoger una única parte –significando que ésa es la única que tiene para él valor (1/3 del total)–; pueden escoger dos de las partes –atribuyendo por tanto el mismo valor a ambas, y les dará igual cuál de las dos escogidas le tocará–; o escoger inclusivamente las tres partes, siendo así indiferente cuál de ellas le corresponde, y valiendo para cada uno, por tanto, cada una de ellas exactamente 1/3 del valor total (equivalente a la división equitativa en número).

Después de escogida(s) la(s) parte(s), en el tercer paso tendremos que realizar entonces su distribución entre los jugadores de manera que la parte que corresponde a cada uno de ellos depende, obviamente, de sus elecciones. Recordemos que sólo los electores han podido escoger, pero pueden haber escogido una, dos o incluso las tres partes, por lo que puede haber partes que no hayan sido escogidas, y que para el divisor cualquiera de ellas tenga el mismo valor.

Por una cuestión de simplificación vamos a separar las partes en dos grupos: las elegidas y las no elegidas. Las primeras son las partes que constan de las elecciones de uno o de ambos electores, y las no elegidas son las partes que no se eligieron. Si en el conjunto de las partes elegidas están dos o incluso las tres partes, es inmediatamente posible dar a cada elector una parte que haya seleccionado como que valga 1/3 del total pues, si ambos han escogido las tres partes, entonces significa que les da igual las partes que les corresponden y, mediante acuerdo, pueden decidir qué parte otorgar al divisor (éste se queda entonces con la parte que no quieren los otros, a pesar de que cada parte tiene el mismo valor para el divisor; este paso ilustra bien la frágil posición que posee); si en el conjunto de las partes escogidas existen sólo dos de las partes, significa que cada uno de los electores ha escogido una, quedándose así cada uno de ellos con la parte correspondiente a la elección que realizó. De este modo, todos los jugadores reciben una parte que consideran justa.

Si, por otro lado, en el conjunto de las partes escogidas existe sólo una de ellas en que se ha dividido la tarta (conjunto *S*), entonces significa que los dos electores han escogido la misma parte (por ejemplo *S1)*. Así, Pepe se quedará con con *S2* o *S3*. La cuestión ahora es saber cuál de las partes no escogidas están dispuestos a conceder los dos electores, ya que la parte con la que se queden tendrá que entrar en la división entre ellos. La mejor manera de solucionar este problema será por medio del diálogo entre ambos, para decidir cuál de las partes pretenden dar al divisor (si no llegasen a un acuerdo podría tomarse la decisión lanzando una moneda al aire, pues sería indiferente qué parte dan).

Una vez atribuida una de las partes al divisor, digamos *S3*, queda entonces *S1* y *S2* para repartir entre los dos electores (razonamiento análogo para *S2)*.



Entonces, ¿cuál es la mejor manera de dividir las dos partes entre los dos? Como estamos realizando una división justa de tipo continuo, y tenemos dos conjuntos que queremos dividir de manera justa entre dos personas, el mejor proceso es juntar ambos y formar un conjunto solamente que se dividirá aplicando el método dividir/escoger.

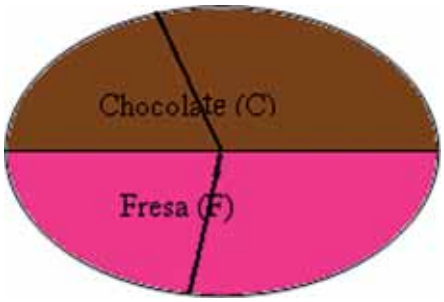
Obsérvese que, de este modo, el divisor recibe una parte que vale para él, por lo menos, un tercio del total –pues ha sido él el que ha dividido la tarta (conjunto *S*), en partes, para él, de valor equitativo– y los dos electores van a recibir, tras las aplicaciones del método divide/escoge, una parte que valdrá, para cada uno de ellos, más de un tercio del valor del conjunto inicial, esta valorización se une al hecho de que cada uno de ellos ha otorgado al divisor una parte (*S1*) que no tenía ningún valor para ellos, por lo que la parte con la que se va a quedar cada uno de ellos valdrá, por lo menos, la mitad del valor total. En esta situación específica, donde dividimos una tarta entre tres amigos, todos se quedan con una parte que consideran justa y dos de ellos se quedan con una parte que consideran que vale, por lo menos, la mitad.

Método del elector solitario (un único elector)

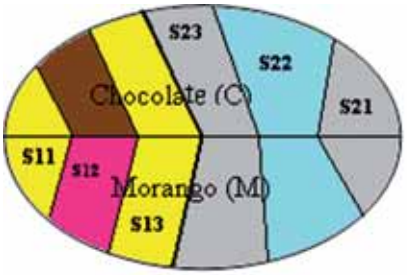
Si optamos por el método del elector solitario, partiendo de una situación con tres jugadores, tendremos un elector y dos divisores. Consideremos que en esta situación Pepe es el elector y Cinta y Luís los divisores.

Tendremos entonces, también en este caso, tres pasos que seguir: primera división, segunda división y finalmente la selección.

En el primer paso los dos divisores (elegidos al azar), Cinta y Luís, dividen la tarta (conjunto *S*) en dos partes que consideran justas –utilizando el método divide/escoge– y asumiendo, por tanto, en esta fase, uno de ellos el papel de divisor y otro el de elector, pero es sólo un paso intermedio. Denominemos cada una de esas partes también *S1* y *S2*.



En el segundo paso cada uno de los divisores divide la parte que le corresponde (después de la primera elección) por ejemplo, *S1* para Cinta y *S2* para Luís, en tres partes que considere que tienen igual valor (S11, S12, S13 y S21, S22 y S23)



El tercer paso, que tiene que ver con la selección, es realizado por el elector (Pepe) que va a escoger una de las tres partes de *S1* (S11, S12 o S13) y una de las tres partes de *S2* (S21, S22 o S23) obteniendo, de esta forma, un conjunto que vale, para él, 2/6 del valor total. Los otros dos amigos (electores) se quedan con las dos partes restantes. La división así realizada se considera justa por todos los implicados, pues para Cinta la parte *S1* valía, por lo menos, la mitad de la tarta, y se ha quedado con 2/3 de esa mitad (2/6 del total), lo que representa, en su opinión, una parte justa. Del mismo modo, Luís, el otro divisor, se ha quedado con la parte que considera valer, por lo menos, 1/3 del total de la tarta.

División justa de tipo discreta

Volvamos al punto de partida de nuestra motivación en que se pretendía dividir 24 caramelos entre cuatro niños. Esta división cuenta con rasgos muy característicos ya que incluye bienes discretos. Para realizar esta división necesitamos construir tres tiras de papel para cada alumno donde escribirán su nombre y a las cuales daremos un nombre de marcas. (En el caso de que pretendamos dividir una determinada cantidad de bienes discretos entre un conjunto *n* de jugadores, y ya que tenemos que dividir el conjunto en *n* partes, tendremos que suministrar *(n-1)* marcas.)

Para efectuar la división justa de este tipo colocamos los caramelos en línea recta, aleatoriamente, y pedimos a los alumnos que dividan el conjunto en cuatro partes, aisladamente y sin decírselo a los compañeros, de manera que cada una de ellas sea con la que ellos se quedarían satisfechos, o sea, que todas posean, para sí mimos, igual valor. Hecho esto, cada alumno (jugador), deberá colocar sus marcas en las posiciones escogidas para que se pueda dar inicio entonces al proceso de división.

Como forma de ilustrar el proceso de división presentamos una posible disposición de los caramelos y de la colocación de las marcas por los cuatro alumnos (Ana, Pepe, Cinta y Miguel).

Después de realizar las elecciones, cada alumno ha dividido los veinticuatro caramelos en cuatro partes que tienen, para cada uno, igual valor, a pesar de que poseen cantidades distintas.

En cada paso que efectuamos (cada distribución que se haga), retiramos las restantes marcas del alumno. De este modo podemos distribuir los tres primeros caramelos de la izquierda para Ana y retirar todas sus marcas (da igual comenzar por la izquierda o por la derecha).

En este segundo paso podemos actuar de dos formas: dar a Pepe los cuatro caramelos de la derecha o dar a Miguel los caramelos que se encuentran entre sus marcas primera y segunda (última marca del primer conjunto). Dependiendo de la elección que hagamos, los alumnos pueden recibir diferen-

tes caramelos, pero que valen, para cada uno, exactamente lo mismo, un cuarto del valor total (en esta situación da igual hasta la forma como hagamos la distribución). Atribuyendo a Pepe los cuatro caramelos de la derecha, y retirando sus restantes marcas obtenemos:

Sólo nos queda distribuir los caramelos entre dos de los alumnos (Miguel y Cinta). Así, a Miguel le tocarán los caramelos colocados entre sus marcas 1 y 2 y a Cinta los caramelos entre sus marcas 2 y 3. Hay que destacar que no podemos dar a Miguel los caramelos entre sus marcas 2 y 3, pues de ese modo no sería posible atribuir a Cinta un conjunto que ella considerase que vale una cuarta parte del valor de los caramelos, ya que estaríamos quitándole uno de los caramelos –el situado entre M2 y J2.

Con esta distribución cada uno de los cuatro alumnos se quedó con una parte que considera valer, por lo menos, un cuarto del valor de los caramelos:

Ana	
Pepe	
Cinta	
Miguel	

Pero como resultado de esta división justa existen todavía caramelos que no se han distribuidos

y la mejor forma de hacerlo –ya que todos poseen una parte que consideran justa-, es realizar la distribución por mutuo acuerdo. Con este tipo de división cada alumno recibe una parte que considera justa e incluso un caramelo extra.

Con este ejemplo podemos concluir que, realizando divisiones justas, no necesariamente equitativas, todos los participantes ganan. Será pertinente comprobar qué tipos de divisiones debemos aplicar en cada una de las situaciones, pues dividir un determinado conjunto entre una serie de jugadores no significa necesariamente que todos reciban una parte igual -en lo que se refiere a tamaño o cantidad- sino una parte de igual valor, ya que por lo menos este último es atribuido por cada uno de ellos.

Este tipo de actividades permite que los alumnos entren en contacto con otra forma de dividir, en que obviamente es imposible aplicar ningún algoritmo de papel y lápiz, lo que les permitirá también conscienciarse de sus gustos y de la importancia de sus tomas de decisión en el producto final. ■

NOTAS

[1] En Portugal el Primer Ciclo incluye los primero cuatro años de escolaridad (alumnos con edades comprendidas entre los 6 y los 9 años, en condiciones normales) y donde existe, hasta el momento, un único profesor para todas las áreas curriculares.

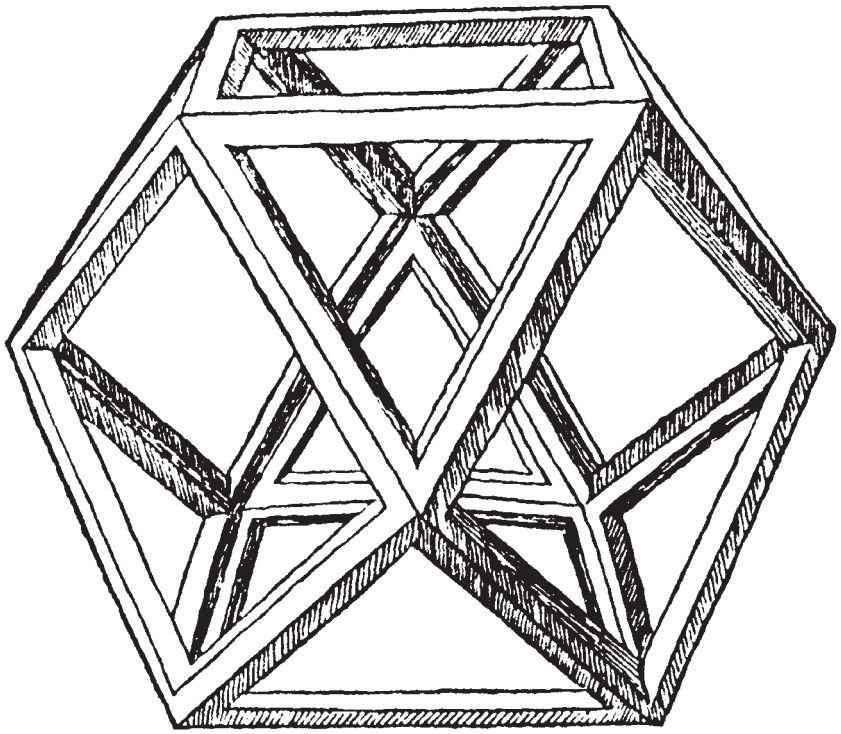
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Departamento de Educação Básica (DEB). (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Ministério da Educação.

Departamento de Educação Básica (DEB). (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação.

Este artículo fue recibido en SUMA en Octubre de 2008 y se aceptó en Enero de 2010

suma+



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

Juegos	*Grupo Alquerque de Sevilla*
El clip	*Claudi Alsina*
Literatura y matemáticas	*Constantino de la Fuente*
MatemásTIC	*Mariano Real Pérez*
Arte con ojos matemáticos	*Francisco Martín Casalderrey*
Adherencias	*Miquel Albertí*
Biblioteca	*Daniel Sierra*
Hace	*Santiago Gutiérrez*
Musymáticas	*Vicente Liern Carrrión*
Cinemateca	*José María Sorando Muzás*
El hilo de Ariadna	*Xaro Nomdedeu Moreno*

poliedro

suma+ 63
Febrero 2010, pp.51-57

MacMahon y las matemáticas en colores

En el mundo de los juegos ocurre a veces que la persona que los inventa se hace realmente famosa; un ejemplo puede ser el del húngaro Ernö Rubik, quien a partir de la creación de su cubo se hizo mundialmente conocido y creó de su apellido una franquicia, pues los restantes juegos basta que lleven añadido su apellido para tener asegurada la publicidad y la atención de la audiencia. En otras ocasiones un puzzle o un juego se hace muy conocido pero nadie sabe quién es su autor; un caso podría ser el juego del 15, del que existen muchas versiones, incluso en publicidad, pero que sólo los que han investigado un poco saben que lo inventó el norteamericano Sam Loyd, uno de los mayores creadores de juegos de la historia y a quien en algún momento tendremos que dedicar esta sección.

El personaje del que nos vamos a ocupar pertenece a este segundo grupo; una persona que se dedicó a las matemáticas recreativas, patentó puzzles muy atractivos e interesantes, publicó varios libros y sin embargo es poco conocido. Nos referimos en concreto al matemático británico MacMahon (1854–1929). En esta sección ya nos hemos referido a él en la revista *SUMA* nº 41, pero queremos dedicar este artículo a estudiar los puzzles que descubrió y patentó, así como posibles versiones que surgen de ellos.

MacMahon, ese hombre

Percy Alexander MacMahon o McMahon, nació el 26 de septiembre de 1854 en Aliena, Malta. Hijo de militar, fue educado en una escuela de Cheltentham para seguir los pasos de su padre en el ejército británico.

Estuvo destinado en la India durante cinco años, hasta que una enfermedad desconocida le devolvió a Inglaterra, librándose de la guerra con los afganos y por lances del destino paso de soldado a ser elevado al rango de capitán y nombrado instructor de Matemáticas en la Real Academia Militar. En 1891 fue nombrado Instructor Militar en Electricidad en la Real Academia Militar en Woolwich. Se retiró de la carrera militar en 1898.

Grupo Alquerque de Sevilla

Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos@revistasuma.es

Fue elegido miembro de la *Royal Society* en 1890, que le concedió la Medalla Real en 1900. Recibió la Medalla Silvester en 1919 y la *London Mathematical Society*, de la que fue presidente entre 1894 y 1896, le concedió la Medalla Morgan en 1923.

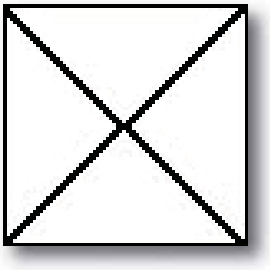
Como matemático estudió sobre todo las funciones simétricas y las particiones y recubrimientos del plano. También fue un apasionado de la combinatoria. Publicó dos libros sobre matemáticas recreativas:

– *Combinatory Analysis (1915-1916)* (Análisis combinatorio). Este libro en dos volúmenes es considerado el primer libro importante sobre combinatoria numérica.
– *New Mathematical Pastimes* (1921) (Nuevos pasatiempos matemáticos). En este segundo libro reúne todos sus trabajos en matemáticas recreativas. En él pone de manifiesto una de las investigaciones que más le intrigó: la construcción de patrones que se puedan repetir y que llenen el plano.

Además patentó en 1892 un par de puzzles, junto con el Mayor J. R. Jocelyn, basados en la combinatoria sobre los que va a versar nuestra entrega de hoy.

Primer puzzle: cuadrado dividido en cuatro partes

En esta sección ya hemos trabajado anteriormente el tema de las variaciones coloristas para estudiar patrones y puzzles. Aparte del artículo ya nombrado, en el nº 53 de *SUMA* publicamos el trabajo "Combinatoria de colores". En ese artículo comenzábamos proponiendo la división de un cuadrado en cuatro piezas iguales, tomando dos de esas divisiones para presentar puzzles.



En una de esas divisiones, como vemos en la figura, se basó MacMahon para el primer puzzle que presentamos.

Su planteamiento fue estudiar cuántas piezas distintas se pueden formar utilizando tres colores que puedan repetirse las veces que sean necesarias.

Así surgió el que conocemos como puzzle de **24 cuadrados y 3 colores**. En la imagen 1 podemos observar todas las piezas que salen con esa condición.

Con esas 24 piezas MacMahon planteó el siguiente problema: construir un rectángulo de seis por cuatro que cumpla:

1. Los lados de las piezas en contacto deben ser del mismo color.
2. Todo el perímetro del rectángulo debe ser del mismo color.

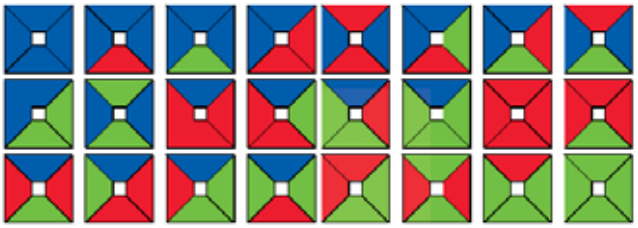


Imagen 1

En la figura siguiente podemos ver una solución a este problema.

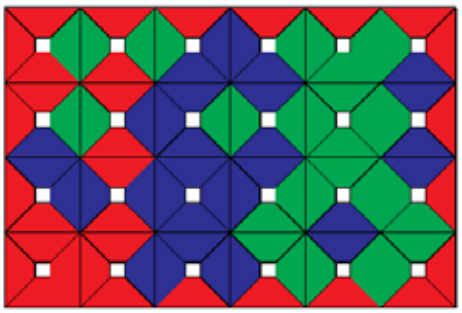


Imagen 2

Siempre que trabajamos un material nuevo y mientras conseguimos encontrar la solución (lo que a veces se nos resiste, hasta que llega el "fiera" que nos la "destripa" en un momento) nos gusta rentabilizar ese material, que la mayoría de las veces hemos tenido que construir, buscando qué otros retos podemos plantear. Por eso, trabajando en el taller con nuestros alumnos han surgido las siguientes actividades en las que se utilizan todas o algunas piezas, manteniendo la única restricción de que dos piezas que se toquen deben de hacerlo uniendo el mismo color.

1. Coger las nueve piezas que tienen tres colores y construir un cuadrado de lado 3.
2. Coger las doce piezas que tienen sólo dos colores y construir un rectángulo de 3×4.
3. Coger las doce piezas complementarias de las anteriores, es decir las que tienen uno o tres colores, y construir un rectángulo de 3×4.
4. Coger las 15 piezas que tienen uno o dos colores y formar un rectángulo de 3×5.
5. Coger las 15 piezas que tienen uno o dos colores y otra pieza (la que quieras) de las que tienen tres colores, y con ellas construir un cuadrado de 4×4.
6. Dividiendo las piezas en dos grupos de 12 piezas cada uno construir dos rectángulos de 3×4 (imagen 3).

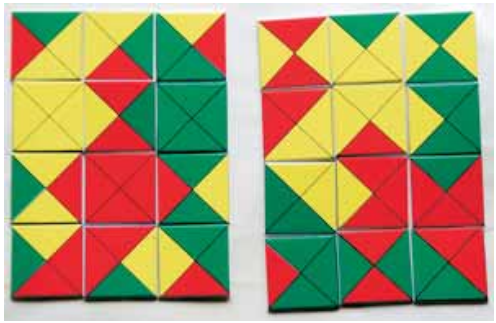


Imagen 3

7. Con todas las piezas, construir rectángulos de 2×12, 3×8 y 6×4.
8. Con todas las piezas construir rectángulos huecos de 3×11, 4×10, 5×9, 6×8 y 7×7.

A continuación podemos ver ejemplos de rectángulos de 6×4 y 3×8. En ellos no se impone la condición de que el perímetro exterior sea del mismo color. Es más, creemos que sólo es posible mantener la segunda restricción de MacMahon en los rectángulos de orden 6×4. Siguen dos imágenes de rectángulos huecos.

Imagen 4

Imagen 5

Imagen 6

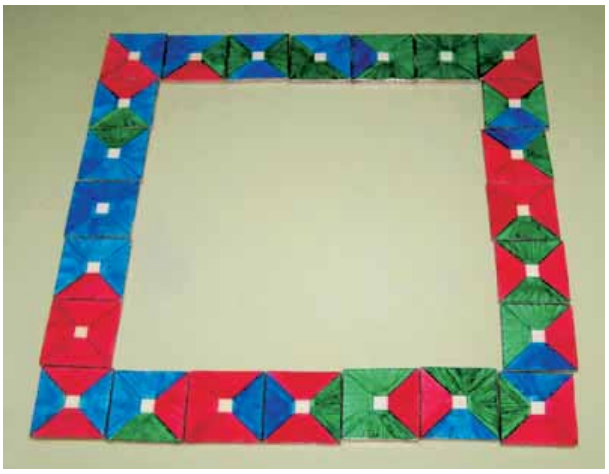


Imagen 7

Este puzzle puede encontrarse comercializado entre los materiales de una empresa granadina de nombre Materiales Didácticos Bemal S.L., dentro de sus puzzles 2D. Se puede encontrar más información en www.bemal.es.

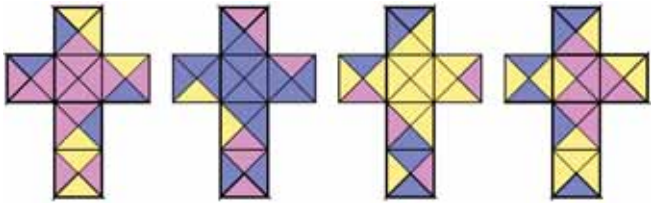
MacMahon fue una persona que se dedicó a las matemáticas recreativas, patentó puzzles muy atractivos e interesantes, publicó varios libros y sin embargo es poco conocido.

El salto del plano al espacio. Como resolver un reto.

Para mostrar que no somos los únicos que aprovechamos un juego para sacar variantes de él, vamos a presentar el puzzle que conocemos como de los 4 cubos y 3 colores.

Este puzzle fue creado por Scout Nelson y según reza la publicidad de la casa que lo comercializa, después de 50 años y muchos intentos, un niño de 9 años consiguió resolverlo, colocando los 24 cuadrados de MacMahon en las 24 caras de cuatro cubos de manera que en los bordes de las caras coincida el color, es decir, las aristas de cada cubo unen dos triángulos del mismo color.

La distribución de colores en los cubos es la que podemos ver en el siguiente desarrollo.



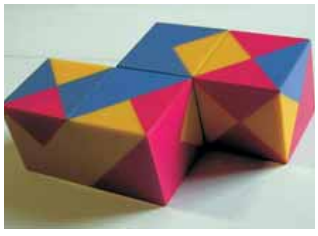
Con los cuatro cubos resultantes se tiene un puzzle realmente llamativo y nada fácil.

El reto consiste en apilar los cuatro cubos de manera que las caras que quedan visibles a cada lado se unan por colores iguales.

Como es un puzzle altamente difícil, de entrada comenzamos apilando primero dos y después tres, antes de pasar al problema completo del que podemos ver una solución en la imagen adjunta. Sólo decir que no es trivial conseguir apilar los cubos incluso viendo la solución.

Como hemos comentado en el puzzle anterior, una vez que hemos resuelto el problema planteado llega el momento de sacarle más rendimiento y por ello invitamos a conseguir figuras con los cuatros cubos, manteniendo siempre la restricción de que las caras se unan por colores iguales.

Añadimos algunas de las soluciones encontradas por nuestros alumnos.

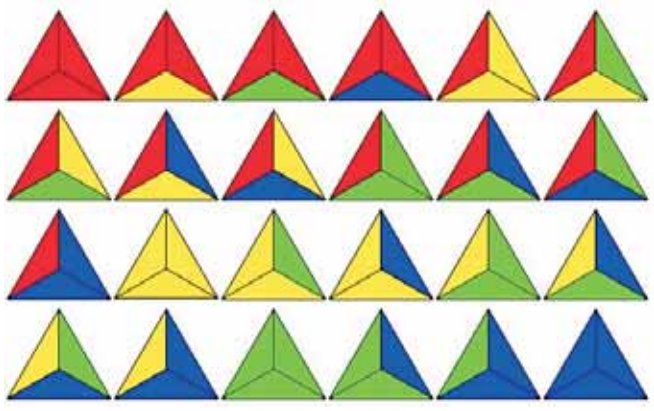


Segundo puzzle de MacMahon: triángulos divididos en 3 partes.

La misma idea que vertió en su puzzle de los 24 cuadrados con tres colores lo hizo MacMahon en su segundo puzzle, pero en este caso partiendo de un triángulo. En la misma patente se describe que el puzzle está formado por piezas que son triángulos equiláteros divididos en tres partes que llevan números o color de modo análogo al dominó.

Es decir, en este puzzle se basan también los dominós triangulares que pueden encontrarse formado por piezas triangulares y con las que puede jugarse a una versión del dominó clásico.

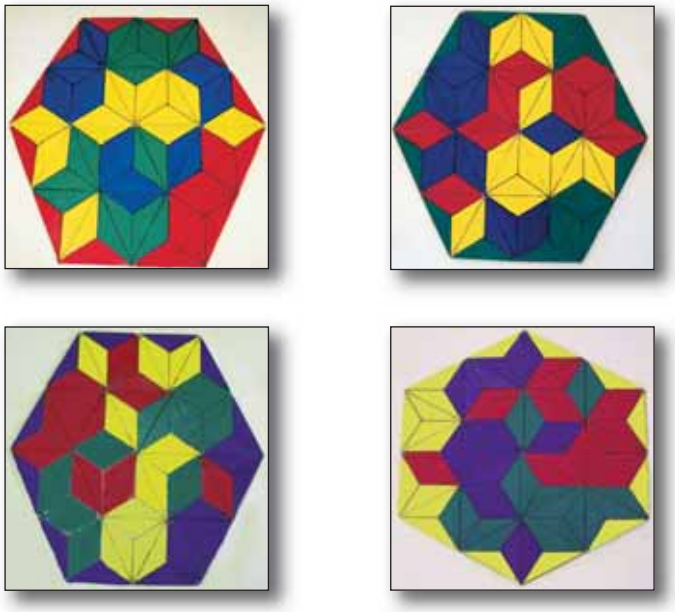
Para que no sea muy simple, ahora se utilizan cuatro colores y el puzzle está formado por todas las piezas distintas formadas por triángulos divididos en tres partes iguales y que puedan colorearse con cuatro colores diferentes, pudiéndose repetir los colores obviamente. Las piezas posibles aparecen en la siguiente imagen.



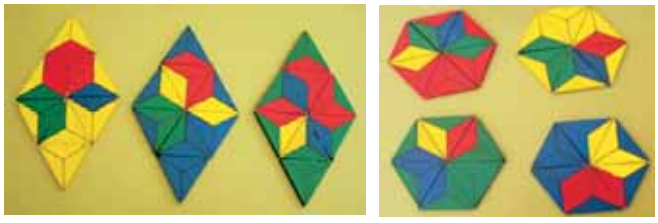
En su libro *Nuevos pasatiempos matemáticos,* aparte de describir el juego plantea un nuevo reto, como hizo con los cuadrados: construir un hexágono de lado doble que los de los triángulos, con las siguientes condiciones:

1. Los lados que se toquen deben ser del mismo color.
2. El perímetro del hexágono debe ser de un solo color.

En las fotografías siguientes tenemos algunas soluciones en donde el borde es de cada uno de los colores posibles.

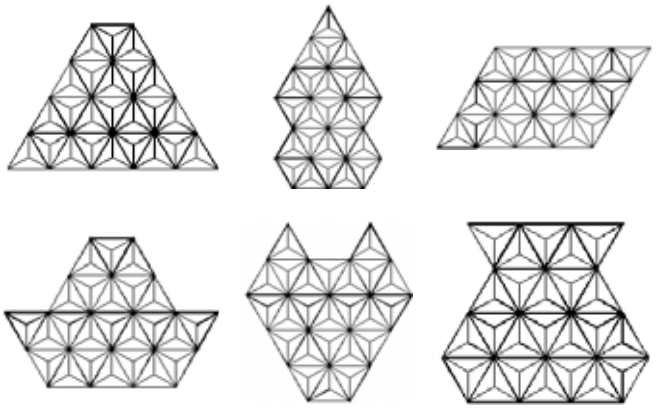


Una vez resuelto el problema de MacMahon vamos a ponernos retos. Por ejemplo, construir un rombo de lado 2 con el borde de un color, con las piezas restantes montar otro rombo con el borde de otro color y, si me quedan fuerzas, conseguir con las restantes otro rombo de las mismas características. Para que no se nos llame mentirosos mostramos en la siguiente fotografía una solución a esta propuesta.



Otro rompecabezas es conseguir cuatro hexágonos de lado igual al triángulo, pero cada uno con un borde de cada uno los cuatro colores que se han usado en el puzzle. También se muestra una solución.

Jugando con todas las piezas, aparte del hexágono propuesto por MacMahon, es posible conseguir otras figuras que guardan una cierta simetría o forman polígonos reconocibles. A continuación os planteamos como reto algunas composiciones que han conseguido nuestros alumnos en el taller de juegos.



En la siguiente página web podemos jugar online con los triángulos de MacMahon y otros puzzles similares:

http://www.gamepuzzles.com/pparlor/he×mojr.html

Existe un juego holandés con el nombre Spectrangle, comercializado en nuestro país por Borrás, que se basa en este puzzle.

Este juego sin embargo es de estrategia, trabaja con cinco colores en lugar de cuatro y como las piezas son macizas y se pueden usar por delante y por detrás, el número de posibilidades se repiten.

En concreto, las piezas formadas por tres colores diferentes se reducen a la mitad, por eso sólo tenemos 20 piezas utilizando cuatro colores diferentes.

Actualmente la Sociedad Andaluza Thales tiene comercializados una serie de materiales y juegos entre los que se encuentra el puzzle concreto de MacMahon con el nombre

"24 triángulos de colores", si alguien está interesado en informarse sobre el tema puede consultar la dirección:

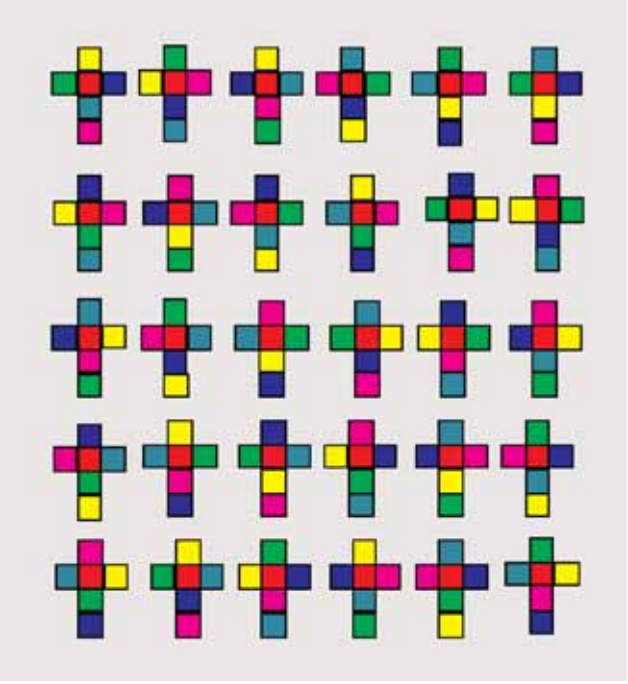
http://thales.cica.es/?q=node/268.

El puzzle espacial de MacMahon.

También en 1892, MacMahon presentó la patente de un conjunto de 30 cubos con sus caras pintadas con seis colores diferentes, que es conocido como el **puzzle de los 30 cubos y los 6 colores**.

Consiste en todos los cubos posibles que se pueden formar pintando cada cara de un color diferente. El estudio combinatorio de todas las posibilidades ya es un buen proyecto para el taller de matemáticas. La primera dificultad está en elegir una buena notación para que no se nos pase ninguna posibilidad. En la imagen adjunta tenemos los 30 cubos posibles: como puede verse, hemos colocado todos los desarrollos a partir de una cara fija, la roja, y combinando todos los demás colores.

Nosotros no hemos conseguido encontrar este puzzle comercializado, y para construirlo hemos decidido ir al reciclaje para optimizar los recursos y las fuerzas. Lo mejor es conseguir cubos de madera o de plástico proveniente de juegos infantiles ya desechados, aunque es difícil conseguir 30 del mismo tamaño (siempre podemos echar mano de los mercadillos de segunda mano). Por último, usando papel adhesivo del que se utiliza para forrar los estantes de las cocinas o para trabajos manuales, basta recortar cuadrados más pequeños que la cara del cubo y ¡a pegaaaar!



Con los cubos construidos os proponemos unos cuantos desafíos de distinto grado de dificultad, en la mayoría de ellos hay que seleccionar los cubos que necesitaremos para resolverlos:

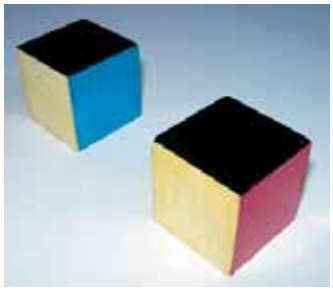
1. Coger un cubo cualquiera y buscar su simétrico.

2. Coger 6 cubos y formar con ellos una columna de manera que cada uno de los lados contenga los seis colores distintos.

3. Coger 8 cubos y formar un cubo de 2×2×2 que tenga en las caras derecha e izquierda un color, delante y detrás otro color y un tercer color arriba y abajo.

4. Construir un cubo de 2×2×2 con un color en dos caras opuestas y colores diferentes en las otras caras.

5. Construir un cubo de 2×2×2 con un color diferente en cada una de sus caras.



Reto 1

Reto 5

6. Construir un cubo de 2×2×2 de forma que las caras delantera y trasera sean de un solo color y el mismo, en las caras laterales también se obtenga el mismo color, diferente del anterior y en la parte de arriba y de abajo aparezcan los otros cuatro colores sin repetir en cada cara.

7. Construir un cubo de 2×2×2 con cuatro colores diferentes en una cara, y que esos mismos cuatro colores se repitan en todas las caras.

8. Construir un cubo de 3×3×3 de manera que cada cara sea de un color diferente.

Para mostrar que podemos engarzar una actividad con los resultados de otra proponemos la siguiente en la que en cada estado, al tener menos cubos, se complica el reto.

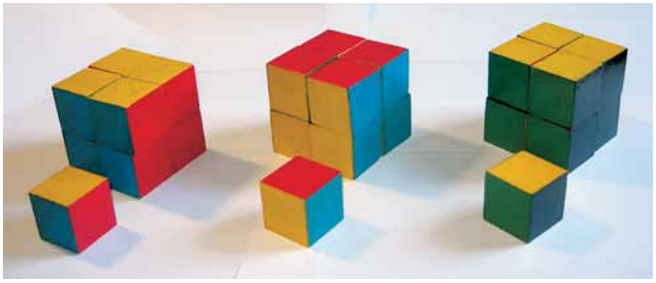
Coger un cubo cualquiera. De entre los 29 restantes tomar 8 cubos que formen un cubo de 2×2×2 y que sus colores tengan la misma disposición que el elegido.

Este juego puede tener dos niveles de dificultad:

a. Que las caras en contacto tengan distinto color.
b. Que las caras en contacto tengan el mismo color.

De entre los 21 cubos que quedan se puede coger un nuevo cubo y de entre los 20 restantes coger 8 y formar un cubo de 2×2×2 con los colores de este último cubo.

De entre los 12 que quedan se puede coger un nuevo cubo y de entre los 11 restantes coger 8 y formar un cubo de 2×2×2 con los colores de este último cubo.



Reto 8

Como convertir un puzzle en un juego de estrategia: torre de colores

En su libro Nuevos pasatiempos matemáticos, Martin Gardner incluye un artículo de título "Los 24 cuadrados y los 30 cubos de colores" donde habla de estos puzzles y nos propone un juego para dos jugadores, con las siguientes reglas:

– Se colocan los 30 cubos en una caja o bolsa donde no puedan verse sus colores.
– Cada jugador saca 7 cubos ocultándolos a su oponente.
– Para comenzar turno cada jugador dice tres colores, se tira uno de los cubos del juego cualquiera y el que hubiese elegido el color de la cara superior comienza el juego.
– El primer jugador coloca uno de sus cubos en el centro de la mesa. El segundo jugador coloca al lado un cubo de los suyos de manera que las caras que queden en contacto sean del mismo color. Por turno los jugadores van colocando sus cubos formando una torre de base cuadrada de 2×2 cubos. Una vez conseguida se continúa construyendo sobre ella otro piso de 2×2 cubos.
– Para comenzar un piso nuevo debe estar terminado el precedente.
– Se puede colocar un cubo en cualquier hueco de un piso manteniendo siempre la obligación de que las caras que se toquen deben ser del mismo color.
– Si un jugador no puede colocar ninguno de sus cubos, debe robar de la bolsa de cubos. Si el cubo extraído se puede colocar, puede jugarlo si quiere. Si no puede o no quiere pasa su turno.
– Si algún jugador por estrategia desea pasar turno, puede hacerlo, pero debe robar un cubo de la bolsa.
– Gana el jugador que coloca todos sus cubos en la torre. Si en algún momento el juego llegara a bloquearse y no se pudiera continuar, ganaría el que tenga menos cubos en su poder.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Gardner, M. (1991): *Nuevos pasatiempos matemáticos*. Colección El libro de bolsillo, nº 391. Madrid: Alianza Editorial.

Grupo Alquerque (2002): El puzzle de los cubos de colores, *Suma*, (41), pp. 121-123.

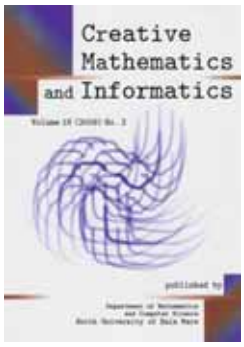
Grupo Alquerque (2006): Combinatoria de colores, *Suma*, (53), pp. 61-64.

Publicaciones recibidas

Problemes olímpics
SEMCV Al Khwārizmī
N.º 51, Octubre 2009
Valencia
ISSN: 1578-1771

Problemes olímpics
SEMCV Al Khwārizmī
N.º 52, Desembre 2009
Valencia
ISSN: 1578-1771

Losanges
SBPMef
N.º 6, Octobre-Decembre 2009



Creative Mathematics and Informatics
Departament of Mathematics and Computer Science. North University of Baia Mare. Romania
Vol.18, n.º 2, 2009
ISNN 1584-286X

PNA. Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Granada
Vol. 4 n.º 2, enero 2008
ISSN 1886-1350

petit X
IREM de Grenoble
N.º 78, 2008
ISSN 0759-9188

Pubicaciones de la Facultad de Educación y humanidades del Campus de Melilla
Universidad de Granada
N.º39, Noviembre 2009
ISSN: 1577-4147

La Gaceta de la RSME
RSME
Vol.12, n.º 4, 2009
Madrid
ISNN 1138-8927

suma+ 63
Febrero 2010, pp. 59-61

Tazas, cucharas y los vasos del Starbucks Coffee

Muchos son los líquidos (aceite, vinagre, leche, vino, licor…) y otros productos (sal, especies, arroz…) que son descritos en las recetas de cocina en relación al volumen. A veces se expresan dichos volúmenes en unidades precisas (litros, centilitros, mililitros…) pero en muchas ocasiones se presuponen las capacidades de determinados contenedores (cucharas, tazas, vasos…) para "aclarar" los volúmenes implicados. Cuando le recomiendan "ponga dos tazas de arroz por persona", si usted no es del club de los iniciados, su estupor puede ser mayúsculo pues al abrir el armario de la cocina encontrará tazas de lo más diverso dispuestas a ser "la taza" recomendada.

En otras recetas de cocina podrá ver que a veces en lugar de volúmenes se expresan contenidos en peso. Se presupone que es más normal que usted disponga de balanzas que no de medidores de volumen. Esta costumbre depende de los ámbitos culturales, mientras que en Europa la harina se expresa en peso en Estados Unidos la harina de las recetas se expresa siempre en volumen. La moda americana de hacer pasteles caseros ha llevado a que en sus cocinas sean frecuentes los medidores volumétricos.

La vieja tradición de los recipientes medidores

Antes del sistema métrico decimal siempre fue costumbre expresar los volúmenes en relación a recipientes de medidas conocidas, es decir, cada recipiente fijo daba lugar a una posible unidad. En nuestros museos se conservan muchos de estos históricos recipientes de madera o metálicos con los que se medían la harina, los granos, las legumbres, la leche, etc.

Al margen de los brillantes resultados en el estudio PISA, en los mercados actuales de Finlandia podrá observar que hay muchos productos como patatas, cerezas, fresones, etc. que se venden por "capacidad" y no por peso. Usan unos recipientes metálicos o de madera y el precio se expresa en relación a "lo que cabe" en cada uno, conservando así una tradición medieval.

Claudi Alsina
Universitat Politècnica de Catalunya
elclip@revistasuma.es

Una visita a las cucharas y las tazas.

El gran cocinero Santi Santamaría en sus populares recetas de La Vanguardia siempre usa tres símbolos para aclarar temas de volúmenes:

c/c = cucharadita café
c/p = cucharada postre
c/s = cucharada sopera

Estudios sobre cucharas han mostrado que en general la cucharadita de café o té oscila entre 4,2 ml y 4,6 ml, no superando nunca los 5 ml. Estudios estadísticos rigurosos han publicado que:

> Las cucharaditas de té tienen una capacidad media de 4,93 ml±0,24 ml

dato que puede satisfacer a los más exigentes de nuestra profesión.

En el sistema anglosajón de medidas para cocina está acreditada la *cuchara de té* (t, ts, tsp: "teaspoon") que se corresponde a 5 ml:
1 tsp = 5 ml, ¾ tsp = 3,75 ml, ½ tsp = 2,5 ml ¼ tsp = 1,25 ml.

Hay también la *cuchara de postre* ("dessertspoon") de 10 ml en Inglaterra.

La *cuchara de mesa* (tbsp: table spoon) corresponde a 15 ml o sea 3 cucharas de té (pero en Australia 20 ml). Por tanto resulta:
1 taza = 16 cucharas de mesa = 48 cucharas de té = 240 ml.

Cucharillas medidoras

El medidor de tazas

Si se está culminando una paella y debe poner 8 tazas de arroz el resultado será muy diferente si usa una taza de moka, una taza de café, una taza de café con leche, una taza de té, etc. Pero si alguien se apiada de usted y le precisa que deben ser tazas de café, el problema aún no estará resuelto: ¿las tazas de café italiano?, ¿las tazas de la vitrina de la abuela?

El problema ha sido resuelto por los americanos con el diseño de un aparato cuya capacidad es de media taza e incorpora a la vez escalas de mililitros, onzas y fracciones de taza. Un marcador movible del instrumento permite mover al separador que esta en el interior de "la media taza". El contenido total del recipiente es *media taza,* pero la movida de la pieza un cierto ángulo permite pasar a ¼, ½, ¾,…de taza. Las fracciones también están indicadas en el soporte y se da una escala de equivalencias entre tazas y cucharadas. En este modelo media taza equivale a 8 cucharadas y a 130 mililitros. Pero en Australia y Canadá la taza contiene 250 ml, en Inglaterra 285 ml y en algunos lugares americanos 236,59 ml.

El medidor de Curver

Un interesante recipiente de 1 litro producido por Curver consiste en una vasija de plástico donde están marcadas las diferentes alturas para agua, harina, arroz y azúcar. La clave de todo son las equivalencias de capacidades:

1 l agua = 700 gramos de harina

0,8 l agua = 700 gramos de arroz ≈ 900 gramos de azúcar

Un interesante dato a tener en cuenta.

Los vasos de Starbucks Coffee

Si entra en un Starbucks Coffee (lo difícil es no entrar pues están en todos los sitios) y elige entre las 86.000 ofertas (deben tener un empleado amante de la combinatoria), si opta por el tamaño pequeño recibirá exactamente 236 ml, cantidad ciertamente curiosa. En esta popular cadena los contenidos canónicos de sus vasos son:

Pequeño…….8 FL OZ….236 ml
Alto……..12 FL OZ….354 ml
Grande……16 FL OZ….473 ml
"Venti"…….20 FL OZ…..591 ml.

Como los números no engañan, queda claro que el origen de las medidas es anglosajón y por ello aparecen cantidades en mililitros tan pintorescas.

Y una consideración docente

En la enseñanza de la medida vale la pena trabajar volúmenes y capacidades con vistas a tener ciertas intuiciones sobre las medidas reales de las cosas, desde las compras de líquidos, pasando por el uso de las recetas de cocina y prestando especial atención a los medicamentos y sus dosis.

Mi buen amigo Antón Aubanell dice con acierto que la unidad de volumen que hoy tiene la juventud como referente es la lata de Coca-Cola y por ello propone a sus estudiantes el ilustrativo experimento de llenar un cubo transparente sin tapa de 1 decímetro de lado (1 litro) con el contenido de 3 latas de refresco. Las fórmulas para calcular medidas están muy bien pero conviene también usar recipientes, experimentar, desarrollar un cierto dominio de las medidas reales de las cosas.

Como dice un viejo aforismo:

Si no quieres caldo, dos tazas

Para saber más

Adams Mª. A. (y otros) (2000): *Instrumentos y unidades de medida tradicionales en Extremadura*, Badajoz: Publicaciones de la FESPM.

http://www.starbrucks.es
http://www.recetasdecocina.es
http://www.xtec.cat/~aaubanel/Guions/G13.pdf
http://www.xtec.cat/~aaubanel/Guions/G19.pdf

EL CLIP

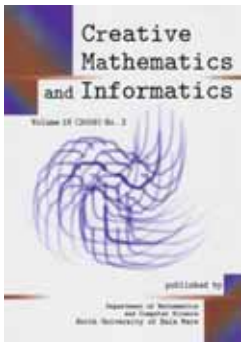
Mercado en Finlandia

Publicaciones recibidas

LLULL
SEHCYT
Vol. 32 (nº70) 2009
Zaragoza
ISSN: 0210-8615

Investigación y ciencia
Prensa Científica, S.A.
Febrero 2010
Barcelona
ISSN: 0210136X

Xla Tangente
Kangouru Italia
N.º 18, diciembre 2009
Monza. Italia
ISSN: 1971-0445



Creative Mathematics and Informatics
Departament of Mathematics and Computer Science. North University of Baia Mare. Romania
Vol.18, n.º 2, 2009
ISNN 1584-286X

Grand N
Irem de Grenoble
N.º84, Octobre 2009
Saint Martin d'Hères Cedex
ISSN: 0152-4682

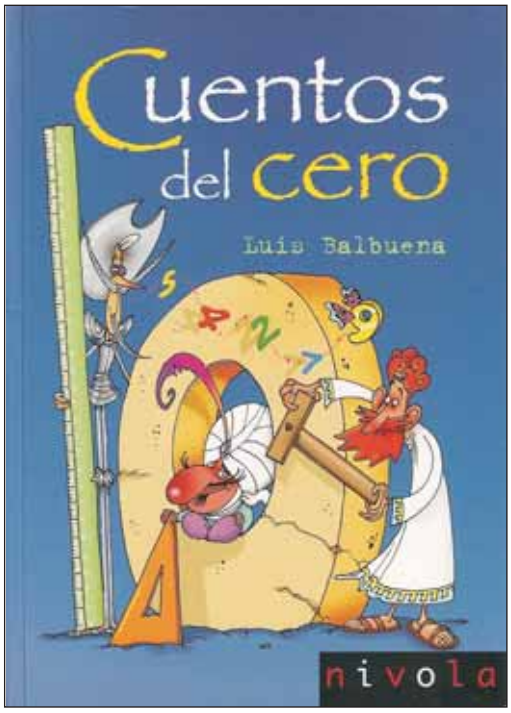
Gamma
AGAPEMA
N.º9, Setembro 2009
Lugo
ISSN: 1578-2980

Fragmentos de una realidad imaginada
RSME/ ANAYA
Madrid, 2009
ISBN: 978-84-667-8520-4
126 Páginas

Un Teorema en la biblioteca
RSME/ ANAYA
Madrid, 2009
ISBN: 978-84-667-8521-1
216 Páginas

suma+ 63
Febrero 2010, pp.63-74

Cuentos del cero o *Las Matemáticas están llenas de vida(s)*



CUENTOS DEL CERO
Luis Balbuena Castellano
NIVOLA libros y ediciones, S. L., Tres Cantos
Colección Violeta nº 10. A partir de 11 años
Primera Edición: 2006
ISBN: 978-84-96566-18-7

El libro al que vamos a dedicar este número tiene dos peculiaridades que lo diferencian de los anteriores. En primer lugar es una obra de relatos en forma de *cuentos matemáticos*, cuya variada temática va desde el origen de los dígitos del sistema de numeración, hasta la geometría de la esfera, pasando por las relaciones amorosas de la Derivada y el Arco Tangente y otras narraciones emparentadas con la mitología clásica. En segundo lugar su autor es una persona imprescindible en el panorama de la educación matemática de las últimas décadas en España, como hemos mencionado en la dedicatoria. Este año pasado ha recibido muy merecidamente el premio Gonzalo Sánchez Vázquez, último galardón de una serie de reconocimientos que ha ido recibiendo a lo largo de su trayectoria profesional. Sirva también este artículo como homenaje a su innegable labor.

Dedicado a Luis Balbuena.
Sin Luís todo hubiera sido distinto: la Federación, las Sociedades de Educación Matemática, las JAEM, la Innovación y, en general, la Educación Matemática española de los últimas décadas.

Constantino de la Fuente Martínez
IES Cardenal López de Mendoza, Burgos
literatura@revistasuma.es

Presentación

En la contraportada de la obra podemos leer:

> El profesor canario Luís Balbuena ha escrito estos cuentos que, de forma amena, nos invitan a conocer más sobre el mundo de las matemáticas.
>
> En *Yo soy el cero* recrea la historia y la importancia de nuestro sistema de numeración. Para introducirnos en los razonamientos lógicos nos sorprende llevándonos de la mano de dioses mitológicos en *El rescate*; o de un hidalgo que sabe enseñar, en *De lo que aconteció a Don Quijote*… Franqueamos las puertas de la geometría con rectas, triángulos y esferas; la paridad y la teoría de números dan paso a un romance eterno.

La anterior presentación, nos parece que hace muy poco honor a la valía personal y profesional del autor, por ello le vamos a añadir algunas de nuestras opiniones, basadas en el conocimiento personal y profesional a lo largo de varias décadas.

Resulta difícil decir algo nuevo de nuestro flamante premio Gonzalo Sánchez Vázquez 2009 a los valores humanos, que ha conseguido dejar su impronta en el ámbito de la innovación y la educación matemática española. Y lo ha hecho desde su campo permanente de actuación: la práctica del aula; lo que constituye un caso realmente meritorio y una valiosa hazaña de un práctico reflexivo. Realmente Luís constituye un ejemplo a seguir para todos nosotros, los profesores y profesoras de matemáticas. ¿Quién no se ha inspirado escuchándole en alguna conferencia o leyendo algunas de sus ideas?

Otro aspecto que no se puede aprender leyendo libros especializados o con una formación inicial ni siquiera brillante, es la ilusión que cada uno imprima a su trabajo y que es capaz de transmitir en el acto de enseñar.

Aprovechamos la oportunidad que nos brinda este privilegiado espacio para resaltar algunas de sus ideas sobre la enseñanza, el aprendizaje y la profesión de profesor o profesora. A tal fin hemos escogido un párrafo de su artículo (Balbuena, 1998), en el que nos brinda su visión de la ilusión en el trabajo de profesor:

> Otro aspecto que no se puede aprender leyendo libros especializados o con una formación inicial ni siquiera brillante, es la ilusión que cada uno imprima a su trabajo y que es capaz de transmitir en el acto de enseñar. Da igual llamarle ilusión, que entusiasmo o ganas. Se trata, en definitiva, de que el alumno capte –y lo capta con mucha rapidez y facilidad- que a su profesor o profesora le gusta lo que está haciendo, que intenta hacerlo lo mejor posible, que prepara rigurosamente sus clases y deja poco espacio –es bueno dejar alguno– para la improvisación, que innova y le hace partícipe de las experiencias que desarrolla…

¡Qué más podemos decir! Todo lo que añadiéramos sobre el tema sería para estropearlo…

Comentario personal

Siguiendo la tónica de la presentación de la obra, en la que lo profesional está íntimamente ligado a lo humano, vamos a dejarnos llevar por los sentimientos y relataremos lo que me ocurrió al leer por primera vez el libro, en julio de 2007.

Comencé a leer el primero de los cuentos, *Yo soy el Cero*, y fue al llegar exactamente a la segunda línea, "puedo, al fin, expresarme como humano y contarles así parte de mi apasionante historia", cuando identifiqué en mi cabeza el sonido exacto de la voz de Luís Balbuena, que me decía, justo, lo que yo leía. ¿Qué es esto?, pensé, ¡no es posible…! Pero era posible: Luís me leía mentalmente el cuento, con su timbre de voz, su acento canario, sus expresiones personales, su forma única de hablar y de dirigirse al otro, sus eses, su entonación… No sólo era posible sino que era tan real como mi propia lectura…

Había decidido aprovechar aquella mañana de julio para pasear, hacer un alto en el Parque de la Isla y comenzar la lectura del libro de Luís, *Cuentos del cero*, que había adquirido recientemente. La luz matinal conservaba aún el frescor en las sombras, y la espesura del parque tamizaba los rayos de sol. Todo ello proporcionaba un ambiente ideal para disfrutar de la paz y el sosiego que nos proporciona la lectura.

Aquello, que quiso ser un buen comienzo, después de alrededor de una hora y media se había transformado en la lectura completa e inesperada de todos los cuentos. Y si la magia había aparecido en el primero de ellos, también vi recompensada mi natural atracción hacia la mitología griega en los siguientes: la hidra, Zeus, Orfeo, Euridice, Aquiles, Cerbero…, y hasta la conversación entre Pitágoras y Sineta, en la que el primero reivindica que podemos llegar al conocimiento, a la sabiduría, ¡a través de la razón! ¡Qué bella proclama, en medio de este mundo, con tanta sinrazón!

La voz de Luís volvió de nuevo en los cuentos *El triángulo soy yo* y *Hola, soy la esfera*, haciendo que las fórmulas adquirieran humanidad y convencimiento, que la geometría del globo terráqueo nos transmitiera vida y se mostrase al alcance de nuestra mano. ¡Qué poder de evocación el de los cuentos! En ese momento descubría que, desde la niñez, en la que disfruté de ellos a través de la voz pausada y profunda del señor Fidel, el abuelo de un amigo, los cuentos están indisolublemente unidos a una voz.

Pero lo mejor llegó con el *Romance de la derivada y el arco tangente*, porque al igual que los números primos son el esqueleto de los números naturales, las raíces de un polinomio son su sostén básico, o las raíces cuadradas de los números son los que sostienen, alimentan y generan a sus radicandos, así mismo si hubiera que imaginar una historia de amor para emparejar a la derivada, ésta sería con el arco tangente; sin olvidar que para los que gustan de los triángulos amorosos, el tercer personaje sería la recta tangente, pues de todos es sabido que tiene, en el punto de tangencia, un contacto de orden dos con la función, muy íntimo como puede comprenderse.

El final se redondea con el relato de D. Quijote, en el que adivinamos las buenas relaciones entre Luís y el famoso hidalgo, fruto de las muchas horas dedicadas por el primero de ellos a estudiar matemáticamente al segundo, y porque el manchego universal escoge muy bien a quien mostrar sus interioridades.

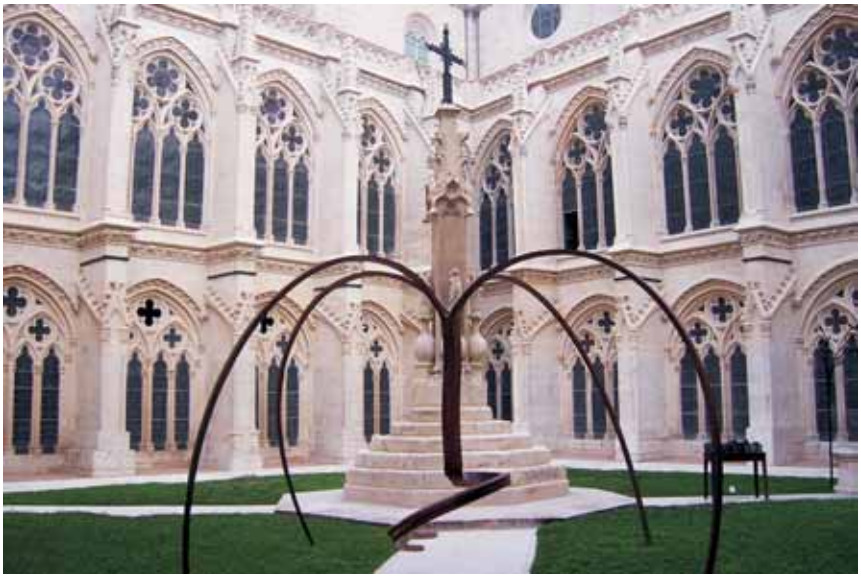
Cuando volví a la realidad, después de comprobar que el tiempo vuela, me encaminé por el paseo paralelo al río Arlanzón, viniendo a mi mente una foto de este precioso paraje, realizada por Luís en una de sus visitas a Burgos, y que nos envió posteriormente, junto con otras, todas ellas con motivos matemáticos. En esos momentos, las dos hileras de árboles, que flanqueaban el paseo, parecían las líneas de las que habla en el cuento *Dos puntos y ¿un destino?* ¿Sería posible...?

Esta mañana de julio no me estaba resultando normal. La acumulación de sensaciones iba en aumento a medida que me acercaba a la Catedral a través del Arco de Santa María, abarrotados ambos de turistas. La armonía se paseaba por la Plaza de Rey San Fernando, desde la que el monumento mostraba todo su esplendor matemático: octógonos, cuadrados, rectángulos, triángulos, polígonos estrellados, números irracionales, simetrías, vesica piscis, etc; todos ellos forman parte de los innumerables atractivos matemáticos del monumento patrimonio de la humanidad.

Cuando entré en el Claustro Bajo, en mi mente bullían múltiples emociones, acrecentadas por algunas obras de arte de la exposición que albergaba. Una de ellas, *El árbol ferroso*, de la que acompaño una imagen, me transportó, como por encantamiento, al bosque de las funciones, donde bien podía haberse desarrollado el cuento de la derivada y el arco tangente. Allí estaba produciéndose el acontecimiento nupcial entre los protagonistas del relato, justo en el punto en el que las curvas convergían. Eran casi las doce del mediodía, domingo, y las campanas comenzaron a repicar y repicar frenéticamente, alocadamente; comunicándonos su alborozo por el acontecimiento. El brocal del antiguo pozo seguía apuntado al cielo, donde, en ese mismo instante, un avión rasgaba el azul inmenso con su estela blanca. Quizás sea el de la página 71 del libro, que salió del aeropuerto Tenerife-Norte…

Mi retorno a la plaza, acompañando a mis pasos el ensordecedor volteo de las campanas, y con la mirada fija en el cimborrio y la Puerta del Sarmental, supuso el final de esta singular mañana de julio, llena de sentimientos y humanidad, rasgos que Luís Balbuena va derrochando y contagiando por donde pasa.

Así fue mi primer acercamiento a este libro, con la inmejorable presencia y guía de su autor y la certeza personal de que, al igual que Sineta, la hija secreta de Atenea, yo también había hecho sólo lo que los dioses nos tienen reservado como destino. ■



Claustro Bajo de la Catedral de Burgos

Una propuesta de trabajo en el aula

Igual que ocurre con el libro, que contiene cuentos para diferentes niveles educativos, el guión de trabajo que presentamos no se circunscribe a un curso sino que va dirigido a toda la Secundaria: ESO y Bachillerato. La temática de cada cuento nos proporcionará, de manera natural, el tipo de alumnado al que lo podemos dirigir. El profesor o la profesora, con su buen criterio, elegirá a quiénes, cómo y cuándo propone algunas de las actividades que se plantean en la propuesta y que pasamos a presentar sin más dilación.

Actividad 1: El origen del cero

> Nací en la India hace muchos siglos. No recuerdo la fecha exacta y tampoco en aquella época se registraba este tipo de cosas (pág. 11).

1.1. Explica, mediante una descripción breve (media página) el origen de los símbolos con los que representamos las cifras de los números o dígitos.

En el cuento *Yo soy el cero*, el propio número nos narra su historia, situando su origen en la India.

1.2. Explica el origen de este número y cómo pasó de significar *vacío* a significar *nada* o *cantidad nula* o *número cero*.

> Él [el Maestro] había llegado a la conclusión de que todos los dedos formaban una unidad de orden superior a la formada por un solo dedo. (pág. 12).

1.3. Analiza el significado de esta frase y su relación con el cero. Estudia el significado de la *decena* y de la *centena*.

1.4. ¿Qué es el *valor relativo* de los dígitos? ¿Por qué el cero afecta a los valores de las otras cifras? ¿Cómo lo hace? Explícalo con ejemplos.

1.5. El número cero pasó de la India a la cultura árabe. ¿Cómo pudo ocurrir esto?

Actividad 2: El número cero y Europa

> Por aquellos sitios por donde yo transitaba llegó un mercader italiano que tenía un hijo llamado Leonardo de Pisa (que es una ciudad italiana de donde parece ser que era este personaje). Lo recuerdo bien porque, como les he dicho, él significó mucho en mi futuro a partir de aquel instante." (pág. 17).

Leonardo de Pisa tuvo un papel importante en el conocimiento y difusión del cero en la cultura occidental.

2.1.¿Qué sistema de numeración se utilizaba en Europa con anterioridad al conocimiento de la cifras indoarábigas?

2.2. Explica el funcionamiento del ábaco para hacer operaciones con números. Pon ejemplos con números pequeños.

2.3. ¿Por qué *calcular*, que es una palabra derivada de *cálculo*, significaba manejar piedras?

2.4. ¿Qué son *las cuatro reglas*?

2.5. Leonardo de Pisa también era conocido por otro nombre. ¿Qué nombre era éste? ¿Qué significaba? Explica el origen de la sucesión que lleva su nombre y expón alguna de sus propiedades, en particular alguna relacionada con el número de oro ϕ.

2.6. Si tuvieras que ordenar, por el criterio *dificultad en su manejo*, los siguientes números: ¾ , -2, , 10^5, ø, π, ½, 8, ¿cómo lo harías?

2.7. Y si los tuvieras que ordenar por orden cronológico; es decir, del más antiguo al más moderno, ¿cómo los ordenarías?

Como has visto, Leonardo de Pisa contribuyó al uso y difusión del sistema indoarábigo de numeración. Muchos conocimientos matemáticos y de otros tipos, de la cultura árabe, llegaron a Europa por primera vez a través de otro país europeo.

2.8. ¿De qué país estamos hablando? ¿Cómo se produjo esta llegada? Pon ejemplos.

Pitágoras

Euclides

Fibonacci

Euler

Actividad 3: Los sistemas de numeración

> Escribían los números a base de unos palos, equis y otras letras. Un medio rollo. Lo grave de aquel sistema, que a pesar de todo pervive, es que los números no tienen valor relativo y para escribirlos tienes que saber sumar porque los valores se van acumulando como si fuera una colección. (pág. 18).

3.1.¿De qué sistema de numeración está hablando el cero? ¿Qué letras usaban? ¿Cómo funcionaba? Pon ejemplos.

También ha habido otros sistemas de numeración a lo largo de la historia: el griego, el egipcio, el maya, el chino, …, y otros muchos.

3.2. Escoge uno de ellos y analiza sus símbolos, su funcionamiento y cómo llevaban a cabo las operaciones elementales.

Actividad 4: Lo que pudo haber sido y no fue…

> ¿Os imagináis qué habría pasado si nos hubiesen conocido personajes como Pitágoras o Euclides? (Pág. 21).

4.1.¿Es posible que ni Pitágoras ni Euclides conocieran el número cero? Explica razonadamente la causa.

Aunque más adelante hablaremos de Pitágoras, vamos a iniciar aquí el acercamiento a su figura.

4.2. Enuncia el resultado más famoso que se le atribuye a Pitágoras y demuéstralo de alguna forma. ¿Cuál es el significado geométrico del teorema?

4.3. En la página 56 hay un mal enunciado del Teorema de Pitágoras. Explica el error y la diferencia con el enunciado correcto.

En el significado geométrico del Teorema de Pitágoras intervienen los cuadrados como figuras construidas sobre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo. ¿Qué pasaría si, en vez de cuadrados, construyéramos triángulos equiláteros?

4.4. Demuestra que si sobre los catetos y la hipotenusa construimos triángulos equiláteros, también se cumple que la suma de las áreas de los triángulos construidos sobre los catetos es igual al área del triángulo construido sobre la hipotenusa.

4.5. Demuestra que el resultado anterior también se verifica para cualquier figura geométrica que se construya, de forma semejante, en los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Euclides ha pasado a la historia por haber escrito una obra de matemáticas que, después de la Biblia, es la obra que más ediciones ha tenido en el mundo.

4.6. ¿De qué obra estamos hablando? ¿De qué trata?

4.7. Uno de los resultados contenido en uno de los libros que componen esa obra se refiere a los números primos y dice que *existen infinitos números primos.* Demuestra este resultado como lo hizo Euclides.

Actividad 5: El cero absoluto

> Soy el punto de partida de todas las escalas, de todas las redes de comunicación, de los días; incluso en la física me dan un nombre que se aplicó a los reyes: el absoluto. (Pág. 21).

5.1.¿Qué es el cero absoluto? ¿Qué mide? Compara su valor en otras escalas de medida de la misma magnitud física.

Actividad 6: ¿Los cinco números más famosos?

$$e^{i\pi}+1=0 \quad \text{(pág. 21)}$$

La igualdad numérica es, para muchos, la relación que engloba a los números más famosos e importantes de las matemáticas: *e, i*, π, 1 y 0. Del último de ellos ya hemos hablado bastante en alguna de las actividades anteriores, pero de los demás no; es más, quizás no conocías alguno de ellos hasta la lectura del libro.

6.1.Explica el origen de cada uno de los números distintos de cero de la fórmula anterior. Pon ejemplos de situaciones más o menos reales en las que puede aparecer alguno de ellos.

6.2. Si te pidieran que los ordenases de menor a mayor, ¿qué podrías hacer? Para hacer esta tarea ten mucho cuidado con el número *i*.

Actividad 7: Una adivinanza divina

> Cuatro paredes, sin puertas
> con seis filos las harás
> y ten además en cuenta
> que el más sencillo de cinco es. (Pág. 27).

7.1. Explica el significado de cada una de las frases de la adivinanza que *la cabeza pensante* de la hidra le propuso a Sineta. Describe cuántas *paredes* y *filos* tiene cada uno de los otros cuatro.

7.2. Las cinco figuras, a las que se alude en la adivinanza, también se denominan los *sólidos platónicos*. ¿Por qué?

7.3. Calcula razonadamente el área lateral, el área total y el volumen de tres de ellos.

Actividad 8: El problema de las rimas

> Nueve copas dejaré
> cinco boca arriba están;
> las restantes al revés.
> Dos cada vez cogerás
> y la vuelta les darás.
> Tu mente quiero retar
> pues el juego acabarás
> si consiguieras pensar
> cómo cuatro boca arriba
> terminarás por dejar. (Pág. 28).

La poesía anterior contiene la prueba que Sineta le propuso a la hidra. Como fácilmente habrás supuesto, la hidra nunca podrá conseguir llevar a cabo la tarea encomendada…

8.1. Explica razonadamente la causa por la que el objetivo a conseguir es imposible.

8.2. Inventa dos situaciones parecidas, de manera que en una sí se pueda conseguir el objetivo y en la otra no.

Actividad 9: ¿El número lo es todo?

> El número es todo. (Pág. 31).

Este era el lema de Pitágoras y de la Escuela Pitagórica, en la que él era *El Maestro*.

9.1. Explica su significado.

9.2. En la Escuela Pitagórica había *acusmáticos* y *matemáticos*. ¿Qué significan estas palabras y a quiénes englobaban?

Aunque Pitágoras no conoció el número cero, es seguro que conocía otros números cuya existencia mantenía en secreto.

9.2. ¿De qué números estamos hablando? Pon algunos ejemplos de ellos.

Lee las explicaciones de Pitágoras a Sineta (pág. 33 a 35 del libro) y contesta a las siguientes cuestiones:

9.3. ¿Qué relación hay entre el número 120 y los escogidos inicialmente, el 8 y el 30? ¿Cómo se denomina a 120 respecto de 8 y 30?

9.4. Explica el procedimiento que conoces para hallar el más pequeño número que los contiene un número exacto de veces; es decir, el menor de los múltiplos comunes a los dos números.

9.5. ¿Cómo se llama al mayor de los divisores comunes de dos o más números? ¿Cómo se calcula?

Actividad 10: ¿Medir la diagonal con el lado? Imposible

> Considera un cuadrado.
> Ahora fíjate en su lado y en su diagonal.
> Evidentemente, son dos magnitudes.
> Hasta aquí todo va normal. El problema surge cuando ahora quieres hacer con estas magnitudes lo mismo que hice antes con el 8 y con el 30.
> ¡Es imposible!". (Pág. 34).

10.1. Calcula el valor de la diagonal del cuadrado en función del lado y divídelo entre éste último; así verás cuántas veces es mayor la diagonal que el lado. En la tablilla Yale BC7289, datada en el 1600 a. C., se tiene ese resultado de forma aproximada. Investígalo.

Tablilla Yale BC7289

10.2. Haz lo mismo entre el lado de un triángulo equilátero y su altura. ¿Qué resulta?

10.3. Hablando de triángulos equiláteros y aprovechando los cálculos anteriores: ¿pueden ser el lado y el área de un triángulo equilátero números naturales simultáneamente? Razona la respuesta.

Actividad 11: Las manzanas y los sombreros pueden ser un problema, aquí y en el Paraíso...

> – Necesito tres manzanas de oro y dos de plata. (Pág. 48).

11.1. Lee el problema lógico de las manzanas de oro y plata y haz un resumen de la solución, exponiendo con tus palabras el razonamiento de Eurídice.

11.2. Analiza la solución del siguiente problema, similar al de las manzanas:

> *El profesor Lógicus quiere dar una mención honorífica al mejor de sus estudiantes en la asignatura de Lógica. Al finalizar el curso había tres de ellos empatados a tal fin, Induzquio, Deduzquio y Razonio; por lo que les propuso una prueba para deshacer el empate.*
>
> *Los estudiantes cerraron los ojos y el profesor les fue poniendo, en la cabeza de cada uno, sendos sombreros que podían ser rojos o negros. Cuando los tres tenían sombrero puesto, el profesor les dijo que podían abrir los ojos y ver el color de los sombreros que tenían los demás (no podían ver el suyo). Nosotros, espectadores de la escena, vemos que Lógicus había puesto los tres sombreros de color rojo.*
>
> *Entonces el profesor les dijo:*
> *-Si veis algún sombrero rojo, levantad la mano.*
> *Inmediatamente los tres levantaron la mano.*
> *-El primero que consiga averiguar el color de su sombrero será el ganador de la mención honorífica.*
>
> *Después de un rato, Induzquio, uno de los estudiantes, levantó la mano y dijo:*
> *-¡El color de mi sombrero es rojo!*

¿Cómo pudo averiguarlo? Intenta resolverlo sin seguir leyendo.

> *El profesor Lógicus certificó el acierto del estudiante, a la vez que le solicitó que expusiera sus razonamientos. Induzquio le contestó:*
> *-Si mi sombrero hubiera sido negro, entonces Deduzquio se habría dado cuenta de que su sombrero debería ser rojo, porque si no Razonio no podía haber levantado la mano (por haber visto algún sombrero rojo).*
>
> *Todos seguían expectantes a Induzquio, que continuó:*
> *-También Razonio podía razonar de la misma manera y saber que su sombreo era rojo. Pero si ninguno de los dos han dicho nada del color de su sombrero es que el mío no puede ser negro. Por tanto es rojo.*
>
> *El rápido desenlace dejó a los otros dos estudiantes asombrados y sin poder captar todos los matices del razonamiento de Induzquio. Éste, sabedor de las complicaciones que surgen en el entendimiento de la personas, les repitió otra vez sus argumentos.*

11.3. Revisa el razonamiento del estudiante y compáralo con lo que tú habías previsto (si es que habías pensado en algún resultado).

11.4. ¿Te atreves a resolver la misma cuestión para el caso de cuatro personas, cada uno con un sombrero rojo en su cabeza?

Actividad 12: ¡Atentos, que llega el triángulo!

> ¡Hola! Cuando te diga quién soy, sé que vas a decir que me conoces de casi toda la vida, que me has tratado en muchas ocasiones. Pero yo no estoy tan seguro de que realmente sepas mucho sobre mí aunque te pueda dar esa impresión". (pág. 53).

En esta actividad vamos a rellenar algunas lagunas que pudieras tener en tus conocimientos sobre el triángulo, como él mismo dice en el libro.

12.1. ¿Conoces el papiro del Rhind? En el libro se dice que está en el Museo Británico. Averigua de qué se trata, su contenido y la relación con los triángulos y las matemáticas.

12.2. Además de los triángulos equiláteros, seguro que conoces otros tipos. Clasifica los triángulos según diferentes criterios relacionados con los lados o los ángulos.

Papiro del Rhind

Actividad 13: Pero, ¿hay baldosas triangulares?

> También debes saber que soy de los pocos polígonos regulares que teselamos el suelo, es decir, …

13.1. Dando por hecho que el triángulo equilátero rellena el plano formando un *mosaico regular*, ¿sabrías decir, de manera razonada, qué otros polígonos regulares pueden rellenar el plano? O dicho de otra manera, ¿cuáles son los *mosaicos regulares*? Haz algún dibujo ilustrativo.

13.2. Investiga el significado del término *mosaico semirregular* y averigua cuántos mosaicos semirregulares hay?

Actividad 14: Herón y su famosa fórmula

> Todo empezó cuando en la antigua Grecia un hombre, que recuerdo bien y al que nunca podré agradecer suficiente su descubrimiento, obtuvo una fórmula que permite conocer el valor de mi área sabiendo cuánto miden mis lados. La fórmula lleva el nombre de este ilustre griego: Herón. (Pág. 57).

14.1. Recoge los datos necesarios y elabora una biografía básica de Herón, que recoja sus principales aportaciones al conocimiento matemático.

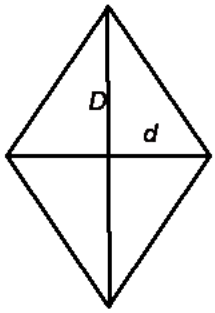
14.2. ¿Eres capaz de demostrar la fórmula de Herón? Puedes consultar la referencia bibliográfica Dunham (1993). Analiza la demostración, desmenúzala y desarróllala para este trabajo.

14.3. Recopila todas las fórmulas que conozcas para hallar el área de un triángulo, compáralas y enumera las ventajas e inconvenientes de cada una. ¿Cuál te parece más sencilla de manejar?

Actividad 15: Un paseo para justificar fórmulas

> Claro que tal vez tu conozcas otra fórmula para calcular mi área: aquella de base por altura partido por dos". (Pág. 58).

15.1. Repasa las justificaciones de la fórmula anterior en las páginas 58 y 59 del libro y exponlas aquí.



15.2. Cambiemos ahora de figura; consideremos un rombo. La fórmula para hallar el área del rombo es:

$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$

siendo D su diagonal mayor y d la menor. ¿Sabrías explicar por qué es válida esa fórmula?

15.3. Para hallar el área de un polígono regular se suele usar la fórmula:

$$S = \frac{P \cdot a_p}{2}$$

siendo P el perímetro del polígono y $a_p$su apotema. ¿Sabrías demostrar la validez de esta fórmula.

Actividad 16: Una esfera puede tener mucha… ¡geometría!

> Aún no he llegado a entender bien por qué Euclides, tan sabio como fue, dedicó tanto esfuerzo a que la gente conociera la geometría plana y abandonara a mi familia, las esferas. (pág. 61).

Vamos a estudiar algunas propiedades de la geometría de la esfera. Para ello te propondremos algunas actividades para pensar un poco.

16.1. Define lo que es un segmento esférico y una recta esférica.

16.2. Define circunferencia máxima en una esfera. En la esfera terrestre, ¿qué relación hay entre algunas circunferencias máximas y los meridianos?

16.3. Si en vez de una esfera tuviéramos un cilindro, ¿cómo calcular la distancia entre dos puntos de la superficie cilíndrica?

Actividad 17: El famoso V Postulado

> En la geometría euclídea existe un famoso postulado (el V) que dice, en esencia, que por un punto exterior a una recta *r* pasa una y sólo una paralela a *r*. (pág. 64).

17.1. ¿Qué es la *geometría euclídea*?

17.2. En la geometría euclídea hay *axiomas, postulados, definiciones, teoremas*... Explica el significado de cada uno de esos términos y pon un ejemplo de cada uno.

17.3. Enuncia el V Postulado de la geometría euclídea, tal y como lo presentó Euclides. Escribe algo de su historia hasta la aparición de las geometrías no euclídeas en el siglo XIX.

17.4. Averigua cuántos postulados tiene la geometría euclídea y exponlos aquí.

17.5. Explica por qué en la geometría de la esfera no se cumple el V Postulado de Euclides.

Actividad 18: Las rectas también tienen sus cortes

> Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí. (pág. 65).

18.1. La frase anterior es cierta en la geometría de Euclides. ¿Se cumple en la geometría de la esfera? Explícalo razonadamente.

18.2. Volviendo al plano de la geometría de Euclides, si tenemos tres rectas, ¿cuáles pueden ser las posiciones relativas de unas respecto de las otras? Describe lo que pasa en cada caso. ¿Cuántos puntos pueden tener en común como máximo? ¿En qué caso ocurre esto último?

18.3. Analiza la cuestión anterior en la geometría de la esfera.

18.4. Averigua el número máximo de puntos de corte de cuatro rectas en el plano euclídeo. Haz lo mismo para el caso de n rectas en el plano.

Actividad 19: ¿Un polígono de dos lados? ¡Imposible!

> No es posible dibujar una figura cerrada que sólo tenga dos lados; cualquier trozo del plano limitado por segmentos ha de tener como mínimo tres lados. (Pág. 67).

19.1. Explica qué es un *biángulo* en la superficie esférica. Calcula los valores posibles para la suma de los ángulos de un *biángulo.*

Actividad 20: Por dos puntos, ¿pueden pasar infinitas rectas?

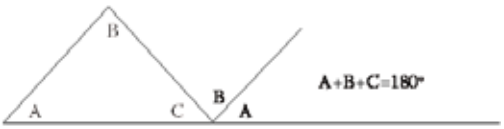
> Si sobre mi superficie considero dos puntos diametralmente opuestos, comprobarás fácilmente que por esos dos puntos pasan ¡infinitas circunferencias máximas!. (Pág. 70).

Como puedes ver, después de leer y entender lo anterior, en la geometría de la esfera, por dos puntos distintos pueden pasar infinitas *rectas esféricas.*

20.1. Dados dos puntos cualesquiera de la superficie esférica, ¿siempre pasan infinitas *rectas esféricas* por ellos? Analiza los casos posibles.

Actividad 21: Triángulo birrectángulo... ¿pero qué demonios es esto?

> La suma de los ángulos de un triángulo plano es igual a 180º. Es una bella demostración visual imposible de rebatir. (Pág. 68).

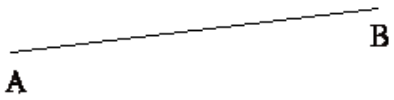


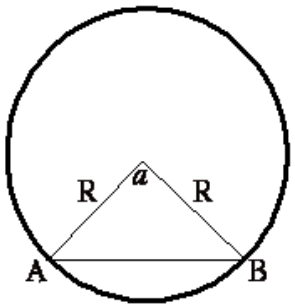
21.1. Explica la validez de la demostración anterior.

21.2. En un *triángulo esférico birrectángulo*, como el de la pág. 69 del libro, ¿cuánto pueden sumar sus tres ángulos? Justifícalo razonadamente.

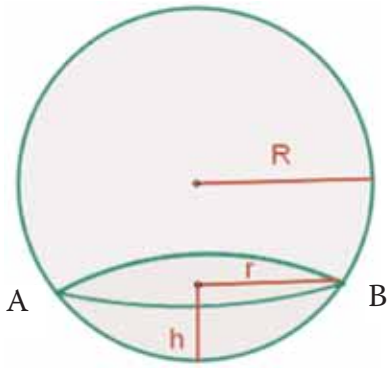
Actividad 22: Algunos problemas sobre desplazamientos en la superficie esférica

> El segmento AB es la distancia más corta entre los puntos A y B del plano. (Pág. 62).





Queremos calcular la distancia entre dos puntos de una superficie esférica. Sabemos que es la longitud del arco de circunferencia máxima que pasa por A y por B. Cortamos la esfera con un plano que contiene a la circunferencia máxima que pasa por A y B, ver la figura del margen.



Sabiendo que el radio de la esfera es *R* y que el ángulo central correspondiente al arco AB mide *a* grados sexagesimales. Con estos datos:

22.1. Calcular la longitud del arco AB.

22.2. Calcular la longitud del segmento rectilíneo AB (la longitud de la cuerda AB del dibujo).

22.3. Imagina que para ir de A a B hacemos un túnel en la esfera. ¿Cuál es su longitud? ¿Cuánta distancia nos ahorramos al ir de A hasta B por el túnel, en vez de hacerlo por la superficie de la esfera?

22.4. Supongamos que deseamos saber el volumen de la parte de la esfera situada por debajo de la circunferencia que pasa por A y B, denominada *casquete esférico.* ¿Cómo podemos hacerlo?

Aprovechando la circunstancia de estar viviendo en una superficie esférica, el planeta Tierra, vamos a resolver un interesante problema sobre lo que se alcanza a ver desde un determinado punto.

22.5. Imagina que estás en un punto de la Tierra situado al nivel del mar. Mediante un globo aerostático no elevamos verticalmente a 100 metros del suelo. ¿Qué superficie de nuestro planeta divisamos desde esa altura? ¿Y desde una altura *h* cualquiera?

22.6. Resuelve los dos problemas propuestos en la página 71 del libro.

Actividad 23: La Derivada también enamora

> Cuando llegó a la edad adecuada y se convirtió en una moza de espléndida presencia, sucedió lo que tenía que suceder. Un buen día conoció a un muchacho que, aunque algo más viejo que ella, había adquirido hacía poco una magnífica representación gráfica que le daba una belleza tal, que atrajo la mirada curiosa de la Derivada. Tan buena moza tampoco le pasó desapercibida al Arco Tangente, que así se llamaba el galán. (Pág. 74).

23.1. Haz la representación gráfica de la función y=arc tg x, explicando sus principales características. ¿Te parece tan bella como le pareció a la Derivada?

En el *Romance de la derivada con el arco tangente* se narra la historia amorosa de estos dos entes matemáticos, dándose varias pruebas de este amor.

23.2. Como se cuenta en el libro, cuando se citaron en el punto (x_0, y_0) de la curva $y=f(x)$ comprobaron su *sintonía*. ¿De qué sintonía se trata? Explícala con tus palabras y exprésala también mediante ecuaciones algebraicas.

23.3. También se cumple que los dos (la Derivada y el Arco Tangente) se anulan en unos puntos particulares de la función. ¿En qué puntos acurre eso? Justifícalo.

Actividad 24: Más pruebas de amor...

> ...cuando Derivada crecía al pasar de algunos puntos a otros, entonces Arco Tangente experimentaba así mismo un evidente crecimiento. (Pág. 75).

24.1. Explica razonadamente la cita anterior. ¿Siempre se cumple? Pon ejemplos y haz algún dibujo ilustrándolo.

En los *paseos asintóticos*, nos cuenta el autor que "mientras la Derivada sufría un exagerado crecimiento, Arco Tangente lo hacía acercándose a 90º". (Pág. 76).

Centro de Eventos de Feria Valencia

24.2. Explica por qué ocurría eso cuando daban un *paseo asintótico* acercándose a una asíntota vertical.

24.3 Si la asíntota fuera horizontal u oblicua, ¿qué ocurriría? Analiza los posibles casos.

Actividad 25: El amor puede hacer perder... ¡más que el equilibrio!

> ... al llegar a cierto punto x_0, perdieron el equilibrio y quedaron totalmente desorientados. Se llevaron un susto de muerte pues, sólo fue en un punto, a ellos, enamorados como estaban, les pareció una eternidad. (Pág. 77).

25.1. Explica, con el ejemplo siguiente, lo que ocurre en un punto de una función en el que es continua pero no derivable. Ayúdate de su gráfica.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 \;\; si\; x\le 2 \\ -x^2+9 \; si\; x>2 \end{cases}$$

Actividad 26: Fiestas con funciones altaneras ...

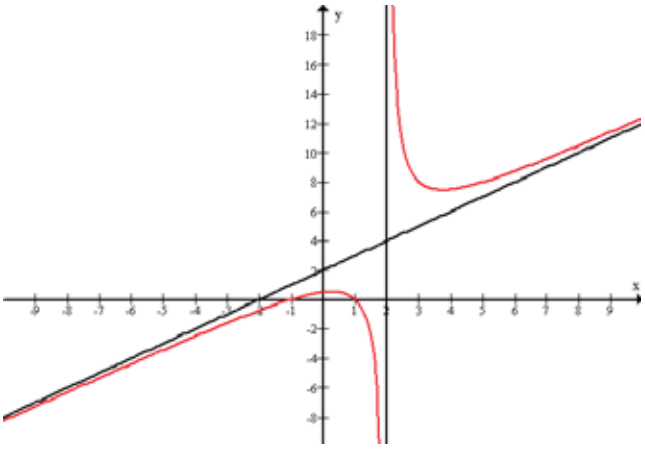
> ...la altanera familia de las Racionales, que más de un susto proporcionó a nuestros enamorados". (Pág. 78).

26.1. ¿Qué son las funciones racionales? Pon ejemplos de funciones racionales junto con sus gráficas.

26.2. ¿A qué crees que pueden deberse los sustos que daban a nuestra pareja de enamorados?

26.3. Haz un estudio y averigua cuándo una función racional tiene asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

26.4. A partir de la gráfica siguiente, averigua la expresión algebraica de la función que está representada, así como las ecuaciones de sus asíntotas:



Actividad 27: Y llegaron los preparativos de la boda...

> No pusieron lista de bodas pero las distintas familias les ofrecieron originales regalos. Así, la función y=senx, pariente del novio, se ofreció a llevarles hasta el lugar elegido a través de un recorrido lleno de suaves ondulaciones. También lo ofrecieron sus hermanas y=sen(x/2) e y=sen(x/3). Con ellas las ondulaciones serían aún más suaves. (Pág. 79-80).

27.1. Explica por qué las ondulaciones de *y=sen(x/2)* e *y=sen(x/3)* son más suaves que las de *y=senx*. ¿Qué consecuencias tiene el sustituir, en *y=senx*, la *x* por *x/c*, siendo *c* un número entero distinto de cero?.

27.2. Estudia el efecto que tiene, en la gráfica de *y =senx*, sustituir la *x* por: a) *x+c*; b) *c·x*, siendo *c* un número entero no nulo.

27.3. Analiza qué ocurre en la gráfica de *y=senx* cuando la cambiamos por:
a) *y=senx + c;*
b) *y =c·senx*, siendo *c* un número real.

Actividad 28: ¡La boda del siglo!

> Los Ejes Cartesianos actuaron en esta historia como organizadores del evento. Enviaron sendas tarjetas de boda a los padres de la novia, Gottfried Wilhelm Leibinz e Isaac Newton. No podían faltar. Los hermanos no pudieron evitar la tentación de invitar también a René Descartes, su padre; al fin y al cabo, gracias a él fue como se conoció la pareja. (Pág. 80).

28.1. ¿Cómo es eso de que la Derivada tiene dos padres? Explica el asunto acudiendo a la historia de las matemáticas. Elabora unas biografías básicas de cada uno de ellos.

28.2. ¿Qué relación hay entre Descartes y los ejes de coordenadas?

Actividad 29: ¡Ponte en el papel de creador!

> ¡Pss! ¡Hola! ¿Cómo te llamas?. (Pág. 81).

La cita anterior es el comienzo del cuento *Dos puntos y ¿un destino?* Demuestra que en matemáticas hay mucho que contar y no son números solamente.

29.1. Elige una idea matemática de cualquier tipo (concepto, teorema, personaje, propiedad, etc.) y demuestra tus dotes literarias escribiendo un pequeño relato, de no más de dos páginas, sobre algún aspecto de la misma.

Actividad 30: ¡Nos faltaba Don Quijote!

> Un caballero andante como yo, puesto por Dios en el mundo para evitar las injusticias, bendice el reparto hecho por este joven e insta a los dos hermanos a que así lo reconozcan. (Pág. 93).

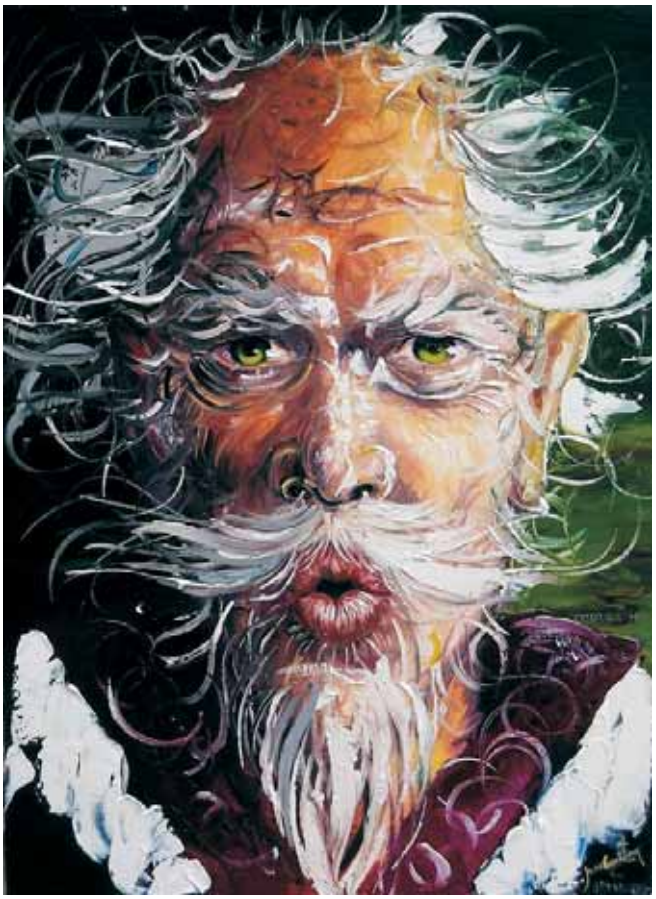
30.1. Vuelve a leer el reparto propuesto por D. Quijote y analiza la validez de los criterios utilizados para llevarlo a cabo.

En la obra de *El Quijote* aparecen muchos números, y alguno de ellos es citado en numerosas ocasiones. En Carlavilla (2005) puedes obtener las respuestas.

30.2. ¿Cuál es el número más nombrado en *El Quijote*? ¿Cuántas veces? ¿Y el número más grande? Haciendo operaciones con estos dos números, ¿cuál es el mayor número que puedes formar? ¿Cuántas cifras tiene? ¿Cuánto espacio ocuparías al escribirlo con todas sus cifras?

30.3. En el capítulo 26 de la primera parte, Cervantes nos narra el retiro espiritual de Don Quijote, en el que dice que rezó un millón de avemarías. Si esto hubiera sido verdad, ¿cuánto tiempo habría tardado en hacerlo?

LITERATURA Y MATEMÁTICAS ■



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Señalamos algunas referencias que pueden ser eficaces para el profesor o profesora y/o para el alumnado a la hora de responder a algunas de las cuestiones. En cualquier caso, en la red de internet se pueden encontrar otros recursos que, bien seleccionados, pueden sernos útiles. A este respecto, señalaremos que se pueden encontrar otras dos versiones, más humorísticas y de pasatiempo, del cuento de la Derivada y el Arco Tangente; una de ellas narrada y desarrollada en un video de youtube. Para encontrarlas, basta buscar en google con: *romance de la derivada y el arco tangente.*

Balbuena, L. (1998). El profesor de matemáticas, mis reflexiones. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas.* Nº 17, p. 13-18. Barcelona: Ediciones Grao.

Balbuena, L., y García Jiménez, J. E. (2005). *El Quijote y las Matemáticas. Día Escolar de las Matemáticas*. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

Carlavilla, J. L., (2005). *Si hay una X hay matemáticas*. Armilla (Granada): Proyecto Sur de Ediciones.

Dunham, W., (1993). *Viaje a través de los genios. Biografías y teoremas de los grandes matemáticos*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Gardner, M. (1981). *¡Ajá! Inspiración.* Barcelona: Prensa Científica.

Ifrah, G. (1987). *Las cifras. Historia de una gran invención. Madrid:* Alianza Editorial.

suma+ 63
Febrero 2010, pp. 75-82

Actividades TIC de aplicación directa al aula

Existe una gran cantidad de páginas web que nos ofrecen herramientas concretas para poder utilizarlas directamente en el aula de matemáticas, pero también podemos localizar webs que ofrecen un auténtico arsenal de recursos que nos pueden ser útiles para los distintos niveles educativos. De entre esas últimas, vamos a destacar en este número de *SUMA* la web cuya dirección es

www.ematematicas.net

En la imagen 1 podemos observar la web.

Como vemos, encontramos gran cantidad de recursos, ejercicios y actividades que podemos utilizar en nuestra clase. Están pensados para secundaria, como el que podemos observar en la imagen 2 para la parábola.

Según se aprecia en la página, los ejercicios están clasificados atendiendo a los distintos cursos de la ESO y bachillerato. La web nos presenta múltiples actividades interactivas clasificadas, pero aquí no radica el mayor potencial de esta web que está pensada para la utilización directa en el aula. Como podemos contemplar en la parte superior izquierda de la página, se permite que los visitantes se puedan dar de alta en el portal como usuario o como profesor.

Si un usuario se da de alta como profesor, se le ofrece la posibilidad, una vez que entra, de dar de alta en el portal a sus alumnos. Así, podrá asignarles ejercicios de los que se encuentran recogidos en la web para que los vayan realizando, permitiendo hacer un seguimiento individualizado de cada uno de los alumnos.

El portal diseñado por el profesor Miguel Pino ofrece una gran cantidad de posibilidades y recursos que podemos utilizar en los distintos cursos de secundaria.

Cálculo simbólico III: Ejemplos con Wxmaxima

El contenido de esta sección en los dos números anteriores de *SUMA* ha girado alrededor del funcionamiento de Maxima y de la aplicación complementaria Wxmaxima. Ahora nos planteamos mostrar algún ejemplo en el que podamos observar la utilización de esta potente herramienta. Para ello hemos seleccionado dos ejercicios, uno del bloque de álgebra y otro del bloque de análisis que vamos a resolver paso a paso con Wxmaxima.

Mariano Real Pérez
CEP de Sevilla
matemastic@revistasuma.es

Imagen 1: el portal de Ematemáticas

Ejemplo 1

El primer ejemplo que hemos seleccionado es la aplicación del Teorema de Rouche-Frobenius para investigar sobre las soluciones de un sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro. En nuestro ejemplo, el sistema seleccionado es:

$$z + y + ax = 1$$
$$z + ay + x = a$$
$$az + y + x = a^2$$

Imagen 2: ejercicio sobre la parábola

Para comenzar deberíamos tener la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada de dicho sistema.

Lo primero que vamos a hacer en Wxmaxima es introducir la matriz de coeficientes que vamos a denominar M(a) ya que depende del parámetro "a". La matriz de los coeficientes la vamos a poder introducir de dos formas distintas:

1. La primera forma va a ser utilizando un comando de Maxima. Para ello, sobre la línea de comandos de Wxmaxima escribiríamos:

   $$M(a) := \text{matrix}([a,1,1], [1,a,1], [1,1,a])$$

   Posteriormente pulsamos Enter. Así obtendríamos la matriz que contemplamos en la imagen 3.

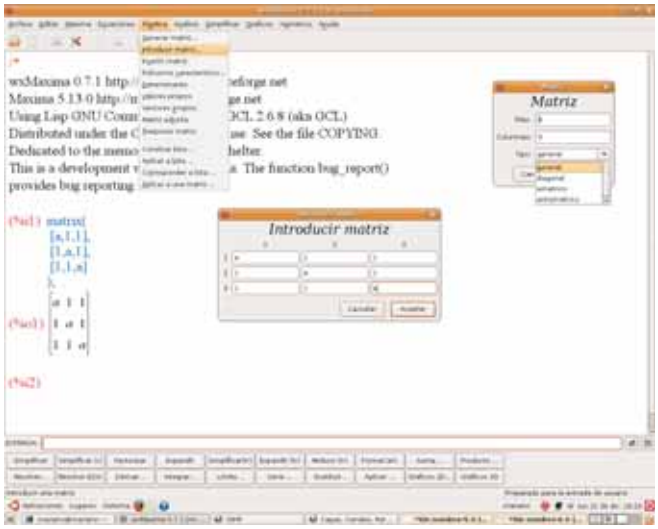


Imagen 3: introducción de una matriz en Wxmaxima

2. La segunda forma sería utilizando el entorno gráfico de Wxmaxima. Para ello escribimos sobre la línea de comandos de Wxmaxima

M(a):=

Posteriormente pulsamos sobre la opción "Introducir matriz" del menú "Álgebra". Si realizamos esta acción se abre una ventanita en la que debemos indicarle a la aplicación el número de filas y de columnas que tiene la matriz. Esta ventanita la observamos en la imagen 3. Una vez introducidos estos datos, pulsamos el botón "Aceptar" y nos aparece una nueva ventanita como muestra la imagen 3, en la que observamos claramente las posiciones en las que introducir los distintos elementos que componen nuestra matriz. Cuando hayamos escrito todos los coeficientes de la misma debemos pulsar "Aceptar" y ya habríamos introducido nuestra matriz.

Ésta será la salida (%o1) de nuestra sesión en Wxmaxima.

Ahora debemos introducir la matriz ampliada de nuestro sistema de ecuaciones. En este caso la vamos a denominar MB(a). Para introducirla podemos hacerla de tres formas distintas:

1. Introducimos la matriz de los coeficientes utilizando directamente el comando de Maxima. En este caso sería

MB(a):= matrix([1,-1,0,a], [1,0,$a^{2,2*}a$+1], [1,-1,a*(a-1),2*a])

2. Introducimos la matriz de los coeficientes utilizando Wxmaxima tal y como hemos indicado en el punto segundo al introducir la matriz de los coeficientes.

3. Podemos aprovechar que ya hemos introducido la matriz de los coeficientes, M(a), para introducir la matriz ampliada con un comando de Maxima que lo que hace es añadir una columna más a una matriz previamente introducida. Este comando sería:

addcol(M(a), [1,a,a^2])

Cualquiera que sea el método que utilicemos, obtendremos la matriz ampliada MB(a). En nuestro caso la matriz obtenida será la salida (%o2).

Ahora calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes, para ello podemos utilizar dos formas distintas.

1. La primera de ellas sería hacerlo utilizando directamente el comando que calcula el determinante de una matriz. En este caso, como la matriz sería M(a), el comando que utilizaríamos sería

determinat(M(a))

2. Otra forma sería utilizar directamente el entorno gráfico Wxmaxima. Para ello volvemos a escribir la matriz de la que deseamos calcular el determinante. En nuestro caso no necesitamos escribir todos los coeficientes, basta con escribir el nombre que le habíamos asignado anteriormente, es decir M(a) y pulsamos "Enter". Una vez que aparece la matriz, pulsamos la opción "determinante" del menú "Álgebra" de Wxmaxima.

En la imagen 4 podemos observar la pantalla que deberíamos tener si lo hemos realizado utilizando el segundo método.

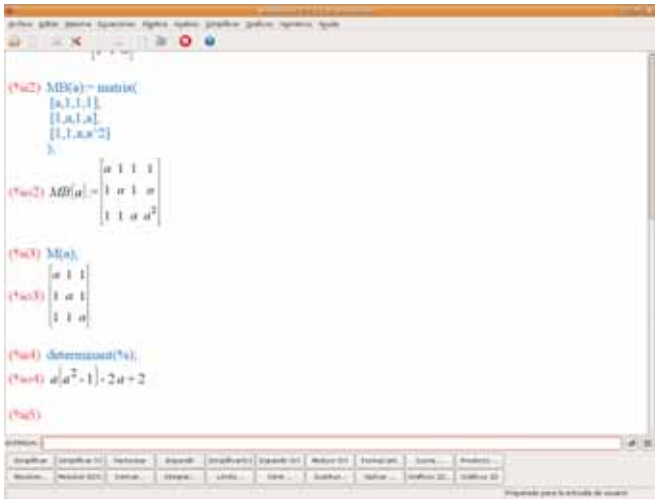


Imagen 4: cálculo del determinante con Wxmaxima

Utilicemos el método que utilicemos, obtendremos el determinante de la matriz que es el que observamos en la imagen 4:

$$a\left(a^2-1\right)-2a+2$$

Este determinante será la salida (%o3) si lo hacemos por el método 1 y será (%o4) si lo hacemos por el método 2, de la sesión de Wxmaxima. Para continuar con nuestro desarrollo vamos a suponer que lo hemos realizado con el método 2.

Ahora vamos a calcular los valores del parámetro a que anulan el determinante que hemos calculado. Para ello, puesto que el determinante es la salida (%o4), podemos hacerlo nuevamente por dos métodos, uno con el comando directo de Maxima y otro utilizando Wxmaxima. A partir de aquí vamos a utilizar solamente Wxmaxima siempre que sea posible.

Para calcular los valores del parámetro a pulsamos en la opción "Resolver" del menú "Ecuaciones". Realizando esta acción, aparece un pequeña ventana en la que se nos pedirá la ecuación y la variable. En nuestro caso, la ecuación es

%o4=0

y la variable es a. Si realizamos esta operación nos dará como resultado

$$[a=-2,\ a=1]$$

Estas soluciones las observamos en la imagen 5. Con estas acciones que hemos efectuado identificamos tres casos posibles:

Caso 1: Si $a=-2$

En este caso sabemos que el determinante de la matriz de los coeficientes es cero. Debemos calcular el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada para estudiar este caso.

Lo primero que hacemos es calcular el rango de la matriz de los coeficientes. En este caso debemos hacerlo utilizando un comando de Maxima. Debemos tener en cuenta que el valor del parámetro a es ahora -2, para ello teclearemos en la línea de comandos

rank(M(−2))

y obtendremos que el rango es 2 según observamos en la imagen 5.

Ahora calculamos el rango de la matriz ampliada. Procedemos de la misma forma que con la matriz de los coeficientes, escribiendo el comando de la siguiente forma

rank(MB(−2))

En la imagen 5 observamos que el rango de la matriz ampliada es 3, por lo que podemos deducir en este caso que el sistema es incompatible.

Caso 2: Si a=1

Procedemos como en el caso anterior, calculando los rangos de las matrices M(1) y MB(1). En este caso, el rango de ambas matrices nos resulta que es 1 según observamos en la imagen 6, por lo que el sistema, para $a=1$, es compatible indeterminado, debiendo calcular el valor de una de las variables en función de las otras dos.

En nuestro caso planteamos un nuevo sistema a resolver en el que asignamos a la variable x el valor "p", a la variable y el valor "q" y la última ecuación sería cualquiera de las del sistema que estamos resolviendo con $a=1$. En nuestro caso el sistema nos quedaría de la forma

$$x = p$$
$$y = q$$
$$z + y + x = 1$$

Para resolverlo con Wxmaxima pulsamos sobre la opción "Resolver sistema lineal" del menú "Ecuaciones" tal y como observamos en la imagen 6. Al pulsar sobre esta opción aparece una pequeña ventana que observamos en la imagen 6, en la que nos piden que indiquemos el número de ecuaciones que tiene el sistema. En nuestro caso 3. Tras escribir este dato, nos aparece otra nueva ventana, que también observamos en la imagen 6, en la que nos solicitan que escribamos las ecuaciones y las variables separadas por comas.

Al pulsar sobre el botón "Aceptar", Wxmaxima resolverá el sistema como podemos observar en la imagen 6.

En este caso la solución del sistema es

$$[x=p,\ y=q,\ z=-p-q+1]$$

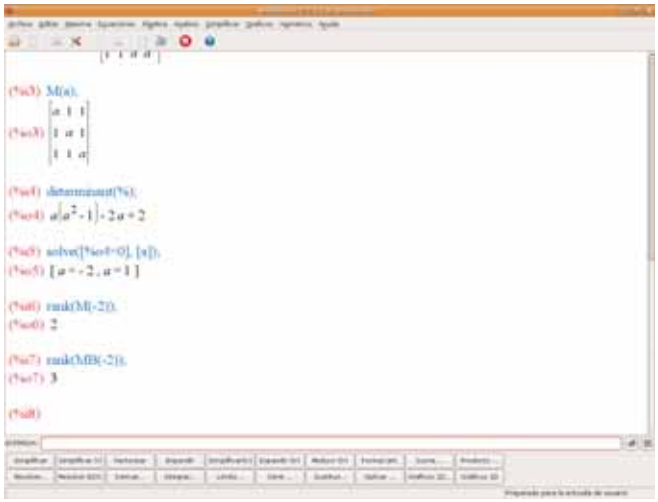


Imagen 5: cálculo del rango de una matriz

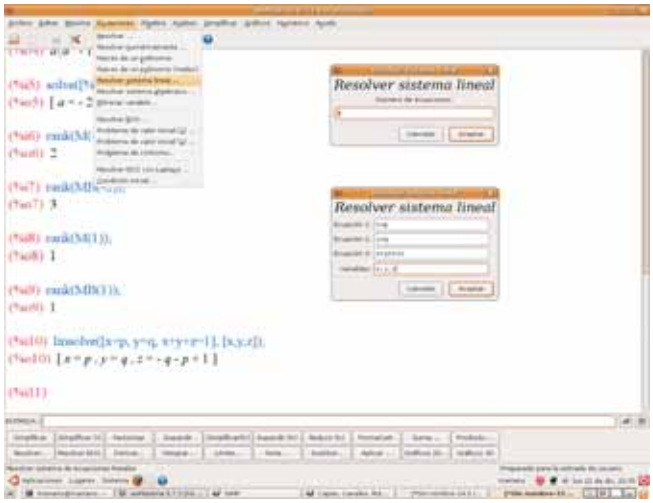


Imagen 6: resolución del sistema incompatible indeterminado

Caso 3: el parámetro a es distinto de –2 y de 1

En este caso el determinante de la matriz de los coeficientes no se anula y por lo tanto el rango de la matriz de los coeficientes es 3, igual que el de la matriz ampliada, de lo que se deduce que el sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Procedemos a calcular ahora esa única solución que tiene el sistema. Este cálculo lo podemos hacer de varias formas. De entre ellas nosotros indicamos dos:

1. La primera forma sería mediante la opción "Resolver sistema lineal" del menú "Ecuaciones". En este caso el procedimiento a seguir sería el mismo que el utilizado en el caso 2 cuando el parámetro *a* valía 1, pero utilizando las ecuaciones del sistema original que estamos estudiando.

2. La segunda forma sería siguiendo los siguientes pasos:

   2.1. Introducimos la matriz 3×1 del término independiente del sistema. Esta matriz la introducimos, al igual que hicimos con la matriz de los coeficientes y la ampliada, pulsando sobre la opción "Introducir Matriz" del menú "Álgebra". Esto nos produce la salida (%o16)

   2.2. Volvemos a escribir en la línea de comandos M(*a*) para que volvamos a tener en la pantalla la matriz de los coeficientes. Esto nos produce la salida (%o17)

   2.3. Pulsamos ahora sobre la opción "invertir matriz" del menú "Álgebra". Al realizar esa acción, Wxmaxima calcula la matriz inversa de la anterior M(*a*), es decir, de la de coeficientes. Con esto obtenemos la salida (%o18)

   2.4. Calculamos ahora el producto de las dos matrices anteriores en el orden correspondiente, es decir (%o18) multiplicada por (%o16). En este caso, el producto de matrices se realiza mediante un punto, colocando un espacio antes y después del punto. En nuestro caso sería

   %o18 . %o17

   Esto nos produce la salida (%o19) que no está simplificada como observamos en la imagen 7.

   2.5. Nos queda ahora simplificar la solución anterior. Para ello pulsamos sobre la opción "Simplificar expresión" del menú simplificar, obteniendo la salida (%o20) que observamos en la imagen 7.

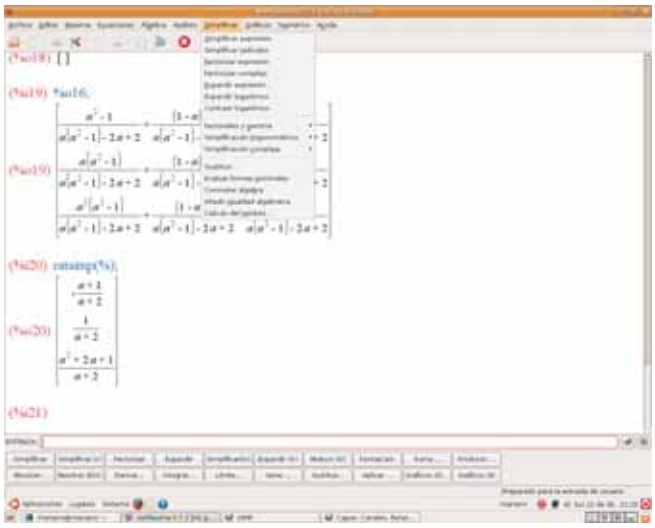


Imagen 7: resolución del sistema compatible determinado

Realizando estos pasos hemos realizado el estudio completo del sistema inicial que depende del parámetro *a*, calculado en cada uno de los posibles casos la solución correspondiente.

Ejemplo 2

En este segundo ejemplo nos planteamos realizar un estudio de una función que deseamos representar. Dominio, continuidad, corte con los ejes, máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento y representación, son los puntos que nos planteamos abordar de forma que contemplemos la utilización de algunas partes de Wxmaxima.

En este caso la función que nos plateamos estudiar es la siguiente

$$f(x) := \frac{3x^3 - 18x^2 - 81x + 420}{2x^2 - 6x - 20}$$

Vamos a realizar un estudio de la función anterior siguiendo cada uno de los puntos anteriormente recogidos. Lo primero que vamos a hacer es introducir la función en Wxmaxima definiéndola como *f*(x), para ello escribimos en la línea de comandos la siguiente expresión:

f(*x*):=(3**x*^3-(18)**x*^2-81**x*+420)/(2**x*^2-6**x*-20)

Al pulsar "Enter" observaremos que en la pantalla aparece nuestra función. Recordemos que para definirla debíamos introducir ":=". Así tenemos nuestra función en la salida (%o1).

1. Comenzamos con el dominio de la función. Puesto que es una función racional en la que tanto el numerador como el denominador son polinomios, el dominio de dicha función serán todos los valores reales excepto aquellos que anulen el denominador. Para ello escribimos el denominador en la línea de comandos y pulsamos "Enter", obteniendo el denominador como la salida (%o2).

   Ahora, en el menú "Ecuaciones" seleccionamos la opción "Raíces de un polinomio" como podemos observar en la imagen 8. Como observamos en esa misma imagen, las raíces del polinomio son el –2 y el 5, por lo que podemos deducir que el dominio de la función son todos los valores reales excepto el –2 y en el 5.

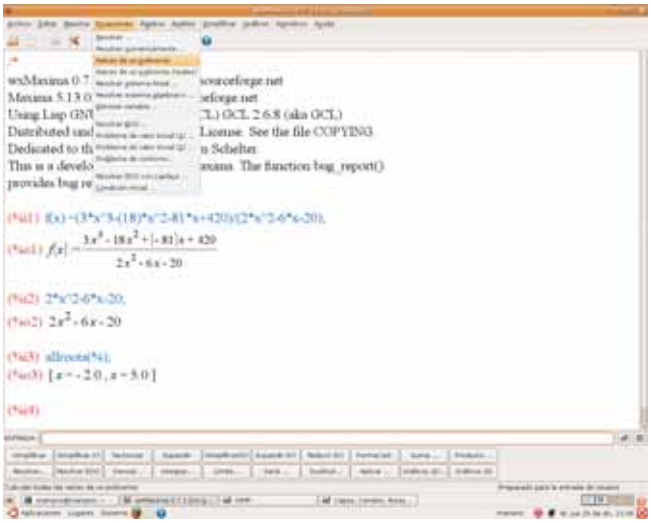


Imagen 8: valores que anulan el denominador

2. Ahora vamos a estudiar la continuidad de la función. Dada la forma que tiene, podemos decir que la función es continua en todos los valores reales excepto en el –2 y en el 5, valores en los que deberíamos estudiar el tipo de discontinuidad que presenta.

   2.1. Comenzamos con el valor x=–2. Sabemos que no existe $f(-2)$, por lo que vamos a estudiar los límites laterales. Lo primero que hacemos es volver a recuperar la función. Para ello escribimos $f(x)$ en la línea de comandos y pulsamos "Enter". Así nos aparece la salida (%o4) que es nuestra función.

   Para calcular los límites laterales pulsamos ahora sobre la opción "Calcular límite" del menú "Análisis" de Wxmaxima, apareciéndonos un pequeña ventana como la que observamos en la imagen 9. En ella seleccionamos la función de la que queremos calcular el límite, el valor al que se va a acercar la variable e indicamos la variable. Para finalizar seleccionamos si deseamos calcular el límite superior, el inferior o ambos.

Imagen 9: estudio de la continuidad

   En nuestro caso, tanto el límite superior como el inferior en –2 nos indican "und" en este caso Infinito. Para conocer más del límite, hemos calculado el valor de la función en –1,999999 y en –2,000001 tal y como observamos en la imagen 9, por lo que podemos deducir que por la izquierda se aleja a infinito positivo y por la derecha se aleja a infinito negativo, por tanto en x=–2 hay un discontinuidad de salto infinito.

   2.2. Continuamos con el valor x=5. Sabemos que no existe $f(5)$, por lo que vamos a estudiar los límites laterales. Nuestra función la seguimos teniendo en la salida (%o4).

   Para calcular los límites laterales pulsamos ahora sobre la opción "Calcular límite" del menú "Análisis" de Wxmaxima, apareciéndonos un pequeña ventana como la que observamos en la imagen 9. En ella seleccionamos la función de la que queremos calcular el límite, el valor al que se va a acercar la variable e indicamos la variable. Para finalizar seleccionamos si deseamos calcular el límite superior, el inferior o ambos.

   En nuestro caso, tanto el límite superior como el inferir en –2 nos indican "und" en este caso Infinito. Para conocer más del límite, hemos calculado el valor de la función en 4,999999 y en 5,000001, pudiendo deducir de forma análoga a como hicimos anteriormente que por la izquierda se aleja a infinito positivo y por la derecha se aleja a infinito negativo, por tanto en x=–2 hay un discontinuidad de salto infinito.

3. Calculamos ahora el corte con los ejes.

   3.1. Corte con el eje *OX*. Para ello debemos resolver la ecuación que resulta de igualar la función a cero. En nuestro caso pulsamos sobre la opción "Resolver" del menú "Ecuaciones" de Wxmaxima. Con esta acción nos aparece una pequeña ventana que observamos en la imagen 10 en la que debemos indicar la ecuación, en nuestro caso

   $$\%o4=0$$

   y la variable que en nuestro caso es x. Al pulsa sobre el botón "Aceptar" nos aparece que

   $$[x=7,x=4,x=-5]$$

   tal y como observamos en la imagen 10, por lo que deducimos que la función corta el eje OX en los puntos (–5,0), (4,0) y (7,0).

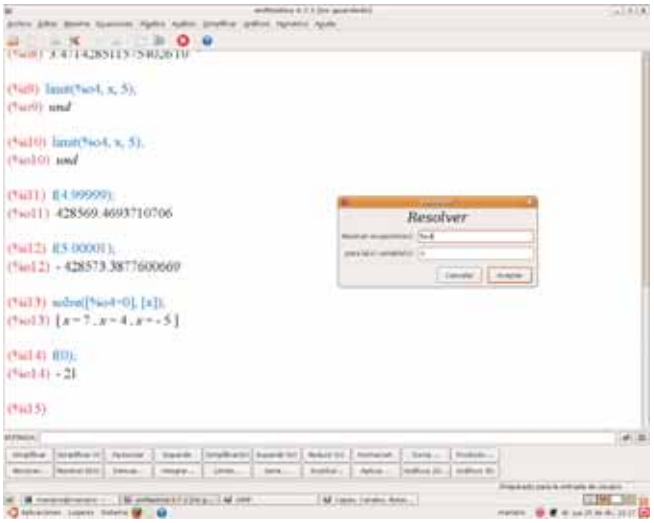


Imagen 10: cortes con los ejes

   3.2. Corte con el eje *OY*. Para ello debemos calcular el valor de la función para $x=0$. Solamente debemos escribir en la línea de comandos

   $$f(0)$$

   ya que lo primero que hicimos fue definir la función. En nuestro caso nos proporciona la salida (%o14) tal y como observamos en la imagen 10 que nos indica que la función corta al eje *OY* en el punto (0,–21).

4. Máximos y mínimos. Para ello vamos a calcular primero la derivada de nuestra función. En nuestro caso seleccionamos la opción "Derivar" del menú "Análisis" y nos aparece una pequeña ventana como la que observamos en la imagen 11. En esa ventana le indicamos que la expresión que deseamos derivar es %o4 y que la variable respecto a la que deseamos derivarla es x. En el número de derivada seleccionamos la 1. Si pulsamos el botón "Aceptar" obtenemos el resultado de la derivada que se observa en la imagen 11. Si deseamos simplificarla pulsamos sobre la opción "Simplificar expresión" del menú "Simplificar" de Wxmaxima.

   Ahora vamos a calcular los valores que anulan esta derivada. Procedemos como en pasos anteriores pulsando sobre la opción "Resolver" del menú "Ecuaciones". En la ventana que aparece le indicamos que la ecuación que deseamos resolver es

   $$\%o15=0$$

   la variable sigue siendo x. Para este ejemplo los valores en los que se anula la derivada son valores complejos como observamos en la imagen 11 (recordemos que %i indicaba el complejo puro) por lo que podemos deducir que la función no tiene máximos ni mínimos.

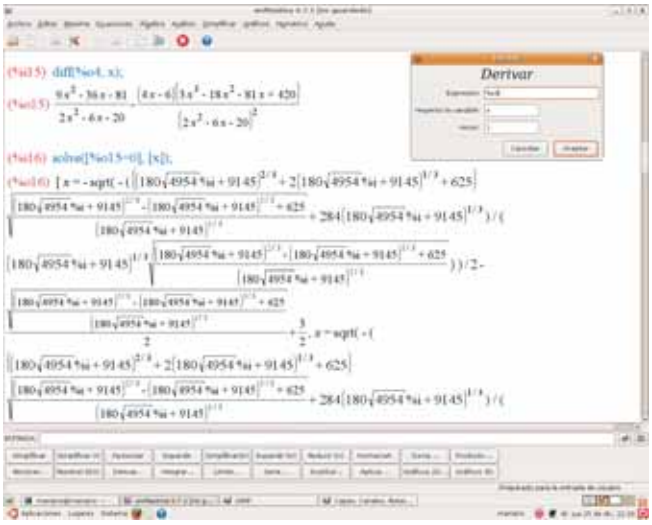


Imagen 11: cálculo de extremos

5. Ahora estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función. Para realizar este estudio calculamos la derivada de $f(x)$. Escribimos en la línea de comandos

   $$h(x):=$$

   Pulsamos sobre la opción "Derivar" del menú "Análisis" de Wxmaxima. En la pequeña ventana que aparece le indicamos que la expresión que deseamos derivar es %o4, que la variable es "x" y que la derivada que deseamos calcular es la primera. De esta forma ya tenemos definida h(x) como la derivada segunda de $f(x)$.

Imagen 12: estudio del crecimiento y del decrecimiento

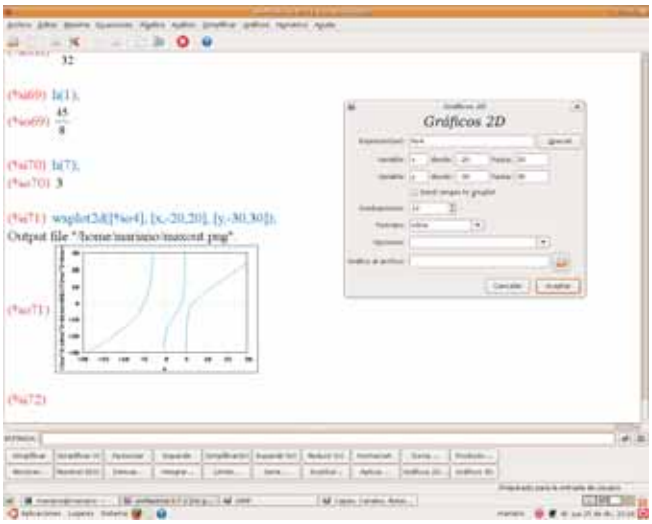


Imagen 13: representación gráfica

Ahora vamos a calcular el signo de esa derivada antes del valor –2, entre –2 y 5 y también después del valor 5. En la imagen 12 podemos observar cómo hemos calculado $h(-3)$, $h(1)$ y $h(7)$, obteniendo los signos +, + y + respectivamente, por lo que podemos deducir que la función $f(x)$ es creciente en todos los intervalos.

6. Para finalizar vamos a representar gráficamente la función. Con Wxmaxima es tan sencillo como pulsar sobre la opción "Gráficos 2D" del menú "Gráficos". Nos aparece una nueva ventana en la que debemos indicar varios datos:

   – Expresión que deseamos representar. En nuestro caso %o4
   – Intervalo en el que se va a mover la variable x. En nuestro caso [–20, 20]
   – Intervalo que deseamos contemplar del eje y. En nuestro caso [–30,30]
   – Graduaciones para las marcas de los ejes.
   – Formato. Nosotros vamos a elegir "Inline", aunque la mejor representación se observa con gnuplot.

En la imagen 13 podemos observar la representación que ha realizado la aplicación Wxmaxima de la función que estábamos estudiando.

Con esto ya tendríamos completado el estudio inicial que nos habíamos propuesto.

Con estos dos ejemplos concluimos el recorrido con el que pretendíamos dar a conocer más características de la aplicación Wxmaxima y del potencial que se oculta bajo Maxima.

MATEMASTIC

Ficha educativo - técnica	
Nombre	WxMaxima
Sistema	Aunque es una aplicación propia de Linux y para cada distribución cuenta con el archivo de instalación en su repositorio, también encontramos las versiones correspondientes para Windows y para Mac.
Descarga	Repositorio de la distribución de Linux correspondiente o http://maxima.sourceforge.net
Licencia	GPL
Contenido	Cálculo simbólico.
Nivel	Multinivelar: 4º ESO, Bachillerato y Universidad.
Metodología	Aplicación para utilizar a partir de 4º de ESO. Los alumnos utilizarán individualmente la aplicación como herramienta de ayuda para la resolución de problemas y tareas matemáticas

suma+ 63
Febrero 2010, pp. 83-88

Masaccio y la perspectiva matemática

Tommaso di ser Giovanni di Mone Cassai, llamado Masaccio, nació en San Giovanni in Altura, (hoy llamado San Giovanni Valdarno) en 1401 y murió en Roma en el verano de 1428. Vivió, por tanto sólo 27 años. Fue amigo de Brunelleschi, de Leon Battista Alberti, de Ghiberti y de Donatello. Con ellos compartió ese periodo de tiempo en el que Florencia se convirtió en la capital mundial del arte nuevo que, mirando hacia la Antiguedad, abandonaba los gustos medievales, situaba al hombre en el centro y se unía a los valores del humanismo. Un momento en que Arte y Matemáticas tuvieron una especial relación a través de la perspectiva artificialis *que, basada en planteamientos matemáticos, permitía una nueva forma de entender el espacio en la pintura. Esta obra, es quizás la más representativa de esa etapa.*

La Trinità, Masaccio,
1426-28, Santa Maria Novella, Florencia

Francisco Martín Casalderrey
IES Juan de la Cierva (Madrid)
fmc@revistasuma.es

Leon Battista Aberti, en el prólogo a su libro *De pictura*, analiza así esos primeros años del *quattrocento* en la ciudad de Florencia:

> Yo solía maravillarme y a la vez dolerme de que tantas excelentes y divinas artes y ciencias, que por sus obras y por la historia veíamos que fueron abundantes entre los antepasados virtuosísimos de la Antigüedad, hoy hayan desaparecido y se hayan casi totalmente perdido. Pintores, escultores, arquitectos, músicos, geómetras, retóricos, augures y similares nobilísimos y maravillosos intelectos, hoy se encuentran en rarísimas ocasiones y son poco alabables. De donde estimo, dado que muchas de estas cosas son inexplicables, que la Naturaleza, maestra de las cosas, envejecida y cansada, ya no producía ni los gigantes ni los ingenios que en gran número produjo maravillosos en sus tiempos juveniles y más gloriosos.
>
> Pero cuando tras el largo exilio, en el que envejecimos nosotros los Alberti, volví aquí, a nuestra, por encima de las otras, honoradísima patria [Florencia], comprendí que en muchos, pero primero en ti, Filippo [Brunelleschi], y en nuestro gran amigo Donato [Donatello] el escultor, y en otros como Nencio [Lorenzo Ghiberti] y Luca [della Robbia] y Masaccio, había ingenio para todos los saberes dignos de alabanza como para no ser relegados por ninguno de los antiguos y famosos en estas artes. Por tanto, me he convencido que el poder de adquirir la fama en cualquier ciencia o arte, reside más en nuestra industria y en nuestro esfuerzo, que en los dones de la naturaleza y de los tiempos.

En esta enumeración de Alberti, aparece el núcleo de artistas, todos amigos entre sí, que revolucionaron la concepción del Arte en el primer Renacimiento. Y si hay algo que caracteriza ese periodo en lo que respecta al Arte y las Matemáticas es la invención de la *perspectiva artificialis*, o perspectiva matemática.

Filippo Brunelleschi, valiéndose de dos tablas en las que había representado en una el baptisterio de Florencia y en otra una vista de la plaza de la Signoria –usando por tanto un método experimental– demostró que siguiendo procedimientos geométricos podía hacer una representación *verosímil* de la realidad, cuando la observamos desde un punto concreto y usando un sólo ojo para mirar.

El resultado más sorprendente del experimento que realizaba Brunelleschi no era que la imagen por él pintada, al reflejarse en un espejo, se confundiera con la realidad –ese verismo ya lo habían conseguido algunos pintores flamencos por métodos intuitivos y con los colores vivos que obtenían usando la novedosa técnica de pintura al óleo– sino su afirmación de que lo había logrado por *métodos matemáticos*.

Esos métodos matemáticos de Brunelleschi no nos han llegado, pero, pocos años después, Leon Battista Alberti en su *De pictura* (1435) describe un procedimiento que no debe ser muy distinto en esencia del concebido por Brunelleschi, ya que incluso le dedica la obra. Años más tarde esas técnicas de la perspectiva serían perfeccionadas por Piero de la Francesca en su *De prospectiva pingendi* (ca. 1482), Leonardo da Vinci, que dedicó al tema uno de los códices hoy conservados en el Instituto de Francia, y Durero, con sus *Underweysung der messung* (1525) (Instrucciones para la medida) cuya edición en español, editada por Akal en 2000, muy recomendable para quien quiera profundizar en estos temas, se titula *De la medida.*

Masaccio, valiéndose de las reglas de la perspectiva matemática de Brunelleschi, dio un giro revolucionario al Arte, superando el paradigma gótico.

Masaccio, Capilla Brancacci, Florencia. De izquierda a derecha: Masolino, Masaccio (autorretrato), Alberti y Brunelleschi. Foto FMC

La revolución renacentista de Masaccio

Tommaso di ser Giovanni, Masaccio, valiéndose de esas reglas de la perspectiva matemática dio un giro revolucionario al Arte, superando el paradigma gótico, en el que la pintura era fundamentalmente plana, los personajes aparecían sobre fondos dorados y en posiciones estáticas. Siguiendo los pasos iniciados por Giotto en lo artístico y usando los procedimientos de Brunelleschi en lo espacial, sus pinturas adquieren profundidad. Sus personajes, entroncando con el mundo clásico y la renovación de la escultura que en esos mismos años protagonizaba Donatello, cobran dinamismo. La escena –la *istoria,* en palabras de Alberti– enlaza con lo cotidiano y acerca lo divino a la vida de todos los días de los florentinos.

El conjunto de frescos de la Capilla Brancacci, que inició con Masolino y que fueron finalmente acabados por Filippino

Lippi, muestra claramente esa evolución. En paredes consecutivas vemos la fusión y el paso del gusto tardomedieval de Masolino, a la revolución renacentista de Masaccio y, posteriormente, la consolidación de ésta de la mano de Lippi.

La Trinità de Masaccio

En este contexto concibió Masaccio su obra *La Trinità*, pintura al fresco de grandes dimensiones, en el muro izquierdo de la iglesia florentina de Santa María Novella, se ignora por encargo de quién, entre los años 1426 y 1428.

Es, quizás, *La Trinità* su última obra ya que murió prematuramente en el verano de 1428, durante un viaje a Roma, tras un periodo activo de escasamente seis años, cuando sólo contaba veintisiete de edad.

Es probablemente en esta obra donde la influencia de las enseñanzas sobre perspectiva de Brunelleschi se ve más claramente. La escena se encuadra en una magnífica capilla, dibujada de tal manera que aparezca real a los ojos del espectador.

En el trazado de esta falsa capilla se aprecia también la influencia del estilo arquitectónico de Brunelleschi, aunque Masaccio sustituya en ella el gris de la *pietra serena* que usaba el arquitecto, por ese rosa intenso con el que pinta el arco. Este arco que, sustentado sobre dos columnas jónicas, queda enmarcado a su vez por dos pilastras corintias de capiteles también rosa. La capilla se cubre con una bóveda de cañón decorada con casetones cuadrados.

El punto de fuga de la construcción en perspectiva es sorprendentemente bajo. Recordemos que debe situarse a la altura de los ojos del espectador que deambula por la iglesia y lo

Figura 1. Determinación del punto de fuga de la perspectiva en *La Trinità* de Masaccio

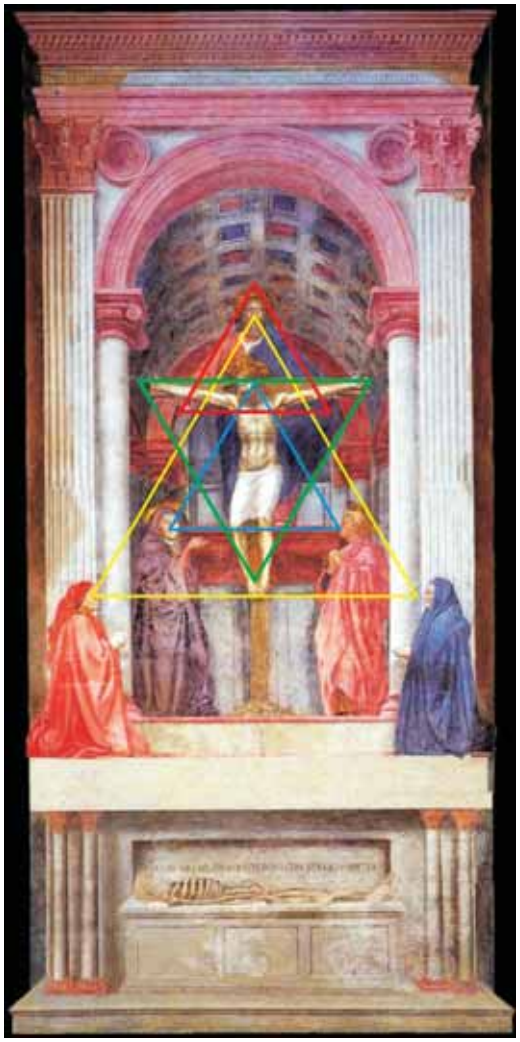


Figura 2. Algunos ejemplos de la composición basada en el triángulo equilátero.

mira, ya que, de otra manera, no se podría conseguir la sensación de arquitectura verdadera que se pretende (ver la figura 1).

Se ven también en perspectiva, en escorzo, y por tanto, como la bóveda, de abajo hacia arriba, las figuras de la Virgen y de San Juan, ambas de pie, paralelas a las columnas y a las pilastras, enmarcando, en este caso, la escena central del cuadro, que representa a Cristo en la cruz.

En esta parte superior de la composición destaca el eje central de simetría, que lo es también de la cruz. Sobre él yace el punto de fuga. Al fondo, el Padre Eterno que sujeta los brazos de la cruz con sus manos, está también centrado con respecto a ese eje, como lo está el Espíritu Santo, en su habitual forma de paloma, que sobrevuela entre Cristo y el Padre.

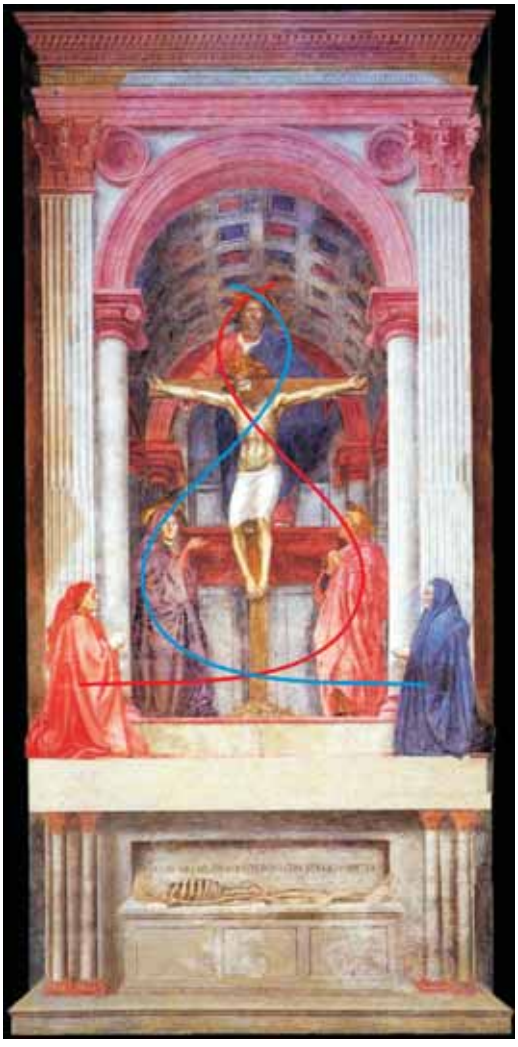


Figura 3. Alternancia de colores en la composición

A ambos lados de este eje, y simétricamente con respecto a él, se sitúan por parejas los otros cuatro personajes: la Virgen y San Juan, en primer lugar, y, fuera de la escena, arrodillados, los dos donantes.

Además, en la composición predomina el triángulo equilátero, para subrayar conceptualmente el dogma trinitario que el pintor trata de representar. Como personalmente no somos especialmente aficionados a centrarnos en estos aspectos relacionados con la geometría de la composición, aunque en esta obra sean patentes, nos hemos limitado a indicar algunos de ellos. Por ejemplo, el que une a los donantes, en la base, y la cabeza del Dios Padre, en el vértice. O el que forman los clavos de las manos y los pies de Cristo crucificado. Otro estaría formado por los ojos de María, de Cristo y de San Juan (ver la figura 2).

Más importante, a nuestro entender, es la alternancia de colores azules y rojos, a izquierda y derecha, que rompen la simetría axial predominante, proporcionando dinamismo y acentuando la profundidad creada hábilmente por el artificio del dibujo de la arquitectura en perspectiva.

Así, el rojo intenso de la saya y el tocado del donante, abajo a la izquierda, se une visualmente con el rojo más suave de la vestimenta de San Juan, a la derecha y, nuevamente a izquierda, con la túnica que cubre uno de los hombros del Padre Eterno y, por último, con uno de los casetones rojos, a la derecha, que se alternan con los azules en una especie de ajedrezado en la bóveda. Se crea así un movimiento ascendente, alternativo y convergente hacia el eje de simetría. En sentido inverso, los azules se alternan simétricamente con los rojos, recorriendo el camino que empieza en el vestido de la donante, pasa por las ropas de la Virgen, la capa que cubre el otro hombro del Padre Eterno y termina en el casetón azul, simétrico del anterior con respecto al eje central (ver la figura 3).

La simetría axial se rompe así con esta especie de movimiento matemático de *deslizamiento* de los colores, que se alternan y se elevan de forma evanescente siguiendo el eje central, hacia arriba.

Rompe también la simetría la parte inferior de la composición en la que, separada por el tablero de un altar representado en perspectiva, se ve un esqueleto y sobre él una incripción que dice:

> Io fu già quel che voi sete: e quel chi son voi ancor sarete (*Yo fui antes lo que sois vosotros, y aquello que soy, vosotros también lo seréis*).

Este esqueleto y el montículo de tierra bajo la cruz tienen como referente la tradición bíblica según la cual el leño de la Pasión se habría fabricado con el tronco de un árbol crecido sobre la tumba de Abel, para darle sombra.

Los ejes y el tiempo

Hemos hablado de un primer eje, el de simetría, que articula la composición y le da fuerza. Otro, perpendicular a él, viene señalado por la línea sobre la que se arrodillan los donantes, la definida por el plano del altar al cortase con el del dibujo. Un tercer eje, perpendicular a los dos anteriores es sin duda el de la visión del espectador, que tiene sus ojos a la altura del punto de fuga de la perspectiva.

En planos perpendiculares a ese último eje se articulan en profundidad las tres escenas de la obra. En el más cercano a nosotros, fuera del arco, los donantes, arrodillados. Un poco más adentro, los tres personajes bíblicos coetáneos, San Juan, la Virgen y Cristo, que además están un escalón más arriba que los anteriores. Más adentro hacia el eje de simetría y más arriba aún, perdiéndose hacia el fondo, la Paloma y el Padre Eterno que sujeta con sus brazos la cruz, de pie sobre una plataforma o una peana roja.

Si interpretamos los ejes de un modo cartesiano –lo cual es tomarnos una licencia de dos siglos, los que van del XV en el que vivió Masaccio, al XVII de Descartes–y este eje en profundidad lo llamamos y, cada uno de estos planos tendría una ecuación de la forma

$$y=k_j \qquad \text{con } j= 1,2 \text{ y } 3$$

El plano de los donantes sería el de ecuación $y=k_1$, el de la cruz $y=k_2$ y el del Padre Eterno $y=k_3$.

Y como a cada uno corresponde un tiempo distinto, podemos identificar k_1 con el año 1428(figura 4), cuando Masaccio terminó la obra, época en la que vivían los donantes que la pagaron; k_2 con el año 33 –obviamente después de Cristo– en el que la tradición bíblica sitúa la Pasión (figura 5). Al analizar el valor de k_3, que define el plano del Padre Eterno, para ser

Figura 4. *La Trinità,* Masaccio, Florencia. Plano y=1428

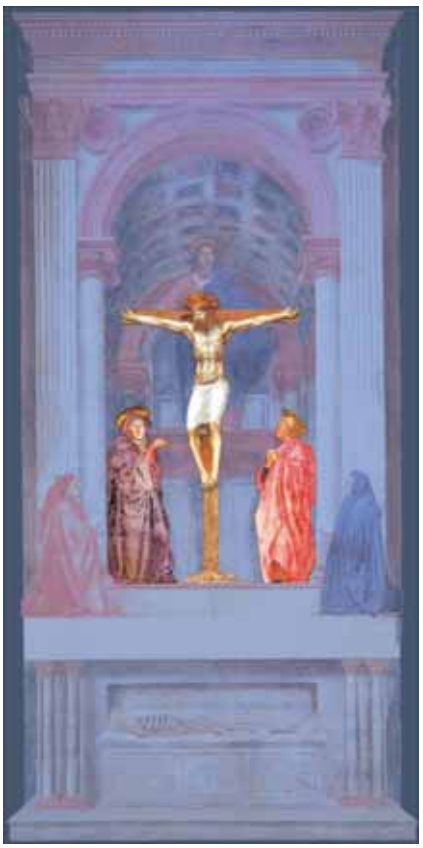


Figura 5. *La Trinità,* Masaccio, Florencia. Plano y=33

Figura 6. *La Trinità,* Masaccio, Florencia. Plano $y=k_3$

coherentes teológicamente, lo mejor sería tomar un valor indeterminado que tienda hacia el $+\infty$ (ver la figura 6).

Pero estos planos temporales no se acaban aquí. Hay un cuarto plano de ecuación $y=k_0$ que en un primer vistazo nos pasa desapercibido. Se trata, como nos indica su ecuación, de un plano paralelo a los anteriores y al plano del dibujo, por tanto, perpendicular al eje del tiempo.

Es el plano en el que nos situamos nosotros, más hacia acá que los anteriores, cuando paseamos por Santa María Novella en Florencia y contemplamos *La Trinità*. Nos encontramos en ese plano y más abajo que los demás personajes, como corresponde a nuestro rango, que ni es divino ni noble, de pie sobre el suelo. La ecuación de este plano nuestro, de acuerdo con lo anterior sería

$$y = 2010$$

si es en este año en el que hacemos nuestro paseo.

Pero, cuando de un modo virtual y a través de estas páginas, observamos *La Trinità* de Masaccio, estamos, de alguna manera, en otro plano distinto, uno también virtual, simétrico, metáforicamente, con respecto al plano del dibujo, de aquel que ocupa el Espíritu Santo y en el sentido contrario del eje. Digamos que, como lectores, estamos en algún lugar indeterminado que tiende hacia el $-\infty$.

Masaccio, de una manera genial, nos ha previsto y nos ha atrapado. Nos ha incorporado a su pintura, no como meros espectadores, sino como nuevos personajes que contemplan la escena y se integran en esta geometría escalonada, con los pies en el suelo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBERTI, Leon Battista. (1966). *On painting*. Traducción, introducción y notas por John R. Spencer. New Haven y Londres: Yale University Press. [Título original: *Della Pictura* (1435). Versión electrónica s.f. en http://it.wikisource.org/wiki/Della_pittura]. [Traduc. española: *Tratado de la pintura* (1827). Versión electrónica s.f. en http://es.wikisource.org/wiki/Tratado_de_la_Pintura. Traducido e ilustrado con algunas notas por don Diego Antonio Rejón de Silva. Madrid: Imprenta Real

DURERO, A. (2000). *De la Medida*. Edición de Jeanne Peiffer. Tres Cantos (Madrid): Akal (título original: (1525) *Underweysung der messung / mit dem zirckel und richtscheyt / in Linien ebnen unnd gantzen corporen*)

PANOFSKY, E. (1999). *La perspectiva como forma simbólica*. [Título original: *Die Perspektive als «Symbolische Form»* (1927)] Barcelona: Fabula. Tusquets Editores

suma+ 63
Febrero 2010, pp. 89-93

Horizontales

Fue justo en medio de la calzada de la Avenue des Martyrs de Douz, en los límites del Sahara tunecino, donde vi un papel que me llamó la atención. Estaba arrugado en una bola y por unos instantes dudé en agacharme a recogerlo. Pero los trazos intermitentes entre las arrugas me resultaban tan familiares que no pude evitar recoger del suelo lo que alguien había tirado, probablemente con rabia. Mi acto implicaría abrir una conversación sobre un tema incómodo y poco natural mientras uno está de vacaciones, toda una verdadera provocación. Sin embargo, no podía dejar escapar una ocasión como aquella. Vivía un fenómeno insólito que superaba los límites de imaginación. Así que me agaché y cogí del suelo aquel lío de papel.

Desplegué la hoja. El fondo del papel estaba rayado horizontalmente a diferentes intervalos regulares. También presentaba un margen izquierdo, un poco más extenso en el anverso que en el reverso. La letra me pareció femenina, aunque no eran palabras lo que había escrito. El texto no era árabe, ni francés, ni inglés ni castellano. Es verdad que la mayoría de las letras eran latinas, reconocibles por la mayoría de la gente, pero el texto estaba salpicado de símbolos muy familiares que eran los que a mí me interesaban. No me cabía ninguna duda, estaba escrito en lenguaje matemático.

Mercado de Douz (Túnez)

Miquel Albertí Palmer
IES Vallés, Sabadell
adherencias@revistasuma.es

Era una página de apuntes idéntica a los que había tomado yo treinta años antes. Igual también a las que tomaban mis alumnos en mis clases hacía veinte, cuando comencé mi labor como profesor de Matemáticas en un instituto de Barcelona. Me vinieron a la mente recuerdos de dos demostraciones que hizo mi profesor de Matemáticas cuando yo tenía 16 años. Yo y todos mis compañeros de clase tomamos apuntes de la demostración de un teorema que, entonces, creímos comprender:

La sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *es creciente y acotada; inferiormente por 2, superiormente por 3.*

De ahí se deducía que tal sucesión era convergente hacía un número menor que 3. Ése límite era uno de los números más importantes en Matemáticas, el número:

e=2,71828182845904523536...

Pero los cálculos de límites que llenaban ambas caras de aquel papel arrugado no se referían a la sucesión que genera el número *e*. Eran cálculos de límites de funciones indeterminados del tipo ∞–∞, que se resuelven multiplicando y dividiendo la función por la expresión conjugada. En el anverso había dos ejercicios. Parte del primero se había perdido por una rasgadura. Consistía en calcular:

$$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-1}$$

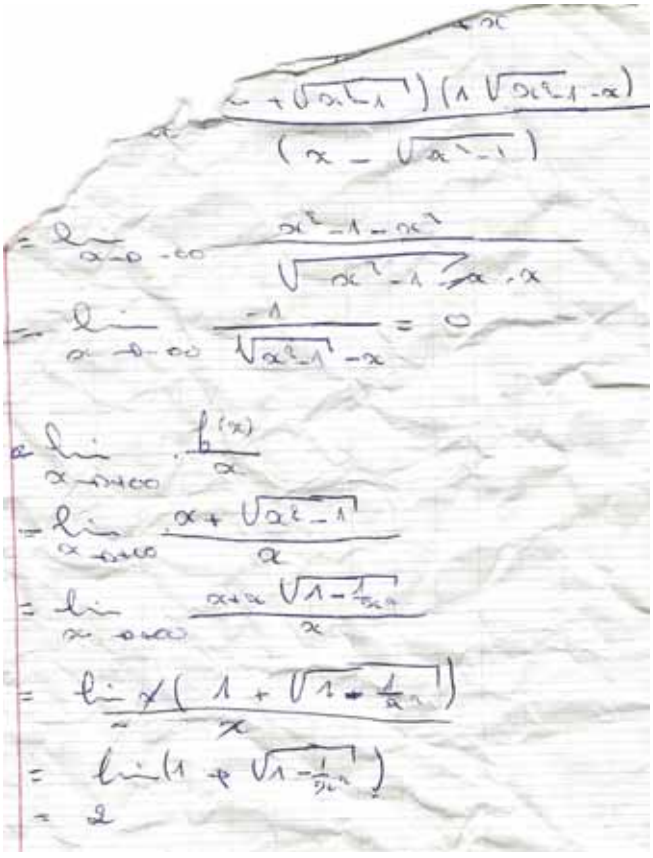
La indeterminación se había resuelto multiplicando y dividiendo por la llamada expresión conjugada, ya que así la indeterminación ∞–∞ se convierte en ∞+∞=∞ y desaparecen tanto la indeterminación como la raíz cuadrada del numerador. Sin embargo, se omiten tanto la constatación de la indeterminación inicial como un detalle previo a la obtención del resultado:

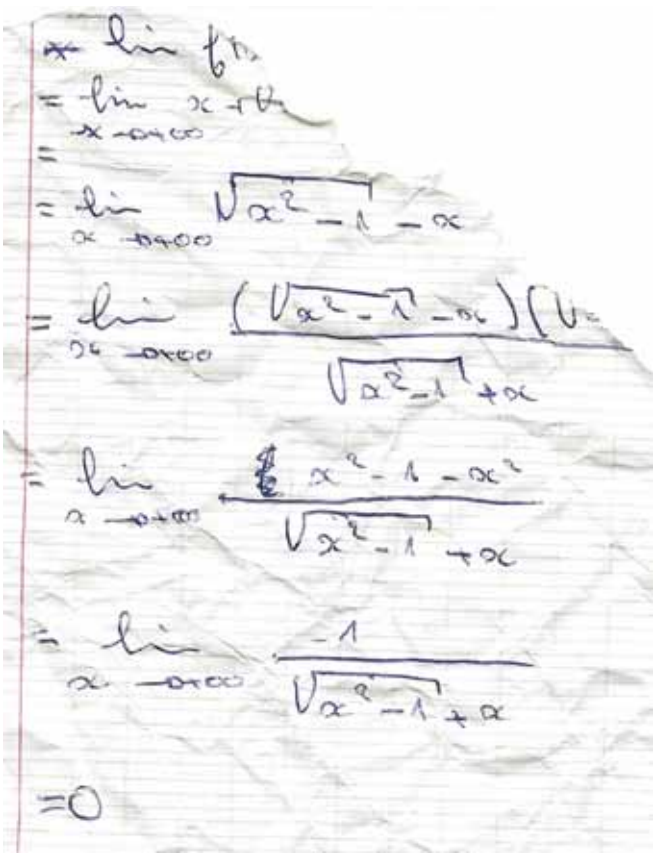
$$\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-1} = -\infty+\infty = \textit{indet.}$$

$$\ldots = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = \frac{-1}{\infty-(-\infty)} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

En el segundo ejercicio la variable *x* tendía hacia +∞ y la función anterior estaba dividida por *x*:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$





Para resolver el problema se extraía x factor común, primero de la raíz cuadrada y luego de todo el numerador, para simplificarla con la del denominador. De nuevo se omitían los últimos pasos finales:

$$\ldots = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right) = 1+\sqrt{1-0} = 1+1 = 2$$

En el dorso de la hoja, y pese a que la rasgadura se había llevado el enunciado, el cálculo consistía en determinar el límite de la función conjugada de la f(x) original cuando x tendía hacia $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-x$$

Como antes, el interludio previo al desenlace estaba ausente:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x} = \frac{-1}{\infty} = 0$$

Aquel papel y aquellos cálculos de límites actuaron como un icono activador de mis recuerdos. Jamás se me había pasado por la cabeza toparme con algo semejante lejos de mi entorno académico; mucho menos todavía, de mi entorno cultural. Concluida la revisión de los cálculos, me formulé otras preguntas. ¿Qué quedaba de todo aquello en mis entornos? ¿Qué tienen en común esa hoja y los apuntes que toman ahora mis alumnos?

Los límites del desierto en Douz

Me imaginé también en la piel del adolescente del Magreb que llega a un aula de matemáticas de nuestro país. Espera recibir una educación matemática acorde con el significado de un término ya conocido. Pero, ¿tiene aquí el mismo significado que posee en el lugar de donde procede? Espera recibir una educación matemática basada en tareas rutinarias y en imperativos como 'calcula', 'busca', 'determina'... De no ser así, ¿es que han cambiado las Matemáticas? ¿Pensará que lo que hace ahora es hacer Matemáticas? Lo que sabe y lo que cree saber, ¿ayudan o dificulta su adaptación?

Las metodologías contemporáneas occidentales van por derroteros bien distintos a los de su país. A los cambios sociales y culturales tiene que añadir otro no menos impactante: el cambio educativo. Su nuevo profesor de Matemáticas no le dicta la clase, sino que le invita a intuir y a conjeturar, y a manifestar verbalmente los argumentos por los que justifica sus conjeturas e intuiciones. Siente que su profesor apenas hace nada, que es él quien tiene que hacerlo casi todo. ¿A qué referentes puede agarrarse? Los que tenía no le sirven. Esperaba hacer raíces cuadradas, cúbicas, ecuaciones, sistemas, cálculos de límites. En su entorno sabía hacerlo todo. Por eso era bueno en Matemáticas. Ahora en clase de Matemáticas se hace también Física, Biología, Economía, se lee el periódico, se usa la calculadora, el ordenador, Internet. Y encima, apenas comprende el idioma local en el que se explican las cosas.

Menos mal que ese adolescente es varón. Si fuese mujer, sería peor. Las costumbres alabadas en su país no se ven igual aquí. El asfalto sobre el que camina es menos firme que las arenas del desierto que se amontonaban a la puerta de su casa. ¿Aprenderá algo? ¿Logrará superar todo ESO? Sin quererlo, dos palabras salen de su boca: *In shalah*!

Desde aquel día en Douz voy siempre mirando al suelo. No es que vea cosas distintas, los suelos son iguales en todas partes: horizontales. Pero ahora miro al suelo con otros ojos, viendo cosas que antes no veía. He aprendido que la gente tira maravillas. No busco ni espero encontrar sortijas de oro, monedas, billetes de cien euros o perlas. Maravilloso es lo que te transforma, lo que te hace aprender.

El otro día, mientras caminaba cabizbajo, vi en la cuneta un par de tuercas hexagonales. No era la primera vez, las tuercas hexagonales son de lo más corriente que puedes hallar en una cuneta, pero al verlas me hice una pregunta: ¿Por qué siempre están echadas sobre un lado hexagonal y no sobre uno de los otros?

Sorprende la cantidad de geometría que hay en una tuerca. Su agujero es un cilindro surcado por una hélice por donde se enrosca el tornillo que la atraviesa. Las seis caras rectangulares facilitarán la labor de una llave inglesa. Una tuerca es un prisma hexagonal atravesado por un vacío cilíndrico. Este es su inventario geométrico:

Puntos	*Líneas*	*Superfícies*	*Cuerpos*	*Ángulos*	*Paralelas*	*Perpendiculares*
Vértices	Aristas	Rectángulo	Prisma	90º	Aristas	Aristas
	Poligonales	Hexágono	Cilindro	120º	Caras	Caras
	Circunferencia	Cilíndrica				
	Hélice					

Una tuerca perforada no verifica la fórmula de Euler relativa a los poliedros, ya que posee 9 caras (una es circular), 20 aristas (dos son circulares) y 12 vértices. En lugar de C+V=A+2, verifica que C+V=A+1. ¿Será siempre así en un poliedro perforado? La perforación cilíndrica añade 2 aristas circulares y 1 cara cilíndrica. El miembro de la izquierda en la igualdad C+V=A+2 aumenta en 1, mientras que el de la derecha lo hace en 2. Por tanto, la respuesta es afirmativa.

Volvamos a la primera cuestión: ¿Por qué las tuercas nunca acaban en el suelo de canto, sino echadas sobre una de sus dos caras hexagonales? ¿Cómo debe ser una tuerca para que no le ocurra eso? Sean a y b la altura de la tuerca y la longitud de su arista hexagonal, respectivamente. ¿Afecta a la probabilidad el hecho de que la tuerca esté perforada? No, siempre que la

Tuercas hexagonales callejeras

perforación no cambie su centro de gravedad. Como ocurre en una moneda (cilindro de grosor nulo), en un dado (cubo) o en un poliedro regular, es la proporción entre una cara y el total de la superficie del poliedro la que determina la probabilidad de que éste caiga sobre aquella. Luego la probabilidad de que una tuerca lanzada al aire acabe reposando en alguna de sus seis caras rectangulares viene determinada por la proporción entre la superficie de todas ellas y la de la pieza entera:

$$P = \frac{6ab}{6ab + 3\sqrt{3}b^2} = \frac{2a}{2a + b\sqrt{3}}$$

Esta probabilidad será del 50% si $a/b = \sqrt{3}/2$. Las dimensiones de las tuercas que había encontrado eran $a=3$ mm y $b=6{,}5$ mm. Según la fórmula debería caer de canto un 35% de veces. También tenía otra tuerca algo mayor: $a=5$ mm y $b=7$ mm. La probabilidad de que ésta cayese de canto estaba alrededor del 45%. ¿Se ajustaría la realidad experimental a la probabilidad ideal del modelo matemático? Las lancé 100 veces. La pequeña nunca cayó de canto (0%), la otra lo hizo en 21 ocasiones (21%). ¿Dónde estaba el error? No lo busqué en los cálculos, sino en la realidad.

El hallazgo fue aprender de lo que se halla: sacarle provecho al azar.

Examiné las tuercas con lupa. Ninguna de las caras eran polígonos perfectos. Las que había tomado por rectángulos tenían los dos lados más largos arqueados hacia fuera, lo que hacía que las caras hexagonales fuesen ligeramente convexas en sus vértices. Estas diferencias con el modelo de prisma hexagonal eran mayores en la tuerca pequeña, su especial diseño rompía la simetría y acentuaba la inestabilidad de su equilibrio vertical. La tuerca pequeña se había comportado como una moneda.

Aún así, las diferencias eran excesivas. ¿No tendría algo que ver la posición del centro de gravedad? Cuanto más alto, más inestable el equilibrio. Se me ocurrieron varias formas de cuantificar esa probabilidad, pero siempre me asolaban las dudas acerca de lo que la Física podría rebatir a mis disquisiciones. Decidí zanjar la cuestión lanzando las tuercas 100 veces más. La pequeña cayó de canto 2 veces; y la mayor, 21. Las probabilidades se asentaban en torno al 1% (2/200) y al 21% (42/200).

Un modo de elaborar un modelo probabilístico en base a la estabilidad del equilibrio puede ser hallar la amplitud del ángulo con el que el pie de la perpendicular desde el centro de gravedad G al suelo se mantiene dentro de la base del objeto. En un cilindro de altura $2a$ y diámetro $2r$ dicha amplitud es $\alpha = 2\arctan(r/a)$. Definamos ahora la probabilidad de que el objeto 'caiga' de ese lado, esto es, se mantenga estable sobre él, como la proporción entre dicha amplitud (α) y la amplitud total posible (π):

$$P = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{r}{a}\right)$$

Calculando así la probabilidad de que un cilindro 'cúbico' ($r=a$) caiga sobre su cara curva, se obtiene P=1/2. Si se calcula en base a la proporción entre superficies, el resultado es P=2/3. Lástima que no tenga un cilindro así para poner a prueba este modelo matemático.

Sobre proporciones de magnitudes de lo inexistente las matemáticas aventuran probabilidades de lo real. Mientras determinamos con cuál de las dos, si con las matemáticas o con la experimentación, nos acercamos más al valor buscado (perfeccionando los modelos de una y aumentando los ensayos de la otra), no hacemos sino crear ese valor perseguido. El azar y la paciencia conducen a la verdad.

Nunca hasta entonces me había planteado el cálculo de probabilidades con poliedros irregulares. El hallazgo no fue encontrar un papel con cálculos de límites, ni tampoco el par de tuercas hexagonales. El hallazgo fue aprender de lo que se halla: sacarle provecho al azar.

ADHERENCIAS

Sociedad de Estadística e Investigación Operativa. SEIO

V Concurso de Proyectos Educativos en Estadística e Investigación Operativa para Profesores de Enseñanza Secundaria y Bachillerato

La Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO), consciente de la importancia que estas disciplinas tienen hoy en día como materias de formación académica y herramientas para la toma de decisiones en los entornos públicos, privados y empresariales, desea contribuir a la difusión de la Estadística y de la Investigación Operativa en la sociedad. Por ello, reconociendo la trascendencia que tiene el aprendizaje de estas materias en la enseñanza no universitaria, la SEIO ha decidido convocar un concurso con el fin de fomentar la elaboración de material didáctico en los ámbitos de la Enseñanza Secundaria y del Bachillerato.

Bases del Concurso

1. Podrán participar todos los profesores que en el curso 2009-2010 realicen tareas docentes en los niveles de Educación Secundaria y/o Bachillerato. Los concursantes podrán participar a nivel individual o en grupo.
2. Los trabajos se enmarcarán preferentemente en alguna de las dos siguientes líneas:
   - Material didáctico en relación con alguno de los temas o tópicos de Estadística o Investigación Operativa incluidos en los programas de los niveles señalados.
   - Experiencias didácticas para divulgar y/o fomentar el interés en la Estadística y/o la Investigación Operativa.
3. Los trabajos deberán ser originales y no deberán haber sido premiados o publicados con anterioridad.
4. La extensión máxima del trabajo presentado será de 25 páginas, escritas en letra de tamaño 11 puntos y con interlineado de 1,5 líneas. Además, deberá tener una estructura similar a la siguiente:
   - Título y pseudónimo (portada del trabajo).
   - Presentación (incluyendo los objetivos del trabajo y el ámbito educativo al que va dirigido (ESO o Bachillerato, y curso)).
   - Desarrollo del trabajo.
   - Experimentación en el aula y evaluación de la experiencia, en su caso.
   - Referencias, en su caso.

   Los trabajos podrán acompañarse con una presentación en formato electrónico.
5. Los concursantes remitirán una copia del trabajo impresa en DIN-A4, un CD que incluya una copia del trabajo en formato PDF, en su caso la presentación electrónica, y un sobre cerrado indicando en el exterior el título del trabajo y el pseudónimo, y en el interior: nombre y apellidos del autor/es, nombre, dirección y teléfono del centro/s al que pertenece y un correo electrónico o teléfono de contacto.
6. Los trabajos se remitirán a la siguiente dirección:

   Sociedad de Estadística e Investigación Operativa
   V Concurso de Proyectos Educativos en Estadística e Investigación Operativa para Profesores de Enseñanza Secundaria y Bachillerato

   Facultad de Ciencias Matemáticas
   Universidad Complutense de Madrid
   Despacho 502, Plaza de Ciencias, 3
   28040-Madrid (Ciudad Universitaria)
7. La fecha límite de remisión de los trabajos será el 15 de julio de 2010.
8. Se otorgará un premio de 1.000 € al mejor trabajo presentado. El concurso podrá ser declarado desierto o compartido entre varios trabajos, sin que ello suponga una variación en su cuantía global.
9. El Comité encargado de la evaluación de los trabajos presentados al concurso y del fallo del mismo estará compuesto por todos los miembros de la Comisión de Educación y Divulgación de la SEIO y por la editora de BEIO (revista oficial de SEIO).
10. La fecha límite para la resolución del concurso será el 15 de octubre de 2010.
11. El trabajo ganador o trabajos ganadores será/n publicado/s en la página web de la SEIO (www.seio.es). Además se publicará/n en la revista BEIO (www.seio.es/BEIO/) previa adaptación a las normas editoriales de la misma. En cuanto al resto de los trabajos presentados podrán ser publicados en la página web de la SEIO a criterio de los miembros del Comité encargado de la evaluación de los trabajos.

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas
"Emma Castelnuovo"

3º Concurso de Experiencias Matemáticas

El objetivo de este concurso es premiar y potenciar la innovación metodológica, en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, reconociendo la labor del profesorado.

Bases del Concurso

Se podrán presentar experiencias en el área de matemáticas realizadas en el marco de un trabajo de clase. Las presentará el profesor/a coordinador/a de la actividad.

Presentación

Cada experiencia será presentada con un informe de un máximo de 20 páginas y debe ir acompañada de un cartel de presentación. Se valorará fundamentalmente la originalidad de la experiencia, el trabajo realizado por los alumnos, su vínculo con el contenido matemático del currículum del curso en el que se ha realizado, así como el uso de nuevas tecnologías o de material manipulable, u otro tipo de materiales; su desarrollo y el análisis de los resultados.

Formato

Es imprescindible el envió de la versión electrónica en CD del informe y del cartel (que será impreso por la SMPM para su exposición). Los trabajos deberán ser firmados con un seudónimo que, junto con el título, aparecerá en el exterior de un sobre cerrado que contenga los datos de la ficha de presentación adjunta.

Plazo de presentación

Los trabajos se enviarán por correo certificado antes del 15 de mayo de 2010 a la siguiente dirección:
SMPM Emma Castelnuovo
Sector Foresta nº 20 - 1ºB; 28760 Tres Cantos; Madrid

Jurado

Estará compuesto por cinco personas nombradas por la Junta Directiva de la SMPM Emma Castelnuovo.

Premios

1er Premio: 300 euros para el profesor coordinador.

2º Premio: 150 euros para el profesor coordinador.

Premio especial Cartel de presentación: 50 euros para el profesor coordinador.

Exposición de los trabajos

Los trabajos seleccionados se expondrán, dentro de la Comunidad de Madrid, en los lugares y fechas que determine la Junta Directiva de la SMPM Emma Castelnuovo y podrán ser colgados el la página web de la SMPM cediendo los derechos a la SMPM

Condiciones generales

- No se podrán presentar trabajos que tengan limitados sus derechos de publicación.
- La SMPM Emma Castelnuovo se reserva el derecho de exponer o publicar los informes de las experiencias y su cartel de presentación durante un año.
- El jurado podrá dejar desierto los premios de las distintas categorías.
- La entrega de premios se realizará en la fase final de la Olimpiada Matemática de la Comunidad de Madrid.
- Los trabajos no premiados se podrán recoger, previa petición, durante el mes de diciembre de 2010.
- La participación en este concurso supone la aceptación de todas las condiciones

http://www.smpm.es
smpm@smpm.es

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas
"Emma Castelnuovo"

I Concurso de Microrelatos Irracionales

El objetivo del concurso eminentemente lúdico, y busca establecer lazos de comunicación entre áreas aparentemente dispares como la literatura y las matemáticas

Bases del Concurso

Presentación

Podrán concursar profesores y alumnos sin restricción de curso, pertenezcan o no a la SMPM "Emma Castelnuovo", con todos los microrrelatos que deseen, siempre que se envíen dentro del plazo del concurso.

Formato

Los microrrelatos, escritos en castellano, tendrán un máximo de veinte palabras y deberán cumplir el requisito de que el número de letras de cada palabra sea la cifra correspondiente de un número irracional, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo:

3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8

Así, y digo a todos puramente la verdad, acaba una fugaz historia.

Los números irracionales a elegir son π, e, $\sqrt{2}$ o ϕ.

Se utilizarán, como máximo, las veinte primeras cifras del número irracional elegido, tal y como aparecen, eliminando sus ceros. Independientemente del número de palabras del microrrelato, se debe comenzar siempre por la primera cifra del número, y respetar el orden de las cifras hasta la correspondiente a la última palabra del relato. Además, en caso de que el microrrelato tuviera título, las palabras que lo formen se considerarán las primeras palabras del texto y por tanto deberán adaptarse en su longitud a las primeras cifras del número.

Los microrrelatos serán de temática libre, pero siempre originales. La comprobación de la no originalidad de un texto provocará la exclusión de todos los microrrelatos de su autor.

Plazo de presentación

Los originales serán enviados dentro del cuerpo del correo con el nombre del autor, teléfono y email a la dirección de correo electrónico fernando.dominguez.santos@gmail.com bajo el asunto "I Concurso de Microrrelatos Irracionales" antes del 1 de abril de 2010.

Jurado

Estará compuesto por cinco personas nombradas por la Junta Directiva de la SMPM Emma Castelnuovo.

Premios

1er Premio: Lote de 10 libros relacionados tanto con la matemática como con la literatura

2º Premio: Lote de 5 libros

Los doce mejores relatos serán publicados en el calendario anual de la SMPM, correspondiente a 2011.

Condiciones generales

- No se podrán presentar trabajos que tengan limitados sus derechos de publicación, o que no sean originales.
- La SMPM Emma Castelnuovo se reserva el derecho de publicar los microrrelatos durante un año.
- El jurado podrá dejar desierto los premios de las distintas categorías.
- La entrega de premios tendrá lugar el 22 de abril de 2010, en la Clausura de las Jornadas de Educación Matemática organizadas por la SMPM "Emma Castelnuovo".
- La participación en este concurso supone la aceptación de todas las condiciones.

suma+ 63
Febrero 2010, pp. 97-106

Biblioteca

Mi presentación

Daniel Sierra Ruiz

Las dos primeras veces que hablé con Miquel Albertí, tuve que dejar la conversación a medias por un fuerte dolor de cabeza… Bueno, que no se me malinterprete. En ambas ocasiones, el dolor de cabeza lo tenía *antes* de iniciar la conversación, aunque pudieron conmigo las ganas que tenía de conocerle y hablar con él. Afortunadamente, después he tenido otras oportunidades en las que mi herencia genética no ha interferido y la charla ha ido por los cauces lógicos.

Como otra mucha gente, la primera vez que supe de Miquel fue al leer sus artículos de finales de los noventa en *Suma,* siendo su originalidad lo primero que llamó la atención. Originalidad tanto desde el punto de vista del enfoque que da a las Matemáticas como la forma que tiene de reflejarlo por escrito. En aquella época yo colaboraba en la maquetación de la revista, por lo que lo descubrí un poco antes. Quizás, el hecho de maquetar alguno de sus artículos influyó para que su manera de hacer me calara algo más, lo que aumentó mi interés por conocerle.

Desde aquellos primeros artículos no ha dejado de publicar en *Suma.* Es más, se ha convertido en el único autor fijo en todos y cada uno de los números desde hace diez años, pues las direcciones habidas en este período le han encomendado diferentes secciones, que ha ido encadenando una tras otra. Como también es un ponente fijo en las JAEM, se podría decir que Miquel es, actualmente, uno de los miembros de la Federación más activos y conocidos. Incluso me atrevería a decir que, a tenor de la cantidad de personas que acuden a sus ponencias, se puede llegar a convertir, si no lo es ya, en un referente de la didáctica de las Matemáticas en España.

Creo que la causa principal que provoca que sus trabajos atraigan la atención del resto de los compañeros, es que puede extraer Matemáticas de una situación en la que muchos nos quedaríamos en la mera anécdota. Por ejemplo, de un incidente con un tronco y un autobús en un lugar perdido de Indonesia, es capaz de desarrollar un problema de derivabilidad. También nos descubre las Matemáticas que conoce y utiliza un artesano iletrado y sin ninguna formación matemática estándar; Matemáticas que nos son ajenas pero que nos muestran la variedad de caminos que se nos pueden

Daniel Sierra Ruiz (coordinador de la sección)
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)
biblioteca@revistasuma.es

abrir si las observamos librándonos de nuestros prejuicios como matemáticos. Es decir, Miquel en muchos de sus escritos (incluida su premiada tesis sobre etnomatemáticas), charlas, comunicaciones…, nos enseña a respetar y a admirar otras culturas que, a veces, son tachadas de *atrasadas*.

En una de las primeras conversaciones que mantuve con él (una de las de las migrañas) me comentó que si los de Lengua veían un amanecer y eran capaces de hacer poesía, por qué nosotros no podemos hacer Matemáticas con esa misma visión. Para mí esa es la clave, no renuncia a nada cuando se enfrenta a una imagen cotidiana (cómo olvidar sus *imátgenes*), ni a la poesía ni a las matemáticas en diferentes niveles de complejidad. Es más, Miquel no mira con *ojos matemáticos,* como solemos decir, él los lleva siempre puestos, y luego es capaz de hacer poesía matemática con lo que ve.

Me parece que no he sido capaz de disimular que desde hace tiempo siento debilidad por los artículos en *Suma* de Miquel, así que a pesar de que tiene una sección propia en este mismo número no pude resistirme a la tentación de pedirle que escribiera también aquí, así que con gran satisfacción doy paso a Miquel Albertí Palmer y *su biblioteca particular.*

Mi biblioteca particular

Miquel Albertí Palmer

Si tuvieras que empezar tu biblioteca matemática ahora, ¿con qué libro o libros de los de tus primeros años como matemático comenzarías?

Si tuviese que escoger algunos libros de mis primeros años con los que abrir una biblioteca, tomaría aquellos que todavía hoy sigo consultando a menudo. Son el *Cálculo* (T. Apostol), el *Cálculo diferencial e integral* (N. Piskunov) y los *Principios de análisis matemático* (W. Rudin). No conservo un libro que en mi época de estudiante era muy popular, el Calculus de M. Spivak, porque le cogí manía y lo vendí a una librería de segunda mano. Muchas veces me he arrepentido de haberlo hecho.

Los libros de Álgebra siempre me han parecido fríos. Sólo tengo dos, el de Godement y el de Lang, pero así como los libros de análisis me han servido de ayuda siempre, los de álgebra nunca. Las pocas en que he acudido a ellos he vuelto con las manos vacías. Quizá es que en mi mundo ya no tengo verdaderos problemas de álgebra qué resolver y los grupos, anillos y cuerpos se me hacen excesivamente ajenos a la actividad matemática que llevo hoy en día.

¿Qué libro o libros de didáctica de las matemáticas consideras destacables por lo que supusieron en su momento y en el desarrollo posterior de la disciplina?

Los libros de didáctica que más han influido en mi carrera docente son dos. El primero, la serie de libros para el aula de BUP titulados *Matemáticas* elaborados por el *Grup Zero* de Barcelona. Esta obra determinó mi perspectiva educativa por lo que se refiere a las Matemáticas. El segundo, la *Enculturación matemática* de Alan Bishop, que afianzó ciertos cambios de perspectiva y me abrió la mirada a otros entornos y contextos, tanto en lo referente a las Matemáticas en sí, como en lo referente a la educación matemática.

En mis primeros años como profesor me di cuenta de que enseñar Matemáticas como yo las había aprendido —definición, teorema, demostración, corolario, ejercicio— no sólo no funcionaba, sino que transmitía una idea falsa de lo que eran de verdad las Matemáticas. Aquéllos libros del Grup Zero partían de la idea de que saber Matemáticas consistía en poder hacerlas:

> Saber matemàtiques significa poder-ne fer: saber plantejar i resoldre problemes, criticar arguments, utilitzar el llenguatge matemàtic amb facilitat, reconèixer un concepte matemàtic en una situació concreta... (Grup Zero, prólogo, Editorial Vicens Vives)

La educación matemática tradicional se ha caracterizado siempre por el autoritarismo, el dictado y el dogma, adjetivos muy apropiados para el uso de las reglas de la lógica y de los axiomas

Recuerdo también la imagen que inspiraba el trabajo del Grup Zero. Las matemáticas eran algo vivo que una instantánea no podía captar. Un corredor llega a la meta, ¿cómo saber si ha recorrido 800, 1.500 o 3.000 metros? Una fotografía no basta, hay que ver todo el proceso para saber cuál ha sido y cómo se ha desarrollado la carrera.

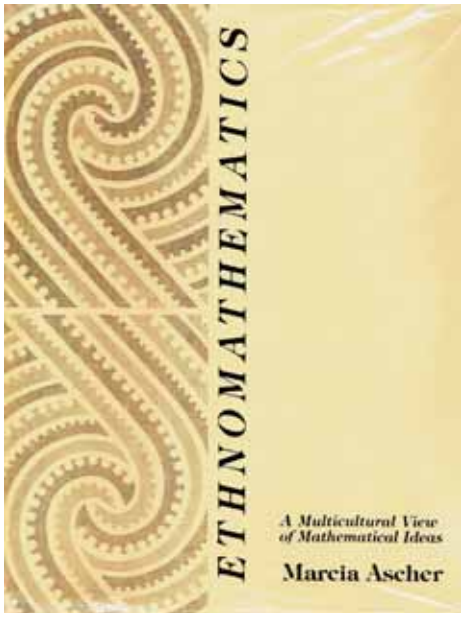
A lo largo de los años he tenido la fortuna de conocer y trabajar junto a algunos de los componentes del Grup Zero que impulsó la educación matemática, no sólo en Catalunya, también en España. Mi tutora del CAP fue Cristina Fabregat. Trabajé durante años en el instituto Pau Vila de Sabadell con Rubi Corberó. Colaboré como tutor del CAP bajo la tutela de Carmen Azcárate, de quien luego fui alumno de doctorado. También lo fui de Jordi Deulofeu. He coincidido en jornadas y congresos con Martí Casadevall, Manel Udina y Paco Moreno. Todos ellos formaban parte de ese grupo de trabajo. Una buena parte de lo acertada que haya podido ser y de lo que pueda ser todavía mi tarea como profesor se lo debo a ellos.

Por otra parte, el libro de Bishop supuso un cambio de perspectiva a nivel general, por no decir mundial, por lo que a educación matemática se refiere. Fue un intento muy acertado de globalización democrática de la educación matemática que ya se había ido gestando a lo largo de las tres últimas décadas de finales del siglo XX. Todo un cambio con relación a la estrechez de miras de la educación basada en el formalismo de la teoría de conjuntos. Además, el escenario y el enfoque ya no se restringían al academicismo imperante hasta entonces, sino que se ampliaba extramuros, tanto académicos como culturales. Ahí estaban las raíces de las Etnomatemáticas, las matemáticas que cualquier persona o cultura pueden desarrollar para resolver los problemas.

Junto a Bishop, D'Ambrossio, Zalavsky y Gerdes, Marcia Ascher puso de manifiesto las matemáticas subyacentes a toda una serie de actividades de diferentes culturas del mundo en un volumen titulado *Ethnomathematics: a Multicultural View of Mathematical Ideas*. El contenido de la obra se organiza alrededor de seis ámbitos temáticos: números, trazar líneas, lógica, cambio y estrategia, organización espacial y simetría. No son exactamente los seis universales de actividad matemática de Bishop, pero se le parecen bastante. Como crítica valga decir que las matemáticas de las que habla Ascher son, en su mayoría, las que ella relaciona con cada actividad y no las que declaran quienes las realizan. Un libro muy recomendable a quien quiera hacer un viaje matemático alrededor del mundo y ver qué hay más allá del horizonte occidental.

¿Qué libro de visión general de las matemáticas recomendarías a un no matemático interesado en leer algo sobre el tema?

El primer libro orientado hacia la divulgación de la materia fue *Matemáticas en el mundo moderno*, una recopilación de artículos sobre Matemáticas de la revista Scientific American cuya versión española corrió a cargo de Miguel de Guzmán. Se publicó mientras yo cursaba COU y aunque me sirvió de referente durante mucho tiempo, le han pasado algunos años. Si ahora tuviese que recomendar un libro de divulgación, recomendaría *La experiencia matemática* de Davis y Hersh. A



algunos quizá les parezca excesivamente divulgativo, a otros tal vez demasiado formal o académico. En todo caso, pone de manifiesto aspectos cruciales de lo que significa hacer matemáticas y de cómo conciben su labor quienes se dedican a ello.

Con los libros de divulgación de las Matemáticas uno se encuentra siempre con el mismo problema. Si la obra sobrevuela la superficie no se ve ningún detalle y el lector se lleva una idea tan falsa como frívola de lo que son las Matemáticas. Los gráficos y figuras podrán tener muchos y vistosos colores, pero no residen ahí ni su belleza ni su esencia. Las Matemáticas no se aprecian desde la superficie. Hay que sumergirse para ver el esplendor de vida del arrecife coralino. Aquí es donde unos encallan y donde otros hallan alimento. De quedarse en la superficie adolecen mucho los libros de divulgación matemática de tipo periodístico. En mi opinión, actualmente esa onda periodística se traslada a las aulas con demasiada frecuencia.

Aparte de los mencionados, ¿destacarías algún otro libro por su belleza, originalidad, repercusión...?

Hace unos años, mientras preparaba mi tesis, me sumergí en *What is Mathematics?*, de Courant y Robbins. Mi deleite fue tal que me pregunté por qué no me recomendaron este libro cuando estudiaba la carrera. Para los un poco versados en la materia me parece una obra extraordinaria. Si me diesen a escoger un libro de Matemáticas para llevarme a una isla desierta sería éste. Siempre recuerdo con sumo placer la lectura de por qué es necesaria la definición de continuidad de una función en un punto con epsilones y deltas.

Otro libro adorado es *How to Solve It*, de George Polya. No es un libro viejo (el original es de 1948), sino un clásico que trasciende épocas y que continúa siendo un referente para quienes nos dedicamos a esta profesión. Muchas veces me he preguntado por qué los profesores no utilizamos más libros libres como éste en lugar de libros hechos ex profeso como los de texto.

Por su repercusión y belleza destacaría los libros sobre fractales que se publicaron a lo largo de la década de 1990. *The Science of Fractal Images* es una recopilación a cargo de Peitgen y Saupe de artículos redactados por autoridades sobre el tema, entre ellos Benoit Mandelbrot. Las aproximaciones visuales a los conjuntos de Julia y Mandelbrot que permite este libro constituyen un ejemplo de cómo el desarrollo tecnológico influye en el desarrollo del conocimiento. Hoy en día la dimensión fractal es un indicativo utilizado en el diagnóstico de enfermedades y en muchos otros ámbitos.

> *Recuerdo también la imagen que inspiraba el trabajo del Grup Zero. Las matemáticas eran algo vivo que una instantánea no podía captar*

¿Puedes aportar alguna cita de tus lecturas que tenga que ver con las matemáticas que hayas incorporado a tus referencias?

Que la enseñanza de las Matemáticas no debe ocultar su realidad es algo que Imre Lakatos ya destacó en su obra *Pruebas y refutaciones*:

> El estilo deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. (Lakatos, 1994, p. 166)

La educación matemática tradicional se ha caracterizado siempre por el autoritarismo, el dictado y el dogma, adjetivos muy apropiados para el uso de las reglas de la lógica y de los axiomas. Pero lo cierto es que:

> Yes, mathematics has two faces; it is the rigorous science of Euclid but it is also something else. Mathematics presented in the Euclidean way appears as a systematic, deductive science; but mathematics in the making appears as an experimental, inductive science. Both aspects are as old as the science of mathematics itself. (Polya, 1988, p. vii)

Eso da pie a la creatividad, un aspecto que Courant y Robbins destacan y relacionan también con la experimentación, la analogía y la intuición. La lógica no explica:

> It should be remarked that although the principle of mathematical induction suffices to *prove* this formula (5) once this formula has been written down, the proof gives no indication of how this formula was arrived at in the first place ...The fact that the proof of a theorem consists in the application of certain simple rules of logic does not dispose of the creative element in mathematics, which lies in the choice of the possibilities to be examined. The question of the origin of the *hypothesis* (5) belongs to a domain in which no very general rules can be given; experiment, analogy, and constructive intuition play their part here. (Courant y Robbins, 1996, p. 15).

Las Matemáticas no se aprecian desde la superficie. Hay que sumergirse para ver el esplendor de vida del arrecife coralino. Aquí es donde unos encallan y donde otros hallan alimento

En tus lecturas ajenas a las matemáticas (literatura, arte,...), ¿has encontrado algún libro recomendable en el que las matemáticas (como resultados o como inspiración) jueguen un papel interesante?

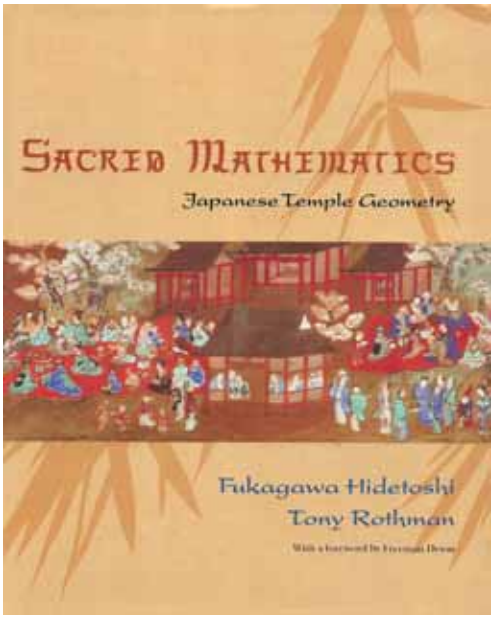
Muchos escritores no matemáticos han hablado por boca de sus personajes de las Matemáticas. Los hay que utilizan ideas matemáticas para elaborar una trama o, incluso, para planear o resolver un crimen. Pero me interesan más los autores capaces de hablar de un concepto o idea matemática de tal forma que, o bien ese concepto o idea se hacen más comprensibles, o bien aportan una perspectiva nueva que el matemático había pasado por alto. En este sentido algunos relatos de Jorge Luis Borges como *El libro de arena*, *El disco*, *Los dos reyes y los dos laberintos*, y *La biblioteca de Babel* me parecen excelentes y muy recomendables. Los protagonistas de esos relatos son objetos y espacios: el libro de arena, de infinitas páginas; el disco, bidimensional; el laberinto más difícil, el desierto sin puertas ni pasillos; y la biblioteca tridimensional.

Hay otros autores como Ítalo Calvino que incluyen términos e ideas matemáticas en sus textos de tal forma que el relato, gracias a esa lógica y rigor, acaba siendo mucho menos fantasioso de lo que parecía al principio. Además, algunos de esos destellos matemáticos me han inspirado el planteamiento de nuevos problemas, como ocurrió con la sección *Las ciudades invisibles*. En el caso de Calvino, *Las cosmicómicas* también daría para hablar mucho.

¿Qué libro te resulta más interesante entre los últimos que has leído sobre matemáticas?

El año pasado, en la librería Kinokuniya de Sinjuku (Tokio), adquirí un ejemplar de *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, de Fukagawa Hidetoshi y Tony Rothman. La obra trata de los problemas matemáticos que los monjes redactaban y resolvían en tablillas de madera que luego eran colgadas a las entradas de los templos. Esos problemas reciben el nombre de *sangaku* y la mayoría consiste en resolver problemas geométricos relativos a la inscripción de unas figuras en otras, generalmente círculos en círculos o círculos en triángulos.

Este es un libro interesante por diversos motivos. Primero, porque plantea problemas poco corrientes. Segundo, porque me parece loable y entrañable colgar un problema a la entrada de un templo. Es un regalo muy hermoso. Y tercero, porque se pone de manifiesto, una vez más, la universalidad de las matemáticas. Pero no como axioma académico, sino como conclusión social y cultural, ya que todos los matemáticos acabamos planteándonos los mismos problemas. Uno de los problemas de los que habla ese libro formaba parte de una ponencia que expuse en las X JAEM celebradas en Zaragoza en 2001, aunque entonces desconocía su relación con los sangaku.



Coméntanos algún libro no matemático que hayas leído últimamente y que te gustara especialmente.

El último libro no matemático que he leído es de Haruki Murakami: *El fin del mundo y un despiadado país de las maravillas* (Tusquets editores, 2009). Se trata de una obra con algún trasfondo matemático. Por un lado el protagonista se dedica a realizar *shufflings*, es decir, reordenamientos y cálculos que codifican y descodifican información. Para ello es necesario tener la capacidad de separar mentalmente los dos hemisferios del cerebro. El protagonista vive dos historias paralelas que se desarrollan en espacios y tiempos aparentemente distintos. En una de ellas se le ha separado de su sombra, su otro yo. En la otra, sufre toda clase de vicisitudes por algo que desconoce y de lo que no es responsable. El nexo entre ambos mundos lo constituyen precisamente las bibliotecas y la lectura de sueños en los cráneos de los unicornios cuyo pelaje se vuelve dorado en otoño. Sólo así acabará por recuperar el sentido de su vida.

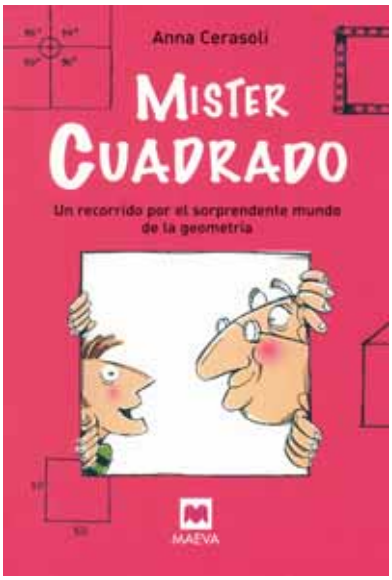
He aquí el único pasaje matemático del texto (Murakami, 2009, p. 341):

> —El palillo enciclopédico es un juego teórico inventado por un científico de no sé dónde. Se basa en una teoría según la cual se puede grabar toda una enciclopedia en un mondadientes. ¿Sabe cómo?
> —Pues no.
> —Es muy sencillo. La información, es decir, el contenido de la enciclopedia, se pasa por entero a cifras. Se van pasando todas las letras a cifras de dos dígitos. La A se convierte en 01, la B en 02 y así sucesivamente. El 00 es un espacio en blanco; los puntos y las comas también se pasan a cifras. Delante de cada alineación se pone una coma decimal. De todo ello resulta una ristra de decimales de una longitud exorbitante. Por ejemplo: 0,1732000631... A continuación se hace una marca en el punto del palillo que corresponde a esta cifra determinada. Por ejemplo, al 0,50000... le correspondería un punto situado hacia la mitad del mondadientes; al 0,3333..., un punto situado a un tercio de la punta. ¿Lo entiende?
> —Sí.

Supongo que, dicho así, nuestros alumnos también lo comprenderían. ■

Escaparate 1:
Un recorrido por el sorprendente mundo de la geometría

Míster Cuadrado
Un recorrido por el soprendente mundo de la geometría
Anna Cerasoli
Maeva, Madrid, 2009
ISBN: 978-84-9269-09-6
167 páginas



Este es el tercer libro de una serie que comenzó con *Los diez magníficos*, y continuó con *La sorpresa de los números*. En todos ellos a través de las conversaciones que un profesor de matemáticas jubilado mantiene con su pequeño nieto, la autora realiza un recorrido por el mundo de las matemáticas, sus ideas y personajes. El volumen que nos ocupa, dividido en diecisiete capítulos ilustrados, está dedicado íntegramente a la geometría, tanto del plano como del espacio.

Aunque el título hace referencia al cuadrado, no es la única figura geométrica que aparece, si bien es el que tiene mayor protagonismo como elemento recurrente a lo largo de todo el libro.

Los primeros capítulos están dedicados a la geometría en el plano. Remontándose al antiguo Egipto, cuando los escribas del faraón recomponían las lindes deshechas por las inundaciones del Nilo, el abuelo va explicando las ventajas de elegir el cuadrado frente a otros cuadriláteros para obtener la superficie máxima con el perímetro mínimo. Posteriormente, sirviéndose de la historia de la fundación de Cartago, explica que es el círculo la figura que cumple tal propiedad. Además se analiza alguna característica del círculo y su aprovechamiento en las máquinas a lo largo de la historia para facilitar las tareas de los hombres.

Los mosaicos y el llenado del plano son temas abordados en los capítulos centrales, no con mucho detalle, pero sí con el suficiente como para ser el inicio de actividades de ampliación con los alumnos.

Con el título de *Míster cuadrado en el espacio*, el capítulo 10 inicia un recorrido de la geometría en tres dimensiones. El volumen de los cuerpos y la historia de la corona del rey Hierón son los temas principales. Se trasladan al espacio algunas de las cuestiones vistas en el plano, como el hecho de que es la esfera el cuerpo geométrico que mayor volumen acoge con la menor superficie. El abuelo pone curiosos ejemplos que hacen cierta la frase "la naturaleza no derrocha en embalajes". La construcción de los sólidos platónicos, la fórmula de Euler y las cónicas explicadas con un reloj de arena, son tratados en estos capítulos.

En la parte final la autora se adentra brevemente en la topología y en la geometría esférica y, en general, no euclidiana, para completar su recorrido por la geometría.

También hay que reseñar la introducción en el relato de sucesos históricos, leyendas, origen de algunas palabras y los trabajos y anécdotas que acompañan a la vida de algunos matemáticos ilustres. Aunque si en algo destaca el texto es en la aproximación a las matemáticas desde situaciones cotidianas y en la búsqueda de símiles para explicar conceptos matemáticos. Esto se puede apreciar en la manera de abordar la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado a partir de

Ricardo Alonso
IES Salvador Victoria, Monreal del Campo (Teruel)

la colocación del alicatado de un baño, o la explicación de las diferencias entre figuras congruentes, semejantes y afines, utilizando una fotografía, o la relación de la disposición circular de los rebaños con el problema isoperimétrico.

La lectura es sencilla y clara, por lo que este libro puede ser un buen material para llevarlo al aula. Además el hecho de que los capítulos sean prácticamente independientes, permite realizar una lectura selectiva, lo que abre más el abanico de posibilidades de trabajo con el alumnado.

Escaparate 2: Una conjetura indomable

GOLDBACH
UNA CONJETURA INDOMABLE
Carlos Sánchez Fernández y Rita Roldán Inguanzo
Nivola, Madrid, 2009
ISBN: 978-84-92493-44-9
144 páginas

Tengo una especial simpatía por la colección *La matemática en sus personajes*. Mi renovado interés por la historia de las matemáticas ha coincidido con la aparición de esta prolongada serie de magníficos libros. En este caso se trata de descubrir quién se esconde detrás de una conjetura que resiste el asalto de su demostración desde su formulación en 1742, llegándose a plantear la posibilidad de que se tratase de una proposición indecidible.

La conjetura de Goldbach ha trascendido el mundo académico, una rareza que la coloca junto al teorema de Pitágoras o al recientemente demostrado teorema de Fermat. A modo de ejemplo me gustaría mencionar el libro *El tío Petrus y la conjetura de Goldbach* de Apostolos Doxiades y la película *La habitación de Fermat* que tienen como eje central de su argumento la conjetura y pueden ser utilizados como recursos didácticos en secundaria y bachillerato.

La historia de la indomable conjetura se origina en la correspondencia entre Goldbach y Euler, motivada por una hipótesis incorrecta de Pierre de Fermat. "Parece que todo número mayor que dos es suma de *trium numerorum primorum*", escribe Goldbach el 7 de Junio de 1742. "Todo número par es una suma *duom numerorum primorum*, afirmo que esto es un teorema, pero no puedo demostrarlo", responde Euler el 30 de Junio. Actualmente se distinguen la conjetura binaria o fuerte que afirma que todo número par mayor que dos se puede escribir como suma de dos primos y la conjetura débil o ternaria que establece que todo impar mayor que siete se puede descomponer como suma de tres primos. La veracidad de la conjetura fuerte implica la conjetura débil, aunque se han dedicado esfuerzos a demostrar directamente esta última.

Pedro Latorre
IES Tiempos Modernos (Zaragoza)

El libro está dividido en tres largos capítulos que se pueden leer de forma independiente. El primero de ellos describe el entorno histórico y la apasionante vida de Goldbach. Un viajero por los centros del saber del siglo XVIII, hasta que se convierte en secretario de la Academia de Ciencias de San Petersburgo y tutor de los zares. En su correspondencia con los grandes científicos de la época, principalmente con Euler, sugiere, discute y plantea hipótesis sobre las propiedades de los números enteros. Es en esta labor de motivador y catalizador de la actividad de sus colegas donde reside la gran aportación de Goldbach a las matemáticas. Resultan muy interesantes las ficticias entrevistas con Goldbach y Euler que cierran el capítulo.

El segundo capítulo del libro nos muestra los trabajos de Goldbach sobre sumación de series, en muchos de los cuales trabajó conjuntamente con Euler. Se trata de un capítulo de matemáticas casi formales que agradará a los interesados en conocer los ingeniosos métodos empleados en la manipulación de series, descubriendo los errores que se cometían por la ausencia del concepto de convergencia. Nuestro protagonista fue pionero en el estudio de las series que se convertirían un siglo después en el embrión de la función Zeta de Riemann. Curiosamente, o quizá no tanto si nuestro conocimiento sobre las intrincadas relaciones entre los números primos fuese mayor, la hipótesis generalizada sobre los ceros de dicha función implica que es cierta la conjetura débil de Goldbach.

El tercer capítulo está dedicado a conocer el origen de la conjetura, su moderna formulación y los diversos intentos de demostración. El brillante matemático ruso Vinogradov con sus trabajos en el campo de la teoría analítica de números ha dejado prácticamente resuelta la conjetura ternaria. Ha demostrado que es cierta para todo número mayor que N_0, siendo éste un número enorme (su estimación actual es 1.043.000). Una dificultad para completar la demostración, mientras llegan los ordenadores cuánticos, es el elevado tiempo que lleva comprobar si un número es primo. Los avances en la demostración de la conjetura binaria han sido más modestos. El mayor acercamiento se debe a Estermann, que demostró que sólo hay un número finito de números pares que incumplen la hipótesis.

Goldbach fue un generoso repartidor de ideas, ejemplo a seguir en un mundo en que los matemáticos se encierran en los desvanes para que no les quiten la gloria de ser los primeros en demostrar el teorema que los inmortalice. ■

Escaparate 3:
Retrospectiva ácrona de un profesor de matemáticas

¿Y LOS CIRUELOS CHINOS?
RETROSPECTIVA ÁCRONA DE UN PROFESOR DE MATEMÁTICAS
Miguel Barreras Alconchel
Barcelona, Graó, 2009
ISBN: 978-84-7827-717-9
190 páginas

He de reconocer que mi decisión de reseñar este libro fue tomada de manera impulsiva y poco rigurosa. Es cierto, que ya me habían hablado bien de él, pero cuando lo recibí en casa y abrí la caja supe inmediatamente que me iba a gustar. No sé si se debió a mi debilidad hacia los libros encuadernados en mate e impresos en papel hueso, pero la verdad es que me resultó atrayente desde el primer momento. Tampoco sabría explicar porqué me vino a la cabeza *Apología de un matemático* de G. H. Hardy; quizás porque también está encuaderna-

do e impreso de la misma forma (al menos en mi edición) y es de un formato similar. Así que lo abrí por el primer capítulo algo predispuesto, empecé a leer y me encontré con esta frase:

> Tengo una guardia y no sé si armarme con una sonrisa fingida, con un cetme apagado o con una paciencia infinita.

Irremediablemente quedé enganchado.

Tal y como reza el subtítulo, Miguel hace un repaso de su trayectoria como profesor de matemáticas, realizando saltos temporales que le llevan a diferentes épocas de su vida. Así, lo podemos ver como director de un instituto de Guadalajara y, a continuación, como un asustado niño en un pupitre de colegio. De esta forma nos ofrece un panorama de las aulas visto desde todos los puntos de vista, mostrándonos como algunas cosas, lamentablemente, no han cambiado, y que los niños de ahora no son tan distintos a como lo éramos nosotros.

El libro está estructurado en 62 capítulos, la gran mayoría de ellos de un par de páginas, y repleto de anécdotas, algunas graciosas y otras no tanto, lo que da lugar a una lectura rápida y entretenida. Además, no hay que olvidar que el autor ha sido premiado en numerosas ocasiones en su faceta de contador de historias, faceta que, por supuesto, no olvida, y nos regala alguno de sus interesantes relatos. Es más, a diferencia de cuando leemos sus historias de manera independiente, aquí podemos entender a dónde nos quiere llevar con sus narraciones. El capítulo 52 es un claro ejemplo de ello: una historia onírica, rozando el surrealismo, pero que en las siguientes páginas encuentra un enlace nada ficticio.

Ironía, humor, críticas ácidas e, incluso, dura sinceridad es lo que podemos encontrar en esta obra. El autor pone por escrito ideas que mucha gente tiene en la cabeza pero que no se atreve a decir públicamente; como mucho, en una conversación de café con un colega muy allegado. Tampoco tiene pelos en la lengua a la hora de hablar de personas con nombre y apellidos (compañeros, ministros, inspectores…), aunque, para hacer honor a la verdad, en la mayoría de las ocasiones suele adornarlo con apreciaciones positivas. Sólo hay un momento en el que se muestra inmisericorde y es cuando habla de las actitudes de algunos funcionarios (de toda la escala), esos que él llama "vagos simpáticos" (véase, por ejemplo, el capítulo 54).

El libro ya empieza a tener su recorrido; por ejemplo, en las jornadas de Logroño fue motivo de conversación de pasillo. Quizás quien no conozca personalmente al autor puede pensar que ofrece una imagen algo pesimista de nuestra profesión. Hablando sobre este asunto con un amigo me dio la clave de cómo se podía expresar la relación entre las palabras de Miguel y su práctica diaria. Esta clave era en forma de cita; yo tengo mala memoria y peor erudición, así que tuve que buscar en Internet la cita y el autor para poder incluirla en la reseña. Finalmente, la encontré en un blog:

> Cultivemos el pesimismo de la razon y el optimismo de la voluntad. (A. Gramsci)

¿Adivinan cuál es la profesión del autor del blog? ¡Bingo!, profesor de secundaria.

Daniel Sierra
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)

suma+ 63
Febrero 2010, pp. 107-112

Janos Bolyai: la revolución de la geometría no euclídea

Hace ciento cincuenta años, en 1860, enfermo como estaba de una neumonía, moría a los 57 años de edad Janos Bolyai, el más grande de los matemáticos húngaros, y, junto con Lobachevski, el primero que dio a conocer una geometría en contradicción con el quinto postulado, también llamado de las paralelas, de Euclides.

Farkas Bolyai

Janos era hijo de Farkas, otro buen matemático, al que su hijo, como veremos, estuvo tan íntimamente ligado que no es posible comprender la vida y la obra de Janos con independencia de la de su padre. Farkas era un hombre inteligente, culto, y de amplios intereses. Desde niño destacó por su talento para las matemáticas, además de mostrar un gran interés por la música (tocaba el violín), el dibujo y el teatro (además de trabajar como actor llegó a escribir algunas obras de teatro).

A los 20 años, Farkas se trasladó a Gotinga para ampliar estudios en su Universidad, famosa en aquel entonces por la libertad de pensamiento, razón por la cual era muy frecuentada por los habitantes de Transilvania. Allí conoció a Gauss, con el que estableció una profunda amistad. De regreso a su tierra, Farkas mantuvo una amplia correspondencia con Gauss que resultó ser con el tiempo enormemente valiosa para la historia de las matemáticas. Por lo demás, pronto obtuvo una plaza de profesor de Matemáticas, Física y Química en el Colegio Calvinista de Marosvásárhely (actualmente la ciudad rumana de Târgu Mures), trabajo que conservó durante toda

su vida. Con este motivo, publicó varios manuales escolares, que culminó con la obra, redactada en latín, *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae introducenci* (Intento de introducir a la juventud estudiosa en los elementos de la matemática pura), dedicado a los alumnos de las clases superiores del colegio. En esta obra recopila toda la matemática de su tiempo, estableciendo los fundamentos de la geometría, la aritmética, el álgebra y el análisis. El propio Gauss, cuando la conoció, elogió el alto grado de rigor y precisión que se apreciaba en ella.

Santiago Gutiérrez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
hace@revistasuma.es

Farkas había escrito todas sus obras en latín, excepto los *Elementos de aritmética*, redactada en húngaro. Parece ser que este hecho fue el que motivó su elección como miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de Hungría, si bien en el departamento de Ciencias Naturales y no en el de Matemáticas, como sería lo suyo.

Además de sus clases y la redacción de sus libros, Farkas dedicó buena parte de su vida al estudio de los fundamentos de la geometría, con un interés especial por el postulado de las paralelas. Ante este postulado, lo más que había conseguido es sustituirlo por otro equivalente, a saber, *tres puntos no alineados pertenecen a una misma circunferencia*.

Janos Bolyai

Hijo del primer matrimonio de Farkas, Janos nació en Kolozsvár, en casa de sus abuelos maternos, el 15 de diciembre de 1802. Su padre se encargó desde la primera infancia de su formación matemática. Ya de bien pequeño dio muestras de un gran talento. En realidad, era un verdadero niño prodigio. Sobre su infancia así se expresa Szénássy:

> A la edad de cuatro años podía distinguir ciertas figuras geométricas, conocía la función seno y era capaz de identificar las principales constelaciones. A los cinco años aprendió a leer por sí solo. Estuvo muy por encima de la media a la hora de aprender lenguas, principalmente el alemán, y música, de forma que a los siete años era capaz de tocar el violín haciendo tales progresos en este instrumento que muy pronto interpretó obras de concierto (de violín).

Janos no tuvo una enseñanza normalizada, a través de la escuela, hasta los nueve años. Según sabemos por una de las cartas que su padre dirigió a Gauss en 1816, a los catorce años ya dominaba la matemática superior, incluidos el cálculo diferencial y el cálculo integral, y hablaba nueve idiomas extranjeros (el chino y el tibetano, entre ellos). En 1817 hizo su examen final, con lo que Farkas hubo de plantearse el problema de donde enviar a su hijo para realizar la enseñanza superior. Habría querido que fuese a la Universidad de Gotinga y se alojase en casa de Gauss, y en este sentido le escribió la oportuna carta. Pero, a éste no pareció gustarle las exigencias que Farkas le imponía. Así que nunca contestó a la carta.

Tras un breve paso por la Facultad de Artes de la Escuela de Marosvásárhely, ingresó en la Imperial y Real Academia de Ingenieros Militares de Viena. Dada su buena formación sólo tuvo que cursar los cuatro últimos años de los ocho que componían todo el programa de la Escuela, no sin manifestar una cierta aversión por la disciplina militar. En 1821 murió su madre, en 1822 se graduó, y en 1823, nombrado subteniente, fue destinado a la fortificación de Temesvár.

Desde 1820, estando aún en la Academia, no había dejado de investigar sobre el famoso postulado euclídeo de las paralelas, lo cual no podía por menos de enorgullecer a su padre, que comprobaba en su hijo el talento de un genio.

En 1824, Farkas se casó de nuevo, con Teresa Somorjai, con la que tuvo dos hijos, Gergely y Berta, si bien la niña falleció con muy pocos años.

De 1826 a 1832, pasó por sucesivos destinos, en Arad, Lemberg y Olmüd, y sufrió diversas vicisitudes. En Arad padeció fiebres persistentes, probablemente de la malaria, luego, cogió el cólera, y por si fuera poco, en el traslado a Lemberg, el carruaje en que viajaba tuvo un accidente, a consecuencia del cual se produjo heridas de consideración en la cabeza. Poco a poco fue perdiendo el escaso interés que le inspiraba la carrera militar, al mismo tiempo que aumentaba su dedicación e interés por las matemáticas. Sus investigaciones en este sentido empezaban a absorberle de tal manera que llegó a pedir una baja temporal de tres años para dedicarse por entero a ellas. Tal petición le fue denegada, pero en 1833 fue separado del servicio, quizá debido a su deteriorada salud, con una pensión de capitán de segunda clase. Ese mismo año, falleció Teresa, la segunda mujer de su padre.

A la edad de cuatro años podía distinguir ciertas figuras geométricas, conocía la función seno y era capaz de identificar las principales constelaciones.

Se fue entonces Janos a la casa paterna de Marosvásárhely. Conoció a Rosalía Kibédi Orban y, aunque quiso casarse con ella no pudo hacerlo, porque se le exigía el dinero de un aval, según las normas vigentes para todo oficial del ejército, pero que no tenía. En vista de eso, decidió convivir con Rosalía y trasladarse a Domáld, ya en 1834, con gran disgusto de su padre que veía en esa unión una mancha para la reputación de la familia. La pareja tuvo dos hijos, y las penurias económicas no tardaron en llegar. La escasez de la pensión y la mala gestión de la finca de Domáld por parte de Janos acabaron pasando factura, y, no pudiendo soportar los gastos de la casa, en 1846 se trasladó toda la familia de nuevo a Marosvásárhely. En 1849, al fin Janos y Rosalía pudieron casarse legalmente, ya que durante la guerra de la independencia dejó de tener vigencia la necesidad del aval.

En 1852, Janos abandonó a su familia, quizá pensando que así se congraciaría con su padre, que nunca había aprobado la unión de su hijo con Rosalía. Pero, este afán por agradar a su padre no hacía más que confirmar la estrecha relación, intelectual y afectiva, entre padre e hijo, de modo que éste no habría logrado romper el vínculo paterno en toda su vida. La salud de Janos comenzó a deteriorarse, así que tuvo que acogerse a los cuidados de una persona, Julia Szöts. Fallecido el señor Farkas, en 1856, Janos se vió obligado a vender la finca de Domáld, repartiendo el beneficio con su hermanastro Gergely.

Poco tiempo después, el 27 de enero de 1860, la sirvienta de Janos, Julia Szöts, escribió a Gergely comunicándole la gravedad de la enfermedad que padecía Janos, y que debía acudir urgentemente. La carta tenía una posdata:

> Mientras escribía esta carta, ha muerto, por lo que no hay más que decir: el capitán se ha ido.

Los antecedentes de las geometrías no euclideanas

Para comprender la magnitud de la obra de Janos debemos de tener en cuenta el problema de partida y la razón por la que tantos matemáticos lo abordaron durante más de veinte siglos a lo largo de la historia. La cuestión que se planteó es si el V postulado de Euclides era realmente un postulado, o sea, independiente de los otros cuatro, o por el contrario podía deducirse de ellos y, en consecuencia, no resultaba necesario para la construcción del edificio geométrico de Euclides.

Pero, ¿por qué precisamente fue el V y no otro el postulado que llamó la atención de los matemáticos en este sentido? Quizá la razón hay que buscarla en la redacción con que estaba formulado. Euclides se expresa así:

> Se pide:
>
> Que de cualquier punto se pueda conducir una recta a todo otro punto. (Postulado I)
>
> Y que, toda recta limitada, se pueda prolongar indefinidamente por derecho. (Postulado II)
>
> Y que con cualquier centro y cualquier distancia, se pueda describir un círculo. (Postulado III)
>
> Y que Todos los ángulos rectos sean iguales entre sí. (Postulado IV)

Junto a enunciados tan sencillos e intuitivos como los de estos cuatro primeros, el V postulado se describe de una forma un tanto compleja. Dice:

> Y que si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte, menores de dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encontrarán de la parte en que son los dos ángulos menores de dos rectos[1].

No es de extrañar que este V postulado hubiese llamado la atención, cuando menos, de matemáticos de todas las épocas, como, entre otros, Posidonio (s. I), Proclo, Saccheri, Legendre, Lagrange, y el mismo Farkas, padre de Janos.

Incluso el propio Euclides parece sospechar algo al respecto ya que lo elude siempre que puede, aunque ello le condujese a recorridos más largos en sus demostraciones. Todos los matemáticos que se enfrentaban al V postulado intuían que podría ser demostrado a partir de los otros cuatro. Si esto fuera así, pensaban, el hecho de negarlo llevaría a una contradicción, y en caso contrario, si no se encontraba contradicción, y en algún momento resultaba necesario para poder continuar, es que el V postulado era independiente de los otros cuatro, y por tanto indispensable para la construcción geométrica de Euclides.

Farkas Bolyai

Lo que hacían estos matemáticos era sustituir el enunciado de Euclides por otro, pero con el resultado de que entonces se podía demostrar el V de Euclides, es decir, que en realidad sustituían el postulado de las paralelas por otro equivalente. Así, el jesuita italiano Saccheri demuestra que el V postulado de Euclides es equivalente al siguiente:

> *La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos.*

Precisamente esta afirmación es una de las que tiene que demostrar Euclides antes de su proposición 29 para eludir el postulado de las paralelas.

La forma equivalente del V postulado que más se extendió, y que suelen recoger los textos matemáticos, como hace nuestro P. Puig Adam, demostrando incluso su equivalencia en la Geometría Métrica, tomo I, es la siguiente:

Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a ella.

Esta formulación del V postulado, atribuida generalmente al matemático inglés John Playfair, si bien no ha conseguido su objetivo de demostrar la independencia del postulado euclideano, ha servido, como veremos, para sugerir la solución del problema, ya que lo traslada directamente al terreno del paralelismo. Ahora bien, Euclides da una definición un tanto abierta del concepto de rectas paralelas:

Paralelas son las rectas de un plano que prolongadas por sus dos partes en ninguna de ellas se encuentran.

Y como señala muy bien Santaló:

Queda así abierta la posibilidad de que existan rectas asintóticas, es decir, rectas que, como ocurre con la hipérbola y sus asíntotas, nunca se encuentren, pero que sin embargo no se conserven equidistantes, sino que su distancia llegue a hacerse tan pequeña como se quiera, sin reducirse nunca a cero.

la genialidad de Janos consistió en sustituir el V postulado por un contrario, y no como habían hecho los matemáticos anteriores, que lo sustituían por otros enunciados a la postre equivalentes

La obra de Janos Bolyai

Con todos estos antecedentes, tenemos al joven Janos estudiando en Viena, en 1820, enfrascado en la cuestión de las paralelas, lo mismo que hiciera su padre, aunque sin ningún éxito. Este llega a advertirle en una emotiva y patética carta, en ese mismo año de 1820, de los peligros que encierra dedicarse a ese tema, invitándole a abandonar la investigación. Se expresa en los siguientes términos:

No debes intentar ese camino hacia las paralelas, yo lo conozco hasta su final. He atravesado esa noche sin fondo que extinguió toda la luz y toda la alegría de mi vida. ¡Por Dios! Te suplico que abandones las paralelas, aborrécelas como si fuera una pasión indecente, te pueden privar (como me ha ocurrido a mi) de tu tiempo, de tu salud, de la tranquilidad de espíritu y de la felicidad de tu vida…Yo ya me convertí en un mártir que deseaba suprimir la imperfección de la geometría y retorné purificado al mundo…Volví a ellas, sin embargo, cuando me di cuenta de que ningún hombre ha sido capaz de encontrar el fondo de esa noche. Lo hice desconsolado y lleno de una gran pena. He viajado por todos los escollos de este infernal mar Muerto y siempre he vuelto con el mástil roto y las velas rasgadas…Arriesgué atolondradamente mi vida y mi felicidad. Aut Caesar aut nihil (O Cesar o nada, divisa de Cesar Borgia)

Incluso, en una carta a un amigo, se expresa Gauss en términos sumamente elogiosos para Janos: considero a este joven geómetra Bolyai como un genio de primera clase

Parece ser que Janos había hecho amistad con Szász, durante su estancia en Viena, y que ambos amigos mantenían largas conversaciones sobre la cuestión de las paralelas, incluso, según indica Roberto Bonola, fue el propio Szász quien le dio la idea de sustituir el V postulado por otro que considerase la paralela a una recta por un punto exterior a ella como la posición límite de la secante a la recta dada, que gira alrededor del punto exterior, es decir, una recta, esta posición límite, asintótica a la dada.

De cualquier manera que fuese, el caso es que la genialidad de Janos consistió en sustituir el V postulado por un contrario, y no como habían hecho los matemáticos anteriores, que lo sustituían por otros enunciados a la postre equivalentes, con lo que no podían conseguir el objetivo.

En 1821, Szász abandona Viena, muere su madre, y Janos, solo y entristecido se entrega al trabajo denodadamente en la nueva dirección que habían tomado sus especulaciones. Al cabo de dos años, después de sustituir el V postulado por este otro:

Por un punto exterior a una recta pasan infinitas paralelas.

en clara contradicción con el V de Euclides, desarrolla nuevamente una geometría, en abstracto, y cree haber conseguido su objetivo. Desde su primer destino, en Temesvár, año de 1823, escribe eufórico a su padre:

> ¡Mi querido y buen padre! Tengo tanto que escribirle acerca de mis nuevos hallazgos que, por el momento, no puedo discutirlos aquí en profundidad, así que se los voy a escribir en una cuartilla aparte…Estoy decidido a publicar ahora una obra sobre la teoría de las paralelas, apenas haya ordenado la materia y las circunstancias me lo permitan. Por el momento no he encontrado aún el camino definitivo, pero he descubierto cosas tan hermosas que yo mismo me he quedado sorprendido de ellas…Ahora no puedo añadiros nada más; solo esto: he creado un mundo nuevo y diferente a partir de la nada… Estoy tan persuadido de que esto me dará gloria, como si eso ya hubiera sucedido.

Ese mundo nuevo a que alude Janos en su carta, es lo que conocemos hoy como la geometría hiperbólica.

Cuando Farkas leyó la carta de su hijo pensó de entrada en publicarla. Incluso en 1825 recibió la visita de Janos en Marosvásárhely, pero este se marchó decepcionado al comprobar el poco interés que su padre había mostrado por la teoría. Da toda la impresión de que no la entendió suficientemente como para poder valorarla en sus justos términos.

Cuando viajaba a su destino de Lemberg, en 1831, Janos volvió a visitar a su padre. Esta vez sí que fue mejor comprendido. Farkas le recomendó que redactara su trabajo lo antes posible para su publicación, eso sí, como *Appendix* a su *Tentamen*. Si bien la preimpresión del Apéndice se hizo en 1831, no salió en el primer volumen del *Tentamen*, todo ello en latín, hasta 1832. El apéndice ocupaba tan solo 24 páginas.

La intervención de Gauss

No tardó Farkas en enviar una copia del Appendix a su amigo Gauss. Le pedía su opinión sobre el escrito de Janos. Pero tuvo que hacerle Farkas un segundo envío, al año siguiente, ya que no había recibido respuesta al primero. Al fin, mes y medio después de recibir este segundo envío, contestó Gauss con una carta nada halagadora. En una de sus partes le decía:

> Respecto al trabajo de tu hijo comienzo por decirte, aunque te sorprenderás por un momento, que si yo lo alabara, ello comportaría alabarme a mi mismo, porque el contenido completo del trabajo, el camino seguido por tu hijo y las conclusiones a las que llega, coinciden casi exactamente con mis propias ideas, que han ocupado mi pensamiento durante los pasados treinta o treinta y cinco años. Esto me ha dejado, en efecto, estupefacto.

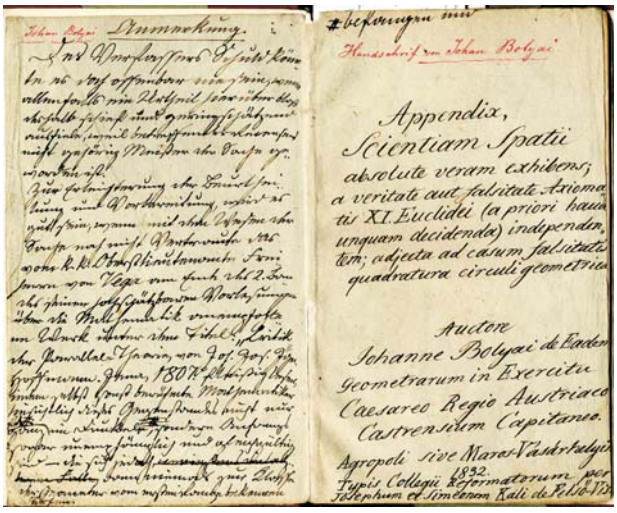
Puede comprenderse la decepción de los Bolyai, tanto del padre como del hijo, pero sobre todo de éste, al enterarse de que ya Gauss conocía al menos las ideas de Jano. Pero, ¿por qué entonces no había desarrollado y publicado nada Gauss sobre el tema? En alguna de las cartas a sus amigos, confiesa que no lo había hecho por miedo a los gritos de los beocios, a que se burlaran de él, en definitiva. Con todo, en la misma carta a Farkas, que tanta decepción supuso para los Bolyai, añade, en otro párrafo:

> Me sorprende en exceso que me despojen de ese trabajo pero, al mismo tiempo, me siento particularmente dichoso de saber que la fatiga de una redacción me ha sido evitada por el hijo de mi viejo amigo, que me ha adelantado de tan excelente manera.

Incluso, en una carta a un amigo, se expresa Gauss en términos sumamente elogiosos para Janos:

> Considero a este joven geómetra Bolyai como un genio de primera clase.

Y en una carta dirigida al matemático alemán C. L. Gerling, reconoce que sus ideas de 1798 (sobre la geometría no euclídea) estaban muy lejos de la madurez que se apreciaba en las de Janos. Parece que Gauss quisiera dulcificar sus despectivas afirmaciones iniciales sobre los trabajos de Janos.


Appendix,
Scientiam Spatii
absolute veram exhibens;
a veritate aut falsitate Axiomatis XI. Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica
Auctore
Johanne Bolyai de Eadem
Geometrarum in Exercitu
Caesareo Regio Austriaco
Castrensium Capitaneo.
Agropoli sive Maros-Vásárhelyi
1832.
Typis Collegii Reformatorum per
Josephum et Simeonem Kali de Felsö-Vis

Las decepciones continuaron

En 1837, Janos había escrito un trabajo, basado en los mismos principios en los que Hamilton basaba su teoría de los números complejos, que titulaba *Responsio*. Lo presentó a un concurso organizado por la Sociedad Científica de Leipzig. No lo ganó. Pero, lo más notable es que se trataba de un trabajo terminado en 1831, es decir, bastante antes de que Hamilton hubiese presentado sus investigaciones sobre el tema a la Academia de Dublín.

En 1848, recibió Janos el escrito de Lobachevski, aparecido en 1829, sobre el tema de las paralelas, coincidente en buena parte con el *Appendix*. ¿Había sido Janos víctima de un plagio? Fue lo primero que pensó, pero posteriormente reflexionó sobre el asunto y, más tranquilo, escribió unos comentarios científicos al trabajo de Lobachevski. Con todo, lo cierto es que Lobachevski se le había adelantado. Hoy sabemos que ambos construyeron sus geometrías independientemente uno del otro, y aproximadamente por las mismas fechas, de modo que la geometría no euclideana hiperbólica es también conocida como la de Bolyai–Lobachevski.

No tuvo éxito Janos Bolyai entre la comunidad científica húngara. De esto se lamentaba Farkas en una carta dirigida a Gauss, en 1836:

> Aquí nadie necesita las matemáticas; aparte de mis alumnos, solo algunas personas sienten algo hacia esa ciencia.

El profesor Hoüel, de la universidad de Burdeos, traductor al francés del Appendix, se expresaba en parecidos términos:

> Me siento afligido al ver lo poco que Hungría aprecia los descubrimientos científicos que se producen en su suelo.

Por su parte, Janos, decepcionado, aislado de otros científicos, no dejó de trabajar por su cuenta y de realizar descubrimientos matemáticos, pero no volvió a publicar ninguna de sus investigaciones. Algunas se han descubierto tardíamente

Janos Bolyai

entre sus papeles, como sobre la axiomatización de la geometría, el cálculo del volumen del tetraedro en la geometría hiperbólica, varios teoremas sobre teoría de números, etc. Se cuenta que dejó escritas más de 20.000 páginas sobre matemáticas.

En su honor se dio el nombre de Bolyai a un cráter sobre la Luna.

HACE ■

NOTAS

1 En la traducción al castellano de los Elementos de Euclides, se sigue aquí la realizada por José Mingot Shelly, de la edición italiana de Federico Enriques, publicada por el Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas. Madrid, 1954.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Enriques, F. (1954): *Los elementos de Euclides*. Madrid: I. "Jorge Juan" de Matemáticas.

Santaló, L. (1961): *Geometrías no euclideanas*. Buenos Aires: EUDEBA.

Garcia Merayo, F. (2009): Janos Bolyai. El geómetra revolucionario. Madrid: Nivola.

suma+ 63
Febrero 2010, pp.113-118

Técnicas estadísticas aplicadas a la música

La estadística, que prepara, sondea y explora los datos para sacar la información oculta en ellos, resulta muy útil para extraer patrones musicales, incluso subjetivos

Para tratar de comprender la naturaleza de la música, necesitaríamos combinar muchas disciplinas diferentes, además de las matemáticas: la física, la psicología, la historia y, por supuesto, la musicología, entre otras. Sin embargo, en este trabajo vamos a centrarnos modestamente en lo que puede aportar para el mejor conocimiento de algunos aspectos de la música una rama de la matemática aplicada: la estadística.

La relación de la música con algunas ramas de las matemáticas como el álgebra es antiquísima y bastante conocida, sin embargo no lo es tanto la relación con la estadística. ¿Por qué sucede esto? En primer lugar hay que decir que la estadística es bastante reciente comparada con otras disciplinas matemáticas. Determinar su fecha de nacimiento es un problema complicado y polémico sobre todo porque primero hay que precisar qué se entiende por estadística. Para esto nos resulta muy útil aceptar la definición que dio V. Barnett en 1973:

> *La Estadística es la ciencia que estudia cómo debe emplearse la información y cómo dar una guía de acción en situaciones prácticas que entrañan incertidumbre.*

Según este criterio, la historia de la estadística no empezaría con los recuentos (censos) llevados a cabo en el mundo antiguo, con fines puramente informativos, acerca de los diversos estados. Estos trabajos se centran fundamentalmente en el proceso de la recogida de datos y pueden considerarse como precursores de la estadística descriptiva, pero no de toda la estadística. Así pues, si adoptamos la definición de Barnett, la estadística no aparecería hasta mediados del siglo XVII, cuando John Graunt (1620 – 1674) y William Pettv (1623 – 1687), dieron los primeros pasos serios en el ámbito de la demografía tratando de extraer conclusiones de los datos.

Desde sus orígenes, la estadística se ha enfrentado a los problemas que la ciencia y la empresa le plantean. En los primeros años de su existencia dichos problemas surgían, a menudo, de experimentos que llevaban a cabo en el ámbito de la agricultura o de la industria. Los retos en las áreas de almacenamiento de datos, organización y búsqueda dieron lugar a lo

José L. Godofredo Pérez
Conservatorio Superior de Música de Valencia "Joaquín Rodrigo"
Teresa León Mendoza
Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

que hoy en día se conoce como *Minería de datos*. Por su parte, los problemas computacionales en biología y medicina han dado lugar a la *Bioinformática*. Pero, además de estas áreas, en muchos campos se están generando enormes cantidades de datos y el trabajo del estadístico es extraer información de ellos (obteniendo lo que se conoce como patrones y tendencias) y comprender lo que dicen los datos: aprender de ellos.

Se suele hablar de dos grandes clases de estadística: la descriptiva y la inferencial. La estadística descriptiva trata de mostrar las características básicas de los datos que se están estudiando. Proporciona resúmenes numéricos (media, mediana, desviación típica, etc.) y gráficos (diagramas de barras, histogramas, etc.) que ayudan a poner de manifiesto la información contenida en el material disponible. Un conjunto de datos sin su análisis descriptivo sería tan inútil como una guía de teléfonos en la que los abonados no están ordenados alfabéticamente. En cambio, con la estadística inferencial se trata de alcanzar conclusiones más generales que no sólo afectarían a los datos concretos que manejamos (muestra) sino a una población más general de la que habrían sido extraídos, es decir inferir de los datos.

Conteo y agrupación de notas

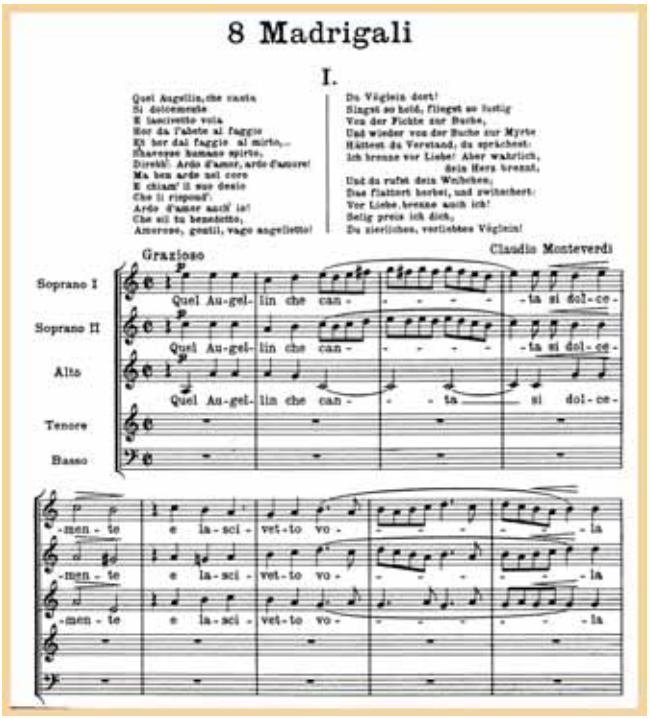
En cualquier ámbito de la música la estadística tiene mucho que aportar. No pretendemos ser exhaustivos, sino sólo dar alguna pincelada acerca de la aplicabilidad de esta parte de las matemáticas en la música.

Si nos planteamos qué se puede analizar estadísticamente en música, la respuesta es que bastantes más cosas de las que uno puede pensar inicialmente. Hay casos en los que un compositor desarrolla un lenguaje musical que mantiene a lo largo de muchos años en gran parte de sus obras. Un análisis estadístico de estas composiciones permite reconocer características propias del autor. También pueden estudiarse estadísticamente los principios melódicos, armónicos o rítmicos subyacentes a la música clásica occidental (periodos Barroco, Clásico y Romántico) o las similitudes y diferencias entre tradiciones musicales de distintas regiones geográficas. Las canciones folk y los cantos religiosos tienen la ventaja, desde el punto de vista estadístico, de su simplicidad ya que normalmente son cortos y muchas veces se componen de una única línea melódica.

Tradicionalmente los datos para estos estudios se recogían mediante el análisis visual de las partituras o el análisis auditivo de las grabaciones musicales disponibles. Estos sistemas consumen bastante tiempo por lo que los estudios que trabajan con este tipo de datos suelen basarse en conjuntos relativamente pequeños de material musical. Utilizando grandes colecciones de material musical digital estas limitaciones se pueden subsanar. Aquí la estadística entra en contacto con las Ciencias de la Computación y hace falta la utilización de software específico para obtener los datos a analizar. Después veremos un ejemplo.

Una de las aplicaciones más sencillas de la estadística a la música sea posiblemente el conteo de notas, intervalos u otros patrones con algún propósito musical. A continuación veremos el método que propone Jan Beran (2004), para que se puedan comparar diferentes voces de una misma obra o diferentes autores, y lo aplicaremos al *8º Madrigali* de C. Monteverdi (Edition Peters Nr. 32342c).

Hemos elegido a Claudio G. A. Monteverdi (1567 – 1643) porque marcó la transición entre la tradición polifónica y madrigalista del siglo XVI y el nacimiento del drama lírico y de la ópera en el siglo XVII. Se trata sin duda, de una figura crucial en la transición entre la música del Renacimiento y del Barroco.



En primer lugar contamos el número de veces que aparece cada nota en cada voz. Posteriormente identificamos las notas que difieren en una o más octavas (es decir hacemos $La_3 = La_4$, por ejemplo) y por último representamos en un diagrama de barras cada una de las notas frente al número de veces que aparece.

Estos diagramas de barras son especiales por dos razones:

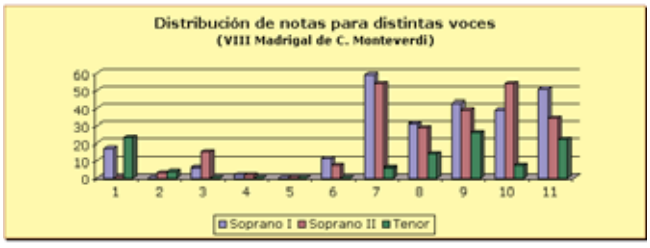
a. El orden en el que aparecen las notas no es el de la escala a la que todos estamos acostumbrados. Primero se determina cuál es la nota que más se repite en la composición estudiada y ésta se toma como origen, a continuación se ordenan las demás por quintas:

... Sol$^{\#}$ – Mi^{b} – Si^{b} – Fa – Do – Sol – Re – La – Mi – Si – Fa$^{\#}$ – Do$^{\#}$ – Sol$^{\#}$ – Mi^{b} ...

b. La nota que más se repite no se representa en el diagrama.

La razón por la que se imponen estas condiciones es la de desligar el gráfico de las notas en sí mismas al tomar como origen la nota que más se repite. Precisamente esto es lo que permite que se puedan comparar gráficamente músicas y autores muy distintos, aportando así una gran versatilidad al método.

En el madrigal que nos ocupa, para las sopranos, la nota que más se repite es el Si, por tanto el orden para representarlas es Fa$^{\#}$, Do$^{\#}$, Sol$^{\#}$, Re$^{\#}$, La$^{\#}$, Fa, Do, Sol, Re, La, Mi. Sin embargo, para el tenor la nota más repetida es el Mi, por lo tanto el orden es Si, Fa$^{\#}$, Do$^{\#}$, Sol$^{\#}$, Re$^{\#}$, La$^{\#}$, Fa, Do, Sol, Re, La. En el diagrama siguiente se muestra la distribución de notas para cada una de las voces.



Aunque para los objetivos de este trabajo no tiene demasiado interés extendernos en las conclusiones que pueden extraerse del gráfico, lo cierto es que un rasgo característico de este madrigal es que la mayoría de las notas son las que están entre las quintas 7^{a} y 11ª medidas desde la nota que más se repite en cada voz. Esta característica, que se repite en otras obras del autor, puede indicarnos que, a pesar del carácter innovador de Monteverdi, la estructura de esta obra es muy similar a la de otros madrigalistas de la época (podéis encontrar otros ejemplos en Beran (2004)).

La extracción de patrones musicales

Otro tipo diferente de estudios son los relacionados con determinar la autoría, el estilo o la cronología de una obra. Para esta clase de análisis se utilizan técnicas estadísticas de clasificación que se pueden agrupar en dos tipos: la supervisada y la no supervisada.

La clasificación no supervisada se conoce también como Análisis de Conglomerados, Taxonomía Numérica o Reconocimiento de Patrones y su finalidad es dividir un conjunto de objetos en grupos de forma que los perfiles de los objetos en un mismo grupo sean muy similares entre sí (cohesión interna del grupo) y los de los objetos de grupos diferentes sean distintos (aislamiento externo del grupo). Podríamos decir que lo que se busca es una clasificación que surja a partir de las características de la muestra con la que trabajamos y que posteriormente habremos de interpretar. En la clasificación supervisada, sin embargo, se adjudican nuevos objetos a unas clases predeterminadas basándose en la información de los objetos ya clasificados.

En nuestro caso, los objetos podrían ser composiciones musicales descritas a través de diferentes características musicales. Como ejemplo podemos citar la tesis doctoral de D. C. Jacobson (1986), que analizó unos 40.000 compases de la música de Schubert para tratar de asignar dos trabajos no datados.

A pesar de que actualmente tiene mucho interés el tema de la clasificación por géneros, se trata de un problema que no está, ni mucho menos, resuelto, ya que se trata de una división condicionada por factores culturales, sociales e históricos, y carente de definiciones estrictas. De hecho, el número de géneros musicales utilizados por algunas tiendas de música *online* para clasificar sus archivos musicales es diferente. Amazon, por ejemplo hace una división entre 24 géneros distintos, iTunes utiliza 17, buymusic.com 16, y Napster.com tan sólo 9. Algunas de estas tiendas utilizan incluso divisiones en subgéneros musicales. En este tipo de situaciones, cuando se manejan grandes volúmenes de datos, la estadística colabora con las Ciencias de la Computación en estos estudios.

Vamos a ver un ejemplo sencillo de agrupamiento de *clips musicales* que nos puede mostrar el potencial de estas técnicas.

El conjunto de datos que usaremos fue recogido por una profesora norteamericana, la Dra. Diane Cook, para su clase de análisis de datos. Los obtuvo a partir de su propia colección de CDs. Utilizando el software *Amadeus II*© para MacIntosh grabó cuarenta segundos de algunas canciones como fichero WAV, que es un formato de audio desarrollado por Microsoft, bastante utilizado en Windows. Los ficheros fueron procesados mediante un software que convierte los ficheros de audio en datos numéricos[1].

A partir de los CDs, la profesora Cook comprobó que todos contenían canales izquierdo y derecho y obtuvo los valores de las siguientes variables:

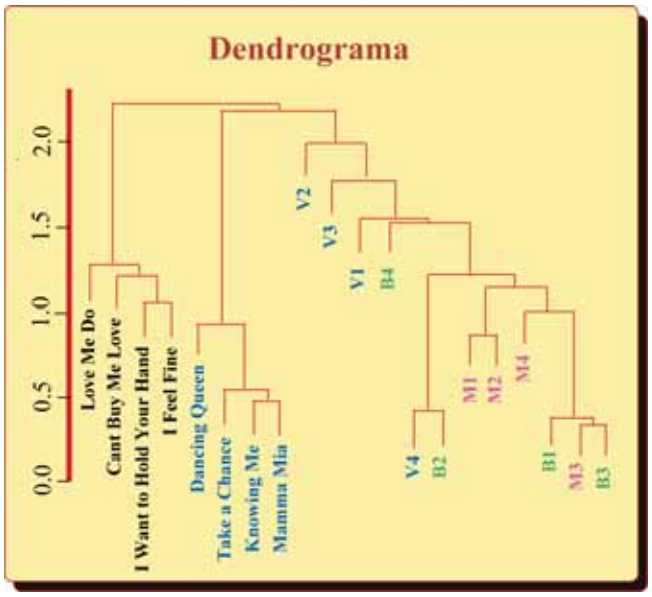
- LAve, LVar, LMax: media, varianza y máximo de las frecuencias del canal izquierdo.
- LFEner: un indicador de la amplitud (o volumen) del sonido.
- LFreq: Mediana de las localizaciones de los 15 picos más altos del periodograma[2].

Por ejemplo, las medias de las variables anteriores para 4 canciones de Abba: *Dancing Queen*, *Knowing Me*, *Take a Chance* y *Mamma Mia* y las canciones de los Beatles: *Love Me*, *I Want to Hold Your Hand*, *Can't Buy Me Love* y *I Feel Fine*, aparecen en la tabla siguiente:

Música	LVar	LAve	LMax	LFEner	LFreq
ABBA	10937673.8250	-88.5769	28204.2500	103.1746	72.8533
Beatles	54822800.000	-5.8673	28168.5000	111.2894	157.9452

Con estas variables hemos descrito cada composición mediante un vector de cinco componentes que utilizaremos para clasificarla, olvidando la información acerca de su autor, género, etc. Esta identificación entre un vector y una obra musical es la que nos permitirá obtener agrupaciones o similitudes que, de otro modo, podrían pasar inadvertidas

Para mostrar unas gráficas más sencillas nos hemos quedado con una parte del conjunto de datos de la Dra. Cook, en concreto con 4 canciones de *Abba*, 4 de los *Beatles*, 4 fragmentos de Vivaldi, 4 de Mozart y 4 de Beethoven. La cuestión fundamental sería: ¿Podemos agrupar los fragmentos en un número pequeño de grupos de acuerdo a su semejanza en cuanto a las características de audio obtenidas?



Agrupación por semejanza de algunas obras de Vivaldi, Mozart, Beethoven, los Beatles y Abba

Para obtener este gráfico, llamado *dendrograma*, hemos realizado lo que se conoce como un análisis de conglomerados jerárquico. Inicialmente, cada objeto forma su propio grupo y el algoritmo procede iterativamente uniendo en cada paso los dos grupos más parecidos continuando hasta que todos forman parte del mismo grupo. El dendrograma es una especie de diagrama de árbol donde cada paso del agrupamiento jerárquico se representa como la fusión de dos ramas del árbol en una. Las ramas representan los grupos obtenidos en cada paso del algoritmo.

Hay varios elementos que intervienen en un análisis de este tipo:

- Una medida de distancia entre los objetos a clasificar.
- Otra medida que dé la distancia entre grupos.
- Un criterio que indique cómo agrupar.

A partir de las agrupaciones que aparecen en el dendrograma, podemos observar que las composiciones de *Abba* se parecen bastante (en cuanto a las características consideradas) ya que rápidamente se van uniendo en una misma rama, sin embargo las de Vivaldi son muy diferentes. Las canciones de los

Beatles están más separadas que las de *Abba* de las piezas de música clásica consideradas. Además, es de destacar que Mozart y Beethoven, para algunas obras presentan una gran similitud (están en el mismo grupo en la parte inferior del gráfico), o que algunas obras de Beethoven se parecen más (para los criterios analizados) a las de Mozart o a las de Vivaldi que a otras obras de él mismo.

La estadística y la psicología de la música

En psicología de la música, es decir la investigación científica que estudia la relación entre la música y la mente humana, es absolutamente imprescindible el uso de la estadística si lo que se pretende es dar validez a alguna conjetura acerca de los procesos mentales de aprendizaje, creación, percepción, etc. Por dar algún ejemplo, podemos mencionar los numerosos estudios, a veces contradictorios, que investigan el desarrollo de la percepción de la emoción en la música tratando de discernir qué parte es innata y qué parte se debe a asociaciones aprendidas que se desarrollan durante la infancia.

Otro ejemplo bastante conocido es la polémica acerca de si los acordes y tonalidades mayores expresan alegría mientras que los menores se asocian a tristeza. De hecho, en algunos foros de internet, se intercambian opiniones al respecto. Hay quien argumenta que se pueden encontrar muchas canciones alegres con acordes menores, pero también hay firmes defensores de la idea de que éstos añaden un toque de tristeza usados apropiadamente.

Antes de describir la aportación de la estadística en esta polémica, vamos a recordar lo que es un acorde y cuándo se denomina mayor o menor.

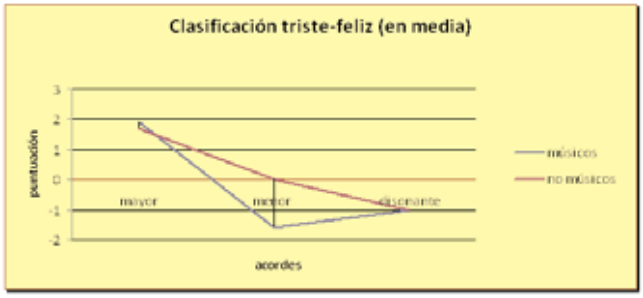
Un *acorde* consiste en tres o más notas diferentes que suenan simultáneamente o en arpegio (una sucesión rápida de las notas). Si las notas del acorde no han sido cambiadas de octava, se dice que en el acorde no hay ninguna inversión, y en otro caso que sí que la ha habido. Se dice que el acorde sin inversiones es *mayor* cuando la distancia interválica entre el grado fundamental (primera nota) del acorde y la que dista una tercera corresponde a una tercera mayor, es decir, de dos tonos. Si la tercera es menor (un tono y un semitono) se dice que el acorde es *menor*. Por ejemplo, Do Mi Sol es un acorde mayor porque entre el Do y el Mi hay una tercera mayor, mientras que Do Mi^b Sol es un acorde menor porque entre el Do y el Mi bemol hay una tercera menor.

A continuación resumiremos un estudio, llevado a cabo por un grupo de investigadores fineses y daneses, publicado por la Academia de Ciencias de Nueva York (véase Pallesen et al. (2005)), con el propósito de ilustrar algunos pasos de la metodología estadística:

1. Establecer claramente los objetivos y las hipótesis que se desean analizar.
2. Especificar detalladamente las características relevantes de los participantes en el estudio y el experimento que se llevó a cabo.
3. Presentar los resultados utilizando representaciones gráficas e indicadores numéricos y elaborar una conclusión.

En la experiencia participaron veintiún individuos diestros, con una edad media de 26 años, 14 de ellos eran mujeres y 11 tenían educación musical clásica (eran músicos). Se les hizo escuchar 9 acordes de piano pertenecientes a las clases: mayores, menores y disonantes, abarcando cada uno de ellos tres octavas de La_3 a La_5. Los sujetos escucharon los acordes y después de someterlos a un escáner cerebral se les pidió que clasificaran las connotaciones emocionales de cada acorde sobre dos escalas de 11 puntos, la primera de valorando de desagradable a agradable y la segunda de triste a feliz.

Durante la audición pasiva de los acordes aparecieron diferentes respuestas cerebrales en las imágenes obtenidas por resonancia magnética, en concreto los acordes disonantes y menores dieron lugar a mayores respuestas en varias áreas cerebrales. Sin embargo, no se observó diferencia significativa entre las imágenes cerebrales de los músicos y de los no músicos. En cuanto a la evaluación emocional de los acordes llevada a cabo por los sujetos, los músicos clasificaron como más tristes a los acordes menores que los no músicos.



Enseguida se nos ocurren comentarios e inquietudes acerca del estudio. Por ejemplo cuestiones de tamaño y representatividad de la muestra. Nos dejaría más tranquilos que se hubiera sometido al estudio a más personas, podría ser importante saber si todos los individuos tenían niveles de estudios semejantes, etc.

Podemos recordar el argumento de nuestro *internauta* acerca de que hay canciones felices con acordes menores y vemos que este estudio realmente no lo refutaría ya que los acordes fueron escuchados aisladamente y no dentro de una canción.

También resulta interesante el hecho de que, a pesar de que no hay diferencias en cuanto a actividad cerebral, al menos en las imágenes obtenidas por resonancia magnética, los músicos encuentren más tristes los acordes menores que los sujetos que no eran músicos. Quizá en sus estudios musicales se les ha podido reforzar esa opinión.

Nos gustaría hacer énfasis en que, aunque en el caso de los acordes mayores se observa una diferencia de valoración entre los músicos y los no músicos, esta diferencia no es significativa, es decir puede explicarse por el efecto del azar a la hora de elegir a los sujetos del estudio, de igual manera que se acepta en otros experimentos. Cuando lanzamos una moneda equilibrada esperamos que la diferencia entre caras y cruces sea 0 pero también nos parece razonable observar diferencias de 1, 2 o 3 ya que éstas diferencias se pueden explicar por el azar. Sin embargo ¿qué pensaríamos si observamos 10 caras y ninguna cruz o 10 cruces y ninguna cara, es decir, una diferencia de 10? Esto nos parece contradictorio con el hecho de que la moneda esté bien equilibrada ya que esta diferencia se explica muy difícilmente por el azar: la probabilidad de que observemos una diferencia de 10, estando la moneda bien equilibrada es de 0,004427, así pues afirmaríamos (con una pequeña aunque no nula probabilidad de equivocarnos) que la moneda está correctamente equilibrada.

No nos gustaría concluir el trabajo sin reiterar que lo que aquí presentamos no es más que una pequeña muestra de la utilidad de la estadística en la música, pero que los aspectos en los que actualmente estas disciplinas están relacionadas son muy numerosos y no ha hecho más que comenzar. Piénsese, por ejemplo, desde el punto de vista comercial, en la venta de música por internet, el envío de publicidad musical personalizada siguiendo los gustos musicales del comprador, etc. Desde el punto de vista artístico, las técnicas estadísticas facilitan la posibilidad de crear músicas que representen la esencia de una época histórica (por ejemplo para películas) a través de la extracción de patrones de varios autores del periodo que se quiere recrear. Se trata por tanto de un campo en el que la colaboración entre matemáticos y músicos puede ser muy fructífera.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos de investigación TIN2008-06872-C04-02 y TIN2009-14392-C02-01 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

NOTAS

1 Podéis encontrar los datos de esta experiencia en http://www.public.iastate.edu/~dicook/stat503/cs-music.pdf.

2 En el anterior trabajo de Musymáticas aparecen varios periodogramas obtenidos con Amadeus II.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Beran, J. (2004). *Statistic in Musicology*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.

Gutierrez Cabria, S. (1982). Origen y desarrollo de la estadística en los siglos XVII y XVIII. *Estadística Española*, 97, pp. 19–32.

Jacobson, D. C. (1986). Franz Schubert: expanding the realm of harmonic and formal thought. c. 1810-1828. Santa Bárbara: Tesis doctoral, University of California.

Nettheim, N. (1997). A Bibliography of Statistical Applications in Musicology. *Musicology Australia*, 20, pp. 94–106.

Pallesen, K.J., Brattico, E., Bailey, C., Korvenoja, A., Koivisto, J., Gjedde, A. y Carlson, S. (2005). Emotion Processing of Major, Minor, and Dissonant Chords. A Functional Magnetic Resonance Imaging Study. *Annals of New York Academy of Sciences*, 1060, pp. 450–453.

Internet

http://www.public.iastate.edu/~dicook/stat503/cs-music.pdf

http://es.wikipedia.org/wiki/Acorde

http://nettheim.com/publications/statistics-in-musicology/statistics-in-musicology.html

suma+ 63
Febrero 2010, pp. 119-123

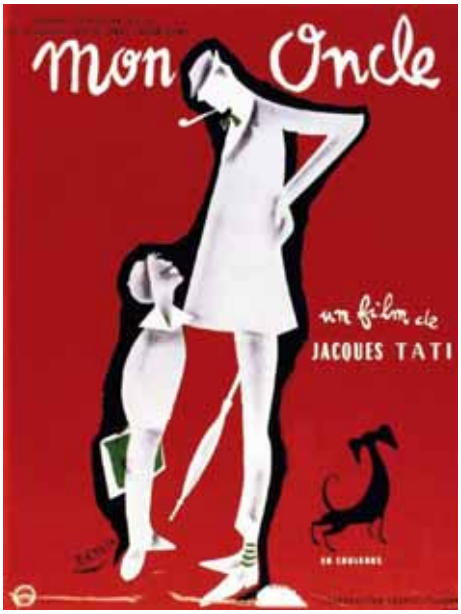
El humor geométrico de Jacques Tati

Fijamos hoy nuestra atención en el cineasta francés Jacques Tati. Si tras leer estas líneas se anima a ver sus películas, a quien no lo conozca, le espera una agradable sorpresa; a los que ya lo conocían, la ocasión de volver a disfrutar de su genio, ahora en clave matemática.

Jacques Tatischeff (Pecq, Yvelines, 1907 – París, 1982), de ascendencia rusa, realizó una filmografía breve pero suficiente para ser ya un clásico: además de varios cortos, tan sólo 6 largometrajes. Éstos son:

Día de fiesta (*Jour de fête*, 1949). Asistimos al acontecimiento anual que altera la apacible vida de un pueblo de la campiña gala, la Fiesta local. François el cartero, tras ver en un noticiario los sofisticados métodos del servicio de correos en EEUU, decide ser un "cartero a la americana", buscando siempre *¡rapidez, rapidez!*. Derrocha voluntad e imaginación, pero también provoca un desaguisado tras otro, para regocijo de sus convecinos. Escarmentado, vuelve a ser el cartero de siempre.

Las vacaciones de Mr. Hulot (*Les vacances de Mr. Hulot*, 1953). En un centro vacacional costero los veraneantes repiten sus costumbres urbanas. Mr. Hulot, un tipo corriente, desentona en ese ambiente snob. Su espontaneidad desencadena una serie de catástrofes que rompen la calma del lugar y le devuelven la vida.



Mi tío (*Mon oncle*, 1958). Los ridículos y superficiales parientes de Mr. Hulot viven en la Villa Arpel, un chalet de diseño, con los mecanismos y electrodomésticos más avanzados. Hulot entra a trabajar en la fábrica de plásticos de su cuñado. En ambos lugares, su inexperiencia y sus despistes provocan el caos. A partir de aquí Tati modera el tono de su humor anterior, pasando de los gags evidentes a la confianza en la inteligencia del espectador.

José María Sorando Muzás
IES Elaios, Zaragoza
decine@revistasuma.es

Play time (1967). Elaboradísima crítica de la nueva organización social que ordena todos los ámbitos. Hulot deambula por un aeropuerto, unas oficinas, una feria de exposiciones, unos modernos apartamentos y un restaurante de lujo. Todo es amplio, frío, gris y rectilíneo; de acero, hormigón y cristal. También las relaciones entre la gente están pautadas. Las torpezas de Hulot desencadenan una serie de imprevistos que lo desordenan todo y devuelven a la ciudad el color, las curvas y la risa.

Tráfico (*Traffic*, 1971). A bordo de su increíble R4 acondicionado como roulotte, Mr. Hulot atraviesa el caos circulatorio de carreteras saturadas, con atascos, choques, averías, discusiones, etc.

Zafarrancho en el circo (*Parade*, 1974). Reportaje sobre una función circense donde Tati es el maestro de ceremonias.

Tati consiguió un estilo propio y singular. El suyo no es cine mudo, pero en él los diálogos no son dominantes; forman parte del sonido ambiente, mezclados con los ruidos y las voces de la calle. Algo similar ocurre con la acción, inserta en lo cotidiano. Se diría que vemos pasar la vida en la pantalla. Pero no nos engañemos, la aparente filmación de hechos corrientes se basa en la construcción minuciosa de las situaciones. Y en ese cuidado de los detalles, lo geométrico tiene especial importancia.

Recientemente se editó un pack-antología de 4 DVDs (DeAPlaneta 2004) con *Día de fiesta*, *Las vacaciones de Mr. Hulot*, *Mi tío* y *Play time*. Todas las escenas a las que en adelante se hace referencia se pueden ver en:
http://catedu.es/matematicas_mundo/CINE/Tati.htm.

Maneras de vivir

En pleno desarrollismo de los 60, el cine de Tati nos muestra la transición entre dos mundos, entre dos formas de vida: la tradicional, apacible, variopinta y humilde; y la moderna, automatizada, uniforme y pretenciosa. Lo hace con una intención humanista, y aún diría ecologista, reivindicando frente a los excesos del progreso la vida sencilla y el contacto humano, un medioambiente físico y social que nos permita vivir en armonía. Usa para ello la reducción al absurdo, mostrando el creciente sinsentido a que conduce la llamada modernidad. Decía Tati:

> Ciertamente, tenemos confort, pero el precio ha sido altísimo: se ha acabado la fantasía. Sólo los niños conservan la imaginación

Tanto en el barrio como en el pueblo (*Día de fiesta*), hay vendedores ambulantes, juegos infantiles y charlas entre vecinos (imagen 1: *Mi tío* 1). No hay prisas y sí bromas y picaresca. En la ciudad moderna el protagonismo es de la arquitectura y las máquinas, es un mundo impersonal. Mr Hulot busca denodadamente y sin éxito a un individuo en el laberinto ortogonal de la oficina, donde el encuentro con el otro es imposible (imagen 2: *Play Time* 1). El gag premonitorio de los oficinistas que, pese a estar en compartimentos próximos, se comunican por teléfono, hoy no nos resulta extraño.

En *Mi tío*, un muro semiderruido separa el barrio viejo y la zona moderna. El niño de la futurista Villa Arpel, y también su perro, lo saltan para volver a la alegría del barrio, a las travesuras con los demás niños y perros callejeros.

En el mundo moderno, tan serio y ordenado, la persona común se desenvuelve entre la perplejidad y el desconcierto. Esa "persona común" está encarnada por Monsieur Hulot, personaje que protagoniza 4 películas, interpretado por el propio Tati: larguilucho, despistado y cortés; siempre con gabardina, sombrero, paraguas y pipa. Intenta adaptarse a las nuevas máquinas y a los edificios ultramodernos. Pero no acierta en el uso de los objetos, su paraguas incomoda, tropieza con las paredes acristaladas… Sus actos, aunque bienintencionados, desembocan en pequeños desastres. Torpeza que escenifica su inadaptación a un medio hostil.

Imagen 1: *Mi Tío* 1

Imagen 2: *Play Time* 1

Imagen 3: *Play Time* 2

Imagen 4: *Mi Tío* 2

Imagen 5: *Play Time* 3

Imagen 6: *Play Time* 4

Geometría expresiva

Tati usa la geometría de las situaciones como medio expresivo de las vivencias. Hay un precedente en la obra maestra y primer film del expresionismo alemán, *El gabinete del Dr. Caligari* (Robert Wiene, 1920), donde ángulos agudos y planos inclinados configuran escenarios amenazadores que transmiten la desazón y el agobio del drama que en ellos se desarrolla.

El gabinete del Dr. Caligari

Para Tati la arquitectura retrata el modo de vida. Decía: "La gente no se siente feliz rodeada por todas partes por líneas geométricas". En *Play time* lo expresa con un formalismo geométrico impecable, potenciado por el formato panorámico. La sala de espera es un gran ortoedro de cristal donde los individuos vagan hacia ninguna parte, como peces en un acuario (imagen 3: *Play time* 2).

Tati logra convertir esa expresividad geométrica en fuente de humor. Mr. Hulot frente a la máquina que escupe un tubo de plástico sin fin, lucha con la manguera cuyos bucles se retuercen indómitos (imagen 4: *Mi tío* 2). Tiendo a ver esta escena como la lucha con una curva, seguramente influido por las veces que he visto a mis alumnos en esa disputa sobre un papel en blanco.

Ya en *Día de fiesta* se conseguía la risa del espectador jugando con elementos geométricos como: la posición relativa de varios planos (escena del cartero que está borracho y no consigue subir a la bici), los cambios de dirección (escenas del izado del mástil y del pelotón ciclista) o la disposición espacial de los personajes (escena hilarante del campanario). Pero es en *Mi tío* y en *Play time* donde supera esa fase de primeros intentos y alcanza la madurez de estilo.

Composición geométrica

En algunas escenas, a la citada expresividad se añaden una composición y un encuadre trazados con regla y compás. Así ocurre en la espera del ascensor, al final de un largo pasillo en perspectiva, donde casi se percibe el punto de fuga (imagen 5: *Play time* 3). O también en la gris oficina cuadriculada, con un cubo para cada oficinista (imagen 6: *Play time* 4). Casando geometría e imaginación, Tati convierte el atasco de tráfico concéntrico de una rotonda en un moderno tiovivo lleno de color, apostando una vez más por el desorden frente al orden entendido como dictadura (imagen 7: *Play time* 5).

Imagen 7: *Play Time* 5

Imagen 8: *Mi Tío* 3

Imagen 9: *Mi Tío* 4

Imagen 10: *Mi Tío* 5

Las casas

Mr. Hulot vive en el ático de un viejo e inverosímil edificio, digno de un grabado de Escher (imagen 8: *Mi tío* 3). Le vemos recorrer un itinerario zigzagueante y complicado hasta llegar a su puerta. Algo tan vulgar como un hombre subiendo la escalera de casa nos hace sonreír gracias a esa endiablada geometría.

La modernísima Villa Arpel, casi cúbica, donde todo es "a la última" (ventanas circulares, butacas cónicas, sofá cilíndrico, etc.) y supuestamente funcional, revela ser muy poco práctica (imagen 9: *Mi tío* 4). Parece adquirir vida propia y rebelarse contra los humanos: los aparatos de la cocina no son controlados y el garaje encierra a sus dueños. Esta sensación se reafirma cuando en las ventanas asoman las cabezas de aquellos, cual pupilas en los grandes ojos de la casa (imagen 10: *Mi tío* 5). Mr. Hulot escapa de allí en cuanto puede.

Dirección y sentidos

La señora de la Villa Arpel recibe la visita de una dama tan cursi como ella. Le abre la puerta del jardín con el portero automático y sale de la casa a su encuentro. Al divisarse, cada una en un extremo del sendero que cruza el jardín, ambas abren los brazos y gesticulan, saludándose con afectación. Pero el sendero tiene forma de "S", así que, cuando han andado unos pasos, las vemos caminar en direcciones paralelas pero con sentidos contrarios (imagen 11: *Mi tío* 6). Estando cada una fuera del campo visual de la otra, siempre con los brazos abiertos, sus cumplidos se dirigen al vacío y la ridiculez de la situación escenifica de forma magistral la ridiculez de los personajes. Una dirección y sus dos sentidos… sólo un artista genial podía obtener humor y crítica de estos conceptos.

Coches y coches, circulando todos en la misma dirección y sentido, son en otros momentos plasmación de la ordenada uniformidad (imagen 12: *Mi tío* 7).

Simetrías

Tati construye varias escenas con la simetría como base, como, por ejemplo en *Play time*, la confusión entre las personas y sus nítidos reflejos en el impoluto edificio acristalado. En la sala de espera se da un hábil juego de simetría-asimetría: simetría en las posiciones de los dos personajes a la puerta del despacho; pero asimetría en sus actitudes, atildado y seguro el uno, inquieto y sorprendido el otro –Mr. Hulot– (imagen 13: *Play time* 6).

Jugando, su sobrino ha roto ramas de una planta enredadera que estaba podada de forma simétrica. Mr. Hulot intenta disimular el destrozo y para ello recorta algunas ramas. Piensa que, si se conserva la simetría, no se notará. Pero se confunde al cortar y lo que consigue son nuevas asimetrías. Para compensarlas tiene que seguir cortando y cortando. Podéis imaginar el resultado (imagen 14: *Mi tío* 8).

Cuando visita un moderno edificio de fachada acristalada podemos ver desde la calle lo que sucede en cada piso (ima-

Imagen 11: *Mi Tío* 6

Imagen 12: *Mi Tío* 7

Imagen 13: *Play Time* 6

Imagen 14: *Mi Tío* 8

Imagen 15: *Play Time* 7

Imagen 16: *Play Time* 8

gen 15: *Play time* 7). La colocación de dos televisores, pegados a cada lado de la pared común a dos apartamentos, tiene un efecto cómico. Desde fuera no se ven esos aparatos, pero sí a sus telespectadores, formando una composición con el tabique como eje de simetría, con dos grupos aparentemente enfrentados. Sus gestos ante las pantallas, donde tal vez se emite un partido de fútbol, conforman un aparente y chocante diálogo sin palabras.

Y también recurre a la simetría por giros. Una azafata-locutora está situada en una intersección de pasillos en la oficina ortogonal. Gira 90º y eso produce la perplejidad de Mr. Hulot, quien la había saludado un momento antes y, tras desplazarse por los pasillos hasta una nueva posición, la vuelve a ver igual, como si él se encontrase de nuevo en el mismo lugar (imagen 16: *Play time* 8).

Discontinuidades

El artificioso jardín de la Villa Arpel es de tierras de colores (¡que no hay que pisar!) y tiene dos caminos de losas discontinuas: todo muy "mono" pero, en algunos momentos, muy poco útil. Por ejemplo, cuando la señora y la criada llevan lo necesario para la merienda al aire libre. Con las manos ocupadas, van dando cómicos saltitos para no pisar fuera (imagen 17: *Mi tío* 9). O como cuando Mr. Hulot se cruza con su cuñado y una visita y los tres deben realizar un complicado juego de pisadas y de cinturas, de nuevo para no salirse de las losas (imagen 18: *Mi tío* 10).

Atrapados

Repetidas veces vemos a Mr. Hulot atrapado: por un grupo-rebaño que lo absorbe y transporta, en un inadvertido ascensor, por una puerta mecánica que no consigue abrir, etc. A través de escenarios físicos y humanos, Tati recrea de forma amable el drama de vidas sin escape, donde cada cual está encerrado en su posición y su rutina, dentro de un orden global. Personas atrapadas en sus propios inventos, encerradas y aisladas en la gran cuadrícula social (imágenes 1 y 2: *Play time* 1 y 4). Aunque sobra el espacio en un amplio descampado, el coche tiene perfectamente señalada su parcela… hay que seguir la flecha. La presencia del ciclomotor de Mr. Hulot ocupándola es un ingenuo, pero auténtico grito de rebeldía (imagen 19: *Mi tío* 11).

El estilo y el humor de Tati no han tenido continuadores. En cuanto al uso de conceptos matemáticos para construir situaciones humorísticas, encontramos en los episodios de *Mr. Bean* (Rowan Atkinson) algunos gags que juegan con las simetrías, con la topología y con la estimación, aunque en esos casos se trata de otro tipo de humor: histriónico, de carcajada[1]. Pero el de Jacques Tati es un humor de sonrisa: certero, irónico, inteligente. Disfrutemos con él doblemente, desde el sentimiento y desde la mirada matemática. Como decía Tati: *"la vida es demasiado corta para que sea triste"*.

CineMATeca

NOTAS

1 Zurbano, Eduardo. Las matemáticas de Mr. Bean. Taller en la XIV JAEM. Girona. 02-07-09.

Imagen 17: *Mi Tío* 9

Imagen 18: *Mi Tío* 10

Imagen 19: *Mi Tío* 11

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Francisco Martín Casalderrey**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

Secretariados:
Prensa: **María Peñas Troyano**
Revista SUMA: **Tomás Queralt Llopis/Onofre Monzó del Olmo**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Juana Mª Navas Pleguezuelos**
Actividades con alumnos: **Jordi Comellas i Blanchart**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Carme Aymerich Padilla
CEIP Rocafonda
C/Tàrrega, 41
08304 Mataró (Barcelona)

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38200 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Bermejo Fuertes
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: María José Señas Pariente
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Elena Ramirez Ezquerro
CPR. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

suma+ 63
Febrero 2010, pp.125-132

La corona anual

Imagen 1. Calendario perpétuo

Empieza el año, recibo el nº 62 de SUMA, releo el epígrafe del calendario. Recuerdo le segunda etapa del grupo COM, en 1995, dedicada a elaborar materiales didácticos en torno al tópico que ocupa ahora mis penamientos: el calendario. Recuerdo una de mis contribuciones personales, un cuento:

El calendario de Tai

Tai estaba dispuesta a evitar que su hija fuese ignorada en la sociedad como lo había sido ella.

El día que nació, más bien la noche (que esa es la costumbre de los bebés), tomó buena nota de los detalles que la ayudarían a recordar ese momento: la luna estaba casualmente llena, absolutamente llena. Hacía mucho frío, era la época más fría del año. Tai sabía que la próxima vez que el cielo luciría luna llena las temperaturas serían más benignas. Su niña tendría ya dos lunaciones cuando sus pequeños ojitos verían las primeras flores del almendro. Todo eso sería anotado cuidadosamente por Tai en el libro familiar que comenzó el día de su boda. Por cierto, también había luna llena aquella su primera noche, en su nueva casa, con Poe. Y también hacía mucho frío.

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
ariadna@revistasuma.es

Tres lunaciones más tarde comenzó a sentir extraño su cuerpo, cuando comenzaron las plantaciones de las hortalizas en el pequeño huerto de la aldea.

Tres lunaciones más tarde, Tai ya estaba convencida de que iba a ser madre, la época de calor parecía especialmente intensa. Tai no sabía si era así o ella lo sentía más fuerte que en otras ocasiones por la emoción que le producía sentir el latido de una nueva vida en sus entrañas.

Para la siega del trigo Tai ya estaba muy pesada. Poe cargó por esta vez con una parte del trabajo de Tai. Ambos estaban ilusionados. Pronto, con la vuelta del frío intenso, vendría su primera criatura al mundo: 9 lunaciones desde los primeros momentos (sus periodos coincidían exactamente con los de la luna, por eso pudo contarlos exactamente cuando desaparecieron), 12 desde el día de su boda. Tai lo registraba todo.

En la cueva donde guardaban la cosecha, había un pequeño orificio por el que se filtraba el sol. Cada luna llena, cuando el sol estaba más alto, Tai hacía una marca en el suelo, justo donde estaba la mancha luminosa del sol.

Poe vió aquellas marcas que registraban acontecimientos tan importantes en sus vidas y observó que él no hubiera tabulado el tiempo de la misma forma: en su aldea es costumbre agrupar las jornadas de 7 en 7, "coincidiendo" con la duración de cada fase de la luna.

Le comunicó a Tai la posibilidad de hacer esta agrupación y aquí surgió la primera desavenencia: Tai le hizo ver que 7+7+7+7 son 28 y ella estaba segura, muy segura de que la luna tardaba 29 días y un poco más, cada vez, para pasar de llena a llena (no en vano su periodo coincidía, desde hacía muchos años, con el de la luna).

Como no llegaban a un acuerdo estuvieron pensando en algún procedimiento nuevo y aceptable por ambos. Pasó mucho tiempo, cada cual anotaba los acontecimientos según su criterio, pero ninguno perdía de vista el objetivo: encontrar un criterio común. Mientras tanto la niña iba creciendo, y las responsabilidades de Tai y Poe a lo largo de la jornada también.

Tenían que alimentar a los animales al amanecer, preparar la comida para la familia, cuidar los campos, sacar, vigilar y recoger al rebaño, reparar los desperfectos de la casa y de los útiles domésticos, preparar ropa y alimentos para la época fría o negociar el intercambio de excedentes. Tantas eran las tareas que pronto la niña entró a formar parte del equipo: quedó encargada del rebaño de ovejas. Comenzó a cuidarlas durante la época de la recolección, Tai y Poe estaban abrumados por el exceso de trabajo, necesitaban todas sus fuerzas para terminar la recolección antes de que las lluvias lo echaran todo a perder.

Pronto llegaron las lluvias, los vientos y las escarchas y el día comenzó a ser más corto que la noche. Acortó tanto que Poe y Tai sufrían mucho cuando caía el día, pues temían que la niña se hubiera entretenido excesivamente y le pillara la noche cerrada por el camino.

Tai conocía bién las montañas, los árboles y las casas y también sabía leer lo avanzado que estaba el día en las sombras que arrojaban esos objetos, pero su niña era pequeña y podía confundir unas cosas con otras, de modo que Tai se puso a cavilar para resolver el problema.

Decidió ir, al comienzo de cada fase, y marcar en el suelo una señal, justo en el extremo de la sombra de algún objeto inconfundible, de modo que cuando la sombra tocase esa marca con su extremo, la niña debía iniciar el regreso. Como el sol seguía bajando, cada 7 u 8 días Tai corregía la marca, y para observar mejor el comportamiento de las sombras de las cosas a lo largo del día, plantó un palo en la puerta de la casa. Durante un periodo completo de labores agrícolas fue marcando con piedrecillas la sombra arrojada por el palo, cada día y en diferentes momentos del día. Hizo muchos descubrimientos, pero sobre todo uno la emocionó: transcurridos 365 días, la sombra volvía a ocupar la misma posición que el día que comenzó su experimento ¡ y las marcas en la cueva también!

Le explicó su hallazgo a Poe: el sol le daba la razón a ella.

Tai tenía calculado cada periodo agrícola en 12 lunaciones de más de 29 días por lunación, es decir 348 días (lo que faltaba hasta completar una "solación", un periodo solar, debía ser por el "algo más" de 29 días de cada periodo lunar o lunación).

Desde luego, lo que no cuadraba en absoluto era que las lunaciones fuesen más cortas de 29 días, 28 según la aldea de Poe.

Imagen 2. Eclipse lunar

Poe aceptó la propuesta de Tai, a él también le resultaba atractivo que el periodo solar pudiera dividirse en un número entero de periodos lunares. Tai por su parte aceptó considerar grupos de siete días, semanas en la aldea de Poe, para medir temporadas más cortas que la lunación.

Para celebrar el acuerdo decidieron establecer un día de fiesta, de fiesta grande: sería cuando el día empieza a ser más largo que la noche. Estos días eran para Tai alegres y festivos, pues el clima es benigno, la luz del día vence a la oscuridad de la noche, su niña vuelve a casa rendida antes de que el sol se oculte tras las montañas. Así pues el día de fiesta grande sería último de la semana de luna llena en que el día empieza a ser más largo que la noche. Esta semana está llena de luna y llena de sol, por eso la eligieron para celebrar su acuerdo luni-solar.

Tai siguió durante muchas, muchas solaciones, haciendo observaciones, mediciones y acuerdos con Poe convencida de que en una solación ocurrían 12 lunaciones exactas.

En este empeño perfeccionó los instrumentos de observación, el método para tomar las anotaciones, indagó en otras aldeas otras costumbres y, aunque nunca pudo probar su idea, aprendió mucho del sol, de la luna y de otras gentes. Pero todo ello forma ya parte de otro cuento...

¿Cómo continuó la historia?

Voy a por el libro de Arcadi García i Sanz *Cronografía tópica del calendari julià*. Me recuerda que "año" viene de "annus", que significa anillo, círculo, rueda. Recuerdo los últimos títulos de esta sección: *La corona de...* Decido un título redundante: *la rueda de la rueda*. Recuerdo la inscripción más famosa en otro instrumento de medida del tiempo, el reloj solar: "tempus fugit". Recuerdo a Francis, que ya ha llegado al punto que ha generado toda la creación humana. Recuerdo *La insoportable levedad del ser*, el eterno retorno o parafraseando a Alberto Cortez:

> ¿de qué color es la temperatura? / ¿a cuántos grados funde la ternura, la piel? / ¿cómo se miden las eternas dudas? / ¿cómo se cantan las canciones mudas? /¿qué peso tiene la melancolía? / ¿a qué distancia queda la alegría de ser? / ¿por qué la luz que siempre más alumbra, es la que brilla, pero no deslumbra?... Ya ves/cuántas preguntas quedan en el aire/ cuántas respuestas que no sabe nadie....

Recuerdo su rueda, la rueda del año de Francis, su calendario perpetuo, con el que encandilaba a su público en las aulas. En la base de todos estos constructos, la aritmética del reloj. Recuerdo a otro compañero canario: Carlos Bruno Castañeda, profesor de matemáticas, experto en criptografía y poeta. Le pido que colabore en la propuesta de problemas de este número y en la exposición de su experiencia de aula para el siguiente. Éste ha sido el resultado.

Problemas propuestos

La pequeña Clara jugaba con su relojes y cantaba los versos del venerable Wang Wei. Clara tenía una docena de relojes viejos que no tenían ninguna maquinaria. Había dibujado en ellos números, letras, figuritas o colores. Movía sus manecillas y las canciones y los poemas se podían escribir de mil maneras distintas. A veces las cantaba, a veces las pintaba, a veces las escribía.

*Tomo el reloj de las vocales y, con su rostro iluminado, decía: "*Con la a: Santada sala an la racandata aspasara…*" y seguía, así, hasta el final de la canción. Movía su reloj y la oías: "*...teñe el leed e entene en lergue quente...*". Movía nuevamente su reloj y continuaba, poniendo ahora cara de ogro, "*...On lo hondoro dol bosco...*" Movió finalmente su reloj para terminar diciendo: "*...lu lunu cluru vuunu u ulumunurmu*" Hasta que le dolían los labios apretados y, como ella le gustaba decir: "*Tenía que parar para reírse sin parar.*"*

Tomo una cinta del pelo la enrolló en un palito y escribió seria, letra a letra, la canción sobre la cinta. Satisfecha, desenrolló la cinta y la miró fijamente. Ponía:

SDARD SROUT NOOHR BEEBU AELAE AEEIP AEDOL CEOAO NLENR NURNS NCTET LYNAA NNDSA OLAAE MMTOL OASAL EORNL DEQDS ACVAI EALAN EUÑAN UGTA ULUIA LLIIN

Un tanto preocupada, la ató a la rama del almendro, para ver si el viento entendía el misterio.

Un tanto dubitativa recitó los números:

19 4 13 20 0 3 0 19 15 11 0 4 13 11 0 18 4 2 15 13 3 8 20 0 4 19 16 4 19 21 18 0 20 0 14 15 4 11 11 0 21 3 25 4 13 20 15 13 15 21 13 11 0 18 6 15 2 0 13 20 15 4 13 11 0 7 15 13 3 21 18 0 3 4 11 1 15 19 17 21 4 13 0 3 8 4 11 15 19 0 1 4 11 0 11 21 13 0

*Pareció tranquilizarse. Tomo otro de sus relojes e hizo girar una de sus manecillas. Leyó el número 3, "*El número del emperador que nunca fue emperador*" y escribió la canción así:*

V H P W D G D V R Ñ D H P Ñ D U H F R P G L W D H V S H V X U D W D Q R H Ñ Ñ D X G B H P W R P R X P Ñ D U J R F D P W R H P Ñ D K R P G X U D G H Ñ E R V T X H P D G L H Ñ R V D E H Ñ D Ñ X P D F Ñ D U D Y L H P H D L Ñ X O L P D U O H

Dobló el papelito y lo metió en el hueco del álamo.

Miró al sol y finalmente colocó tres de sus relojes en POE, para convertir los versos de la canción de Wang Wei en indescifrables:

S Q J O H P H S A O I C Z E H S G E B H X I E T H T
T H Y H O X P C S T Z O P J H Ñ S Q J D Q E J Q A O
V V D G P B X E S Q A O L E B H K G E S S O Q D W
G J I C O H X S O E H E Q S O P Z YC O G A O V P K
M T B I P W O K A M C O V B S

Los anotó en una cinta de papel. La dobló en forma de pentágono y la puso sobre una hoja grande y dejó que el agua de la atrajea se lo llevara lejos.

*Cerró los ojos y silvó la canción: "*El albergue entre bambués*".*

Sentada sola en la recóndita espesura
taño el laúd y entono un largo canto.
En la hondura del bosque, nadie lo sabe,
la luna clara viene a iluminarme."

Da pena romper el encanto, pero, el compromiso obliga.

Solución a los problemas del número anterior

Continuación de los propuestos en esta sección, en el número 61 de *SUMA*.

Distancias y radios

En el Colegio Público "Luís Revest" de Castellón de la Plana, se realizaron varias experiencias bajo la supervisión de las profesoras de los grupos de 3º, 5º y 6º de primaria, Angels, Amelia, Lola Fuster y Seri Gil, para celebrar el cuarto centenario de los descubrimientos astronómicos realizados por Galileo Galilei, padre de la Ciencia Moderna. Se comenzó con una visita de los alumnos de 3º al Planetario de Castellón, donde les fue posible comprender conceptos como "equinoccio" y "solsticio" y sus implicaciones en la división del año y la distinta duración del día y la noche según las estaciones. Con el alumnado de los cursos superiores, el día 26 de marzo, realizamos la adaptación de la experiencia, propuesta por la Asociación que gestionó los eventos para el Año Internacional de la Astronomía (2009), sobre la medida del radio de la Tierra,

No debemos perder de vista que la experiencia fue realizada con mucha proximidad al equinoccio de primavera, el 26 de marzo de 2009, fuera del proyecto del AIA pero siguiendo sus directrices y suponiendo una experiencia simultánea en un lugar X, situado en el mismo meridiano que el lugar de la experiencia real (0º de Longitud y 40º de Latitud Norte) y a 2º de Latitud más al Norte. La distancia en Km se midió sobre el mismo mapa que sirvió para la elección de X.

Dado que sólo habían transcurrido 5 días después del equinoccio, la hipérbola de sombras del palo del recogedor, salió casi rectilínea. Previamente, se les mostró, con la ayuda de una naranja enorme casi esférica, cómo, a partir del distinto ángulo de incidencia de los rayos de sol sobre la naranja, era posible deducir la esfericidad de la Tierra y comprender el experimento de Eratóstenes, "el sabio beta, que no era el primero en nada pero era el segundo en todo"

Se les recordó la necesidad de comprender y utilizar el Teorema de Thales y se dibujó un esquema del experimento de Eratóstenes.

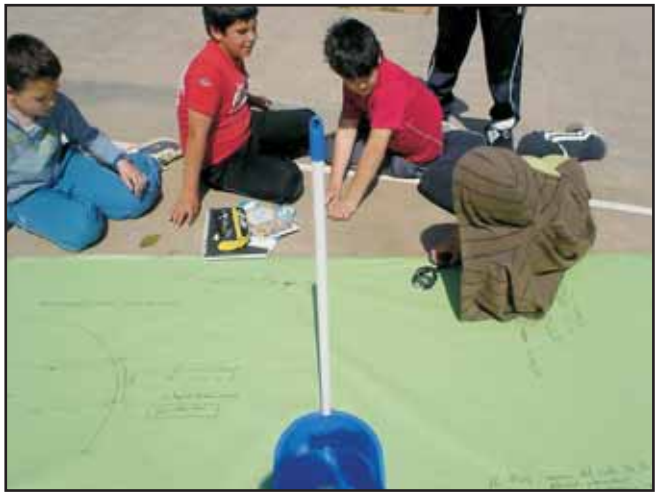


Imagen 3. Eratóstenes en el Luís Revest

Imagen 4. Eratóstenes en el Luís Revest

Imagen 5. Thales en COM I, obra de Tomás Sendra Mut

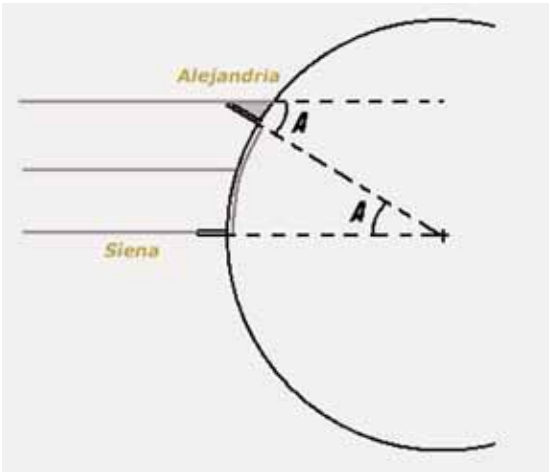


Imagen 6. Radio de la Tierra: Eratóstenes

En Denia, en un acto organizado por Florencio Burrel y Pep Cabrera, con motivo de la apertura del curso para los alumnos y alumnas seleccionados para recibir estímulo matemático, se abrió el debate de cómo medir las distancias y tamaños de la Tierra, la Luna y el Sol.

Estas experiencias se repitieron en el CEP de Córdoba en un taller de Mujeres, Matemáticas y Astronomía, convocado por la asesora Carmen Jalón. Se mostró cómo podía haber ocurrido todo el proceso de mediciones si se hubiera conocido previamente el radio de la Tierra, si se hubiera dispuesto de una fotografía de un eclipse lunar y si las matemáticas avanzaran linealmente.

Pero sabemos que las cosas no ocurrieron en este orden en la historia interna de las matemáticas. Sabemos que Hiparco, el descubridor de la precesión de los equinoccios, gran observador de eclipses, construyó la dioptra especial, un aparato que permitía mejorar la precisión de la observación. Con ella **midió los diámetros aparentes del Sol y la Luna**. Y construyó astrolabios con los que perfeccionó las cartas celestes. Precursoras de los modernos planisferios.

Astrolabio significa buscador de astros, del griego "astron" astro y "lanbanien" buscar. Al astrolabio le sucedió, sin sustituirlo, la esfera armilar, modelo móvil del universo geocéntrico, representación tridimensional de la esfera celeste. La invención del astrolabio plano se atribuye a distintos autores: Diógenes Laercio, Berosio el Caldeo, Arquímedes, Teodosio de Bitinia, Hiparco, Tolomeo. Los astrónomos árabes, muy interesados en la observación de efemérides astronómicas, sacaron buen provecho del astrolabio. Para el mundo islámico era importante predecir con exactitud el momento en el que comienza el Ramadán, esto es, el instante en que la luna y el sol tienen la misma longitud celeste, a la vez que la luna amanece.

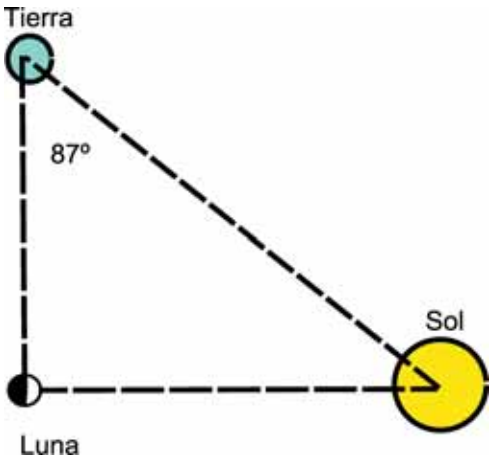


Imagen 7. Distancia y radio Sol

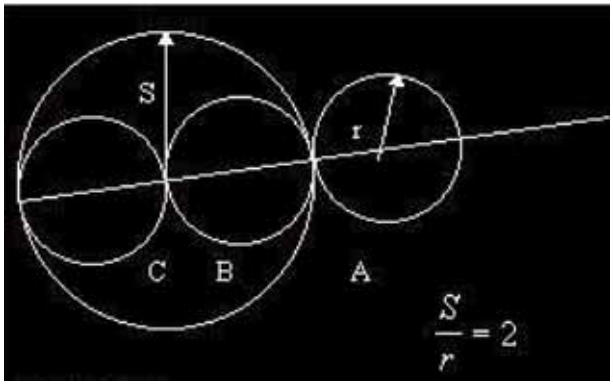
Imagen 8. Astrolabio

Pero, en realidad, las primeras noticias sobre la centralidad del sol y las primeras mediciones de radios y distancias de la Tierra, el Sol y la Luna, se las debemos, entre otros, a Aristarco de Samos.

Hiparco también calculó estas distancias, pero su trabajo consistió en perfeccionarlas. Lo consiguió en casi todos los casos, salvo en la medida del radio de la Tierra, para la que no logró mejorar el resultado de Eratóstenes. Los compiladores de la época, Ptolomeo, Heron e Hipatia, entre otros, transmitieron a la posteridad el resultado de Hiparco, dada la gran autoridad de éste. Gracias a este error, Colón llegó a las Antillas en 1492.

Los cálculos de Aristarco son tan sencillos y claros que dan una idea de la potencia descubridora de las matemáticas, a partir de observaciones precisas y cálculos simples. Puesto que el material de esta sección se mueve entre últimos cursos de primaria, secundaria y bachillerato, y el trabajo de Aristarco se ajusta bien a estos niveles, utilizaremos sus cálculos para contar cómo ocurrió.

Tamaño de la sombra de la Tierra en un eclipse lunar



Donde *r* es el radio de la Luna, *A* es el punto en el que la Luna inicia su contacto con la sombra de la Tierra, *B* es la posición relativa de la Luna y la Tierra cuando se produce la ocultación completa de la Luna por la sombra de la Tierra, *C* es la posición de la Luna cuando comienza a salir de la sombra de la Tierra, se acaba el eclipse total. Es evidente, según el gráfico, que $S=2r$

Aristarco lo averiguó midiendo tiempos: el tiempo que tardaba la Luna en ocultarse por la sombra de la Tierra era aproximadamente la mitad que el tiempo que duraba el eclipse total de Luna.

Distancia de la Tierra a la luna

Aristarco observó que el tiempo que tardaba la Luna en ocultarse en la sombra de la Tierra era aproximadamente de 1 hora es decir que la Luna avanzaba en el cielo en 1 hora su propio diámetro.

Como se sabía que la Luna tardaba 29,5 días en dar la vuelta a la Tierra, resultaba que hacían falta $24 \times 29,5 = 708$ horas, o sea diámetros lunares, para formar el círculo completo.

Así que la distancia lunar era de $708/\pi = 225,4$ veces el radio lunar.

Visto de otra manera el tamaño angular del diámetro de la Luna sería:

$$2r = \frac{360 \cdot 60}{29,5 \cdot 24} \simeq 30,5' \simeq 0,5^{\circ}$$

O sea, el tamaño angular de la Luna es algo más de medio grado (Imagen 9).

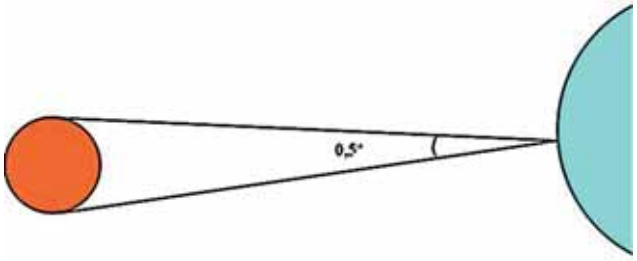


Imagen 9. Diámetro aparente de la Luna

Distancia de la Tierra al sol

Para determinar la distancia de la Tierra al sol, Aristarco observó la luna en fase de cuarto (imagen 7):

Aristarco observó que, el Sol, la Luna, y la Tierra forman un triángulo rectángulo en el momento del cuarto creciente o el cuarto menguante.

Estimó la distancia angular entre la Luna y el Sol en 87° y concluyó que **el Sol estaba 19 veces más lejos que la Luna.**

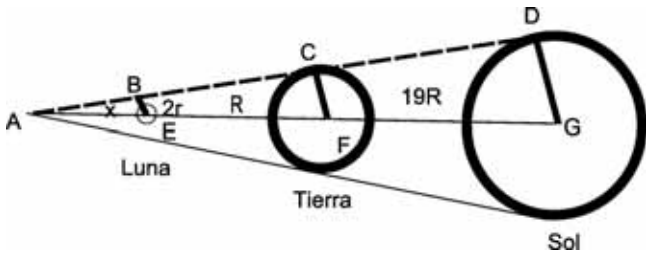
Realmente el Sol está 390 veces más lejos, su razonamiento era correcto, pero las observaciones imprecisas.

Radio del sol

Como la Luna y el Sol tienen casi iguales sus diámetros angulares, dedujo que sus tamaños debían guardar la misma proporción que sus distancias a la Tierra. Luego el Sol debía ser 19 veces más grande que la Luna. Ya hemos dicho que en realidad es 390 veces mayor. Pero también este razonamiento era correcto.

Radio de la luna

Aristarco, imaginó las posiciones de la Tierra, la Luna y el Sol tal como se ven en la imagen siguiente, la cuestión era calcular el radio de la Luna (r) y la distancia a la Luna a la Tierra (R) en función del radio de la Tierra (r_t).



AEB, AFC y AGD son triángulos semejantes, luego se cumple:

$$\frac{x}{2r}=\frac{x+R}{r_t}=\frac{x+20\cdot R}{19\cdot r} \qquad (1)$$

En toda proporción, la suma de antecedentes es a la suma de consecuentes como un antecedente es a su consecuente. Lo mismo se puede postular respecto a la diferencia:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d} \qquad (2)$$

Aplicando las propiedades (2) a (1), se obtiene que:

$$\frac{R}{r_t-2r}=\frac{20\cdot R}{17\cdot r} \qquad (3)$$

Despejando r_t en (3), se deduce que el radio de la Tierra es:

$$r_t=\frac{57}{20}r \qquad (4)$$

Para Aristarco, (4) significa que **el radio de la Tierra es casi tres veces el radio lunar**. El valor correcto con los datos actuales es: 3,66.

Con posterioridad, Eratóstenes determinó el radio de la Tierra y ya fué posible dar un resultado numérico a todas estas cuestiones, pues, conocido el radio de la Tierra, podía obtenerse el de la luna, obtenido éste se podia calcular el del Sol, la distancia lunar y con ésta la distancia del Sol.

¿Cómo es posible medir las montañas de la Luna?

Problema propuesto en *SUMA* 61 por Rosa M. Ros. Universidad Politécnica de Cataluña

Nuestro principal objetivo consiste en calcular la altura de algunas montañas de la superficie lunar a partir de alguna fotografía. Evidentemente nuestro principal interés no está en la precisión de los resultados obtenidos, realmente sólo estamos interesados en demostrar a los estudiantes que ellos pueden realizar observaciones disponiendo de poco instrumental. Para simplificar el proceso deductivo vamos a usar una fotografía tomada en el instante del cuarto para simplificar los contenidos matemáticos y simplificar también el uso de coordenadas astronómicas. La foto debe incluir el diámetro total de nuestro satélite, con el objetivo de determinar el rango de las distancias sobre la superficie lunar.

La superficie, cerca del terminador, se ve sugerente y atractiva. En particular la imagen aparece contrastada y clara, lo que nos permite para tomar mejor las medidas y se puede obtener más precisión.

Determinación de la altura y cálculo efectivo

Mediante la sombra de la montaña producida sobre la superficie lunar podemos calcular su altitud. Evidentemente cuanto más alta es la montaña la sombra aparece más larga y viceversa, pero evidentemente la longitud depende de la posición del Sol, la Luna y la Tierra. Para simplificar al máximo el razonamiento matemático y los contenidos astronómicos sólo consideraremos el instante en que la Luna se encuentra en cuarto creciente o cuarto menguante. En este caso los rayos solares son perpendiculares al terminador. Entonces en la imagen 10, los ángulos D y D' son de 90º.

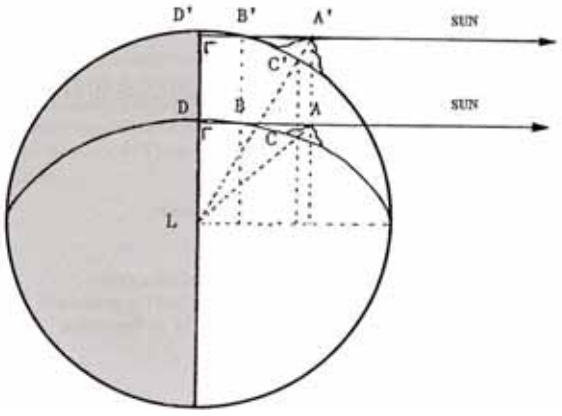


Imagen 10. Esquema de la Luna en cuarto

Los rayos solares forman 90º con el terminador.

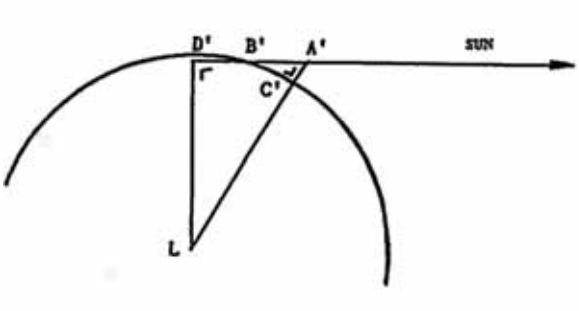


Imagen 11. Los triángulos semejantes A'D'L, A'C'B'

Para calcular la altura de la montaña A, usamos la longitud de su sombra AB, la distancia AD al terminador y el radio de la Luna (Imagen 10). Para calcular la altura de la mencionada montaña A, no presentamos el razonamiento geométrico correspondiente sobre el circulo máximo por A, sino que en su lugar consideraremos el circulo máximo por A' con el objetivo de facilitar la visión geométrica de las relaciones que se usaran. Consideramos pues, el circulo máximo por los puntos ABD proyectado sobre el borde, es decir sobre el círculo máximo A'B'C' (Imagen 11). Los triángulos A'D'L y A'C'B' son semejantes, porque sus lados son perpendiculares entre sí. Las reducidas dimensiones del triángulo B'C'A' permiten aproximar el arco B'C' al segmento B'C' (Imagen 11). A partir de los triangulos se obtiene la relación:

$$\frac{A'D'}{A'C'} = \frac{A'L}{A'B'}$$

Donde denotamos:

- A'D' = AD = d = distancia de la montaña A al terminador, sobre la foto (en cm).
- A'L = h+r = distancia desde el centro de la Luna a la cima de la montaña A = el radio de la Luna r mas la altura h de la montaña (en cm).
- A'C' = h = altura de la montaña A sobre la foto (en cm).
- A'B' = AB = l = longitud de la sombra de la montaña A, sobre la foto (en cm).

Entonces se puede escribir,

$$\frac{d}{h} = \frac{h+r}{l}$$

de donde se obtiene la ecuación

$$h^2 + rh - ld = 0$$

que tiene por solución,

$$h = \frac{-r + (r^2 + 4ld)^{1/2}}{2}$$

Finalmente, introducimos una sencilla proporción entre el tamaño real del objeto lunar y el tamaño sobre la fotografía.

$$H = \frac{R}{r}h$$

donde
H = altura real de la montaña (en m).
R = radio real de la Luna (R=1.738.000 m).
r = radio de la Luna en la foto (en cm).
h = altura de la montaña en la foto correspondiente (en cm).

(Esta última relación también puede ser utilizada para medir longitudes sobre la superficie lunar, porque es una simple proporción.)

En particular, usando este método con diferentes fotografías y eligiendo cráteres próximos al terminador se consiguen resultados con errores del orden de un 10%.

EL HILO DE ARIADNA

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Osuna, L. (1998). *Astronomía E.S.O.* Alicante: Aguaclara.

Ros, R.M. (1998). Estudio de la Superficie Lunar. *Universo, 39*, pp. 62-67.

Ros, R.M. (2003). Measuring the Moon's Mountains, Proceedings of *7th EAAE International Summer School*, pp. 137-156.

Ros, R.M.,Viñuales, E., Saurina, C. (1993). *Astronomia: Fotografia y Telescopio*. Zaragoza: Mira Editores.

En internet:

http://www.astronomia2009.es/
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Astronomia/01/alejandrinos.html

Normas de publicación

1.- Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de SUMA(articulos@revistasuma.es) o su dirección postal:

Revista SUMA, Apartado de Correos 498, 46900 Torrent.

2.- Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CDRom, DVDRom o Pen drive).

3.- Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato MS Word o rtf –tipo de letra Times New Roman y tamaño 12– adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:

i. El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

Y a efectos de comunicación:

ii. El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.

4.- Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (e.g., institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión, reemplace las citas y referencias bibliográficas por "Autor, 2009" o "Autor et al., 2009". En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.

5.- Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…

6.- Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

Ejemplo: *Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.*

7.- El texto estará en una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25000 caracteres sin incluir espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.

8.- Es imprescindible que los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes sean guardados en formato **TIF, EPS** o **JPEG**, a una resolución de 300 ppp. y en color original. Éstos se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo debe estar claramente identificado y se debe indicar en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

9.- Si alguna expresion no se puede escribir con los carácteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de equaciones, fuera del texto y si no fuera posible se incorporará como imagen.

10.-La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, siguiendo las normas APA.

Ejemplos

Libros:

Apellido del autor, coma, inicial/es del nombre, punto, fecha entre paréntesis, punto, título en letra cursiva, punto, lugar de edición, dos puntos, editorial, punto.

Filloy, E., Rojano, T. & Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Capítulos en libros

Cuando se cita un capítulo de un libro, el cual es una compilación (reading), se cita en primer lugar el autor del capítulo y el título del mismo, seguidamente el compilador (Comp.), editor (Ed.) o director (Dir.), coordinador (Coord.), título (las páginas entre paréntesis). Lugar de edición: y editorial, igual que en la referencia de cualquier libro.

Puig, L. (2006). La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Castellón: Publicacions de la Universitat Jaume I.

Artículos en revistas

Lo que va en letra cursiva, es el nombre de la revista. Se debe especificar el volumen de la revista y las páginas que ocupa el artículo separadas por un guión. Se especificará el volumen y el número de la revista, cuando cada número comienza por la página uno.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, *26*(3), pp. 327-342.

Para consultar más ejemplos de citas bibliográficas, visitar:
http://www.revistasuma.es

11.-Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12.-Si durante el texto se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión et al. (y otros). Por ejemplo, "Bartolomé et al. (1982)", "Gelpi et al. (1987)". Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.

13.-Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.

14.-Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

15.-Después de haber recibido el trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.

16.-Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, de acuerdo con las normas, criterios y recomendaciones propios de la revista SUMA.

17.-Si los dos informes son positivos el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos se rechazará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o su rechazo.

18.-Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como –en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

19.-No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Propuesta de categorias para las palabras clave

Teoría Innovación didáctica Divulgación Investigación didáctica Experiencia de aula ...	Álgebra Análisis Aritmética Estadística Probabilidad Geometría Resolución de problemas. Topología ...	Números (Naturales Enteros, ...). Resolución de problemas de ..., Ecuaciones, Figuras en el plano, en el espacio Funciones Modelización Lógica Errores, dificultades ...	Libros de texto Historia Cognición Metacognición Razonamiento Demostración Legislación y reformas(LOGSE, LOU, LOE ...) Actitudes Destrezas Procesos Conceptos Enseñanza, aprendizaje, educación ...	Infantil Primaria Secundaria Bachillerato Universidad ...

suma+ 63
Febrero 2010, pp.135-140

Las XIV JAEM de Girona

Foto J. M. Sorando

Las XIV JAEM (Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas) celebradas en Girona del 1 al 4 de julio del 2009 han supuesto para la FEEMCAT (Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques de Catalunya) un gran honor pero también un gran reto.

Desde el lejano día, hace ya más de tres años, cuando estudiamos las posibilidades de ser sede de las jornadas hasta su celebración el pasado verano, las circunstancias fueron constantemente cambiantes y llenas de incertidumbre. Entre otros, se dieron cambios en la propia junta de la FEEMCAT, cambios económicos imprevistos que bloquearon las aportaciones esperadas, o la dudas generadas por el lento ritmo de las inscripciones hasta la recta final. Lo único que se mantenía era el ritmo de trabajo pausado pero imparable del Comité de Programa que iba dando cuenta de las muchas comunicaciones y talleres que se estaban presentando, al tiempo que animaban a los conferenciantes y ponentes a ir concretando sus trabajos. Al mismo tiempo, desde el Comité Organizador dábamos cuenta de las concreciones en los diferentes ámbitos y las asociaciones incluían en todas sus jornadas un espacio para convocar a los docentes catalanes de todas las etapas a estar presentes en Girona, para dar y recibir lo mejor que se está haciendo en educación matemática en el país.

El camino ha sido árduo, en algún momento llegamos a temer por no poder concretar todo cuanto habíamos pensado para ofrecer unas JAEM que fueran una fiesta de nuestra ciencia, pero también es cierto que en esos momentos contamos con los ánimos de los compañeros de la FESPM, de la Junta y también de aquellos que tras su experiencia en organizar unas JAEM nos animaban a confiar, porque las JAEM siempre acaban saliendo bien.

Comité Local: **Pepus Daunis, Cati Mora, Raül Fernández, Xavi Fernández, Dolors Rubirola**

Carme Aymerich
Presidenta de FEEMCAT

Sílvia Margelí
Coordinadora general de les XIV JAEM

Llegamos al final del mes de junio con todas las piezas del rompecabezas sobre la gran mesa de la Facultat d'Estadística i Matemàtiques de la Universitat de Girona con cerca de 900 asistentes, entre congresistas, colaboradores y expositores. Los actos empezaron a sucederse a velocidad vertiginosa y nuestras previsiones y esfuerzos se veían compensados por las sonrisas que recibíamos cada vez que conseguíamos solucionar un problema o que convencíamos al tribulado compañero que no íbamos a hacer un problema de aquel pequeño inconveniente que le había surgido. En algún caso tuvimos la suerte de contar con la predisposición de los afectados a minimizar y convertir en ejercicio de paciencia algo que no iba a aguarle la fiesta.

Veamos los datos. Estas JAEM han ofrecido un apretado programa que ha permitido poder certificar a los participantes con un 80% de asistencia a contar con un certificado de 30 horas con rango de Congreso por parte del Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat de Girona.

Las XIV JAEM se han estructurado en siete núcleos temáticos intentando ofrecer una nueva forma de afrontar los retos de la educación matemática.

Los asistentes de las JAEM siguen siendo mayoritariamente docentes de secundaria, aun habiendo hecho un importante esfuerzo para promover la participación de maestros y maestras de educación primaria e infantil.

Las fechas de las JAEM, un tema recurrente, han sido bien valoradas todo y alguna objeción por la inmediatez respecto al final de curso de este año. Los horarios han sido bien valorados y el dato debe ser tenido en cuenta en tanto que se confeccionaron considerando las recomendaciones de los asistentes a las últimas ediciones.

Foto Carles Puig

Foto Iolanda Guevara

Foto Iolanda Guevara

Conferencia plenaria de Antón Aubanell.
Foto Iolanda Guevara

Especialmente importante y positiva ha sido la valoración de la información recibida a lo largo del proceso y es que parece haber ayudado a todos a conectar poco a poco con el tiempo presencial, alrededor del 90% están satisfechos con la información antes y durante el congreso.

La peor valoración se la llevan las instalaciones de la Escola d'Hosteleria, a pesar de los esfuerzos por refrigerar algunos espacios, la ola de calor que llegó a Girona durante las JAEM puso en crisis la idoneidad del espacio.

La valoración de las conferencias es muy buena, sólo se han recibido quejas respecto a la falta de traducción de la última conferencia.

Más del 80% de los que responden a la encuesta valoran como interesante o muy interesantes las ponencias.

Los talleres reciben una valoración parecida y las comunicaciones se mueven alrededor del mismo porcentaje.

Sobre el ya conocido problema de la capacidad limitada de los talleres ha sido algo menos evidente que en otras ediciones pero sigue siendo un problema a resolver. Entre las propuestas de los asistentes destaca inscribirse telemáticamente, la de inscribirse en los primeros días de las JAEM, ambas propuestas unidas se acercan al 70%.

El deseo es que los foros de debate sigan abiertos hasta la siguiente convocatoria.

Exposición de materiales del GAMAR. Foto Iolanda Guevara

Taller de papiroflexia. Foto Carles Puig Pla

Exposición del MMACA. Foto Carles Puig

Foto Carles Puig

Finalmente las exposiciones han contado con una gran asistencia y buena valoración, tanto MMACA como GAMAR han contado con valoraciones altas entorno al 80% de los encuestados. El resto de exposiciones también fue valorado positivamente.

En Girona no hubo, por falta de espacio, la posibilidad de hacer exposiciones fuera del marco oficial. Creemos que sería bueno poder contar con este tipo de exposiciones en espacios abiertos a la ciudad de acogida en tanto que son una buena forma de acercar las matemáticas a los ciudadanos.

Sobre el tema de los actos sociales, que son parte importante de un encuentro bianual como el nuestro, destacamos la predisposición de todos a pasarlo bien durante los actos, y a darles en el cuestionario una valoración altísima. Debemos reconocer que la organización del grupo de colaboradores de Lloret hizo posible una velada que, a parte del espectacular entorno, funcionó con puntualidad, sin prisas al tiempo que con pocas pausas.

Como datos curiosos os ofrecemos el poster que elaboró nuestro compañero Raül, siempre curioso y agudo.

Algunos de los datos:

– Por procedencia destacan los 400 asistentes de Catalunya y los 100 de las Comunidades de Baleares y Valencia.
– Por edades ha sido muy importante la incorporación de nuevos profesionales, más de 200 tenían edades menores a los 35 años, cosa que da buenas sensaciones de cara a la continuidad de las JAEM, y aún más si pensamos en cómo los vimos disfrutar y cantar por las noches y aprovechar luego cada hora del día para aprender y compartir.
– De entre los núcleos temáticos con más asistentes destaca el correspondiente a "Herramientas, materiales y otros recursos" seguido de "Planteamiento y resolución de problemas", dos clásicos de este tipo de encuentros. Por otra parte debemos resaltar el esfuerzo del Comité de Programa por ofrecer una estructura dinámica, rompiendo con los

Foto Carles Puig

Foto Santi Vilches

bloques tradicionales de organización de las Jornadas, avanzando hacia una estructura más coherente con los nuevos planteamientos.

También comentar el nuevo intento de iniciar contactos para antes y después de las JAEM llevados ya a cabo en Zaragoza y Canarias. La creación de los "Espacios de debate" como lugares dónde aportar desde iguales, han sido valorados positivamente, contrastando con nuestra visión a la vista de la poca actividad de algunos de ellos. Pero como el mundo de la comunicación virtual tiene sus reglas, lo cierto es que en los encuentros presenciales hubo debate, se hizo mucho trabajo y contactos para seguir trabajando de cara al siguiente encuentro.

Y, ¿a partir de ahora?

Reposar cuánto hemos aprendido, repensar lo que no quedó claro, mirar dónde cae Gijón y antes de que nos demos cuenta ya habrán pasado dos años.

Pero sobre todo ser conscientes del gran potencial humano que ha hecho posible que este gran evento, el mayor del Estado, donde se reune el profesorado de todas las etapas educativas para compartir, aprender y hablar de educación matemática.

Todos vamos a las JAEM pensando en aprender, pero no sabíamos que organizándolas íbamos a afrontar el mayor reto de nuestra vida profesional y que en tal empresa descubriríamos el gran potencial humano de tantos compañeros y compañeras.

¿Y hasta Gijón?

Guardarnos los recuerdos y las fotos y los contactos y los viejos y nuevos amigos en un rincón plácido y calentito para activarlos a menudo y abrazarlos en las XV JAEM. ■

Presentación de la Monográfía 4 de SUMA. Foto Santi Vilches

El equipo organizador. Foto Iolanda Guevara

XIV JAEM GIRONA2009

JORNADAS PARA EL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

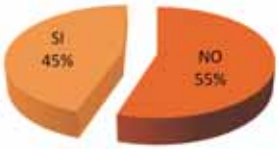
Las Estadísticas

Raül Fernández Hernández

Distribución por provincias

Distribución por sexo

Participación en las anteriores JAEM



Números primos

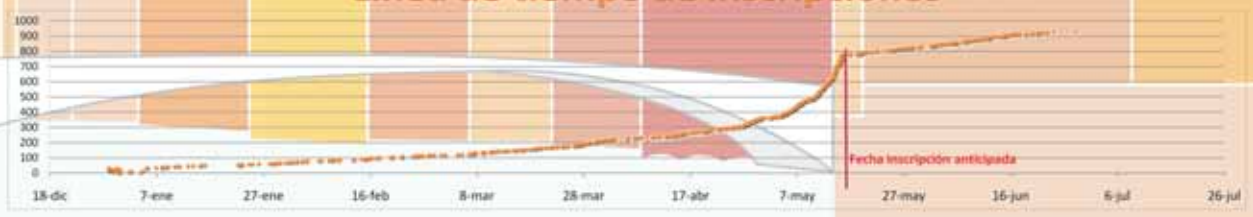
- ✓Hay 67 personas las cuales el número de su DNI es un número primo.
- ✓Hay 29 personas que tienen un número de teléfono primo.
- ✓Solo hay 4 personas que tienen el DNI y el teléfono *primos*.

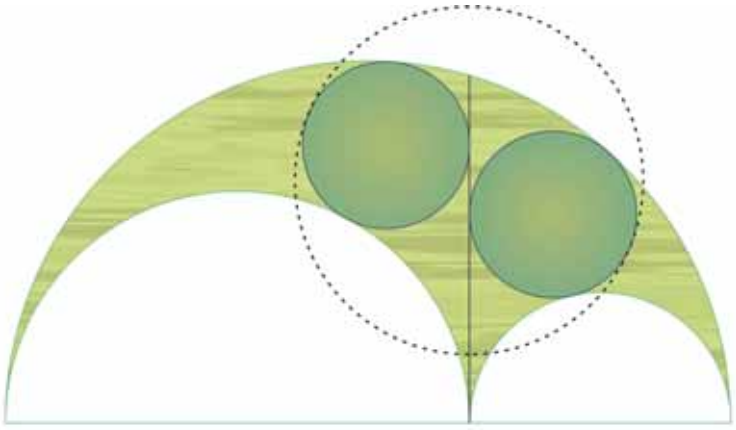
Distribución por edad y sexo

Preferencias por núcleo temático

Apellidos mas frecuentes

Línea de tiempo de inscripciones





Matemàtiques, una altra mirada

IX Jornadas de Educación Matemática de la Comunitat Valenciana

València, del 10 al 12 de Septiembre de 2010

Primer Anuncio

A lo largo de los días 10, 11 y 12 de septiembre de 2010 tendrán lugar en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universitat de València Estudi General, en el campus de Burjassot las IX Jornadas de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana "Al-Khwarizmi". Hemos abierto ya el plazo de presentación de propuestas de comunicaciones, pósters o talleres relacionados con: las matemáticas en Educación Infantil y Primaria, las competencias en matemáticas, Universidad e innovación, materiales y recursos para un mejor aprendizaje de las matemáticas, herramientas tecnológicas en el aula de matemáticas. Podéis ir preparando vuestras propuestas, que deberán ser remitidas antes del 31 de Mayo de 2010 a la dirección electrónica:

ixjornades.semcv@gmail.com

Presentación de Comunicaciones, Talleres y Pósters

La presentación de comunicaciones, talleres y pósters deberá realizarse antes del día 31 de Mayo de 2010, enviando la correspondiente ficha de inscripción, cumplimentada, juntamente con un breve resumen (10 líneas a doble espacio formato DIN A-4) de su contenido y estructura. Condición indispensable para ser aceptada cualquiera presentación es que su autor esté inscrito en las Jornadas, y en caso de ser un grupo, al menos uno de los autores.

Con la finalidad de poder agrupar los trabajos presentados de acuerdo con su posible afinidad temática, cada uno de ellos debe acompañarse con las palabras clave que mejor le identifican, como:

- Título de la comunicación, taller o póster
- Objetivo general del trabajo (Matemáticas en Educación Infantil y Primaria, Las competencias en la aula de matemáticas, Universidad e innovación, Materiales y recursos para un mejor aprendizaje de las matemáticas, Herramientas tecnológicas para la clase de matemáticas)
- Nivel educativo: Primaria, Secundaria, Universidad,...
- Temas específicos que aborda: trabajos prácticos, resolución de problemas, evaluación,...

El trabajo completo no debe ocupar más de 5 DIN A-4 a doble espacio usando el procesador de texto Microsoft Word XP, tipo de letra Arial, de 12 puntos, interlineado de 1,5 líneas. Los gráficos se deben enviar formato TIFF o EPS, indicando su colocación en el texto o bien ya insertados en él. El archivo se enviará por correo electrónico a la dirección electróni-

ca ixjornades.semcv@gmail.com. Está prevista la edición de un DVD en el que se recogerán, además de las ponencias y comunicaciones, los trabajos de tipo informático (programas, animaciones...) que se quieran presentar acompañando las ponencias.

El período de inscripción será del 14 de abril al 30 de junio de 2010. Las tasas de inscripción son las siguientes:

	No socios	Socios
Antes del 30 de Junio de 2010	110 €	60 €
Después del 30 de Junio de 2010	150 €	100 €

Los miembros de cualquier sociedad perteneciente a la FESPM serán considerados a efectos del pago de las tasas de inscripción como miembros de la SEMCV.

Avance de programa

Viernes, 10 de septiembre de 2010

16.00–19:00 Acreditación y entrega de documentación.
18:30 Inauguración de las IX Jornadas.
19:00 Conferencia inaugural, a cargo de Luís Puig.
20:15 Actividad cultural: concierto sexteto de saxos "Saxofobia".
21:00 Vino de honor.

Sábado, 11 de septiembre de 2010

9:30 – 11 Talleres.
11 – 11:30 Pausa - café.
11:30 – 12:30 Ponencias simultáneas.
12:30 –13:45 Mesa redonda.
14:00 – 15:30 Comida.
15:30 – 17:00 Asamblea anual ordinaria de la SEMCV "Al-Khwarizmi".
17:00 – 18:30 Comunicaciones.
18:30 – 19:00 Pausa - café.
19:00 – 20 Ponencias simultáneas.
20:15 – 21:00 Actividad cultural: Teatro matemático.

Domingo, 12 de septiembre de 2010

10:00 – 11:30 Comunicaciones y talleres simultáneos.
11 30– 12:00 Pausa - café.
12:00 –13:15 Conferencia de clausura a cargo de Xaro Nomdedeu.
13:15 – 14:00 Acto de clausura.

Datos de interés

Fechas: del 10 al 12 de septiembre de 2010

Lugar: Facultad de Matemáticas de la Universitat de València

Bloques Temáticos:
- Matemáticas en Educación Infantil y Primaria
- Las competencias en la aula de matemáticas
- Universidad e innovación
- Materiales y recursos para un mejor aprendizaje de las matemáticas
- Herramientas tecnológicas para la clase de matemáticas

Exposiciones: relacionadas con el mundo de las matemáticas

Actas de las Jornadas: se publicarán en un DVD.

Certificación: se certificará la participación de acuerdo con la normativa aplicable de la Conselleria d'Educació de la Generalitat Valenciana

Stands: Exposición comercial de entidades y empresas con materiales y recursos relacionados con las matemáticas.

Más información e inscripciones en la página web de la SEMCV "Al-Khwarizmi": www.semcv.org

Societat d´Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "al - Khwārizmī"

A prima. Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas.

Después de la celebración de las I Jornadas de Matemáticas de Navarra organizadas por la Sociedad Tornamira en diciembre de 2008 nos planteamos la posibilidad de organizar en La Rioja unas jornadas similares para que constituyan un proyecto común entre las dos sociedades que se plasme en la celebración de jornadas bianuales alternando como sedes Navarra y La Rioja.

Nuestra sociedad lleva once ediciones del Concurso de Primavera de Matemáticas, ha organizado una Olimpíada Matemática Nacional y en este último curso ha colaborado con la Universidad de La Rioja en la elaboración del nuevo Grado de Matemáticas. Así que nos pareció que ya iba siendo una buena ocasión para realizar una actividad de formación y celebrar unas jornadas que conmemoren nuestro décimo aniversario como asociación.

Algunos miembros de la sociedad acudimos a las JAEM que se celebraron en Gerona los primeros días de julio de 2009 y aprovechamos para establecer contactos con posibles ponentes.

Al principio nos dio miedo que los docentes riojanos no estuvieran interesados en esta propuesta pero en cuanto dimos a conocer el primer anunció ya vimos que bastantes profesores estaban interesados. Sin embargo nunca llegamos a suponer que tendríamos que cerrar la inscripción días antes de lo previsto porque habíamos cubierto todas las plazas ofertadas.

Contamos con la colaboración de la Universidad de La Rioja que nos cedió las instalaciones, la Consejería de Educación que homologó la actividad, el Ayuntamiento de Logroño, Turismo de la Rioja, Turismo de Logroño, Consejería de Hacienda, Editorial S.M. y Bodega Dinastía Vivanco que nos regalaron diverso material para los asistentes y los ponentes.

Aunque la mayoría de los asistentes fueron docentes de secundaria estamos contentos porque muchos compañeros de primaria e infantil también acudieron a intercambiar opiniones y a escuchar y colaborar en todas las actividades de las Jornadas.

Se desarrollaron con normalidad y fueron un estupendo punto de encuentro de docentes, no sólo riojanos y navarros los que nos dimos cita ese par de días en Logroño.

Después vino el momento de valorar las jornadas con los cuestionarios que nos entregaron los asistentes y el resultado fue muy positivo ya que todas las charlas y talleres han sido muy bien valorados.

Dentro de dos años esperamos volver a organizar las que serán las II Jornadas de matemáticas en La Rioja que esperamos tengan por lo menos la misma acogida que estas primeras.

Elena Ramírez. Presidenta de A Prima

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 498
46900-Torrent (Valencia)

por Fax al: (+34) 912 911 879

por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) _____

☐ N.os sueltos _____

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2077-0347-11-1101452547)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: ⌊⌊⌊⌊ Oficina: ⌊⌊⌊⌊ DC: ⌊⌊ Cuenta: ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌊

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

Conforme a lo establecido en el art. 5 de la Ley Orgánica 15/1999 de Protección de Datos de Carácter personal, le informamos que los datos de carácter personal que Usted ha facilitado de forma voluntaria se incorporarán a un fichero automatizado cuyo responsable es la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), con el fin de llevar a cabo la gestión integral de nuestra relación comercial, cobrar tarifas, contactarle y enviarle información que pueda ser de su interés, estando prevista la comunicación de los mismos a aquellos profesionales y/o empresas que intervienen en la gestión del servicio solicitado, descritos en el Documento de Seguridad. Si no nos manifiesta lo contario entenderemos que Usted consiente el tratamiento indicado. Puede ejercitar sus derechos de acceso, cancelación, rectificación y oposición, mediante escrito dirigido a la dirección postal de SUMA junto con una fotocopia del DNI.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ISSN 1130-488X

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.