

La estadística, que prepara, sondea y explora los datos para sacar la información oculta en ellos, resulta muy útil para extraer patrones musicales, incluso subjetivos

Para tratar de comprender la naturaleza de la música, necesitaríamos combinar muchas disciplinas diferentes, además de las matemáticas: la física, la psicología, la historia y, por supuesto, la musicología, entre otras. Sin embargo, en este trabajo vamos a centrarnos modestamente en lo que puede aportar para el mejor conocimiento de algunos aspectos de la música una rama de la matemática aplicada: la estadística.

La relación de la música con algunas ramas de las matemáticas como el álgebra es antiquísima y bastante conocida, sin embargo no lo es tanto la relación con la estadística. ¿Por qué sucede esto? En primer lugar hay que decir que la estadística es bastante reciente comparada con otras disciplinas matemáticas. Determinar su fecha de nacimiento es un problema complicado y polémico sobre todo porque primero hay que precisar qué se entiende por estadística. Para esto nos resulta muy útil aceptar la definición que dio V. Barnett en 1973:

La Estadística es la ciencia que estudia cómo debe emplearse la información y cómo dar una guía de acción en situaciones prácticas que entrañan incertidumbre.

Según este criterio, la historia de la estadística no empezaría con los recuentos (censos) llevados a cabo en el mundo antiguo, con fines puramente informativos, acerca de los diversos

estados. Estos trabajos se centran fundamentalmente en el proceso de la recogida de datos y pueden considerarse como precursores de la estadística descriptiva, pero no de toda la estadística. Así pues, si adoptamos la definición de Barnett, la estadística no aparecería hasta mediados del siglo XVII, cuando John Graunt (1620 – 1674) y William Petty (1623 – 1687), dieron los primeros pasos serios en el ámbito de la demografía tratando de extraer conclusiones de los datos.

Desde sus orígenes, la estadística se ha enfrentado a los problemas que la ciencia y la empresa le plantean. En los primeros años de su existencia dichos problemas surgían, a menudo, de experimentos que llevaban a cabo en el ámbito de la agricultura o de la industria. Los retos en las áreas de almacenamiento de datos, organización y búsqueda dieron lugar a lo

José L. Godofredo Pérez
Conservatorio Superior de Música de Valencia "Joaquín Rodrigo"
Teresa León Mendoza
Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

que hoy en día se conoce como *Minería de datos*. Por su parte, los problemas computacionales en biología y medicina han dado lugar a la *Bioinformática*. Pero, además de estas áreas, en muchos campos se están generando enormes cantidades de datos y el trabajo del estadístico es extraer información de ellos (obteniendo lo que se conoce como patrones y tendencias) y comprender lo que dicen los datos: aprender de ellos.

Se suele hablar de dos grandes clases de estadística: la descriptiva y la inferencial. La estadística descriptiva trata de mostrar las características básicas de los datos que se están estudiando. Proporciona resúmenes numéricos (media, mediana, desviación típica, etc.) y gráficos (diagramas de barras, histogramas, etc.) que ayudan a poner de manifiesto la información contenida en el material disponible. Un conjunto de datos sin su análisis descriptivo sería tan inútil como una guía de teléfonos en la que los abonados no están ordenados alfabéticamente. En cambio, con la estadística inferencial se trata de alcanzar conclusiones más generales que no sólo afectarían a los datos concretos que manejamos (muestra) sino a una población más general de la que habrían sido extraídos, es decir inferir de los datos.

Conteo y agrupación de notas

En cualquier ámbito de la música la estadística tiene mucho que aportar. No pretendemos ser exhaustivos, sino sólo dar alguna pincelada acerca de la aplicabilidad de esta parte de las matemáticas en la música.

Si nos planteamos qué se puede analizar estadísticamente en música, la respuesta es que bastantes más cosas de las que uno puede pensar inicialmente. Hay casos en los que un compositor desarrolla un lenguaje musical que mantiene a lo largo de muchos años en gran parte de sus obras. Un análisis estadístico de estas composiciones permite reconocer características propias del autor. También pueden estudiarse estadísticamente los principios melódicos, armónicos o rítmicos subyacentes a la música clásica occidental (periodos Barroco, Clásico y Romántico) o las similitudes y diferencias entre tradiciones musicales de distintas regiones geográficas. Las canciones folk y los cantos religiosos tienen la ventaja, desde el punto de vista estadístico, de su simplicidad ya que normalmente son cortos y muchas veces se componen de una única línea melódica.

Tradicionalmente los datos para estos estudios se recogían mediante el análisis visual de las partituras o el análisis auditivo de las grabaciones musicales disponibles. Estos sistemas consumen bastante tiempo por lo que los estudios que trabajan con este tipo de datos suelen basarse en conjuntos relativamente pequeños de material musical. Utilizando grandes colecciones de material musical digital estas limitaciones se pueden subsanar. Aquí la estadística entra en contacto con las

Ciencias de la Computación y hace falta la utilización de software específico para obtener los datos a analizar. Después veremos un ejemplo.

Una de las aplicaciones más sencillas de la estadística a la música sea posiblemente el conteo de notas, intervalos u otros patrones con algún propósito musical. A continuación veremos el método que propone Jan Beran (2004), para que se puedan comparar diferentes voces de una misma obra o diferentes autores, y lo aplicaremos al 8º *Madrigali* de C. Monteverdi (Edition Peters Nr. 32342c).

Hemos elegido a Claudio G. A. Monteverdi (1567 – 1643) porque marcó la transición entre la tradición polifónica y madrigalista del siglo XVI y el nacimiento del drama lírico y de la ópera en el siglo XVII. Se trata sin duda, de una figura crucial en la transición entre la música del Renacimiento y del Barroco.

The image shows a page from a musical score titled "8 Madrigali" by Claudio Monteverdi. It features two systems of music. The first system is for the vocal parts: Soprano I, Soprano II, Alto, Tenore, and Basso. The lyrics are in Italian and German. The second system shows the vocal parts continuing with the lyrics "men - te e la - sci - vet - to vo - la". The score is set in a key with one flat and a 4/4 time signature. The tempo/mood is marked "Grazioso".

En primer lugar contamos el número de veces que aparece cada nota en cada voz. Posteriormente identificamos las notas que difieren en una o más octavas (es decir hacemos $La_3 = La_4$, por ejemplo) y por último representamos en un diagrama de barras cada una de las notas frente al número de veces que aparece.

Estos diagramas de barras son especiales por dos razones:

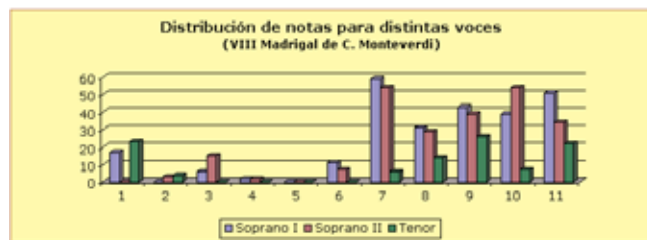
a. El orden en el que aparecen las notas no es el de la escala a la que todos estamos acostumbrados. Primero se determina cuál es la nota que más se repite en la composición estudiada y ésta se toma como origen, a continuación se ordenan las demás por quintas:

... Sol[#] – Mi^b – Si^b – Fa – Do – Sol – Re – La – Mi – Si – Fa[#]
– Do[#] – Sol[#] – Mi^b ...

b. La nota que más se repite no se representa en el diagrama.

La razón por la que se imponen estas condiciones es la de desligar el gráfico de las notas en sí mismas al tomar como origen la nota que más se repite. Precisamente esto es lo que permite que se puedan comparar gráficamente músicas y autores muy distintos, aportando así una gran versatilidad al método.

En el madrigal que nos ocupa, para las sopranos, la nota que más se repite es el Si, por tanto el orden para representarlas es Fa[#], Do[#], Sol[#], Re[#], La[#], Fa, Do, Sol, Re, La, Mi. Sin embargo, para el tenor la nota más repetida es el Mi, por lo tanto el orden es Si, Fa[#], Do[#], Sol[#], Re[#], La[#], Fa, Do, Sol, Re, La. En el diagrama siguiente se muestra la distribución de notas para cada una de las voces.



Aunque para los objetivos de este trabajo no tiene demasiado interés extendernos en las conclusiones que pueden extraerse del gráfico, lo cierto es que un rasgo característico de este madrigal es que la mayoría de las notas son las que están entre las quintas 7^a y 11^a medidas desde la nota que más se repite en cada voz. Esta característica, que se repite en otras obras del autor, puede indicarnos que, a pesar del carácter innovador de Monteverdi, la estructura de esta obra es muy similar a la de otros madrigalistas de la época (podéis encontrar otros ejemplos en Beran (2004)).

La extracción de patrones musicales

Otro tipo diferente de estudios son los relacionados con determinar la autoría, el estilo o la cronología de una obra. Para esta clase de análisis se utilizan técnicas estadísticas de

clasificación que se pueden agrupar en dos tipos: la supervisada y la no supervisada.

La clasificación no supervisada se conoce también como Análisis de Conglomerados, Taxonomía Numérica o Reconocimiento de Patrones y su finalidad es dividir un conjunto de objetos en grupos de forma que los perfiles de los objetos en un mismo grupo sean muy similares entre sí (cohesión interna del grupo) y los de los objetos de grupos diferentes sean distintos (aislamiento externo del grupo). Podríamos decir que lo que se busca es una clasificación que surja a partir de las características de la muestra con la que trabajamos y que posteriormente habremos de interpretar. En la clasificación supervisada, sin embargo, se adjudican nuevos objetos a unas clases predeterminadas basándose en la información de los objetos ya clasificados.

En nuestro caso, los objetos podrían ser composiciones musicales descritas a través de diferentes características musicales. Como ejemplo podemos citar la tesis doctoral de D. C. Jacobson (1986), que analizó unos 40.000 compases de la música de Schubert para tratar de asignar dos trabajos no datados.

A pesar de que actualmente tiene mucho interés el tema de la clasificación por géneros, se trata de un problema que no está, ni mucho menos, resuelto, ya que se trata de una división condicionada por factores culturales, sociales e históricos, y carente de definiciones estrictas. De hecho, el número de géneros musicales utilizados por algunas tiendas de música *online* para clasificar sus archivos musicales es diferente. Amazon, por ejemplo hace una división entre 24 géneros distintos, iTunes utiliza 17, buymusic.com 16, y Napster.com tan sólo 9. Algunas de estas tiendas utilizan incluso divisiones en subgéneros musicales. En este tipo de situaciones, cuando se manejan grandes volúmenes de datos, la estadística colabora con las Ciencias de la Computación en estos estudios.

Vamos a ver un ejemplo sencillo de agrupamiento de *clips musicales* que nos puede mostrar el potencial de estas técnicas.

El conjunto de datos que usaremos fue recogido por una profesora norteamericana, la Dra. Diane Cook, para su clase de análisis de datos. Los obtuvo a partir de su propia colección de CDs. Utilizando el software *Amadeus II*® para MacIntosh grabó cuarenta segundos de algunas canciones como fichero WAV, que es un formato de audio desarrollado por Microsoft, bastante utilizado en Windows. Los ficheros fueron procesados mediante un software que convierte los ficheros de audio en datos numéricos¹.

A partir de los CDs, la profesora Cook comprobó que todos contenían canales izquierdo y derecho y obtuvo los valores de las siguientes variables:

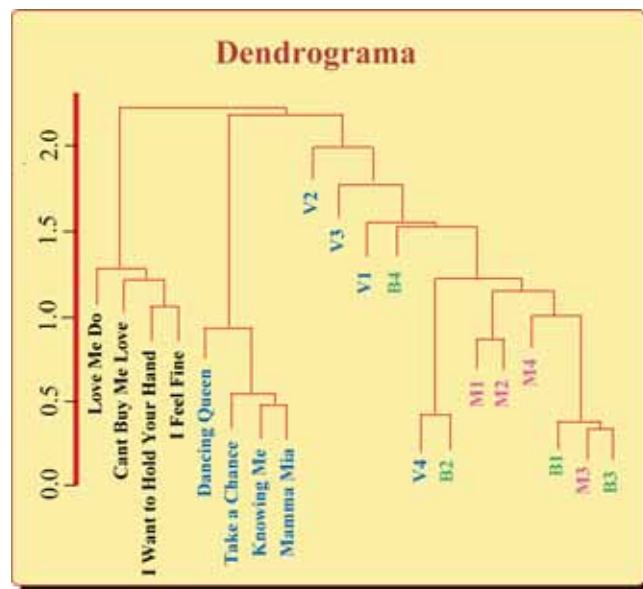
- LAve, LVar, LMax: media, varianza y máximo de las frecuencias del canal izquierdo.
- LFEner: un indicador de la amplitud (o volumen) del sonido.
- LFreq: Mediana de las localizaciones de los 15 picos más altos del periodograma².

Por ejemplo, las medias de las variables anteriores para 4 canciones de Abba: *Dancing Queen*, *Knowing Me, Take a Chance* y *Mamma Mia* y las canciones de los Beatles: *Love Me, I Want to Hold Your Hand*, *Can't Buy Me Love* y *I Feel Fine*, aparecen en la tabla siguiente:

Música	LVar	LAve	LMax	LFEner	LFreq
ABBA	10937673.8250	-88.5769	28204.2500	103.1746	72.8533
Beatles	54822800.000	-5.8673	28168.5000	111.2894	157.9452

Con estas variables hemos descrito cada composición mediante un vector de cinco componentes que utilizaremos para clasificarla, olvidando la información acerca de su autor, género, etc. Esta identificación entre un vector y una obra musical es la que nos permitirá obtener agrupaciones o similitudes que, de otro modo, podrían pasar inadvertidas

Para mostrar unas gráficas más sencillas nos hemos quedado con una parte del conjunto de datos de la Dra. Cook, en concreto con 4 canciones de *Abba*, 4 de los *Beatles*, 4 fragmentos de Vivaldi, 4 de Mozart y 4 de Beethoven. La cuestión fundamental sería: ¿Podemos agrupar los fragmentos en un número pequeño de grupos de acuerdo a su semejanza en cuanto a las características de audio obtenidas?



Agrupación por semejanza de algunas obras de Vivaldi, Mozart, Beethoven, los Beatles y Abba

Para obtener este gráfico, llamado *dendrograma*, hemos realizado lo que se conoce como un análisis de conglomerados jerárquico. Inicialmente, cada objeto forma su propio grupo y el algoritmo procede iterativamente uniendo en cada paso los dos grupos más parecidos continuando hasta que todos forman parte del mismo grupo. El dendrograma es una especie de diagrama de árbol donde cada paso del agrupamiento jerárquico se representa como la fusión de dos ramas del árbol en una. Las ramas representan los grupos obtenidos en cada paso del algoritmo.

Hay varios elementos que intervienen en un análisis de este tipo:

- Una medida de distancia entre los objetos a clasificar.
- Otra medida que dé la distancia entre grupos.
- Un criterio que indique cómo agrupar.

A partir de las agrupaciones que aparecen en el dendrograma, podemos observar que las composiciones de *Abba* se parecen bastante (en cuanto a las características consideradas) ya que rápidamente se van uniendo en una misma rama, sin embargo las de Vivaldi son muy diferentes. Las canciones de los



Beatles están más separadas que las de *Abba* de las piezas de música clásica consideradas. Además, es de destacar que Mozart y Beethoven, para algunas obras presentan una gran similitud (están en el mismo grupo en la parte inferior del gráfico), o que algunas obras de Beethoven se parecen más (para los criterios analizados) a las de Mozart o a las de Vivaldi que a otras obras de él mismo.

La estadística y la psicología de la música

En psicología de la música, es decir la investigación científica que estudia la relación entre la música y la mente humana, es absolutamente imprescindible el uso de la estadística si lo que se pretende es dar validez a alguna conjetura acerca de los procesos mentales de aprendizaje, creación, percepción, etc. Por dar algún ejemplo, podemos mencionar los numerosos estudios, a veces contradictorios, que investigan el desarrollo de la percepción de la emoción en la música tratando de discernir qué parte es innata y qué parte se debe a asociaciones aprendidas que se desarrollan durante la infancia.

Otro ejemplo bastante conocido es la polémica acerca de si los acordes y tonalidades mayores expresan alegría mientras que los menores se asocian a tristeza. De hecho, en algunos foros de internet, se intercambian opiniones al respecto. Hay quien argumenta que se pueden encontrar muchas canciones alegres con acordes menores, pero también hay firmes defensores de la idea de que éstos añaden un toque de tristeza usados apropiadamente.

Antes de describir la aportación de la estadística en esta polémica, vamos a recordar lo que es un acorde y cuándo se denomina mayor o menor.

Un *acorde* consiste en tres o más notas diferentes que suenan simultáneamente o en arpeggio (una sucesión rápida de las notas). Si las notas del acorde no han sido cambiadas de octava, se dice que en el acorde no hay ninguna inversión, y en otro caso que sí que la ha habido. Se dice que el acorde sin inversiones es *mayor* cuando la distancia interválica entre el grado fundamental (primera nota) del acorde y la que dista una tercera corresponde a una tercera mayor, es decir, de dos tonos. Si la tercera es menor (un tono y un semitono) se dice que el acorde es *menor*. Por ejemplo, Do Mi Sol es un acorde mayor porque entre el Do y el Mi hay una tercera mayor, mientras que Do Mi^b Sol es un acorde menor porque entre el Do y el Mi bemol hay una tercera menor.

A continuación resumiremos un estudio, llevado a cabo por un grupo de investigadores fineses y daneses, publicado por la Academia de Ciencias de Nueva York (véase Pallesen et al. (2005)), con el propósito de ilustrar algunos pasos de la metodología estadística:

1. Establecer claramente los objetivos y las hipótesis que se desean analizar.
2. Especificar detalladamente las características relevantes de los participantes en el estudio y el experimento que se llevó a cabo.
3. Presentar los resultados utilizando representaciones gráficas e indicadores numéricos y elaborar una conclusión.

En la experiencia participaron veintidós individuos diestros, con una edad media de 26 años, 14 de ellos eran mujeres y 11 tenían educación musical clásica (eran músicos). Se les hizo escuchar 9 acordes de piano pertenecientes a las clases: mayores, menores y disonantes, abarcando cada uno de ellos tres octavas de La₃ a La₅. Los sujetos escucharon los acordes y después de someterlos a un escáner cerebral se les pidió que clasificaran las connotaciones emocionales de cada acorde sobre dos escalas de 11 puntos, la primera de valorando de desagradable a agradable y la segunda de triste a feliz.

Durante la audición pasiva de los acordes aparecieron diferentes respuestas cerebrales en las imágenes obtenidas por resonancia magnética, en concreto los acordes disonantes y menores dieron lugar a mayores respuestas en varias áreas cerebrales. Sin embargo, no se observó diferencia significativa entre las imágenes cerebrales de los músicos y de los no músicos. En cuanto a la evaluación emocional de los acordes llevada a cabo por los sujetos, los músicos clasificaron como más tristes a los acordes menores que los no músicos.



Enseguida se nos ocurren comentarios e inquietudes acerca del estudio. Por ejemplo cuestiones de tamaño y representatividad de la muestra. Nos dejaría más tranquilos que se hubiera sometido al estudio a más personas, podría ser importante saber si todos los individuos tenían niveles de estudios semejantes, etc.

Podemos recordar el argumento de nuestro *internauta* acerca de que hay canciones felices con acordes menores y vemos que este estudio realmente no lo refutaría ya que los acordes fueron escuchados aisladamente y no dentro de una canción.

También resulta interesante el hecho de que, a pesar de que no hay diferencias en cuanto a actividad cerebral, al menos en las imágenes obtenidas por resonancia magnética, los músicos encuentran más tristes los acordes menores que los sujetos que no eran músicos. Quizá en sus estudios musicales se les ha podido reforzar esa opinión.

Nos gustaría hacer énfasis en que, aunque en el caso de los acordes mayores se observa una diferencia de valoración entre los músicos y los no músicos, esta diferencia no es significativa, es decir puede explicarse por el efecto del azar a la hora de elegir a los sujetos del estudio, de igual manera que se acepta en otros experimentos. Cuando lanzamos una moneda equilibrada esperamos que la diferencia entre caras y cruces sea 0 pero también nos parece razonable observar diferencias de 1, 2 o 3 ya que éstas diferencias se pueden explicar por el azar. Sin embargo ¿qué pensaríamos si observamos 10 caras y ninguna cruz o 10 cruces y ninguna cara, es decir, una diferencia de 10? Esto nos parece contradictorio con el hecho de que la moneda esté bien equilibrada ya que esta diferencia se explica muy difícilmente por el azar: la probabilidad de que observemos una diferencia de 10, estando la moneda bien equilibrada es de 0,004427, así pues afirmaríamos (con una pequeña aunque no nula probabilidad de equivocarnos) que la moneda está correctamente equilibrada.

No nos gustaría concluir el trabajo sin reiterar que lo que aquí presentamos no es más que una pequeña muestra de la utilidad de la estadística en la música, pero que los aspectos en los que actualmente estas disciplinas están relacionadas son muy numerosos y no ha hecho más que comenzar. Piénsese, por ejemplo, desde el punto de vista comercial, en la venta de música por internet, el envío de publicidad musical personalizada siguiendo los gustos musicales del comprador, etc. Desde el punto de vista artístico, las técnicas estadísticas facilitan la posibilidad de crear músicas que representen la esencia de una época histórica (por ejemplo para películas) a través de la extracción de patrones de varios autores del periodo que se quiere recrear. Se trata por tanto de un campo en el que la colaboración entre matemáticos y músicos puede ser muy fructífera.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos de investigación TIN2008-06872-C04-02 y TIN2009-14392-C02-01 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

MUSYMÁTICAS ■



NOTAS

1 Podéis encontrar los datos de esta experiencia en <http://www.public.iastate.edu/~dicook/stat503/cs-music.pdf>.

2 En el anterior trabajo de Musymáticas aparecen varios periodogramas obtenidos con Amadeus II.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Beran, J. (2004). *Statistic in Musicology*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
- Gutierrez Cabria, S. (1982). Origen y desarrollo de la estadística en los siglos XVII y XVIII. *Estadística Española*, 97, pp. 19–32.
- Jacobson, D. C. (1986). Franz Schubert: expanding the realm of harmonic and formal thought. c. 1810-1828. Santa Bárbara: Tesis doctoral, University of California.
- Nettheim, N. (1997). A Bibliography of Statistical Applications in Musicology. *Musicology Australia*, 20, pp. 94–106.

- Pallesen, K.J., Brattico, E., Bailey, C., Korvenoja, A., Koivisto, J., Gjedde, A. y Carlson, S. (2005). Emotion Processing of Major, Minor, and Dissonant Chords. A Functional Magnetic Resonance Imaging Study. *Annals of New York Academy of Sciences*, 1060, pp. 450–453.

Internet

- <http://www.public.iastate.edu/~dicook/stat503/cs-music.pdf>
- <http://es.wikipedia.org/wiki/Acorde>
- <http://nettheim.com/publications/statistics-in-musicology/statistics-in-musicology.html>