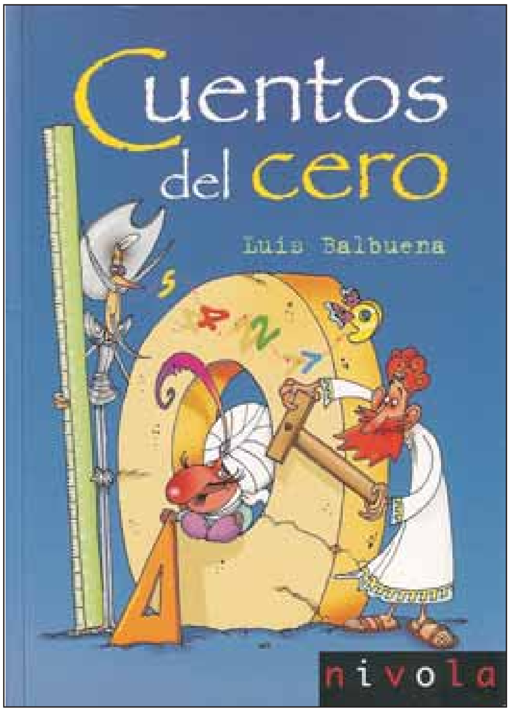
suma+ 63
Febrero 2010, pp.63-74

Cuentos del cero o *Las Matemáticas* *están llenas de vida(s)*



Cuentos del cero
Luis Balbuena Castellano
NIVOLA libros y ediciones, S. L., Tres Cantos
Colección Violeta nº 10. A partir de 11 años
Primera Edición: 2006
ISBN: 978-84-96566-18-7

Dedicado a Luis Balbuena.
Sin Luís todo hubiera sido distinto: la Federación, las Sociedades de Educación Matemática, las JAEM, la Innovación y, en general, la Educación Matemática española de los últimas décadas.

El libro al que vamos a dedicar este número tiene dos peculiaridades que lo diferencian de los anteriores. En primer lugar es una obra de relatos en forma de *cuentos matemáticos*, cuya variada temática va desde el origen de los dígitos del sistema de numeración, hasta la geometría de la esfera, pasando por las relaciones amorosas de la Derivada y el Arco Tangente y otras narraciones emparentadas con la mitología clásica. En segundo lugar su autor es una persona imprescindible en el panorama de la educación matemática de las últimas décadas en España, como hemos mencionado en la dedicatoria. Este año pasado ha recibido muy merecidamente el premio Gonzalo Sánchez Vázquez, último galardón de una serie de reconocimientos que ha ido recibiendo a lo largo de su trayectoria profesional. Sirva también este artículo como homenaje a su innegable labor.

Constantino de la Fuente Martínez
IES Cardenal López de Mendoza, Burgos
literatura@revistasuma.es

Presentación

En la contraportada de la obra podemos leer:

> El profesor canario Luís Balbuena ha escrito estos cuentos que, de forma amena, nos invitan a conocer más sobre el mundo de las matemáticas.
>
> En *Yo soy el cero* recrea la historia y la importancia de nuestro sistema de numeración. Para introducirnos en los razonamientos lógicos nos sorprende llevándonos de la mano de dioses mitológicos en *El rescate*; o de un hidalgo que sabe enseñar, en *De lo que aconteció a Don Quijote*… Franqueamos las puertas de la geometría con rectas, triángulos y esferas; la paridad y la teoría de números dan paso a un romance eterno.

La anterior presentación, nos parece que hace muy poco honor a la valía personal y profesional del autor, por ello le vamos a añadir algunas de nuestras opiniones, basadas en el conocimiento personal y profesional a lo largo de varias décadas.

Resulta difícil decir algo nuevo de nuestro flamante premio Gonzalo Sánchez Vázquez 2009 a los valores humanos, que ha conseguido dejar su impronta en el ámbito de la innovación y la educación matemática española. Y lo ha hecho desde su campo permanente de actuación: la práctica del aula; lo que constituye un caso realmente meritorio y una valiosa hazaña de un práctico reflexivo. Realmente Luís constituye un ejemplo a seguir para todos nosotros, los profesores y profesoras de matemáticas. ¿Quién no se ha inspirado escuchándole en alguna conferencia o leyendo algunas de sus ideas?

Otro aspecto que no se puede aprender leyendo libros especializados o con una formación inicial ni siquiera brillante, es la ilusión que cada uno imprima a su trabajo y que es capaz de transmitir en el acto de enseñar.

Aprovechamos la oportunidad que nos brinda este privilegiado espacio para resaltar algunas de sus ideas sobre la enseñanza, el aprendizaje y la profesión de profesor o profesora. A tal fin hemos escogido un párrafo de su artículo (Balbuena, 1998), en el que nos brinda su visión de la ilusión en el trabajo de profesor:

> Otro aspecto que no se puede aprender leyendo libros especializados o con una formación inicial ni siquiera brillante, es la ilusión que cada uno imprima a su trabajo y que es capaz de transmitir en el acto de enseñar. Da igual llamarle ilusión, que entusiasmo o ganas. Se trata, en definitiva, de que el alumno capte –y lo capta con mucha rapidez y facilidad- que a su profesor o profesora le gusta lo que está haciendo, que intenta hacerlo lo mejor posible, que prepara rigurosamente sus clases y deja poco espacio –es bueno dejar alguno– para la improvisación, que innova y le hace partícipe de las experiencias que desarrolla…

¡Qué más podemos decir! Todo lo que añadiéramos sobre el tema sería para estropearlo…

Comentario personal

Siguiendo la tónica de la presentación de la obra, en la que lo profesional está íntimamente ligado a lo humano, vamos a dejarnos llevar por los sentimientos y relataremos lo que me ocurrió al leer por primera vez el libro, en julio de 2007.

Comencé a leer el primero de los cuentos, *Yo soy el Cero*, y fue al llegar exactamente a la segunda línea, “puedo, al fin, expresarme como humano y contarles así parte de mi apasionante historia”, cuando identifiqué en mi cabeza el sonido exacto de la voz de Luís Balbuena, que me decía, justo, lo que yo leía. ¿Qué es esto?, pensé, ¡no es posible…! Pero era posible: Luís me leía mentalmente el cuento, con su timbre de voz, su acento canario, sus expresiones personales, su forma única de hablar y de dirigirse al otro, sus eses, su entonación… No sólo era posible sino que era tan real como mi propia lectura…

Había decidido aprovechar aquella mañana de julio para pasear, hacer un alto en el Parque de la Isla y comenzar la lectura del libro de Luís, *Cuentos del cero*, que había adquirido recientemente. La luz matinal conservaba aún el frescor en las sombras, y la espesura del parque tamizaba los rayos de sol. Todo ello proporcionaba un ambiente ideal para disfrutar de la paz y el sosiego que nos proporciona la lectura.

Aquello, que quiso ser un buen comienzo, después de alrededor de una hora y media se había transformado en la lectura completa e inesperada de todos los cuentos. Y si la magia había aparecido en el primero de ellos, también vi recompensada mi natural atracción hacia la mitología griega en los siguientes: la hidra, Zeus, Orfeo, Euridice, Aquiles, Cerbero…, y hasta la conversación entre Pitágoras y Sineta, en la que el primero reivindica que podemos llegar al conocimiento, a la sabiduría, ¡a través de la razón! ¡Qué bella proclama, en medio de este mundo, con tanta sinrazón!

La voz de Luís volvió de nuevo en los cuentos *El triángulo soy yo* y *Hola, soy la esfera*, haciendo que las fórmulas adquirieran humanidad y convencimiento, que la geometría del globo terráqueo nos transmitiera vida y se mostrase al alcance de nuestra mano. ¡Qué poder de evocación el de los cuentos! En ese momento descubría que, desde la niñez, en la que disfruté de ellos a través de la voz pausada y profunda del señor Fidel, el abuelo de un amigo, los cuentos están indisolublemente unidos a una voz.

Pero lo mejor llegó con el *Romance de la derivada y el arco tangente*, porque al igual que los números primos son el esqueleto de los números naturales, las raíces de un polinomio son su sostén básico, o las raíces cuadradas de los números son los que sostienen, alimentan y generan a sus radicandos, así mismo si hubiera que imaginar una historia de amor para emparejar a la derivada, ésta sería con el arco tangente; sin olvidar que para los que gustan de los triángulos amorosos, el tercer personaje sería la recta tangente, pues de todos es sabido que tiene, en el punto de tangencia, un contacto de orden dos con la función, muy íntimo como puede comprenderse.

El final se redondea con el relato de D. Quijote, en el que adivinamos las buenas relaciones entre Luís y el famoso hidalgo, fruto de las muchas horas dedicadas por el primero de ellos a estudiar matemáticamente al segundo, y porque el manchego universal escoge muy bien a quien mostrar sus interioridades.

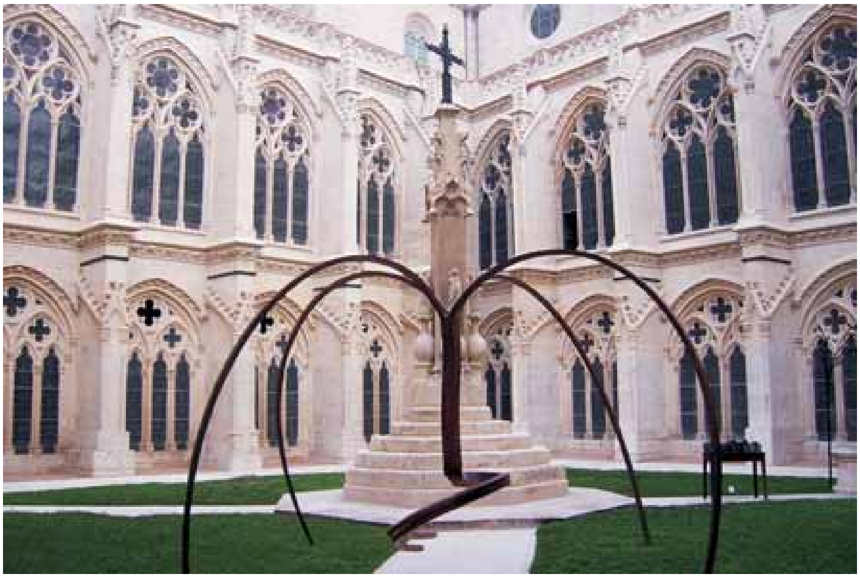
Cuando volví a la realidad, después de comprobar que el tiempo vuela, me encaminé por el paseo paralelo al río Arlanzón, viniendo a mi mente una foto de este precioso paraje, realizada por Luís en una de sus visitas a Burgos, y que nos envió posteriormente, junto con otras, todas ellas con motivos matemáticos. En esos momentos, las dos hileras de árboles, que flanqueaban el paseo, parecían las líneas de las que habla en el cuento *Dos puntos y ¿un destino?* ¿Sería posible...?

Esta mañana de julio no me estaba resultando normal. La acumulación de sensaciones iba en aumento a medida que me acercaba a la Catedral a través del Arco de Santa María, abarrotados ambos de turistas. La armonía se paseaba por la Plaza de Rey San Fernando, desde la que el monumento mostraba todo su esplendor matemático: octógonos, cuadrados, rectángulos, triángulos, polígonos estrellados, números irracionales, simetrías, vesica piscis, etc; todos ellos forman parte de los innumerables atractivos matemáticos del monumento patrimonio de la humanidad.

Cuando entré en el Claustro Bajo, en mi mente bullían múltiples emociones, acrecentadas por algunas obras de arte de la exposición que albergaba. Una de ellas, *El árbol ferroso*, de la que acompaño una imagen, me transportó, como por encantamiento, al bosque de las funciones, donde bien podía haberse desarrollado el cuento de la derivada y el arco tangente. Allí estaba produciéndose el acontecimiento nupcial entre los protagonistas del relato, justo en el punto en el que las curvas convergían. Eran casi las doce del mediodía, domingo, y las campanas comenzaron a repicar y repicar frenéticamente, alocadamente; comunicándonos su alborozo por el acontecimiento. El brocal del antiguo pozo seguía apuntado al cielo, donde, en ese mismo instante, un avión rasgaba el azul inmenso con su estela blanca. Quizás sea el de la página 71 del libro, que salió del aeropuerto Tenerife-Norte…

Mi retorno a la plaza, acompañando a mis pasos el ensordecedor volteo de las campanas, y con la mirada fija en el cimborrio y la Puerta del Sarmental, supuso el final de esta singular mañana de julio, llena de sentimientos y humanidad, rasgos que Luís Balbuena va derrochando y contagiando por donde pasa.

Así fue mi primer acercamiento a este libro, con la inmejorable presencia y guía de su autor y la certeza personal de que, al igual que Sineta, la hija secreta de Atenea, yo también había hecho sólo lo que los dioses nos tienen reservado como destino.



Claustro Bajo de la Catedral de Burgos

Una propuesta de trabajo en el aula

Igual que ocurre con el libro, que contiene cuentos para diferentes niveles educativos, el guión de trabajo que presentamos no se circunscribe a un curso sino que va dirigido a toda la Secundaria: ESO y Bachillerato. La temática de cada cuento nos proporcionará, de manera natural, el tipo de alumnado al que lo podemos dirigir. El profesor o la profesora, con su buen criterio, elegirá a quiénes, cómo y cuándo propone algunas de las actividades que se plantean en la propuesta y que pasamos a presentar sin más dilación.

Actividad 1: El origen del cero

> Nací en la India hace muchos siglos. No recuerdo la fecha exacta y tampoco en aquella época se registraba este tipo de cosas (pág. 11).

1.1. Explica, mediante una descripción breve (media página) el origen de los símbolos con los que representamos las cifras de los números o dígitos.

En el cuento *Yo soy el cero*, el propio número nos narra su historia, situando su origen en la India.

1.2. Explica el origen de este número y cómo pasó de significar *vacío* a significar *nada* o *cantidad nula* o *número cero*.

> Él [el Maestro] había llegado a la conclusión de que todos los dedos formaban una unidad de orden superior a la formada por un solo dedo. (pág. 12).

1.3. Analiza el significado de esta frase y su relación con el cero. Estudia el significado de la *decena* y de la *centena*.

1.4. ¿Qué es el *valor relativo* de los dígitos? ¿Por qué el cero afecta a los valores de las otras cifras? ¿Cómo lo hace? Explícalo con ejemplos.

1.5. El número cero pasó de la India a la cultura árabe. ¿Cómo pudo ocurrir esto?

Actividad 2: El número cero y Europa

> Por aquellos sitios por donde yo transitaba llegó un mercader italiano que tenía un hijo llamado Leonardo de Pisa (que es una ciudad italiana de donde parece ser que era este personaje). Lo recuerdo bien porque, como les he dicho, él significó mucho en mi futuro a partir de aquel instante." (pág. 17).

Leonardo de Pisa tuvo un papel importante en el conocimiento y difusión del cero en la cultura occidental.

2.1.¿Qué sistema de numeración se utilizaba en Europa con anterioridad al conocimiento de la cifras indoarábigas?

2.2. Explica el funcionamiento del ábaco para hacer operaciones con números. Pon ejemplos con números pequeños.

2.3. ¿Por qué *calcular*, que es una palabra derivada de *cálculo*, significaba manejar piedras?

2.4. ¿Qué son *las cuatro reglas*?

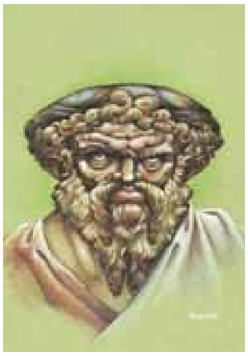
2.5. Leonardo de Pisa también era conocido por otro nombre. ¿Qué nombre era éste? ¿Qué significaba? Explica el origen de la sucesión que lleva su nombre y expón alguna de sus propiedades, en particular alguna relacionada con el número de oro ϕ.

2.6. Si tuvieras que ordenar, por el criterio *dificultad en su manejo*, los siguientes números: ¾ , -2, , 10^5, ø, π, ½, 8, ¿cómo lo harías?

2.7. Y si los tuvieras que ordenar por orden cronológico; es decir, del más antiguo al más moderno, ¿cómo los ordenarías?

Como has visto, Leonardo de Pisa contribuyó al uso y difusión del sistema indoarábigo de numeración. Muchos conocimientos matemáticos y de otros tipos, de la cultura árabe, llegaron a Europa por primera vez a través de otro país europeo.

2.8. ¿De qué país estamos hablando? ¿Cómo se produjo esta llegada? Pon ejemplos.



Pitágoras

Euclides

Fibonacci

Euler

Actividad 3: Los sistemas de numeración

> Escribían los números a base de unos palos, equis y otras letras. Un medio rollo. Lo grave de aquel sistema, que a pesar de todo pervive, es que los números no tienen valor relativo y para escribirlos tienes que saber sumar porque los valores se van acumulando como si fuera una colección. (pág. 18).

3.1.¿De qué sistema de numeración está hablando el cero? ¿Qué letras usaban? ¿Cómo funcionaba? Pon ejemplos.

También ha habido otros sistemas de numeración a lo largo de la historia: el griego, el egipcio, el maya, el chino, …, y otros muchos.

3.2. Escoge uno de ellos y analiza sus símbolos, su funcionamiento y cómo llevaban a cabo las operaciones elementales.

Actividad 4: Lo que pudo haber sido y no fue…

> ¿Os imagináis qué habría pasado si nos hubiesen conocido personajes como Pitágoras o Euclides? (Pág. 21).

4.1.¿Es posible que ni Pitágoras ni Euclides conocieran el número cero? Explica razonadamente la causa.

Aunque más adelante hablaremos de Pitágoras, vamos a iniciar aquí el acercamiento a su figura.

4.2. Enuncia el resultado más famoso que se le atribuye a Pitágoras y demuéstralo de alguna forma. ¿Cuál es el significado geométrico del teorema?

4.3. En la página 56 hay un mal enunciado del Teorema de Pitágoras. Explica el error y la diferencia con el enunciado correcto.

En el significado geométrico del Teorema de Pitágoras intervienen los cuadrados como figuras construidas sobre los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo. ¿Qué pasaría si, en vez de cuadrados, construyéramos triángulos equiláteros?

4.4. Demuestra que si sobre los catetos y la hipotenusa construimos triángulos equiláteros, también se cumple que la suma de las áreas de los triángulos construidos sobre los catetos es igual al área del triángulo construido sobre la hipotenusa.

4.5. Demuestra que el resultado anterior también se verifica para cualquier figura geométrica que se construya, de forma semejante, en los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo.

Euclides ha pasado a la historia por haber escrito una obra de matemáticas que, después de la Biblia, es la obra que más ediciones ha tenido en el mundo.

4.6. ¿De qué obra estamos hablando? ¿De qué trata?

4.7. Uno de los resultados contenido en uno de los libros que componen esa obra se refiere a los números primos y dice que *existen infinitos números primos.* Demuestra este resultado como lo hizo Euclides.

Actividad 5: El cero absoluto

> Soy el punto de partida de todas las escalas, de todas las redes de comunicación, de los días; incluso en la física me dan un nombre que se aplicó a los reyes: el absoluto. (Pág. 21).

5.1.¿Qué es el cero absoluto? ¿Qué mide? Compara su valor en otras escalas de medida de la misma magnitud física.

Actividad 6: ¿Los cinco números más famosos?

$$e^{i\pi}+1=0 \quad \text{(pág. 21)}$$

La igualdad numérica es, para muchos, la relación que engloba a los números más famosos e importantes de las matemáticas: *e, i*, π, 1 y 0. Del último de ellos ya hemos hablado bastante en alguna de las actividades anteriores, pero de los demás no; es más, quizás no conocías alguno de ellos hasta la lectura del libro.

6.1.Explica el origen de cada uno de los números distintos de cero de la fórmula anterior. Pon ejemplos de situaciones más o menos reales en las que puede aparecer alguno de ellos.

6.2. Si te pidieran que los ordenases de menor a mayor, ¿qué podrías hacer? Para hacer esta tarea ten mucho cuidado con el número *i*.

Actividad 7: Una adivinanza divina

> Cuatro paredes, sin puertas
> con seis filos las harás
> y ten además en cuenta
> que el más sencillo de cinco es. (Pág. 27).

7.1. Explica el significado de cada una de las frases de la adivinanza que *la cabeza pensante* de la hidra le propuso a Sineta. Describe cuántas *paredes* y *filos* tiene cada uno de los otros cuatro.

7.2. Las cinco figuras, a las que se alude en la adivinanza, también se denominan los *sólidos platónicos*. ¿Por qué?

7.3. Calcula razonadamente el área lateral, el área total y el volumen de tres de ellos.

Actividad 8: El problema de las rimas

> Nueve copas dejaré
> cinco boca arriba están;
> las restantes al revés.
> Dos cada vez cogerás
> y la vuelta les darás.
> Tu mente quiero retar
> pues el juego acabarás
> si consiguieras pensar
> cómo cuatro boca arriba
> terminarás por dejar. (Pág. 28).

La poesía anterior contiene la prueba que Sineta le propuso a la hidra. Como fácilmente habrás supuesto, la hidra nunca podrá conseguir llevar a cabo la tarea encomendada…

8.1. Explica razonadamente la causa por la que el objetivo a conseguir es imposible.

8.2. Inventa dos situaciones parecidas, de manera que en una sí se pueda conseguir el objetivo y en la otra no.

Actividad 9: ¿El número lo es todo?

> El número es todo. (Pág. 31).

Este era el lema de Pitágoras y de la Escuela Pitagórica, en la que él era *El Maestro*.

9.1. Explica su significado.

9.2. En la Escuela Pitagórica había *acusmáticos* y *matemáticos*. ¿Qué significan estas palabras y a quiénes englobaban?

Aunque Pitágoras no conoció el número cero, es seguro que conocía otros números cuya existencia mantenía en secreto.

9.2. ¿De qué números estamos hablando? Pon algunos ejemplos de ellos.

Lee las explicaciones de Pitágoras a Sineta (pág. 33 a 35 del libro) y contesta a las siguientes cuestiones:

9.3. ¿Qué relación hay entre el número 120 y los escogidos inicialmente, el 8 y el 30? ¿Cómo se denomina a 120 respecto de 8 y 30?

9.4. Explica el procedimiento que conoces para hallar el más pequeño número que los contiene un número exacto de veces; es decir, el menor de los múltiplos comunes a los dos números.

9.5. ¿Cómo se llama al mayor de los divisores comunes de dos o más números? ¿Cómo se calcula?

Actividad 10: ¿Medir la diagonal con el lado? Imposible

> Considera un cuadrado.
> Ahora fíjate en su lado y en su diagonal.
> Evidentemente, son dos magnitudes.
> Hasta aquí todo va normal. El problema surge cuando ahora quieres hacer con estas magnitudes lo mismo que hice antes con el 8 y con el 30.
> ¡Es imposible!". (Pág. 34).

10.1. Calcula el valor de la diagonal del cuadrado en función del lado y divídelo entre éste último; así verás cuántas veces es mayor la diagonal que el lado. En la tablilla Yale BC7289, datada en el 1600 a. C., se tiene ese resultado de forma aproximada. Investígalo.

Tablilla Yale BC7289

10.2. Haz lo mismo entre el lado de un triángulo equilátero y su altura. ¿Qué resulta?

10.3. Hablando de triángulos equiláteros y aprovechando los cálculos anteriores: ¿pueden ser el lado y el área de un triángulo equilátero números naturales simultáneamente? Razona la respuesta.

Actividad 11: Las manzanas y los sombreros pueden ser un problema, aquí y en el Paraíso…

– Necesito tres manzanas de oro y dos de plata. (Pág. 48).

11.1. Lee el problema lógico de las manzanas de oro y plata y haz un resumen de la solución, exponiendo con tus palabras el razonamiento de Eurídice.

11.2. Analiza la solución del siguiente problema, similar al de las manzanas:

El profesor Lógicus quiere dar una mención honorífica al mejor de sus estudiantes en la asignatura de Lógica. Al finalizar el curso había tres de ellos empatados a tal fin, Induzquio, Deduzquio y Razonio; por lo que les propuso una prueba para deshacer el empate.

Los estudiantes cerraron los ojos y el profesor les fue poniendo, en la cabeza de cada uno, sendos sombreros que podían ser rojos o negros. Cuando los tres tenían sombrero puesto, el profesor les dijo que podían abrir los ojos y ver el color de los sombreros que tenían los demás (no podían ver el suyo). Nosotros, espectadores de la escena, vemos que Lógicus había puesto los tres sombreros de color rojo.

Entonces el profesor les dijo:
-Si veis algún sombrero rojo, levantad la mano.
Inmediatamente los tres levantaron la mano.
-El primero que consiga averiguar el color de su sombrero será el ganador de la mención honorífica.

Después de un rato, Induzquio, uno de los estudiantes, levantó la mano y dijo:
-¡El color de mi sombrero es rojo!

¿Cómo pudo averiguarlo? Intenta resolverlo sin seguir leyendo.

El profesor Lógicus certificó el acierto del estudiante, a la vez que le solicitó que expusiera sus razonamientos. Induzquio le contestó:
-Si mi sombrero hubiera sido negro, entonces Deduzquio se habría dado cuenta de que su sombrero debería ser rojo, porque si no Razonio no podía haber levantado la mano (por haber visto algún sombrero rojo).

Todos seguían expectantes a Induzquio, que continuó:
-También Razonio podía razonar de la misma manera y saber que su sombreo era rojo. Pero si ninguno de los dos han dicho nada del color de su sombrero es que el mío no puede ser negro. Por tanto es rojo.

El rápido desenlace dejó a los otros dos estudiantes asombrados y sin poder captar todos los matices del razonamiento de Induzquio. Éste, sabedor de las complicaciones que surgen en el entendimiento de la personas, les repitió otra vez sus argumentos.

11.3. Revisa el razonamiento del estudiante y compáralo con lo que tú habías previsto (si es que habías pensado en algún resultado).

11.4. ¿Te atreves a resolver la misma cuestión para el caso de cuatro personas, cada uno con un sombrero rojo en su cabeza?

Actividad 12: ¡Atentos, que llega el triángulo!

¡Hola! Cuando te diga quién soy, sé que vas a decir que me conoces de casi toda la vida, que me has tratado en muchas ocasiones. Pero yo no estoy tan seguro de que realmente sepas mucho sobre mí aunque te pueda dar esa impresión”. (pág. 53).

En esta actividad vamos a rellenar algunas lagunas que pudieras tener en tus conocimientos sobre el triángulo, como él mismo dice en el libro.

12.1. ¿Conoces el papiro del Rhind? En el libro se dice que está en el Museo Británico. Averigua de qué se trata, su contenido y la relación con los triángulos y las matemáticas.

12.2. Además de los triángulos equiláteros, seguro que conoces otros tipos. Clasifica los triángulos según diferentes criterios relacionados con los lados o los ángulos.

Papiro del Rhind

Actividad 13: Pero, ¿hay baldosas triangulares?

> También debes saber que soy de los pocos polígonos regulares que teselamos el suelo, es decir, …

13.1. Dando por hecho que el triángulo equilátero rellena el plano formando un *mosaico regular*, ¿sabrías decir, de manera razonada, qué otros polígonos regulares pueden rellenar el plano? O dicho de otra manera, ¿cuáles son los *mosaicos regulares*? Haz algún dibujo ilustrativo.

13.2. Investiga el significado del término *mosaico semirregular* y averigua cuántos mosaicos semirregulares hay?

Actividad 14: Herón y su famosa fórmula

> Todo empezó cuando en la antigua Grecia un hombre, que recuerdo bien y al que nunca podré agradecer suficiente su descubrimiento, obtuvo una fórmula que permite conocer el valor de mi área sabiendo cuánto miden mis lados. La fórmula lleva el nombre de este ilustre griego: Herón. (Pág. 57).

14.1. Recoge los datos necesarios y elabora una biografía básica de Herón, que recoja sus principales aportaciones al conocimiento matemático.

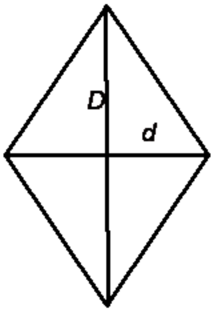
14.2. ¿Eres capaz de demostrar la fórmula de Herón? Puedes consultar la referencia bibliográfica Dunham (1993). Analiza la demostración, desmenúzala y desarróllala para este trabajo.

14.3. Recopila todas las fórmulas que conozcas para hallar el área de un triángulo, compáralas y enumera las ventajas e inconvenientes de cada una. ¿Cuál te parece más sencilla de manejar?

Actividad 15: Un paseo para justificar fórmulas

> Claro que tal vez tu conozcas otra fórmula para calcular mi área: aquella de base por altura partido por dos". (Pág. 58).

15.1. Repasa las justificaciones de la fórmula anterior en las páginas 58 y 59 del libro y exponlas aquí.



15.2. Cambiemos ahora de figura; consideremos un rombo. La fórmula para hallar el área del rombo es:

$$S = \frac{D \cdot d}{2}$$

siendo D su diagonal mayor y d la menor. ¿Sabrías explicar por qué es válida esa fórmula?

15.3. Para hallar el área de un polígono regular se suele usar la fórmula:

$$S = \frac{P \cdot a_p}{2}$$

siendo P el perímetro del polígono y $a_p$su apotema. ¿Sabrías demostrar la validez de esta fórmula.

Actividad 16: Una esfera puede tener mucha… ¡geometría!

> Aún no he llegado a entender bien por qué Euclides, tan sabio como fue, dedicó tanto esfuerzo a que la gente conociera la geometría plana y abandonara a mi familia, las esferas. (pág. 61).

Vamos a estudiar algunas propiedades de la geometría de la esfera. Para ello te propondremos algunas actividades para pensar un poco.

16.1. Define lo que es un segmento esférico y una recta esférica.

16.2. Define circunferencia máxima en una esfera. En la esfera terrestre, ¿qué relación hay entre algunas circunferencias máximas y los meridianos?

16.3. Si en vez de una esfera tuviéramos un cilindro, ¿cómo calcular la distancia entre dos puntos de la superficie cilíndrica?

Actividad 17: El famoso V Postulado

> En la geometría euclídea existe un famoso postulado (el V) que dice, en esencia, que por un punto exterior a una recta *r* pasa una y sólo una paralela a *r*. (pág. 64).

17.1. ¿Qué es la *geometría euclídea*?

17.2. En la geometría euclídea hay *axiomas, postulados, definiciones, teoremas…* Explica el significado de cada uno de esos términos y pon un ejemplo de cada uno.

17.3. Enuncia el V Postulado de la geometría euclídea, tal y como lo presentó Euclides. Escribe algo de su historia hasta la aparición de las geometrías no euclídeas en el siglo XIX.

17.4. Averigua cuántos postulados tiene la geometría euclídea y exponlos aquí.

17.5. Explica por qué en la geometría de la esfera no se cumple el V Postulado de Euclides.

Actividad 18: Las rectas también tienen sus cortes

> Dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas entre sí. (pág. 65).

18.1. La frase anterior es cierta en la geometría de Euclides. ¿Se cumple en la geometría de la esfera? Explícalo razonadamente.

18.2. Volviendo al plano de la geometría de Euclides, si tenemos tres rectas, ¿cuáles pueden ser las posiciones relativas de unas respecto de las otras? Describe lo que pasa en cada caso. ¿Cuántos puntos pueden tener en común como máximo? ¿En qué caso ocurre esto último?

18.3. Analiza la cuestión anterior en la geometría de la esfera.

18.4. Averigua el número máximo de puntos de corte de cuatro rectas en el plano euclídeo. Haz lo mismo para el caso de n rectas en el plano.

Actividad 19: ¿Un polígono de dos lados? ¡Imposible!

> No es posible dibujar una figura cerrada que sólo tenga dos lados; cualquier trozo del plano limitado por segmentos ha de tener como mínimo tres lados. (Pág. 67).

19.1. Explica qué es un *biángulo* en la superficie esférica. Calcula los valores posibles para la suma de los ángulos de un *biángulo.*

Actividad 20: Por dos puntos, ¿pueden pasar infinitas rectas?

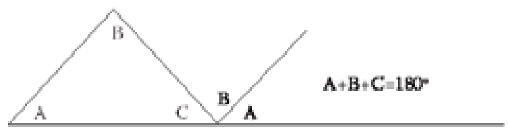
> Si sobre mi superficie considero dos puntos diametralmente opuestos, comprobarás fácilmente que por esos dos puntos pasan ¡infinitas circunferencias máximas!. (Pág. 70).

Como puedes ver, después de leer y entender lo anterior, en la geometría de la esfera, por dos puntos distintos pueden pasar infinitas *rectas esféricas.*

20.1. Dados dos puntos cualesquiera de la superficie esférica, ¿siempre pasan infinitas *rectas esféricas* por ellos? Analiza los casos posibles.

Actividad 21: Triángulo birrectángulo… ¿pero qué demonios es esto?

> La suma de los ángulos de un triángulo plano es igual a 180º. Es una bella demostración visual imposible de rebatir. (Pág. 68).

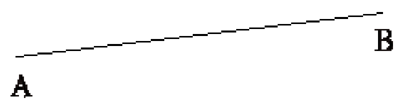


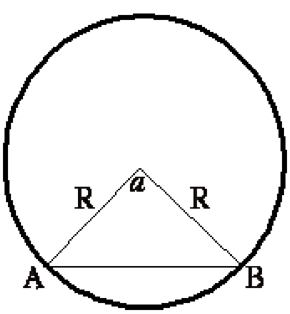
21.1. Explica la validez de la demostración anterior.

21.2. En un *triángulo esférico birrectángulo*, como el de la pág. 69 del libro, ¿cuánto pueden sumar sus tres ángulos? Justifícalo razonadamente.

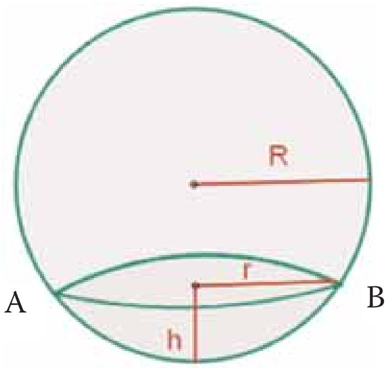
Actividad 22: Algunos problemas sobre desplazamientos en la superficie esférica

> El segmento AB es la distancia más corta entre los puntos A y B del plano. (Pág. 62).





Queremos calcular la distancia entre dos puntos de una superficie esférica. Sabemos que es la longitud del arco de circunferencia máxima que pasa por A y por B. Cortamos la esfera con un plano que contiene a la circunferencia máxima que pasa por A y B, ver la figura del margen.



Sabiendo que el radio de la esfera es *R* y que el ángulo central correspondiente al arco AB mide *a* grados sexagesimales. Con estos datos:

22.1. Calcular la longitud del arco AB.

22.2. Calcular la longitud del segmento rectilíneo AB (la longitud de la cuerda AB del dibujo).

22.3. Imagina que para ir de A a B hacemos un túnel en la esfera. ¿Cuál es su longitud? ¿Cuánta distancia nos ahorramos al ir de A hasta B por el túnel, en vez de hacerlo por la superficie de la esfera?

22.4. Supongamos que deseamos saber el volumen de la parte de la esfera situada por debajo de la circunferencia que pasa por A y B, denominada *casquete esférico.* ¿Cómo podemos hacerlo?

Aprovechando la circunstancia de estar viviendo en una superficie esférica, el planeta Tierra, vamos a resolver un interesante problema sobre lo que se alcanza a ver desde un determinado punto.

22.5. Imagina que estás en un punto de la Tierra situado al nivel del mar. Mediante un globo aerostático no elevamos verticalmente a 100 metros del suelo. ¿Qué superficie de nuestro planeta divisamos desde esa altura? ¿Y desde una altura *h* cualquiera?

22.6. Resuelve los dos problemas propuestos en la página 71 del libro.

Actividad 23: La Derivada también enamora

> Cuando llegó a la edad adecuada y se convirtió en una moza de espléndida presencia, sucedió lo que tenía que suceder. Un buen día conoció a un muchacho que, aunque algo más viejo que ella, había adquirido hacía poco una magnífica representación gráfica que le daba una belleza tal, que atrajo la mirada curiosa de la Derivada. Tan buena moza tampoco le pasó desapercibida al Arco Tangente, que así se llamaba el galán. (Pág. 74).

23.1. Haz la representación gráfica de la función y=arc tg x, explicando sus principales características. ¿Te parece tan bella como le pareció a la Derivada?

En el *Romance de la derivada con el arco tangente* se narra la historia amorosa de estos dos entes matemáticos, dándose varias pruebas de este amor.

23.2. Como se cuenta en el libro, cuando se citaron en el punto (x_0, y_0) de la curva $y=f(x)$ comprobaron su *sintonía*. ¿De qué sintonía se trata? Explícala con tus palabras y exprésala también mediante ecuaciones algebraicas.

23.3. También se cumple que los dos (la Derivada y el Arco Tangente) se anulan en unos puntos particulares de la función. ¿En qué puntos acurre eso? Justifícalo.

Actividad 24: Más pruebas de amor…

> …cuando Derivada crecía al pasar de algunos puntos a otros, entonces Arco Tangente experimentaba así mismo un evidente crecimiento. (Pág. 75).

24.1. Explica razonadamente la cita anterior. ¿Siempre se cumple? Pon ejemplos y haz algún dibujo ilustrándolo.

En los *paseos asintóticos*, nos cuenta el autor que "mientras la Derivada sufría un exagerado crecimiento, Arco Tangente lo hacía acercándose a 90º". (Pág. 76).

Centro de Eventos de Feria Valencia

24.2. Explica por qué ocurría eso cuando daban un *paseo asintótico* acercándose a una asíntota vertical.

24.3 Si la asíntota fuera horizontal u oblicua, ¿qué ocurriría? Analiza los posibles casos.

Actividad 25: El amor puede hacer perder... ¡más que el equilibrio!

> ... al llegar a cierto punto x_0, perdieron el equilibrio y quedaron totalmente desorientados. Se llevaron un susto de muerte pues, sólo fue en un punto, a ellos, enamorados como estaban, les pareció una eternidad. (Pág. 77).

25.1. Explica, con el ejemplo siguiente, lo que ocurre en un punto de una función en el que es continua pero no derivable. Ayúdate de su gráfica.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si\ x\leq 2 \\ -x^2+9 & si\ x>2 \end{cases}$$

Actividad 26: Fiestas con funciones altaneras ...

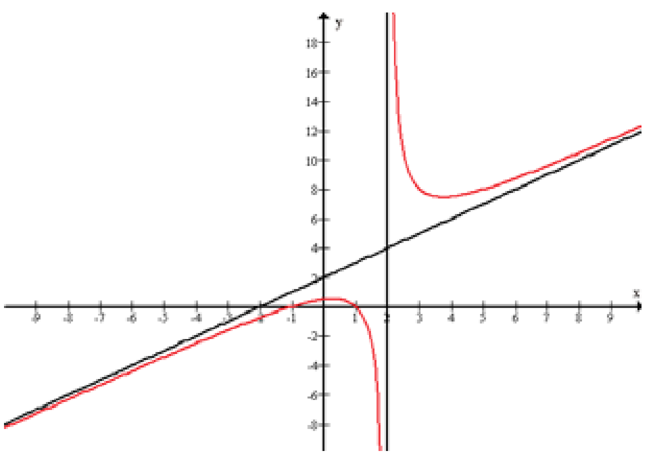
> ...la altanera familia de las Racionales, que más de un susto proporcionó a nuestros enamorados". (Pág. 78).

26.1. ¿Qué son las funciones racionales? Pon ejemplos de funciones racionales junto con sus gráficas.

26.2. ¿A qué crees que pueden deberse los sustos que daban a nuestra pareja de enamorados?

26.3. Haz un estudio y averigua cuándo una función racional tiene asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

26.4. A partir de la gráfica siguiente, averigua la expresión algebraica de la función que está representada, así como las ecuaciones de sus asíntotas:



Actividad 27: Y llegaron los preparativos de la boda...

> No pusieron lista de bodas pero las distintas familias les ofrecieron originales regalos. Así, la función y=senx, pariente del novio, se ofreció a llevarles hasta el lugar elegido a través de un recorrido lleno de suaves ondulaciones. También lo ofrecieron sus hermanas y=sen(x/2) e y=sen(x/3). Con ellas las ondulaciones serían aún más suaves. (Pág. 79-80).

27.1. Explica por qué las ondulaciones de *y=sen(x/2)* e *y=sen(x/3)* son más suaves que las de *y=senx.* ¿Qué consecuencias tiene el sustituir, en *y=senx*, la *x* por *x/c*, siendo *c* un número entero distinto de cero?.

27.2. Estudia el efecto que tiene, en la gráfica de *y =senx*, sustituir la *x* por: a) *x+c*; b) *c·x,* siendo *c* un número entero no nulo.

27.3. Analiza qué ocurre en la gráfica de *y=senx* cuando la cambiamos por:
a) *y=senx + c;*
b) *y =c·senx*, siendo *c* un número real.

Actividad 28: ¡La boda del siglo!

> Los Ejes Cartesianos actuaron en esta historia como organizadores del evento. Enviaron sendas tarjetas de boda a los padres de la novia, Gottfried Wilhelm Leibinz e Isaac Newton. No podían faltar. Los hermanos no pudieron evitar la tentación de invitar también a René Descartes, su padre; al fin y al cabo, gracias a él fue como se conoció la pareja. (Pág. 80).

28.1. ¿Cómo es eso de que la Derivada tiene dos padres? Explica el asunto acudiendo a la historia de las matemáticas. Elabora unas biografías básicas de cada uno de ellos.

28.2. ¿Qué relación hay entre Descartes y los ejes de coordenadas?

Actividad 29: ¡Ponte en el papel de creador!

> ¡Pss! ¡Hola! ¿Cómo te llamas?. (Pág. 81).

La cita anterior es el comienzo del cuento *Dos puntos y ¿un destino?* Demuestra que en matemáticas hay mucho que contar y no son números solamente.

29.1. Elige una idea matemática de cualquier tipo (concepto, teorema, personaje, propiedad, etc.) y demuestra tus dotes literarias escribiendo un pequeño relato, de no más de dos páginas, sobre algún aspecto de la misma.

Actividad 30: ¡Nos faltaba Don Quijote!

> Un caballero andante como yo, puesto por Dios en el mundo para evitar las injusticias, bendice el reparto hecho por este joven e insta a los dos hermanos a que así lo reconozcan. (Pág. 93).

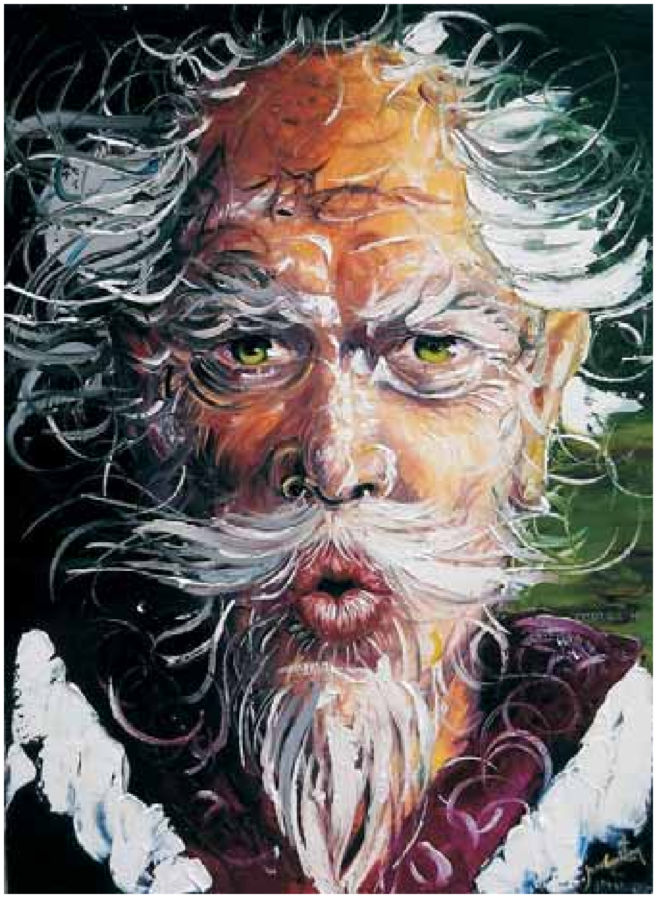
30.1. Vuelve a leer el reparto propuesto por D. Quijote y analiza la validez de los criterios utilizados para llevarlo a cabo.

En la obra de *El Quijote* aparecen muchos números, y alguno de ellos es citado en numerosas ocasiones. En Carlavilla (2005) puedes obtener las respuestas.

30.2. ¿Cuál es el número más nombrado en *El Quijote*? ¿Cuántas veces? ¿Y el número más grande? Haciendo operaciones con estos dos números, ¿cuál es el mayor número que puedes formar? ¿Cuántas cifras tiene? ¿Cuánto espacio ocuparías al escribirlo con todas sus cifras?

30.3. En el capítulo 26 de la primera parte, Cervantes nos narra el retiro espiritual de Don Quijote, en el que dice que rezó un millón de avemarías. Si esto hubiera sido verdad, ¿cuánto tiempo habría tardado en hacerlo?

LITERATURA Y MATEMÁTICAS ■



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Señalamos algunas referencias que pueden ser eficaces para el profesor o profesora y/o para el alumnado a la hora de responder a algunas de las cuestiones. En cualquier caso, en la red de internet se pueden encontrar otros recursos que, bien seleccionados, pueden sernos útiles. A este respecto, señalaremos que se pueden encontrar otras dos versiones, más humorísticas y de pasatiempo, del cuento de la Derivada y el Arco Tangente; una de ellas narrada y desarrollada en un video de youtube. Para encontrarlas, basta buscar en google con: *romance de la derivada y el arco tangente.*

Balbuena, L. (1998). El profesor de matemáticas, mis reflexiones. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas.* Nº 17, p. 13-18. Barcelona: Ediciones Grao.

Balbuena, L., y García Jiménez, J. E. (2005). *El Quijote y las Matemáticas. Día Escolar de las Matemáticas*. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

Carlavilla, J. L., (2005). *Si hay una X hay matemáticas*. Armilla (Granada): Proyecto Sur de Ediciones.

Dunham, W., (1993). *Viaje a través de los genios. Biografías y teoremas de los grandes matemáticos*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Gardner, M. (1981). *¡Ajá! Inspiración.* Barcelona: Prensa Científica.

Ifrah, G. (1987). *Las cifras. Historia de una gran invención. Madrid:* Alianza Editorial.