suma+ 63
Febrero 2010, pp. 17-20

# Algunas demostraciones geométricas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$

*El objetivo de este artículo es presentar varias pruebas visuales sobre la irracionalidad de $\sqrt{2}$, las cuales no son muy conocidas comparadas con otras pruebas, como por ejemplo, las demostraciones del teorema de Pitágoras. Además, esas demostraciones pueden ser útiles como una alternativa a la clásica demostración griega y de esta forma se intentará llamar la atención de los alumnos.*

Palabras Clave: Innovación didáctica, raiz cuadrada de 2, número irracional, demostración geométrica, secundaria y bachillerato.

## Some geometric proofs of the irrationality of $\sqrt{2}$

*The aim of this article is to present several visual proofs about the irrationality of $\sqrt{2}$, which are not very well-known, on the contrary to other visual proofs, such as the proofs of Pythagoras's theorem. What´s more, these proofs can be useful as an alternative to the classical greek proof and in this way pupils interest will be captured.*

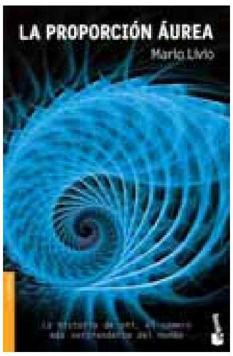
Key words: Educational innovation, square root of 2, irrational number, geometric proof, secondary and high school.

## Introducción

De todo lo que aprendí leyendo el magnífico libro *La proporción áurea* (Livio, M., 2006) destacaría al menos dos cosas: la primera es que el lector no debe fiarse de lo que se escribe en la sobrecubierta de un libro, pues si allí dice "…se ha demostrado que (la proporción áurea) la utilizaron los creadores de las pirámides y del Partenón" en el interior el autor argumenta precisamente todo lo contrario ("Como conclusión diremos que es altamente improbable que los antiguos babilonios o los antiguos egipcios descubrieran la Proporción Áurea y sus propiedades" p. 72, "¿Se utilizó la Proporción Áurea en el diseño del Partenón? Es difícil afirmarlo con total seguridad… Sin embargo no hay ninguna certeza de ello, como a algunos libros les gustaría hacernos creer, y carece del apoyo de las dimensiones reales del Partenón", p. 86). Parece que el trabajo serio y documentado de Mario Livio resulta menos atractivo para vender su libro que repetir ciertos mitos no contrastados en torno al número áureo. La segunda cosa que me llamó la atención fue la demostración geométrica (ya conocida por los griegos) de la irracionalidad del número áureo:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

y que aparece en el Apéndice 2 del libro.




Se sabe que el descubrimiento de los números irracionales (*inconmensurables*) por Hipaso de Metaponto, miembro de la escuela pitagórica, causó una tremenda conmoción en esta comunidad, pues contradecía la máxima pitagórica: *"Todo es número"*. La historia, posiblemente legendaria, afirma que Hipaso murió ahogado al ser lanzado por la borda, como castigo por haber introducido un elemento de desorden en un universo que los pitagóricos pretendían reducir a los núme-

**Natalia Casás Ferreño**
*IES Santísima Trinidad, Baeza.*

ros naturales y sus proporciones. Suele afirmarse que $\sqrt{2}$, la diagonal de un cuadrado de lado uno, fue el primer número irracional descubierto por los pitagóricos. Sin embargo la demostración griega clásica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, recogida en los Elementos de Euclides y que sigue siendo la más conocida y enseñada hoy en día, es de carácter aritmético (por cierto, clasificada en séptimo lugar entre los 24 teoremas más bellos según los lectores de la revista *The Mathematical Intelligencer*). Por ello los expertos consideran que realmente fue $\phi$, la razón entre la diagonal y el lado del pentágono regular, el primer número irracional descubierto por Hipaso, ya que la demostración geométrica de este hecho resultaba más accesible y adecuada a la manera de razonar de los pitagóricos (para una discusión más detallada véase Von Fritz, 1945).

La discusión anterior nos lleva de forma natural a plantearnos la siguiente cuestión: si existe una demostración geométrica de la irracionalidad del número áureo, ¿existirá también alguna demostración geométrica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ más allá de la demostración aritmética habitual? La respuesta sorprendente es que no solo existe una sino varias diferentes. Como es natural, al igual que la irracionalidad de $\phi$ está relacionada con las propiedades del pentágono, la irracionalidad de $\sqrt{2}$ está relacionada con las propiedades de triángulos y cuadrados. El objetivo de este trabajo es presentar algunas de estas demostraciones geométricas que parecen no ser demasiado conocidas, al contrario que otras demostraciones visuales, como por ejemplo, las del teorema de Pitágoras (véanse Nelsen, 2001 y Alsina y Nelsen, 2006) y que pueden servir como alternativa a la demostración tradicional para captar el interés de los alumnos.

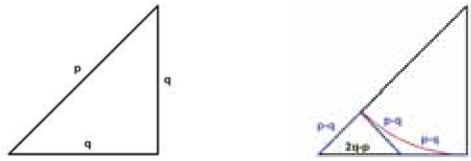
Además resulta llamativo que estas demostraciones hayan sido publicadas a lo largo de las últimas décadas y que una de ellas sea de una fecha tan reciente como el año 2000. Este hecho nos sirve como un magnífico ejemplo para poner de manifiesto a aquellos alumnos que piensan que las matemáticas ya están acabadas desde hace siglos que, incluso en un tema tan clásico como la irracionalidad de $\sqrt{2}$, también es posible hacer investigación y encontrar nuevas demostraciones hoy en día.

## $\sqrt{2}$ no es racional: tres demostraciones geométricas

La primera demostración que vamos a discutir (Apostol, 2000) fue publicada por Tom Apostol, el autor del famoso libro de texto *Calculus* usado como bibliografía básica en cualquier curso universitario de Cálculo.

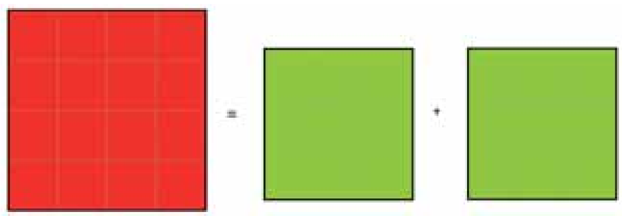
Si $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ fuese racional, entonces $p^2=2q^2=q^2+q^2$.

Por el Teorema de Pitágoras esta última igualdad es equivalente a la existencia de un triángulo rectángulo isósceles natural (es decir, un triángulo rectángulo con los dos catetos iguales y cuyos lados tienen como longitud un número natural. En concreto, la hipotenusa mediría $p$ y los catetos serían iguales a $q$). Por tanto si $\sqrt{2}$ es racional tiene que existir el triángulo rectángulo isósceles natural con los lados más pequeños posibles. La idea de la demostración de Apostol consiste en construir dentro de ese triángulo rectángulo isósceles natural mínimo (figura de la izquierda) otro triángulo rectángulo isósceles natural más pequeño (figura de la derecha), llegando así a una contradicción. De esta forma $\sqrt{2}$ no puede ser un número racional.

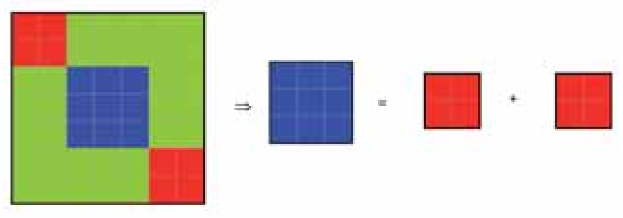



Veamos como se construye: partimos de un triángulo rectángulo isósceles natural como el que aparece en la figura de la izquierda. El triángulo pequeño que aparece en la figura de la derecha se construye trazando un arco circular, centrado en el vértice superior y de radio igual a uno de los catetos, hasta intersecar a la hipotenusa en un punto, desde el cual se traza una perpendicular a la hipotenusa hasta la base del triángulo. Todos los segmentos que aparecen en esta figura tienen de longitud un número natural y los segmentos dibujados en azul tienen la misma longitud (dos de ellos son tangentes a un círculo desde un mismo punto). Por tanto el triángulo más pequeño también es un triángulo rectángulo isósceles natural.

Una demostración esencialmente similar a la de Apostol, pero que puede ser de gran interés para motivar a los alumnos porque se realiza plegando una hoja de papel, puede encontrarse en la página 183 del libro (Conway y Guy, 1996). Precisamente a John Conway se debe la popularización de una demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ (debida a Stanley Tennenbaum) de gran belleza visual y que por su sencillez presentamos como una demostración sin palabras

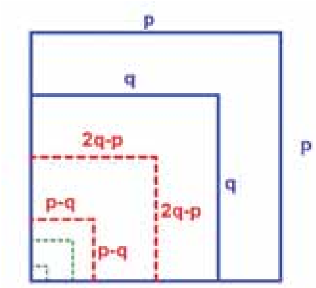


$p^2 = q^2 + q^2$



$$(2q-p)^2= (p-q)^2 + (p-q)^2$$

La tercera demostración geométrica que vamos a discutir, y que está relacionada con la anterior, se debe a Barbara Turner (Turner, 1977) y se basa en la siguiente propiedad de los cuadrados naturales: si un cuadrado natural S contiene un cuadrado natural más pequeño cuya área es exactamente la mitad de S, entonces dentro de S existe otro cuadrado natural con la misma propiedad.




Si $p^2 = 2q^2$, entonces $(2q-p)^2= 2(p-q)^2$

Por tanto repitiendo esta operación podríamos construir una secuencia infinita de cuadrados naturales cada vez más pequeños contenidos dentro de S, lo cual no puede suceder porque un cuadrado natural solo puede contener en su interior un número finito de cuadrados naturales. De todo ello deducimos que no puede existir un cuadrado natural que contenga a otro cuya área sea la mitad, lo que equivale a decir que $\sqrt{2}$ no es racional.

## Comentarios finales

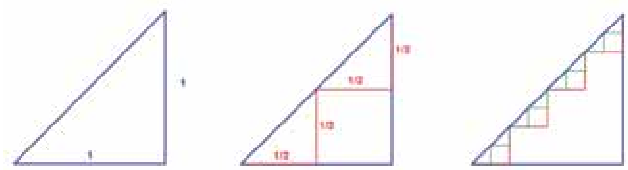
Las tres demostraciones geométricas anteriores comparten varios elementos en común: todas ellas son demostraciones por reducción al absurdo, emplean el método del descenso infinito y esencialmente se reducen al siguiente hecho algebraico:

si $\dfrac{p^2}{q^2}=2$ entonces, $\dfrac{(2q-p)^2}{(p-q)^2}=2$ con $0<2q-p<p$ y $0<p-q<q$.

De esta forma si suponemos que $p$ y $q$ son los números naturales más pequeños con la propiedad de que el cuadrado de su cociente es 2, llegaríamos a una contradicción pues $(2q-p)$ y $(p-q)$ serían números naturales más pequeños con la misma propiedad.

En este breve artículo no hemos pretendido ser exhaustivos. Para conocer muchas otras demostraciones de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ , tanto de carácter geométrico, como aritmético o algebraico, recomendamos al lector interesado que consulte los magníficos artículos (Gardner, 1997) y (Bogolmony, 2009).

Finalmente, y después de haber presentado tres demostraciones geométricas de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ , terminamos este trabajo con una "demostración" visual de que $\sqrt{2}$ es en realidad... ¡un número natural! Por el Teorema de Pitágoras sabemos que $\sqrt{2}$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos tienen longitud 1 (figura de la izquierda).



Ahora bien, la línea quebrada que aparece en la figura central tiene longitud igual a la suma de los catetos, o sea 2, y repitiendo este proceso en cada uno de los triángulos rectángulos isósceles más pequeños que se forman obtenemos una sucesión de líneas quebradas todas ellas de longitud 2 que convergen a la hipotenusa (figura de la derecha). Entonces pasando al límite se obtiene que la longitud de la hipotenusa es igual a 2, con lo cual $\sqrt{2}$ =2 . ¿Puede el lector descubrir cuál es la falacia presente en la argumentación anterior? (Como indicación, recuerde que el proceso de intercambiar una función con un límite no es válido en general si la función no es continua).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. y Nelsen, R. B. (2006). *Math made visual*, Washington : MAA.

Apostol, T. M. (2000). Irrationality of The Square Root of Two — A Geometric Proof. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 107, nº 9, 841-842.

Bogomolny, A. (2009). Square Root of 2 is Irrational, *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*, disponible en http://www.cut-the-knot.org/proofs/sq_root.shtml

Conway, J. H. y Guy, R. K. (1996). *The Book of Numbers*. New York: Springer-Verlag.

Fritz, K. von (1945) The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. *The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., Vol. 46, nº 2, 242-264.

Gardner, M. (1997). The Square Root of Two=1.41421 35623 73095 … *Math Horizons*, April, 5-8.

Livio, M. (2006). *La proporción áurea*. Barcelona: Ariel.

Nelsen, R. B. (2001). *Demostraciones sin palabras*. Granada. Proyecto Sur.

Turner, B. (1977). A Geometric Proof That $\sqrt{2}$ Is Irrational. *Mathematics Magazine*, Vol. 50, nº 5, 263.

Este artículo fue recibido en SUMA en Abril de 2008 y aceptado en Noviembre de 2009

suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Apartado de correos 498
46900-TORRENT (España)

Fax: (+34)911 912 879
direccion@revistasuma.es
administracion@revistasuma.es

### Soneto gastronómico-numérico

Me gustan los sonetos con bizc… 8
y los quintetos con chocolate unta…2
Las rosquillas me como en parea… 2
con epigramas y moscatel trasn… 8

Mientras el cinturón me desabr… 8
pienso que no irán mal acompaña…2
Los serventesios con el cordero asa...2
y el arte menor, con calim… 8

Las odas con pescados de Nept… 1
Besugo al madrigal o al roman… 0
el vino blanco será muy oport… 1

En mi cocina versos y números ma…0
y pues comer y escribir es todo … 1
en la mesa: cuchillo tenedor y lapi…0

### Soneto ingenioso numérico

Existiendo sonetos tan varia… 2
busqué entre las estrellas un luc… 0
una gota, sin par, de un agua… 0
unos versos con números rim… 2

Con sus catorce versos ordena… 2
macerando el amor con el a… 0
ligados el segundo y el ter… 0
y el primero y el cuarto parea… 2

Estudié con rigor el roman… 0
a Lope y a Quevedo, a Unam… 1
a Cervantes siguió mi lapic… 0

Miré mil libros, sin dejar ning… 1
mas querido lector, a ser sin… 0
con números no hallé soneto alg… 1

El autor de estos sonetos, Antonio Box Finís, es médico, ilusionista y poeta en Burgos.