suma+ 62
Noviembre 2009, pp.107-113

Las matemáticas y la música popular

Las canciones y las danzas del folclore son indudablemente el alma de la música, su origen. La música de concierto que escuchamos procede directamente de ellas.

Leonard Bernstein, (1918 - 1990), compositor, pianista y director de orquesta.

En muchas ocasiones, cuando se dice que las Matemáticas proporcionan un lenguaje muy apropiado para la Música, o que la Informática ha ampliado los horizontes de los músicos, parece que nos estamos refiriendo necesariamente a lo que se ha dado en llamar *música culta* o *de concierto*. Sin embargo, esto no tiene ningún fundamento, y de hecho las Matemáticas pueden ser de gran ayuda en la música folclórica. Los métodos numéricos resultan imprescindibles para la adaptación de instrumentos musicales a la música antigua, permiten reconstruir parte de la historia y de las melodías de la música o hacen posible diseñar un árbol genealógico que conecta varios estilos.

Pero la ayuda también se produce en el sentido inverso, porque la música popular proporciona documentos muy valiosos para la investigación en Música y Matemáticas. Analizar las propiedades acústicas de una orquesta o agrupación musical completa, en la que participan instrumentos de varias familias, no es tarea fácil. Por esta razón, la música popular, que suele interpretarse con agrupaciones sencillas, permite aislar patrones rítmicos o analizar la altura de las notas de una forma más eficiente que en otro tipo de manifestaciones musicales. Una vez diseñadas las técnicas para este tipo de música, se pueden aplicar a agrupaciones más complejas. Además, cuando los documentos sonoros con los que se trabaja proceden de grabaciones hechas en estudio, muchas veces, el sonido original ha sido manipulado y en este caso los sonidos a estudiar están alterados y resulta difícil extraer conclusiones. Estas manipulaciones son menos habituales en el folclore que en otros estilos musicales.

Una muestra del interés que despierta la aplicación de métodos numéricos a la música folclórica, es la aparición de artículos que conectan ambas áreas de investigación en revistas y libros como *Computing in Musicology*, *Mathematics and Computation in Music*, o la *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, por citar algunos, a los que, sin duda, hay que añadir todos los recursos que proporciona internet sobre esta materia. Sin embargo, no es nuestra intención presentar aquí una enumeración exhaustiva de todos los temas que aparecen en estos trabajos, sino que nos contentaremos con abordar algunos aspectos que están relacionados con el ritmo y con la afinación de la música popular. Además, nuestra reflexión la haremos sobre una pequeña parte del folclore español, aunque los métodos que expondremos son igualmente válidos para otros ejemplos.

Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

La música folclórica analizada en la Universidad de Yale

En la sección de Musymáticas no podemos pasar por alto que el pasado mes de junio se celebró la *Second International Conference of the Society for Mathematics and Computation in Music*[1], MCM-2009, en la Universidad de Yale (EEUU). En torno a la Música se reunieron matemáticos, informáticos y músicos, para tratar, entre otros temas, los aspectos cuantitativos de la evolución de las obras musicales.

El marco no podía más adecuado para estudiar la relación música-matemáticas-tradición. A los medios tecnológicos de la Universidad de Yale, se añadía la posibilidad de visitar la biblioteca *Beinecke* de libros raros y manuscritos (una de las más importantes del mundo), en donde se podían consultar las obras originales de Zarlino, V. Galilei y Kepler, entre otros.

Entre los muchos ejemplos de la música tradicional que se analizaron en el congreso MCM-2009, el profesor G. T. Toussaint, de la Universidad McGill de Canadá, en el seminario *Medida de la complejidad del ritmo musical: modelos matemáticos y psicológicos*[2], abordó el análisis de los ritmos tradicionales desde el punto de vista computacional e hizo especial hincapié en las distintas variantes del flamenco. En realidad, una parte de este seminario se enmarca dentro de la temática investigada en el proyecto COFLA[3], al que pertenece G. T. Toussaint, y que está integrado por un grupo multidisciplinar de profesionales de la música, informáticos, historiadores del flamenco y matemáticos, con el objetivo común de analizar matemáticamente el flamenco y su evolución.

Las matemáticas y los ritmos musicales del flamenco

De todas las propiedades de la Música, en esta parte sólo nos detendremos en el ritmo o *compás*, por tanto necesitamos precisar lo que entendemos por ritmo musical. Podemos aceptar que el ritmo es la frecuencia de repetición, a intervalos regulares o irregulares de sonidos fuertes y débiles, largos y breves, altos y bajos, en una composición o, dicho de manera más formal,

> *El ritmo se define como la organización en el tiempo de pulsos y acentos que perciben los oyentes como una estructura. Esta sucesión temporal se ordena en nuestra mente, percibiendo de este modo una forma.*

La música que nos ocupa en esta sección, el flamenco, presenta la particularidad de que el ritmo es muy marcado y se ejecuta con palmas que al acentuarse marcan el patrón rítmico. Se suelen utilizar compases ternarios[4] de 12/8 (en cada compás caben 12 corcheas). En principio, se tocan 12 palmas por compás y, para marcar el ritmo, hay algunas que suenan más fuerte que las otras. Con esto, una buena representación del ritmo de un compás puede darse con un vector de 12 componentes formado por ceros y unos. Los unos representan las palmas acentuadas y los ceros las demás. Así, un "1" en la posición *i*-ésima significa que la *i*-ésima palma es acentuada. En Díaz-Báñez *et al.* (2005) se representan los patrones rítmicos ternarios del flamenco de la forma siguiente:

1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	Fandango
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	Soleá
0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	Bulería
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	Seguiriya
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	Guajira

Una vez transcritos los ritmos al lenguaje matemático, nuestro interés es poder calcular la similitud rítmica entre ellos, o lo que es igual, calcular la distancia entre dos ritmos. Entre

Conferencia plenaria celebrada en la Beinecke Rare Boock and Manuscript Library de la Universidad de Yale

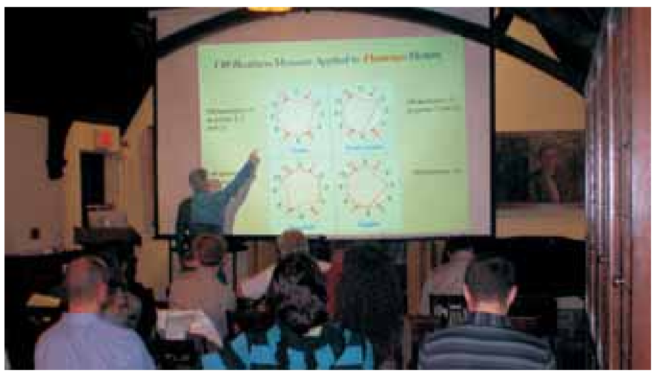
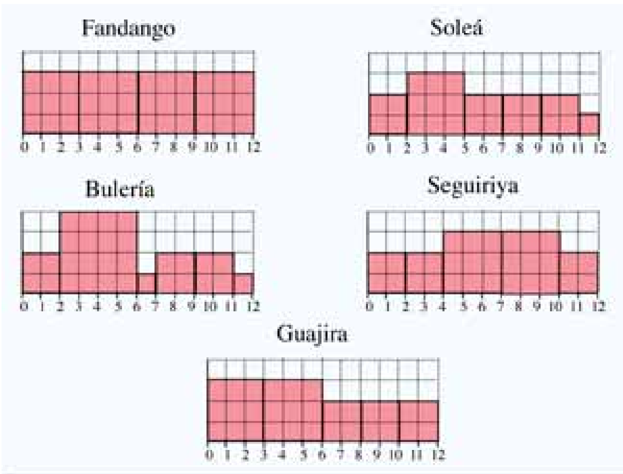


Imagen del seminario en el que el profesor G. T. Toussaint analizó los ritmos del flamenco todas las posibles distancias que se han utilizado, aquí mostraremos dos que han proporcionado buenos resultados: la distancia cronotónica y la distancia de permutación dirigida.

La distancia cronotónica

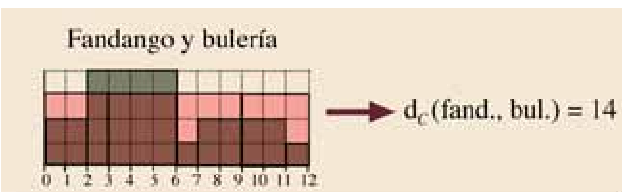
En 1983, K. Gustafson propone expresar los intervalos mediante cuadrados en los que el lado representa su longitud temporal. Con este método, en un solo gráfico se tiene información de la duración del intervalo y de cuándo se producen los ataques. Así, por ejemplo, para el patrón rítmico de la soleá, X=(0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,1), se tienen los siguientes intervalos: [0,0], [1,0,0], [1,0], [1,0], [1,0], [1], que se representarán, respectivamente, mediante un cuadrado 2×2, un cuadrado 3×3, tres cuadrados 2×2 y un cuadrado 1×1.

A continuación mostramos la representación cronotónica de las diferentes variantes (*palos*) del flamenco:



Distancia cronotónica de los patrones rímicos del flamenco

De entre las muchas formas de calcular la distancia entre dos ritmos expresados en representación cronotónica, una de las más sencillas es medir la diferencia entre las áreas de ambos ritmos. En el gráfico siguiente se ve que para calcular la distancia cronotónica entre el fandango y la bulería basta con contar los cuadrados unitarios en los que no coinciden ambos ritmos. Así, la distancia entre el fandango y la bulería es 14.

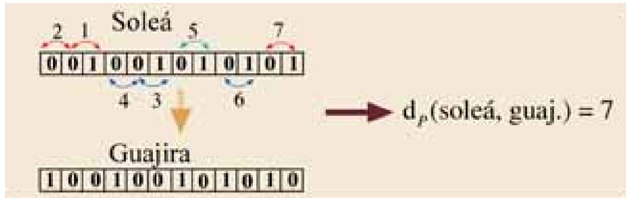


Distancia cronotónica entre el fandango y la bulería

La distancia de permutación dirigida

En primer lugar daremos una definición que sólo es aplicable cuando el número de acentos de dos patrones rítmicos es el mismo:

> *La distancia de permutación entre dos patrones X, Y se define como el mínimo número de permutaciones que se necesitan para convertir X en Y.*



Distancia de permutación entre la soleá y la guajira

> *En ocasiones, para entender la escultura o la arquitectura es necesario analizar los cuerpos geométricos que se esconden en la obra. En música ocurre algo similar, para comprender una composición es necesario reconocer los patrones musicales que contiene.*

Supongamos que los vectores $X= (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $Y= (y_1,y_2, ...,y_n)$ contienen p unos cada uno y el resto son ceros. Una manera eficiente de calcular la distancia de permutación entre *X* e *Y* es construir los vectores *U*, *V* que contienen las posiciones de los unos de *X* y de *Y*. Por ejemplo, si el primer uno de *X* está en la posición 3, la primera componente de *U* será un 3, y así sucesivamente. En este caso, la distancia de permutación se calcula según la expresión[5]

$$d_P(X,Y) = \sum_{j=1}^{p} \left| u_j - v_j \right|.$$

Comprobemos cómo funciona el método con la soleá y la guajira. En este caso, los vectores *X, Y, U* y *V* son los siguientes:

X=(0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0,1) ⇒ *U*= (3, 6, 8, 10, 12),
Y=(1,0,0,1,0,0,1,0,1,0,1,0) ⇒ *V*= (1, 4, 7, 9, 11).

Entonces, la distancia de permutación entre X e Y se calcula como

$$d_P(X,Y) = |3-1|+|6-4|+|8-7|+|10-9|+|12-11| = 7$$

que, como era de esperar, coincide con la que habíamos obtenido en el recuadro anterior.

Sin embargo, cuando los ritmos a comparar no tienen el mismo número de acentos, necesitamos generalizar el concepto de distancia de permutación al de *distancia de permutación dirigida* entre dos patrones X, Y, $d_{PD}(X, Y)$, que se define de la forma siguiente:

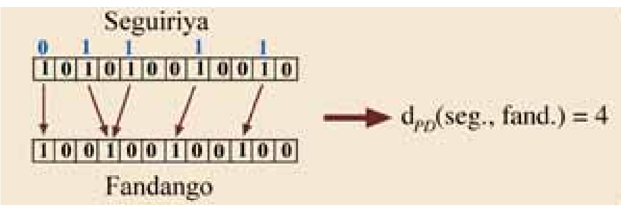
a. Si el número de acentos de X e Y es el mismo,

$$d_{PD}(X, Y) = d_P(X, Y).$$

b. Si el número de acentos de X es mayor que el de Y, la distancia de permutación dirigida es el mínimo número de permutaciones necesarias para convertir X en Y bajo las condiciones siguientes:

1. Cada "1" de X tiene que moverse a una posición "1" de Y.
2. Todas las posiciones " 1" de Y tienen que recibir al menos un "1" de X.
3. Ningún "1" puede viajar a través de la frontera entre la posición cero y la n-ésima.

Por ejemplo, la distancia de permutación dirigida entre la seguiriya (5 acentos por compás) y el fandango (4 acentos por compás) se calcula como se expresa en el recuadro siguiente:



A diferencia de lo que ocurre con la distancia de permutación, no se dispone en la actualidad de un algoritmo eficiente para calcular la distancia de permutación dirigida entre dos patrones.

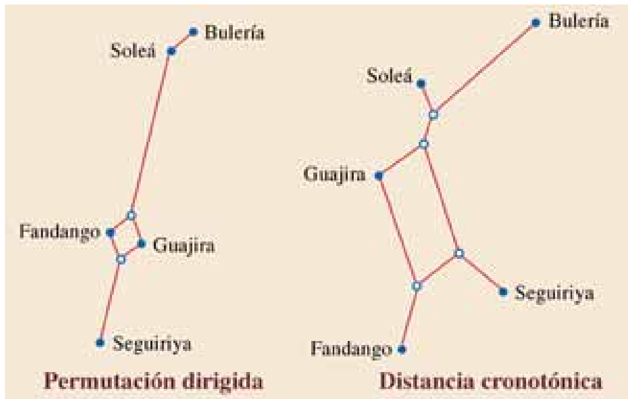
Un árbol filogenético para los palos del flamenco

El objetivo principal por el que se calculan las distancias anteriores es estudiar las posibles relaciones genealógicas entre los distintos patrones rítmicos. Para ello, en Díaz-Báñez *et al.* (2005) se utiliza una técnica denominada *SplitsTree* que consiste en dibujar un grafo plano en forma de red en el que la distancia entre dos nodos (dos patrones) refleja la distancia entre los ritmos.

En la tabla siguiente se recogen las distancias entre los diferentes estilos ternarios del flamenco utilizando la distancia cronotónica (en negro) y la distancia de permutación dirigida (en azul).

	Soleá		Bulería		Seguiriya		Guajira		Fandango	
Soleá	0	0	6	1	8	11	4	7	10	7
Bulería	6	1	0	0	12	12	8	8	14	8
Seguiriya	8	11	12	12	0	0	8	4	6	4
Guajira	4	7	8	8	8	4	0	0	6	2
Fandango	10	7	14	8	6	4	6	2	0	0
SUMA	28	26	40	29	34	31	26	21	36	21

A partir de esta tabla se construye el grafo que representa las distancias entre cada estilo.



Árboles filogenéticos de los estilos ternarios del flamenco usando la distancia de permutación dirigida y la distancia cronotónica.

El grafo de la distancia cronotónica sugiere la agrupación en tres grupos. El central está formado por el fandango y la seguiriya, otro por la soleá y la bulería y el tercero por la guajira. El ritmo de bulería es el más alejado de todos (la suma de distancias es 40) y el más similar a todos es el de guajira (con una suma de 26). Sin embargo, los agrupamientos que aparecen con la permutación dirigida proporciona un primer grupo con la soleá y la bulería, otro central formado por el fandango y la guajira y el tercero por la seguiriya. En este caso, los ritmos más similares a todos son la guajira y el fandango (ambos con una suma de distancia de 21). Teniendo en cuenta que la guajira es un estilo más reciente, podría decirse que el fandango es el ritmo más primitivo, y esto estaría de acuerdo con que es el ritmo más extendido, dando lugar a modalidades evolucionadas como las malagueñas, las granaínas, las tarantas, etc. y con la idea de que "el fandango es la fuente de todos los patrones flamencos".

La afinación de los intérpretes de la música popular

Para hablar acerca de la afinación vamos a cambiar el estilo de la música popular. En este caso analizaremos un tipo de canciones populares denominado *cançò d'estil* que se extiende por gran número de comarcas de la Comunidad Valenciana, con centro en la comarca de l'Horta (a la que pertenece la ciudad de Valencia). Se trata de un tipo de música mucho menos difundido que el flamenco, en el que participan instrumentos de viento (normalmente clarinete, trompeta y trombón), de cuerda pulsada (guitarras y *guitarró*), cantantes y un versador (que va improvisando las letras). La canción la inician los instrumentos de cuerda y después se incorporan los instrumentos de viento e interpretan una melodía. En un momento dado, flexible, irrumpe el cantante que se queda sólo con el apoyo de la cuerda y el viento sólo participa para hacer algunas notas denominadas *cortes* y el final de la canción.

La razón por la que se ha elegido este tipo de músicas es, además de mostrar que el uso de las Matemáticas no es específico de ningún tipo de música, porque contamos con material sonoro recogido desde 1915 en el que no ha habido ningún tipo de manipulación ni intervención que añada o reelabore elementos sobre las interpretaciones originales (véase Torrent, 1997).

En la música popular, en la que los modos de cantar se trasmitían de forma oral a base de la experiencia, el sistema de afinación temperado no se impuso de forma sencilla.

Cuando se quiere transcribir este tipo de música tradicional se cuenta con varios inconvenientes:

a. En cuanto a los tiempos, mientras los instrumentos se sirven de pulsaciones cíclicas que coinciden con el concepto de compás (tempo físico o metronómico), las voces llevan un tempo mucho menos rígido, no tan periódico, deforme y normalmente dilatado (tempo psíquico o melódico). Resulta imposible medir estas dos categorías con el mismo sistema de medición.

b. Respecto a la afinación, cohabitan dos sistemas diferentes: los instrumentos se rigen, aproximadamente, por las normas del sistema temperado de doce notas y las voces humanas pueden hacerlo por otras.

Con estas dificultades, no resulta sencillo transcribir la música en un pentagrama. Por esta razón en ocasiones se prescinde de las figuras de notas ordinarias, no se precisa la duración, se elimina el compás y las líneas divisorias. Así aparecen notas largas (representadas por un cuadrado), notas cortas (círculos) y melismas[6] (representados por círculos pequeños). Además, cuando la afinación es alta o baja se indica con flechas sobre las notas. Veamos un ejemplo:

Transcripción de un fragmento de música tradicional, estilo de l'Ú, interpretado por el Xiquet de Paterna en 1929.

De entre todos los cantantes, nos centraremos en Vicent Peris Pastor (1904-1939), *el Xiquet de Paterna*, porque en estos días, el cuatro de noviembre, se cumplirán setenta años de su fusilamiento pero, por supuesto, lo que vamos a analizar sería igualmente válido para otros cantantes.

Si nos fijamos en el pentagrama, vemos que cada vez que aparece un *la*, está marcado con una flecha que indica que la nota está baja. Se trata de una nota intermedia entre el *la* y *la*^{b}. En principio, podría tratarse de una desafinación del cantante, pero cuando esta característica se repite en todas sus interpretaciones y las de otros cantantes, ¿no resulta sorprendente esta repetición de un intervalo equivocado?

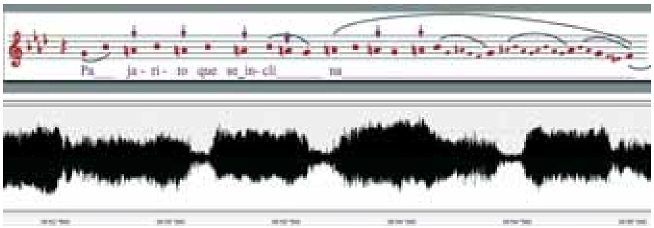
Como decíamos en el último número de la revista SUMA, en el siglo XIX la hegemonía del temperamento igual de doce notas, frente al resto de formas de afinar, ya no tenía vuelta atrás. Sin embargo, en la música popular, en la que los modos de cantar se trasmitían de forma oral a base de la experiencia, el sistema de afinación temperado no se impuso de forma sencilla.

Para poder entender lo que ocurre con ese *la* insistentemente desafinado, al que representaremos como "la", mediremos[7] la frecuencia de la nota y calcularemos la distancia entre esta frecuencia y la nota afinada.

La distancia entre las notas de frecuencias f_1 y f_2 hercios se calcula como

$$d(f_1,f_2)=1200\cdot\left|\log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right)\right| \text{ cents.}$$

En realidad, lo que queremos comprobar es que esta "desafinación", que concedía al intérprete un rasgo característico, podría tratarse de un modo de afinar mucho más antiguo que el que manejamos en la actualidad: la Justa Entonación.



Análisis de las frecuencias de un fragmento musical con el programa Amadeus II®

Si calculamos la distancia entre el "la", de 427,66 Hz., y el *la* temperado, se tiene

$$d(\text{"la"}, la) = 1200 \cdot \log_2\left(\frac{427{,}66}{440}\right) = 49{,}24 \text{ cents}$$

Si repetimos la operación con el *la*ᵇ temperado, el resultado es muy similar.

$$d(\text{"la"}, la^b_{Temperado}) = 1200 \cdot \log_2\left(\frac{427{,}66}{415{,}305}\right) = 50{,}75 \text{ cents}$$

Se tiene por tanto que el "la" está prácticamente a mitad de camino entre el *la* y el *la*ᵇ. Sin embargo, si comparamos la misma nota con el la bemol de la Justa Entonación de Zarlino, sólo está 21 cents más alto.

$$d(\text{"la"}, la^b_{Zarlino}) = 1200 \cdot \log_2\left(\frac{427{,}66}{422{,}4}\right) = 21{,}42 \text{ cents}$$

Teniendo en cuenta que algunos autores fijan en 12 cents la percepción del oído humano (Haluka, 2005), en realidad estaríamos ante un *la bemol* de la justa entonación, pero no de la afinación temperada.

Para poder comprobar las diferencias entre las notas fijadas como afinadas por el temperamento de 12 notas y la Justa Entonación, a continuación damos una tabla que contiene las frecuencias de las notas en ambos sistemas (fijando el *la* a 440 Hz):

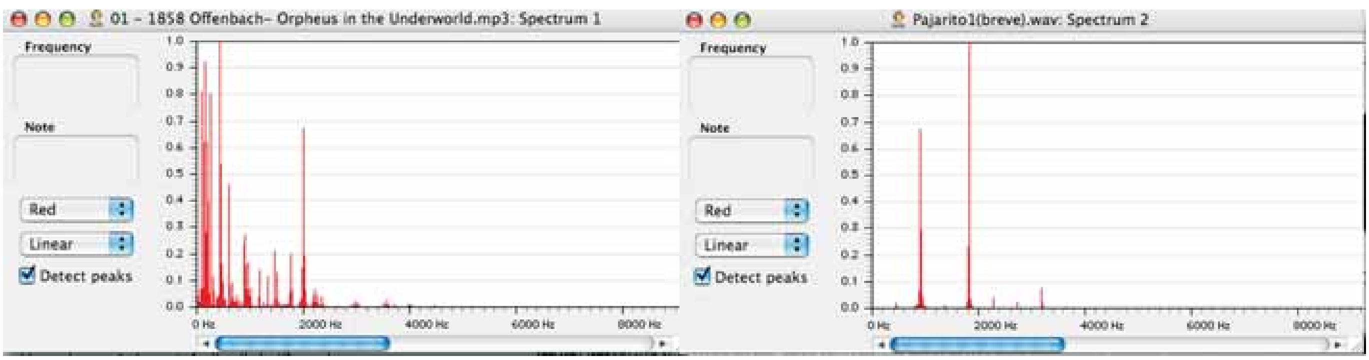
	J. Entonación (Zarlino)	Temperamento 12 notas		J. Entonación (Zarlino)	Temperamento 12 notas
Do	264	261,626	fa$^\#$	366,667	369,994
do$^\#$	275	277,183	sol^b	380,16	
re^b	285,12		**Sol**	396	391,995
Re	297	293,665	sol$^\#$	412,5	415,305
re$^\#$	309,375	311,127	la^b	422,4	
mi^b	316,8		**La**	440	440
Mi	330	329,623	la$^\#$	458,3	466,164
Fa	352	349,228	si^b	475,2	
			Si	495	493,883

Está claro que se trata de dos sistemas de afinación muy diferentes. Mientras que el temperado no distingue entre sostenidos y bemoles, la Justa Entonación sí lo hace. Además, las diferencias entre las frecuencias fijadas por ambos sistemas son claramente perceptibles por el oído humano, aunque éste tenga poco entrenamiento musical.

En definitiva, poder conocer el modo de afinación al que mejor se adapta una pieza musical proporciona mucha información cronológica de la fuente de la que procede el estilo y, además, permite ver el retraso con el que los intérpretes se adaptan a las nuevas corrientes consideradas cultas.

La música popular como banco de pruebas

En la mayoría de los temas de investigación, la única forma de llegar a resultados válidos es simplificar el problema lo máximo posible para, un vez resueltos los casos simples, poder generalizar las técnicas. En Música ocurre lo mismo, para poder analizar las propiedades acústicas de agrupaciones y obras complejas, es necesario empezar con ejemplos sencillos. Sirva como ejemplo el análisis de frecuencias que aparece en el gráfico de la parte inferior.



Análisis del espectro de frecuencias de un instante de Orfeo de los infiernos de Offenbach (a la izquierda), y de música popular valenciana (a la derecha) con el programa Amadeus II®

Si queremos estudiar los sistemas de afinación que aparecen en una interpretación, cuando se analiza la orquesta sinfónica, el número de barras de frecuencias es muy elevado, mientras que cuando se hace la misma operación con algunas músicas tradicionales el análisis se simplifica sensiblemente. La necesidad de este análisis, que podría parecer un objetivo académico alejado de la práctica cotidiana es, sin embargo, uno de los problemas con los que se encuentran algunos musicólogos. Como se afirma en Bernal (1999), "uno de los principales problemas que se presentan en la praxis de la música antigua para tecla es el de la elección del temperamento adecuado [...] Acertar con el temperamento adecuado será importante para expresar mejor el espíritu de la música de un momento dado."

Sería injusto no admitir que en la música de concierto, al disponer de una partitura se facilita cualquier análisis. Pero aún así, si en lo que estamos interesados es en la música real y no la teórica (la de la partitura), cualquier estudio se complica. Piénsese, por ejemplo, que con la misma partitura dos directores o dos orquestas distintas producen músicas claramente diferentes.

Por último, no debemos dejar de mencionar que uno de los actuales temas de investigación entre los estudiosos de la Música y la Computación es encontrar patrones musicales para reconstruirlos, para poder establecer la relación con la preferencia de un oyente dado o para diseñar relaciones entre diferentes estilos. Sin duda, la labor realizada por el proyecto COFLA con el ritmo del flamenco resulta muy interesante en sí misma, pero además proporciona técnicas muy útiles para la recuperación de información musical de otro tipo de músicas, en los que tener que trabajar con piezas enteras hace que la cantidad de datos con los que se cuenta dificulten mucho la labor.

MUSYMÁTICAS ■

NOTAS

1 Para más información sobre el congreso podéis visitar la página http://www.mcm2009.info/.

2 El título original del seminario fue "Measuring the Complexity of Musical Rhythm: Mathematical and Psychological Models".

3 En el proyecto COFLA participan investigadores de varias universidades españolas y extranjeras. De entre sus publicaciones, aquí sólo mostramos parte de los resultados presentados en J. M. Díaz Báñez et al, 2005, pero podéis encontrar más información en, por ejemplo:http://innovacion.ideal.es/matematicas-para-estudiar-cante-flamenco.html

4 Hay estilos dentro del flamenco que utilizan ritmos binarios (2/4 ó 4/4), como son el tango flamenco, la rumba, etc., pero se han excluido del estudio porque todos ellos presentan el mismo patrón rítmico (1, **2, 3, 4**), donde hemos marcado con negrita las palmas acentuadas.

5 En realidad la distancia de permutación entre X e Y coincide con la distancia de Hamming entre U y V.

6 Un melisma es un grupo de notas de adorno que se interpretan sobre una misma vocal.

7 La frecuencia se ha medido con el programa informático Amadeus II®, pero puede medirse con cualquier otro programa (muchos de ellos se pueden descargar gratuitamente de Internet) o con un afinador cromático.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernal, M. (1999): El temperamento de Nasarre: estudio matemático. *Revista de Musicología*, 22, pp. 157-174.

Del Corral A., León, T., Liern, V. (2009): Compatibility of the Different Tuning Systems in an Orchestra. *Mathematics and Computation in Music*, 38, pp. 93-103 .

Díaz Báñez, J. M, Farigu, G., Gómez, F., Rappaport, D., Toussait, G. T. (2004): El compás del flamenco: A phylogenetic analysis. *Proceedings of BRIDGES: Mathematical Connections in Art, Music and Science*, Southwestern College, Wineld, pp. 61-70.

Díaz Báñez, J. M, Farigu, G., Gómez, F., Rappaport, D., Toussaint, G. T. (2005): Similaridad y evolución en la rítmica del flamenco: una incursión en la matemática computacional. *La Gaceta de la RSME*, 8, pp. 490–509.

Haluska, J. (2005): *The Mathematical Theory of Tone Systems.* Bratislava: Marcel Dekker, Inc.

Liern, V. (2001): *Afinacions, partitures i fòrmules matemàtiques*, Prada de Conflent: Universitat Catalana d'Estiu.

Torrent, V. (1997): *Antologia del cant valencià d'estil (1915–1996).* Valencia: La Máscara – Generalitat valenciana.

Internet

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/Cultura/Musika/Afinacion/

http://innovacion.ideal.es/matematicas-para-estudiar-cante-flamenco.html

http://www.mcm2009.info/