suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 35-48

Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional

Sobre cada uno de los contenidos de la proporcionalidad aritmética, se establecen relaciones entre la enseñanza que proponen los libros de texto y los errores cometidos por un numeroso y destacado grupo de alumnos españoles de Educación Secundaria al resolver el mismo problema. Con la finalidad de superar las dificultades de comprensión de los alumnos provocadas por la práctica docente, ofrecemos alternativas a la enseñanza actual basadas en la construcción de los conceptos implicados en la proporcionalidad aritmética a partir del mundo de las magnitudes mensurables.

On each one of the contents of the arithmetical proportionality, relations are established between the education that propose text books and the errors committed by a numerous and outstanding group of Spanish students of Secondary Education all to solve the same problem. With the purpose of surpassing the difficulties of understanding of the students caused by the educational practice, we offer alternatives to current education based on the construction of the concepts implied in the arithmetical proportionality from the world of the mensurable magnitudes.

Introducción

La proporcionalidad aritmética es uno de los temas más relevantes para la formación de los ciudadanos, porque pone en juego los aprendizajes aritméticos escolares (medida, fracciones, operaciones elementales, etc.), y porque resuelve muchos de los problemas de los adultos (beneficios del capital, trueques o cambios de moneda, mezclas o aleaciones, descuentos comerciales, trabajos conjuntos, llenado y vaciado de recipientes, etc.).

Sin embargo, muchas investigaciones han puesto de manifiesto que adolescentes y adultos tienen grandes dificultades en resolver problemas que exigen del razonamiento proporcional (Behr, 1987; Hart, 1981, Vergnaud, 1983). Estas dificultades se deben, en buena medida, al bajo grado de comprensión de los estudiantes de los conceptos implicados en este tópico matemático (Heller, et al., 1989), y a la falta de destreza para aplicar correctamente las técnicas más frecuentes de la regla de tres (Cramer y Post, 1993).

En el caso de España, estudios nacionales e internacionales de evaluación han puesto de manifiesto el bajo rendimiento de los escolares en matemáticas (López y Moreno, 1997; INCE, 2002; INECSE, 2004). Los resultados de estos estudios también afectan a la proporcionalidad aritmética: sólo el 10% de los alumnos de 8º curso (14 años) responde correctamente a la tarea de completar una tabla de cantidades proporcionales (López y Moreno, 1997).

La trascendencia de la proporcionalidad aritmética y el bajo grado de competencia que alcanzan los alumnos ha despertado gran interés entre los investigadores y profesores; de este modo, se ha producido una abundante literatura científica que aborda diferentes aspectos del proceso instructivo y de la comprensión de los estudiantes (Davis, Hunting y Pearn, 1993; Neuman, 1993; Streefland, 1993; Bigelow, Davis y Hunting, 1989; Kieren, 1980; Singer y Resnick, 1992; Fernández, 2001; Margarit et al, 2001; Heller et al., 1989; Tourniaire y Pulos, 1995; Gómez, 2002; Bosch, 1994).

También es de nuestro interés participar en el análisis de este fenómeno didáctico y lo hacemos desde una perspectiva que no hemos encontrado en los trabajos revisados: la influencia de la práctica docente en los errores cometidos por los alumnos. Nuestro propósito es, por tanto, reflexionar sobre los conceptos y procedimientos presentes en la enseñanza tradicional de la proporcionalidad aritmética, y buscar alternativas sobre la que sustentar una nueva propuesta didáctica que incremente la comprensión de los alumnos.

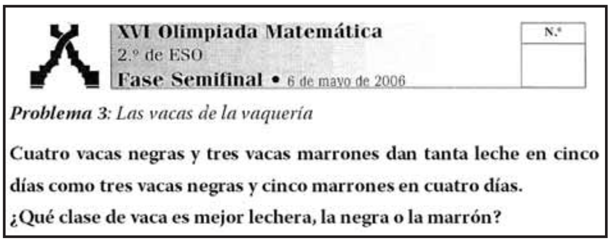
José Mª Gairín Sallán
Rafael Escolano Vizcarra
Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza

Y con este propósito pretendemos confrontar la práctica docente habitual sobre la proporcionalidad aritmética que se deduce del análisis de libros de textos escolares vigentes en el sistema educativo español, con el estudio de las respuestas dadas por un grupo numeroso y cualificado de alumnos de 2º curso de Secundaria (14-15 años) cuando resuelven un problema de proporcionalidad cuyas características describimos en el apartado seguidamente.

Resolución de la tarea propuesta

En la fase semifinal de la XVI Olimpiada Matemática de Aragón (España), celebrada en mayo de 2006, participaron 454 estudiantes de 2º curso de Enseñanza Secundaria Obligatoria (14-15 años). Estos estudiantes pertenecen a toda la Comunidad Aragonesa, y son los propios centros escolares los encargados de inscribirlos en las Olimpiadas; por lo que se pueden catalogar a los participantes como alumnos con buenos resultados en la asignatura de matemáticas.

De los 6 problemas propuestos en esta fase de la Olimpiada, nos ocuparemos exclusivamente del problema número 3, puesto que es el único en el que se utilizan aspectos conceptuales y procedimentales del tema de proporcionalidad aritmética. Este problema número tres se presenta a los alumnos de la siguiente forma


XVI Olimpiada Matemática
2.º de ESO
Fase Semifinal • 6 de mayo de 2006
N.º

Problema 3: Las vacas de la vaquería

Cuatro vacas negras y tres vacas marrones dan tanta leche en cinco días como tres vacas negras y cinco marrones en cuatro días.
¿Qué clase de vaca es mejor lechera, la negra o la marrón?

Figura 1

Tipología de las soluciones

Hubo 38 alumnos que dejaron sus respuestas en blanco (el 8,3% de los participantes). Pensamos que la mayor parte de estos alumnos no contestan porque están un poco desmotivados, puesto que las puntuaciones que esperan lograr en los otros ejercicios no les permitirán pasar a la siguiente fase de la Olimpiada.

Por tanto, trabajaremos con 416 respuestas de los participantes, y que podemos agrupar en tres grandes bloques de acuerdo con los conocimientos matemáticos utilizados por los estudiantes: de tipo aritmético, de tipo algebraico y de tipo proporcional.

a) Respuestas que utilizan operaciones aritméticas

El 7,7 % del total de respuestas utilizan exclusivamente operaciones con números racionales y ninguna de ellas presenta una solución correcta.

Es de destacar que en este tipo de respuestas los alumnos recurren a operaciones entre números considerados como entes abstractos, no como expresión de las distintas cantidades de magnitud que figuran en el enunciado. Este modo de actuación de los alumnos les impide controlar la validez de las operaciones que realizan, validez que vendrá determinada por el significado que asignen al resultado de operar cantidades de magnitud. De lo contrario, los alumnos dan respuestas que contienen resultados numéricos correctamente obtenidos, pero que expresan cantidades carentes de sentido. El siguiente ejemplo resulta ilustrativo de las respuestas de los alumnos que utilizan relaciones numéricas descontextualizadas del mundo de las magnitudes mensurables.

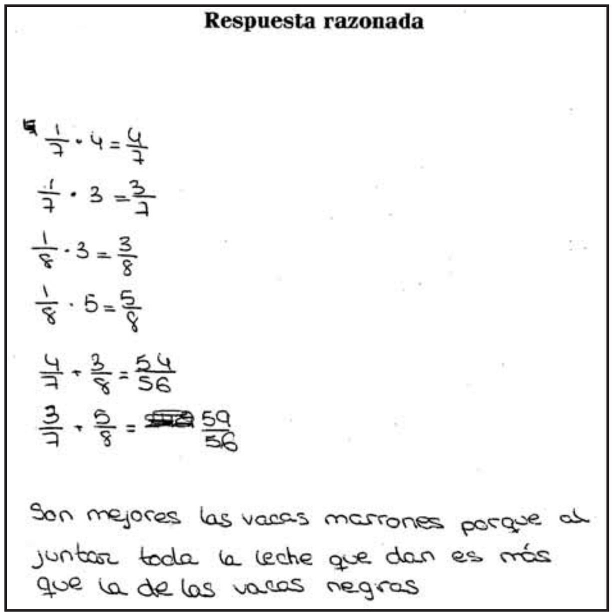


Figura 2

b) Respuestas que utilizan relaciones algebraicas

Hay que advertir que los alumnos participantes en esta Olimpiada tienen una corta experiencia en el trabajo algebraico, porque en este 2º curso de Educación Secundaria Obligatoria los alumnos todavía se encuentran en los inicios del aprendizaje del álgebra escolar.

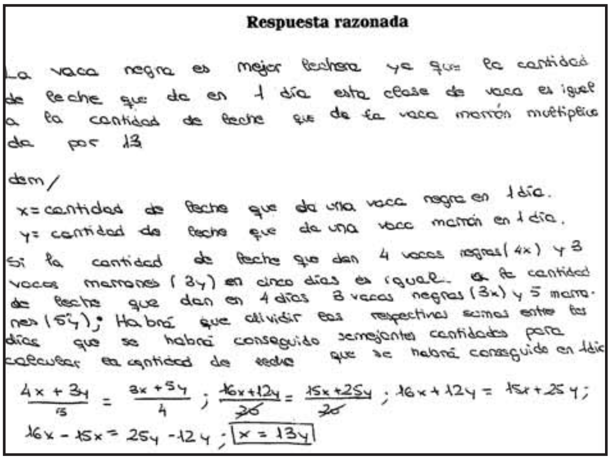
A pesar de ello, el 24,5% del total de respuestas utilizan el lenguaje algebraico; de las que el 28% son correctas.

Las respuestas incorrectas están provocadas por tres motivos principales:

–Definición errónea del valor de las incógnitas: utilizar incógnitas para indicar el número de vacas de cada color, a pesar de que se pregunta por la producción de leche de cada tipo de vaca.

–Interpretación errónea de la solución: encontrar unos valores numéricos para cada una de las incógnitas, aunque el problema pregunte por el resultado de una comparación.

–Errores provocados al establecer relaciones algebraicas inadecuadas: trasladar el enunciado del problema al lenguaje algebraico sin que las relaciones establecidas se correspondan con las que indica el enunciado, como puede constatarse en la siguiente respuesta en la que el alumno opta por una división en vez de una multiplicación:


Respuesta razonada

La vaca negra es mejor lechera ya que la cantidad de leche que da en 1 día esta clase de vaca es igual a la cantidad de leche que da la vaca marrón multiplicada por 13

dem/

x= cantidad de leche que da una vaca negra en 1 día.
y= cantidad de leche que da una vaca marrón en 1 día.

Si la cantidad de leche que dan 4 vacas negras (4x) y 3 vacas marrones (3y) en cinco días es igual a la cantidad de leche que dan en 4 días 3 vacas negras (3x) y 5 marrones (5y); Habrá que dividir las respectivas sumas entre los días que se habrá conseguido semejantes cantidades para calcular la cantidad de leche que se habrá conseguido en 1 día

$\frac{4x+3y}{5} = \frac{3x+5y}{4}$; $\frac{16x+12y}{\cancel{20}} = \frac{15x+25y}{\cancel{20}}$; $16x+12y = 15x+25y$;
$16x-15x = 25y-12y$; $\boxed{x=13y}$

Figura 3

c) Respuestas que utilizan el razonamiento proporcional

Éste es el ámbito matemático que los alumnos consideran más adecuado para dar respuesta al problema planteado, pues son el 67,8% del total de respuestas los que utilizan las ideas matemáticas de este tipo; o de otro modo, 2 de cada 3 de los alumnos que dan alguna respuesta lo hacen utilizando sus conocimientos sobre proporcionalidad aritmética.

Sin embargo, tan sólo el 8,3% de estas respuestas son correctas; es más, algunas de las soluciones que figuran en estas respuestas utilizan métodos de trabajo alejados de los que son habituales en el aula, como el que figura en esta respuesta:

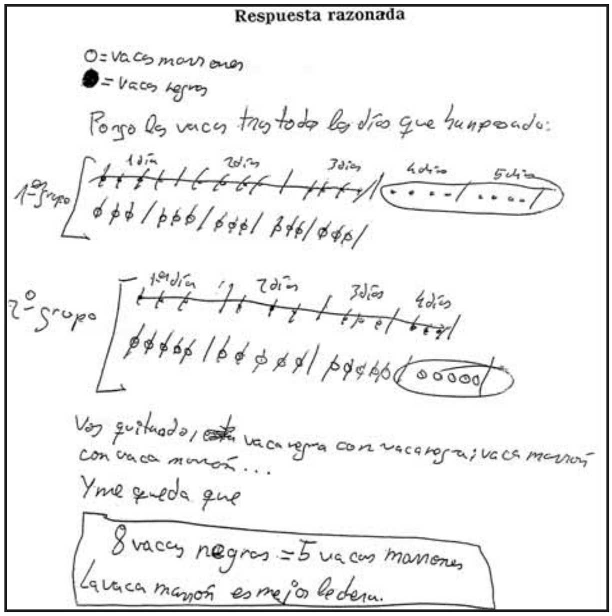


Figura 4

Atendiendo a la clasificación de Cramer, Post y Currier (1993), este problema pertenece a la categoría de comparación de razones. Aunque si tenemos en cuenta la práctica docente habitual, es un problema que no responde al esquema tradicional de encontrar una cantidad desconocida a partir de otras cantidades conocidas.

En la resolución del problema hay que establecer un férreo control de los conceptos implicados en situaciones de proporcionalidad aritmética y buscar argumentos que justifiquen la correcta manipulación de los datos numéricos, tal y como sintetizamos seguidamente:

–La consideración de proporcionalidad exige que la producción de leche de cada una de las vacas negras (y de cada una de las vacas marrones) sea igual cada día y que permanezca constante a lo largo de los días.

–Hay que considerar como variables la cantidad de leche que produce una vaca negra en un día, PN; la cantidad de leche que produce cada día una vaca marrón, PM; y la cantidad total de leche producida por cada grupo de vacas en el tiempo señalado, PT.

–El siguiente esquema sintetiza el enunciado del problema en la que se utilizan ideas de proporcionalidad distintas de la regla de tres:

$$4\text{ PN} \rightarrow 3\text{ PM} \rightarrow 5\text{ días} \rightarrow \text{PT}$$

$$3\text{ PN} \rightarrow 5\text{ PM} \rightarrow 4\text{ días} \rightarrow \text{PT}$$

– Para alcanzar la solución en el esquema anterior debe igualarse el número de días. Hay que modificar el esquema anterior teniendo en cuenta que las magnitudes implicadas son directamente proporcionales; que la producción de cada grupo de vacas se mantiene durante un número entero de periodos de días iguales a los del enunciado, con lo que el esquema anterior se transforma en el siguiente:

4 PN $\rightarrow$ 3 PM $\rightarrow$ 20 días $\rightarrow$ 4 PT

3 PN $\rightarrow$ 5 PM $\rightarrow$ 20 días $\rightarrow$ 5 PT

– Para conseguir igualar las producciones totales de leche se puede suponer que hay varios grupos de vacas que cumplen las condiciones del enunciado y que la producción de leche se ha contabilizado al cabo de 20 días; de este modo se obtiene el siguiente esquema:

20 PN $\rightarrow$15 PM $\rightarrow$ 20 días $\rightarrow$ 20 PT

12 PN $\rightarrow$20 PM $\rightarrow$ 20 días $\rightarrow$ 20 PT

– En este último esquema se observa que la igualdad de las dos situaciones se alcanza si en la fila inferior se añaden 8 PN y se eliminan 5 PM; es decir que la producción de 8 vacas negras sea igual a la producción de 5 vacas marrones. Por tanto, las vacas marrones son mejores productoras de leche.

– También se puede llegar a la situación final estudiando las condiciones que permiten igualar la producción en una unidad de tiempo (1 día):

Considerando las mismas variables (PN, PM y PT), para que la producción PT se consiga en 1 día es necesario que:

- Las vacas del primer establo se han de quintuplicar, siendo su producción 20 PN + 15 PM

- Las vacas del segundo establo se han de cuadruplicar, siendo su producción 12 PN + 20 PM

Como puede observarse, esta tarea encierra una gran riqueza conceptual, lo que favorece los propósitos de este trabajo por cuanto permite observar cómo los alumnos gestionan los contenidos aprendidos. En los siguientes párrafos haremos estas indagaciones usando algunas de sus respuestas.

Análisis de los errores de los alumnos

En este apartado queremos analizar con mayor profundidad el tipo de errores cometidos por los alumnos que utilizan el razonamiento proporcional. Con esta finalidad, y partiendo de los contenidos tradicionales, organizamos el trabajo en tres apartados:

– *Consideraciones sobre la enseñanza*. El análisis de los libros de texto vigentes en el sistema educativo español y con amplia presencia en el mismo, nos permite caracterizar la enseñanza que reciben los alumnos.

– *Consideraciones sobre el aprendizaje*. El análisis cualitativo de las respuestas dadas por un numeroso y cualificado grupo de escolares aragoneses cuando resuelven un problema que exige poner en juego aspectos conceptuales de la proporcionalidad aritmética, nos permite relacionar los errores cometidos por los alumnos con la enseñanza recibida.

– *En busca de alternativas*. De las consideraciones anteriores surgen ideas para construir una propuesta didáctica alternativa encaminada a mejorar la comprensión de los alumnos.

Magnitudes proporcionales

a) Consideraciones sobre la enseñanza

Existen libros de texto que comienzan el tema de proporcionalidad aritmética presentando directamente la idea de razón; en otros libros este comienzo se hace a través de una reseña histórica; otros textos hacen comentarios sobre la utilidad del nuevo conocimiento y, finalmente, hay otros textos que presentan de forma ostensiva la relación entre cantidades de dos magnitudes:

> En un concurso en el que participan 16 personas, solo se darán tres premios; por tanto, la relación entre los premios y los concursantes es 3 a 16 (Álvarez, M. D. et al., 2003a; p.128).

A la vista de las distintas propuestas de los libros de texto podemos resaltar que no hay una preocupación explícita por situar la práctica docente en el amplio campo de su fenomenología; es decir, la enseñanza *no se ocupa de delimitar y precisar las condiciones exigibles a dos cantidades de magnitud para poder establecer relaciones de proporcionalidad entre ellas*.

b) Consideraciones sobre el aprendizaje

La siguiente respuesta ilustra sobre los errores cometidos por los estudiantes al construir modelos matemáticos adecuados a la fenomenología de la proporcionalidad aritmética:

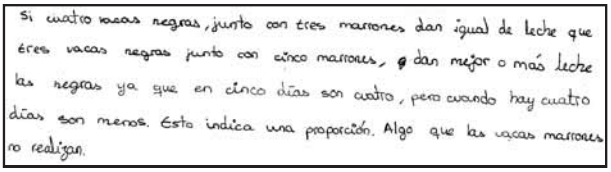

Si cuatro vacas negras, junto con tres marrones dan igual de leche que tres vacas negras junto con cinco marrones, ~~ø~~ dan mejor o más leche las negras ya que en cinco días son cuatro, pero cuando hay cuatro días son menos. Esto indica una proporción. Algo que las vacas marrones no realizan.

Figura 5

Como puede observarse, el alumno entiende que la proporcionalidad es aplicable tan sólo a una parte del problema, a las vacas negras. Para este alumno la existencia de proporcionalidad viene determinada porque la diferencia entre el número de vacas negras de las dos situaciones es igual a la diferencia del número de días; mientras que esta diferencia no se mantiene en el caso de las vacas marrones.

Esta respuesta pone de manifiesto la falta de comprensión del alumno sobre las condiciones exigibles a las magnitudes para que, entre ellas, exista una relación de proporcionalidad aritmética. Posiblemente el alumno hubiese alcanzado un mayor grado de comprensión si la enseñanza pusiese más énfasis en analizar las magnitudes que intervienen y las condiciones exigibles a tales magnitudes para que entre ellas exista una relación de proporcionalidad.

c) En busca de alternativas

En el mundo de la matemática abstracta la proporcionalidad se enuncia a través de las funciones de proporcionalidad. Son las relaciones numéricas establecidas entre las variables dependiente e independiente las que delimitan el campo de problemas en los que resultan pertinentes las ideas de proporcionalidad.

En el mundo físico la proporcionalidad aritmética está asociada a las relaciones entre cantidades de magnitud, por lo que resulta necesario establecer criterios que permitan a los estudiantes ubicar correctamente las situaciones que pertenecen al campo de la proporcionalidad.

Dos cantidades de magnitud se situarán en el campo de la proporcionalidad si el contexto en el que se ubican lo permite: la relación entre chicos y chicas hay que establecerla en un aula, en una ciudad o en un país; la relación entre el peso del pienso y el número de vacas hay que establecerlo en un tiempo y en un lugar; etc.

Las expresiones numéricas se podrán relacionar siempre que expresen cantidades de magnitudes mensurables: entre el número de una casa y el número de personas que viven en ella no hay relación de proporcionalidad, porque el número de una casa es un código que no indica una cantidad de magnitud.

Las relaciones de proporcionalidad se establecen entre cantidades sumables; en caso contrario esta relación no existe: la cantidad de agua de un recipiente y la temperatura a la que se encuentra no son proporcionales, pues la temperatura que alcanza la suma de dos cantidades de agua no es igual a la suma de las temperaturas de cada una de dichas cantidades.

Las cantidades tendrán una relación de proporcionalidad, en el contexto en que se sitúan, si dicha relación permanece al variar una de las cantidades. Así, el espacio que recorre un móvil y el tiempo que tarda en hacerlo son cantidades proporcionales siempre y cuando la velocidad del móvil sea constante; es decir, que en cada unidad de tiempo recorra la misma cantidad de espacio. Mientras que entre la estatura de una persona y los años que tiene dicha persona no existe proporcionalidad aritmética, porque no es constante el crecimiento de la persona en cada unidad de tiempo.

A modo de síntesis diremos que dos magnitudes mensurables y sumables serán proporcionales si entre cantidades de dichas magnitudes existe una relación funcional, en el sentido matemático. Este sentido matemático lo trasladaremos al mundo de las magnitudes mensurables con el nombre de *condición de regularidad* entre las cantidades implicadas, entendiendo como tal que: *permanece constante la relación entre una unidad de una de las magnitudes y la cantidad correspondiente de la otra magnitud*.

Desde estas consideraciones, y situados en la actividad docente, surgen preguntas como las siguientes: ¿no sería conveniente comenzar la instrucción analizando la posibilidad de relacionar proporcionalmente dos cantidades de magnitud?, ¿es necesario analizar previamente las condiciones para aplicar ideas de proporcionalidad a dos cantidades?, ¿hay que trabajar la idea de que la proporcionalidad está asociada a una condición de regularidad poniendo de manifiesto, ante cada situación, cuál es tal condición de regularidad, cuál es la cantidad que mantiene su valor en el contexto que sustenta la proporcionalidad?, ¿es de utilidad que los alumnos analicen y propongan ejemplos en los que se pueden o no se pueden aplicar ideas de proporcionalidad aritmética?

Razón entre cantidades de magnitud

a) Consideraciones sobre la enseñanza

En los libros de texto la razón se presenta con el significado de cociente, de división entre cantidades de magnitud, y se expresa con una fracción; aunque bajo esa idea general se encuentran conceptos muy diferenciados sobre la razón aritmética:

> *La razón de dos números es su cociente* (Lamadrid, C., 1994; p. 85)

Es el cociente de las medidas de dos cantidades de una misma magnitud (Rico, L. et al, 1977; p.191)
Es el cociente entre cantidades de dos magnitudes (Becerra. M. V. et al, 1997; p. 89)
Una razón es el cociente de dos números o de dos cantidades comparables (García, P. et al, 1996; p. 80)

Bien es cierto que la razón tiene un sentido único y bien delimitado en el mundo de las Matemáticas; sin embargo, en el ámbito educativo esta dispersión de definiciones hace suponer que los autores tienen visiones distintas de dicho concepto. En efecto, en el primer caso la razón se presenta como una idea abstracta sin relación con el mundo de las magnitudes; en el segundo caso la razón tiene sentido de comparación multiplicativa entre cantidades de una misma magnitud; la tercera de las definiciones sugiere la razón como una cantidad de una nueva magnitud definida a partir de las dos magnitudes que se dividen; mientras que la última definición incorpora el término comparables que, suponemos, se refiere a magnitudes directamente proporcionales.

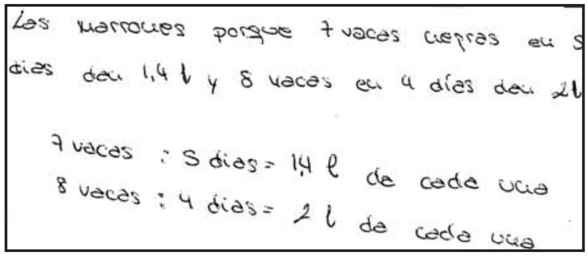
También detectamos cierta discrepancia entre los autores sobre la consideración de las razones como números racionales. Para algunos autores "cada par de valores que se corresponde en dos magnitudes directamente proporcionales puede escribirse en forma de fracción (…) A cada una de estas fracciones se le llama razón" (Garulo,1988; p. 78); mientras que para otros "no debes confundir fracción con razón. En una fracción el numerador y el denominador son números enteros. En una razón sus términos pueden ser números enteros o decimales. Toda fracción es una razón, pero no al revés " (Becerra. M. V. et al, 1997; p. 89).

Y, por último, queremos destacar el hecho de que en los textos escolares consultados se constata una cierta preocupación por precisar el término magnitud, con especial referencia a las magnitudes mensurables. Y, sin embargo, al introducir el concepto de razón, aunque se explicitan las magnitudes que se relacionan, no suele mencionarse la magnitud que resulta de la relación establecida entre ellas.

Desde estas consideraciones podemos decir que la enseñanza presenta la razón como un número no medida, como un ente abstracto desconectado de las magnitudes; es decir, la enseñanza *se ocupa solamente de los aspectos numéricos y desatiende la delimitación de la magnitud resultante y de sus unidades de medida.*

b) Consideraciones sobre el aprendizaje

La siguiente respuesta puede ser ilustrativa de la idea que algunos alumnos se han forjado sobre la razón en el contexto del problema que analizamos:


Los marrones porque 7 vacas negras en 5 días dan 1,4 l y 8 vacas en 4 días dan 2l

7 vacas : 5 días = 1,4 l de cada una
8 vacas : 4 días = 2 l de cada una

Figura 6

Como puede observarse, en esta respuesta se construyen razones a partir de cantidades de dos magnitudes distintas; además, tales razones se interpretan en el sentido de cociente de cantidades. Pero la magnitud que aparece como resultado, litros de cada vaca, es incoherente con las magnitudes consideradas en la razón. Tal resultado tendría sentido si el término vaca lo utiliza el alumno para expresar la cantidad de leche, expresada el litros, que producen 7 vacas en 8 días. Es más, implicar la idea de razón exige tener en cuenta la condición de regularidad: una vaca de una determinado color produce la misma cantidad de leche que las otras vacas de ese color, y la misma cantidad de leche cada día.

Este tipo de respuestas ponen de manifiesto un conocimiento parcialmente erróneo sobre el término razón puesto que en ellas los alumnos admiten, de manera acertada, que la razón entre cantidades de dos magnitudes expresa una nueva cantidad de magnitud; formulan, de manera correcta, la expresión numérica de la cantidad resultante a partir de las expresiones numéricas de las cantidades que se comparan, pero muestran una total desconexión entre las magnitudes que se comparan y la magnitud resultante de tal comparación.

Por consiguiente, podemos señalar que el descontrol de las magnitudes es una causa importante de los errores que cometen los estudiantes al utilizar las razones numéricas. Y también podemos señalar que su origen hay que situarlo en una práctica docente que no presta la debida atención a la naturaleza de las magnitudes implicadas y a sus correspondientes unidades de medida.

c) En busca de alternativas

En el ámbito escolar la razón aritmética se define como la división entre dos cantidades de magnitud o entre dos números. Esta definición coincide con la utilizada por las matemáticas en las funciones de proporcionalidad directa y, por tanto, goza de todas las garantías de corrección y de validez. Pero en el mundo de la enseñanza de la matemática, y sobre todo en las etapas de educación obligatoria, los conceptos no pueden presentarse con su expresión formal; antes bien, hay que presentarlos desde su modelización en el mundo de los objetos físicos. Cabe cuestionarse, por tanto, si el concepto de razón que se presenta a los escolares les permite aprehenderlo de manera cognitivamente efectiva.

Desde la fenomenología histórica observamos que la idea de razón utilizada por los matemáticos de la antigua Grecia no se corresponde con la idea de división de las longitudes de dos segmentos, antes bien, se refiere al resultado de la medida por conmensuración de un segmento respecto de otro segmento. Tampoco los árabes utilizaban la razón como cociente en situaciones de trueque, sino que tenía el sentido de una medida: la cantidad de uno de los tipos de objeto que se cambiaba por cada uno de los objetos de otro tipo; es decir, que si el trueque consiste en cambiar 2 lanzas por 5 collares, la razón 2/5 expresaba la cantidad de lanzas que se cambiaba por 1 collar, no se interpretaba como la división de 2 lanzas entre 5 collares.

Cuando la razón viene expresada con la notación fraccionaria, suele interpretarse como una descripción (si 3/5 es la razón entre zumo de naranja y agua se interpreta que hay 3 litros de zumo por cada 5 litros de agua); mientras la notación decimal de la razón se suele interpretar como una medida (el valor 0,6 se interpreta como litros de zumo por 1 litro de agua).

El hecho de que en la práctica docente se presente la razón como un cociente, pensamos que responde a causas tan variadas como las siguientes: la escasa o nula atención que se presta a la medida de cantidades de magnitud (se priorizan los cálculos y transformaciones en el sistema métrico decimal en detrimento de los aspectos conceptuales); la creencia de que la medida de cantidades no enteras queda englobada en el significado de la fracción como relación parte-todo (creencia que, en nuestra opinión, es errónea); la preocupación por facilitar a los aprendices la construcción mental de una matemática compleja; y la presunción de que los alumnos tienen ideas sólidas sobre la fracción como cociente.

Entendemos, por tanto, que la idea de razón debe ubicarse en el contexto de la medida y no en el de las relaciones multiplicativas entre cantidades:

> La razón aritmética entre una cantidad a de la magnitud M y una cantidad b de la magnitud N, indica que a/b unidades de la magnitud M se corresponden con 1 unidad de la magnitud N.

Entre dos cantidades de magnitud se definen dos razones distintas, cada una de las cuales tiene sentido y es perfectamente válida; sin embargo, una de ellas es la que resulta más familiar, más natural o más comprensible. Por ejemplo, si 8 libros cuestan 25 euros se definen dos razones:

- 25/8 euros es el precio de 1 libro (si se cumple la condición de regularidad de que todos los libros tienen el mismo precio).
- 8/25 de libro se compra con 1 euro (si se cumple la condición de regularidad de que cuestan lo mismo las partes de libro del mismo tamaño).

Para incrementar la comprensión de los alumnos es necesario que definan las dos razones presentes en el contexto del problema, indicando la que les resulta más familiar y asumiendo que las dos razones definidas son igualmente válidas.

Constante de proporcionalidad

a) Consideraciones sobre la enseñanza

Los libros de texto tienden a presentar la constante de proporcionalidad mediante ejemplos: "en una tabla de valores directamente proporcionales, el cociente de dos valores correspondientes es constante. Al valor de ese cociente se le llama constante de proporcionalidad" (Cólera, J. et al, 2000a; p. 82).

Y con la introducción del concepto prácticamente se termina la presencia de la constante de proporcionalidad en la secuencia de enseñanza, pues no se vuelve a hacer referencia a ella ni para introducir nuevos conceptos, ni para justificar alguna de las técnicas que se enseñan; de este modo, la enseñanza desplaza a un lugar muy secundario un concepto esencial para el trabajo en el campo de las magnitudes mensurables.

Como resultado de esta práctica educativa queda marginada una idea fundamental: cualquier manipulación entre razones aritméticas solamente tiene validez si es consistente con los valores que tienen las constantes de proporcionalidad implicadas. En consecuencia, y a modo de diagnóstico, podemos señalar que la enseñanza *provoca un bajo grado de comprensión por no incidir ni en el significado de la constante de proporcionalidad, ni el importante papel que juega dentro del razonamiento proporcional*.

b) Consideraciones sobre el aprendizaje

Reproducimos la respuesta de un estudiante que resulta ilustrativa del modo en que se manipulan cantidades de magnitudes sin tener en cuenta cómo afecta a la constante de proporcionalidad.

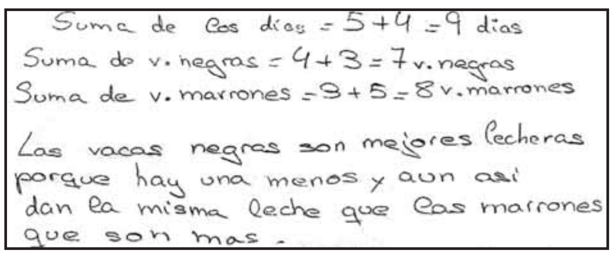

Suma de los días = 5+4 = 9 días
Suma de v. negras = 4+3 = 7 v. negras
Suma de v. marrones = 3+5 = 8 v. marrones
Las vacas negras son mejores lecheras porque hay una menos y aun así dan la misma leche que las marrones que son mas.

Figura 7

Ciertamente éste alumno piensa que la respuesta es la adecuada porque admite que pueden sumarse cantidades de las magnitudes que figuran en los datos del problema; pero lo que no sabe es que al sumar esas cantidades ha utilizado una constante de proporcionalidad que resulta inadecuada para resolver el problema.

En efecto, en este problema hay que establecer una comparación entre dos situaciones en las que intervienen cantidades diferentes de las mismas magnitudes. Pero el alumno no es consciente de que esas dos situaciones se podrán comparar siempre y cuando se presuponga una condición de regularidad en la producción de leche: *que cada día cada una de las vacas negras produzca la misma cantidad de leche, y que cada día cada una de las vacas marrones produzca la misma cantidad de leche*.

Este alumno tampoco es consciente de la incorrección que comete al realizar la suma de estas cantidades[1], ni de la constante de proporcionalidad que utiliza para resolver el problema: cada grupo de vacas de cada color produce, cada día, la misma cantidad de leche. Evidentemente esta constante de proporcionalidad dista mucho de ser la que permite resolver el problema.

Parece claro que el alumno no tiene control sobre la constante de proporcionalidad, ni tampoco del papel que juega ésta en las tareas que implican al razonamiento proporcional. En buena medida esta falta de conocimiento hay que achacarla a una práctica docente que no concede la debida importancia a definir y controlar las constantes de proporcionalidad que intervienen en la resolución de los problemas.

c) En busca de alternativas

En el ámbito de la matemática formal, el hecho característico y diferenciador de las funciones de proporcionalidad es la existencia de un valor constante que relaciona, de forma multiplicativa, las variables. Ese valor constante, denominado constante de proporcionalidad, está presente tanto en las funciones de proporcionalidad directa, $y=\mathrm{K}x$, como en las funciones de proporcionalidad inversa, $y=\mathrm{K}/x$.

En el ámbito de las magnitudes mensurables tal constante de proporcionalidad hay que interpretarla como un número medida, como una cantidad de magnitud, dependiendo del contexto:

- En contextos de proporcionalidad directa la constante de proporcionalidad cuantifica la condición de regularidad a partir de las cantidades implicadas.
  - Por ejemplo, en la situación: con 8 pasos se avanzan 4 metros.
  - La condición de regularidad indica que *en cada paso se avanza la misma longitud.*
  - La constante de proporcionalidad es 4/8 metros/paso, e indica que *en cada paso se avanza 4/8=0,5 metros.*
- En contextos de proporcionalidad inversa la constante de proporcionalidad es una cantidad de magnitud constante, que no se puede modificar, y es independiente de la condición de regularidad.
  - Por ejemplo, en la situación: 8 obreros en 4 días pintan una pared.
  - La condición de regularidad indica que *en cada uno de los obreros pinta, cada día, la misma superficie de pared.*
  - La constante de proporcionalidad es *la superficie de la pared.*

Pensamos que la enseñanza debe conceder la debida importancia al control de la constante de proporcionalidad. En cada situación problemática debe manifestar explícitamente el valor de esta constante, atendiendo a las dos situaciones diferenciadas:

- En situaciones de proporcionalidad directa, la constante de proporcionalidad expresa la relación entre una unidad de una de las magnitudes y la correspondiente cantidad de la otra magnitud. Por ejemplo, en el contexto: *la superficie del patio de recreo es de 8.000 metros cuadrados y juegan 120 niños*, tendremos que si la condición de regularidad es que en cada metro cuadrado haya el mismo número de niños, la constante de proporcionalidad es 120/8.000 niños por metro cuadrado.

- En problemas de proporcionalidad inversa aparecen dos contextos claramente diferenciados que permiten cuantificar la constante de proporcionalidad:

  - Si la condición de regularidad está cuantificada, la constante de proporcionalidad se puede obtener de forma explícita.

    Por ejemplo, en el contexto: *con esta cantidad de dinero puedo comprar 12 libros de 6 euros cada uno*, conocemos que la condición de regularidad es: todos los libros tienen el mismo precio y ese mismo precio es de 6 euros. Por tanto, podemos conocer la constante de proporcionalidad: el dinero que llevo es $12 \times 6 = 72$ euros

  - Si la condición de regularidad no está cuantificada, la constante de proporcionalidad se puede expresar utilizando una denominación específica de dicha condición de regularidad.

    Por ejemplo, si enunciamos la situación *5 vacas en 18 días se comen todo el pienso de la granja*, la condición de regularidad es que cada vaca coma cada día la misma cantidad de pienso; o dicho de otro modo: que cada vaca coma cada día una ración, r, de pienso. En estas condiciones, la constante de proporcionalidad, el pienso que hay en la granja, viene dada por el producto $5 \times 18 \times r = 90r$, entendiendo que r es la cantidad de pienso que come una vaca en un día.

Proporción entre razones aritméticas

a) Consideraciones sobre la enseñanza

Los libros de texto hacen una formulación única de la proporción como *la igualdad de dos razones*. Esta definición se realiza desde la consideración de las razones como entes numéricos abstractos, consideración que permite establecer la existencia de proporciones mediante el producto cruzado de los valores numéricos de las dos fracciones:

> En una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios. (García, P. et al, 1996; p. 81)

Y también desde el terreno numérico se justifican algunas propiedades o la existencia de varias posibles proporciones a partir de situaciones problemáticas contextualizadas en el ámbito de las magnitudes mensurables (García, P. et al, 1996; p. 83).

En suma, en los textos analizados no se detecta una preocupación por delimitar los aspectos cualitativos de las razones que se igualan: *el concepto de proporción se refiere a la igualdad de fracciones numéricas y no a la igualdad de las cantidades de magnitud a que se refieren.*

b) Consideraciones sobre el aprendizaje

El siguiente ejemplo ilustra sobre aquellas respuestas que encuentran la solución del problema a partir de la igualdad entre dos razones:

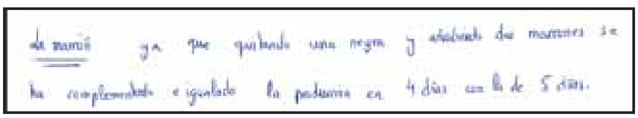

de marrón ya que quitando una negra y añadiendo dos marrones se ha complementado e igualado la producción en 4 días con la de 5 días.

Figura 8

En este tipo de respuestas se utilizan argumentos ciertos aunque inapropiados. En efecto, se puede observar que el alumno utiliza dos comparaciones aditivas sobre el número de vacas de cada color; después realiza otra comparación aditiva sobre el número de días; finalmente, y a partir de los resultados de dichas comparaciones, formula una nueva comparación de tipo aditivo. Como consecuencia de este proceso, el estudiante establece como correcta la proporción:

Producción de 1 vaca negra en 5 días = Producción de 2 vacas marrones en 4 días.

Vemos, por tanto, que la concatenación de comparaciones de tipo aditivo producen resultados aparentemente válidos porque se han obtenido a partir de argumentos aparentemente sólidos. Lo que controla el alumno en todo este proceso son las relaciones aditivas, pero lo que no controla es la proporción que utiliza, pues formulada de forma correcta sería:

Producción de 1 vaca negra en 4 días + Producción de 4 vacas negras y 3 vacas marrones en 1 día = Producción de 2 vacas marrones en 4 días

Sirva este ejemplo para poner de manifiesto que los alumnos tienen dificultades para gestionar el concepto de proporción debido, en buena medida, a la falta de control sobre las cantidades de magnitud. Es más, con este bajo grado de comprensión, los alumnos suelen necesitar algún contraejemplo para admitir que las comparaciones aditivas que utilizan son tan ciertas como inadecuadas para resolver el problema [2].

Observamos, por tanto, que la forma en que los libros de texto introducen el concepto de proporción es causa de errores en los alumnos debido a que la enseñanza ofrece una perspectiva incompleta del concepto de proporción, pues se despreocupa de asociar la proporción a la igualdad entre cantidades de magnitud.

c) En busca de alternativas.

Las ideas sobre la proporción tienen una sólida justificación en el ámbito de la matemática formal, ámbito en el que se trabaja con ideas abstractas.

En el ámbito de la enseñanza esas ideas hay que presentarlas y justificarlas en el mundo de las magnitudes mensurables. Y en este mundo los conceptos y relaciones adquieren una perspectiva diferenciada de los entes matemáticos abstractos:

– La igualdad de fracciones tiene sentido siempre y cuando se garantice que dichas fracciones se refieren a la misma cantidad de magnitud; es decir, la idea de proporción debe conectarse con la idea de equivalencia de fracciones.

– En los libros de texto se presenta una relación importada desde el mundo de las ideas abstractas:
  $4/5 = 8/10 \Leftrightarrow 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8 \Leftrightarrow 40 = 40$ (Álvarez, M. D. et al., 2003a; p. 157)

  Pero esta relación es de muy difícil justificación en el mundo de las magnitudes mensurables, debido a la dificultad de concretar la magnitud resultante de los productos cruzados. Así, por ejemplo, si contemplamos una razón entre el número de libros comprados y su precio en euros, habría que justificar la igualdad de dos cantidades, $4 \cdot 10$ y $5 \cdot 8$, de una extraña magnitud: libros $\times$ euros.

Es cierto que la secuencia de enseñanza de los libros de texto necesita presentar los productos cruzados para, posteriormente, presentar la técnica de la regla de tres. Lo que cabe cuestionarse si el fin justifica los medios, si hay que enmascarar u ocultar la enseñanza comprensiva de los conceptos en aras de una coherencia en la presentación de las destrezas; es decir, si hay que mantener la enseñanza de los productos cruzados o, si por el contrario, hay que buscar otros procedimientos de cálculo que eviten la utilización del método tradicional de la regla de tres.

Magnitudes directa e inversamente proporcionales

a) Consideraciones sobre la enseñanza

La enseñanza que proponen los libros de texto respecto a la distinción entre las magnitudes proporcionales tiende a sintetizarse en frases estandarizadas. Así, para la proporcionalidad directa: "al aumentar una magnitud la otra también aumenta, y si disminuye una, la otra también lo hace" (Becerra. M. V. et al, 1997; p. 91); y para la proporcionalidad inversa: "cuando una aumenta, la otra disminuye" (Becerra. M. V. et al, 1997; p. 92). Aunque otros autores, que tratan de evitar el uso de estrategias aditivas por parte de sus alumno, insisten en la necesidad de verificar las relaciones multiplicativas entre cantidades de las magnitudes cuyas características se quieren determinar: "dos magnitudes son directamente proporcionales cuando al aumentar una (doble, triple, ...), la otra aumenta de igual manera (doble, triple, ...). Al disminuir una (mitad, tercio, …), la otra disminuye de la misma forma (mitad, tercio, ..)" (Cólera, J. et al., 2000a; p. 126).

Este importante concepto de magnitudes proporcionales, tal y como se enseña en los textos revisados, nos parece confuso y parcial; de aquí que resulte de difícil gestión por los aspectos conceptuales que el alumno debe poner en juego: ¿por qué puede asegurarse que 6 vacas comerán 50 kilos de forraje, si se sabe que 3 vacas comen 25 kilos de forraje?, ¿qué exigencias conlleva la proporcionalidad de magnitudes?, ¿qué diferencias conceptuales hay entre magnitudes directa o inversamente proporcionales?

La tipología de las magnitudes tiene un valor relativo, puesto que dependiendo del contexto en el que se sitúen unas mismas magnitudes pueden ser directa o inversamente proporcionales. Además, la tipología de las magnitudes viene determinada por relaciones globales entre todas las magnitudes que intervienen, tanto las que aparecen de forma explícita como las que lo hacen de forma implícita. Pero estas consideraciones están ocultas en la formulación escolar de la tipología de las magnitudes, porque la enseñanza *se preocupa más de simplificar la formulación del concepto de magnitudes directa o inversamente proporcional que de explicitar las auténticas dimensiones del concepto.*

b) Consideraciones sobre el aprendizaje

El siguiente ejemplo ilustra sobre aquellas respuestas que encuentran la solución del problema recurriendo a una deficiente clasificación de las magnitudes:

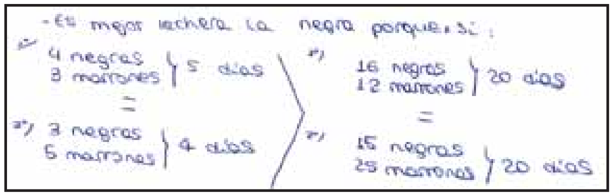


Figura 9

En este caso se aplica el razonamiento proporcional de manera inadecuada, pues la variación multiplicativa de las cantidades solamente es cierta para magnitudes directamente proporcionales. Sin embargo, ante la necesidad de igualar una de las cantidades para relacionar las otras dos, el alumno aplica un aumento multiplicativo a cantidades de magnitudes inversamente proporcionales. Pero esta actuación es incorrecta porque no se ha tenido en cuenta que la cantidad de leche producida es esencial para determinar las relaciones de proporcionalidad entre el número de vacas y el de días que tardan en producir esa cantidad de leche.

Si en lugar de actuar sobre los aspectos cuantitativos de las cantidades el alumno hubiese actuado sobre los cualitativos, posiblemente hubiese evitado dar una respuesta errónea. En efecto, aumentar 4 veces el número de vacas de cada color se puede justificar indicando que hay 4 grupos de vacas con la misma composición e igual producción; sin embargo, no hay justificación al hecho de que el número de días se haya hecho 4 veces mayor: no hay relación entre las variaciones de los datos implicados en esta respuesta.

Desde estas consideraciones se puede indicar que la práctica de enseñanza ofrece una formulación débil del concepto de magnitudes proporcionales, lo que provoca un importante número de errores.

c) En busca de alternativas

Cabe cuestionarse la formulación habitual de la proporcionalidad entre magnitudes. En vez de buscar relaciones multiplicativas, que en muchos casos son difíciles de establecer, hay que planificar una instrucción que incida en la búsqueda y caracterización de las magnitudes, explícitas e implícitas, que figuran en el enunciado, así como en las relaciones que se pueden establecer entre dichas magnitudes.

- Magnitudes directamente proporcionales son aquellas que, en el contexto del problema, permiten definir una razón. Esa razón expresa la medida de la cantidad de una de las magnitudes que se corresponde con 1 unidad de la otra magnitud.

–Magnitudes inversamente proporcionales son aquellas cantidades que no definen una razón, pero que sí permiten definir una constante de proporcionalidad.

La consideración de la tipología de las magnitudes es esencial para evitar que los alumnos acepten como situaciones proporcionales aquellas que no lo son, tanto en el ámbito matemático (la amplitud de ángulos y el de las razones trigonométricas correspondientes, las relaciones exponenciales o logarítmicas, la probabilidad...), como en el ámbito de las magnitudes mensurables.

Regla de tres

a) Consideraciones sobre la enseñanza

La tendencia general de los libros de texto es la de presentar la técnica de la regla de tres mediante un ejemplo y, seguidamente, detallar la técnica con carácter general. Y todos los textos consultados siguen un mismo esquema: primero se aborda la regla de tres simple y directa, después la regla de tres simple e inversa y, finalmente, la regla de tres compuesta.

Es de destacar que la formulación de la técnica no es uniforme. Así, para algunos autores se actúa de forma vertical, *se forman dos razones dividiendo, en cada una, los valores pertenecientes a una misma magnitud* (Cólera, J. et al., 2000b; p. 83); mientras que para otros autores las razones se forman en horizontal, se forman a partir de las dos magnitudes que intervienen en cada una de las situaciones que se relacionan.

Además, todos los libros de texto analizados presentan una vía alternativa a la tradicional técnica de la regla de tres, que suelen denominar “método de reducción a la unidad” y que consiste en relacionar una de las cantidades con una unidad de la otra cantidad a través de la división. Aunque no se sigue esta pauta en todos los casos, pues hemos encontrado que el que se considera método alternativo consiste en relacionar una de las cantidades con una unidad de la otra cantidad ¡utilizando el método tradicional de la regla de tres! (Álvarez, M.D. et al., 2003b; p. 160).

La presentación de la regla de tres inversa conlleva un cambio en la proporción que se explica de forma confusa: “recuerda que el producto de dos valores correspondientes es constante y observa que, para construir la proporción, hemos de invertir la razón de los valores de una de las magnitudes “(Cólera, J. et al., 2000b; p. 85). Con estas “justificaciones” al alumno no le queda más alternativas que aprender y aplicar la técnica, o cuestionar toda la enseñanza recibida, puesto que se establece una proporción entre dos razones que expresan cantidades de magnitudes distintas.

La enseñanza, una vez introducidas las técnicas, se interesa por mostrar al alumno la variedad y utilidad de dichas técnicas en situaciones del mundo físico: repartos proporcionales, porcentajes, escalas, interés simple, etc. Podemos, por tanto, señalar que *la enseñanza de la regla de tres se limita a la descripción de las técnicas, sin justificar los aspectos conceptuales.*

b) Consideraciones sobre el aprendizaje

Reproducimos la respuesta de un alumno que pone en juego sus conocimientos sobre la técnica de la regla de tres simple:

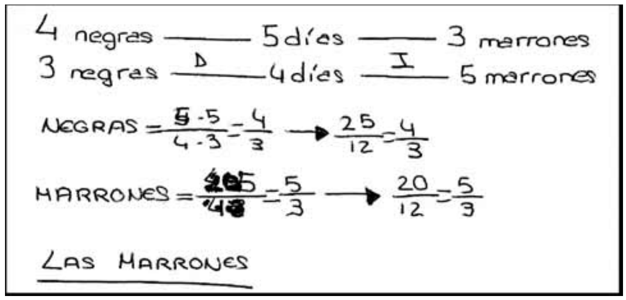


Figura 10

Como puede observarse, en esta respuesta el alumno muestra un buen conocimiento parcial de la técnica de la regla de tres: colocar en columnas las cantidades de cada una de las magnitudes, determinar si las magnitudes que se relacionan son directa o inversamente proporcionales y, por último, establecer las relaciones numéricas correspondientes. Sin embargo, la ausencia de una incógnita, de un valor desconocido, ha supuesto una incorrecta igualdad numérica: iguala la fracción que relaciona las dos cantidades de vacas negras con la fracción que resulta de considerar inversa la relación entre vacas marrones y número de días. Después el alumno establece dos igualdades, totalmente inconsistentes y, finalmente, compara entre sí los dos miembros de dichas igualdades.

A lo largo del proceso de resolución este alumno pone de manifiesto una débil comprensión de las razones que justifican la técnica de la regla que se ha empleado. En efecto, en esta respuesta el alumno determina valores numéricos para las magnitudes que el enunciado exige -vacas negras y vacas marrones-, y hace una comparación numérica entre estos valores porque es incapaz de controlar el sentido que tienen tales números. De este modo, el alumno da una respuesta que no corresponde al enunciado: se pregunta por la productividad de cada tipo de vaca y se responde sobre la relación entre el número de ellas que hay en cada uno de los dos grupos de vacas.

Podemos afirmar, por tanto, que en la enseñanza recibida puede ser la causante de algunos de los errores que cometen los alumnos al utilizar la regla de tres porque *la enseñanza solamente se ocupa del correcto manejo de las técnicas sin justificar las ideas matemáticas que sustentan dicha técnica y, en consecuencia, los alumnos no disponen del conocimiento conceptual suficiente para valorar la pertinencia y validez de las manipulaciones que realizan.*

c) En busca de alternativas

La proporcionalidad aritmética culmina con la presentación de la técnica de la regla de tres, técnica que resuelve el cálculo de la cantidad desconocida: "dícese regla de tres porque en ella ocurren 3 números continuos o discontinuos proporcionales, y toda práctica no es otra cosa sino hallar otro cuarto número ignoto que se haya en tal proporción con el tercero como el segundo con el primero" (Pérez de Moya, 1562).

La técnica de la regla de tres es conocida desde hace muchos siglos pues ya figura en el llamado manuscrito Bakhshali (ciudad del norte de la India en la que se encontró), y sobre el que hay cierto consenso en situarlo en el siglo I. Esta regla llega a Occidente a través de los árabes, siendo Al Biruni quien, en el siglo X, dedica una obra completa sobre la regla de tres en la India. Posteriormente, en las aritméticas del Renacimiento italiano se introducen modificaciones en la técnica tradicional para separar los números con líneas horizontales o verticales. A partir del siglo XIX se incorporó una incógnita para indicar la cantidad desconocida y se utilizó la proporción entre dos razones expresadas con la notación fraccionaria.

En los textos escolares actuales no existe una técnica dominante para la regla de tres, sino que conviven las de utilizar la constante de proporcionalidad, la de los productos cruzados y la de reducción a la unidad.

La cuestión a plantearse es si se puede potenciar el conocimiento conceptual que sustenta las técnicas de cálculo utilizadas. Proponemos una alternativa sustentada en las ideas de razón y de constante de proporcionalidad.

La resolución de problemas de proporcionalidad aritmética en los que hay que encontrar una cantidad desconocida exigen métodos distintos dependiendo de la tipología de las magnitudes. En los siguientes ejemplos se detallan tales métodos en los que se sustituye el tradicional método de la regla de tres por un control de las magnitudes y un correcto manejo de la estructura multiplicativa de los números racionales positivos.

a) Magnitudes directamente proporcionales

Enunciado: *En una receta se mezclan 3 vasos de aceite por cada 17 cucharadas de azúcar. Si se dispone de 5 vasos de aceite, ¿con cuántas cucharadas de azúcar hay que mezclarlos?*

Proceso de resolución:

- Definir, si existe, la condición de regularidad: *en las dos situaciones la mezcla debe tener el mismo sabor; es decir, que las cantidades de aceite y azúcar mantienen la misma relación.*

- Determinar, si existe, la constante de proporcionalidad: *1 vaso de aceite se mezcla con 17/3 cucharadas de azúcar; o bien, 1 cucharada de azúcar se mezcla con 3/17 vasos de aceite.*

- Establecer la tipología de las magnitudes: *son directamente proporcionales porque existe una razón entre ellas, y porque no hay una cantidad de magnitud que permanezca invariante en las dos situaciones*.

- Elegir la razón que facilite la resolución del problema: *utilizaremos la razón 17/3 porque indica la cantidad de azúcar por 1 vaso de aceite y se conoce que hay 5 vasos de aceite*.

- Calcular la cantidad desconocida: *para 5 vasos de aceite se necesitan 17/3 · 5 = 85/3 cucharadas de azúcar.*

b) Magnitudes inversamente proporcionales

Enunciado: *Para llenar un depósito de agua 3 grifos tardan 17 horas. Si se abren 5 grifos, ¿cuánto tiempo tardarán en llenar ese depósito?*

Proceso de resolución:

- Definir, si existe, la condición de regularidad: *cada uno de los grifos vierte el mismo caudal; es decir, cada grifo vierte la misma cantidad de agua en cada hora.*

- Determinar, si existe, la constante de proporcionalidad: *la capacidad del depósito no varía; es igual para las dos situaciones que figuran en el enunciado.*

- Establecer la tipología de las magnitudes: *el número de grifos y el tiempo son inversamente proporcionales porque la capacidad del depósito no varía*.

- Calcular la cantidad desconocida utilizando el valor para la unidad[3]

Un solo grifo tardará 17×3=51 horas
Al abrir 5 grifos tardarán 51/5 horas

La enseñanza tradicional de la *regla de tres compuesta* exige crear situaciones problemáticas para justificar la necesidad de aplicar esta técnica. Sin embargo, cuanto más compleja es la técnica más difícil es para los alumnos controlar el sentido de las manipulaciones implicadas. Sin embargo, la técnica se puede simplificar. Así, en el contexto:

10 máquinas trabajan durante 15 días 8 horas diarias para cavar una zanja de 250 metros de largo, 2 metros de ancho y 12 metros de profundidad.

Una reconversión de las unidades permite transformar el problema en uno de regla de tres simple. En efecto, de los datos disponibles se concluye que:

> Horas trabajadas: $10\times15\times 8= 1200$ horas de máquina.
> Trabajo realizado: se cavan $250\times 2\times12= 6000$ metros cúbicos de tierra.
> Nuevo enunciado: *Para cavar 6000 metros cúbicos de tierra hacen falta 1200 horas de trabajo de máquina*

A modo de conclusión

Esperamos y deseamos que las consideraciones y reflexiones de este trabajo sirvan para cuestionar la enseñanza tradicional de la proporcionalidad aritmética. Nuestra intención es mostrar que es viable una práctica docente alternativa, sustentada en un control de los aspectos conceptuales, de las magnitudes que intervienen, del significado de la multiplicación y de la división de números racionales, y apoyada en las siguientes actuaciones:

– Determinar la existencia de proporcionalidad aritmética haciendo explícita la condición de regularidad entre las magnitudes.

– Dar significado a la razón como medida de la cantidad de una magnitud que se relaciona con una unidad de otra magnitud.

– Determinar la constante de proporcionalidad analizando el papel que juegan todas las magnitudes que intervienen en el problema.

– Controlar que la modificación de las cantidades de magnitud no modifique la proporción entre dichas cantidades.

– Clasificar la tipología de las magnitudes atendiendo la existencia de una razón entre ellas y el valor de la constante de proporcionalidad

– Calcular la cantidad desconocida a partir de la razón en los problemas de proporcionalidad directa.

– Utilizar la relación de una cantidad de una de las magnitudes con la unidad de la otra magnitud, o el valor de la constante de proporcionalidad, en los problemas de proporcionalidad inversa.

Confiamos en que estas sugerencias ayuden a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la proporcionalidad aritmética en el ámbito escolar, en aras a incrementar las competencias aritméticas de los ciudadanos. ■

NOTAS

[1] Las razones que utiliza el alumno provienen, aunque no sea consciente, de dar por correcta la suma de fracciones sumando numeradores y denominadores $4/5 + 3/4 = 7/9$; $3/5 + 5/4 = 8/9$.

[2] Si en el enunciado se sustituye el dato *5 vacas marrones* por *6 vacas marrones*, el argumento del alumno da como respuesta las vacas marrones; sin embargo la respuesta correcta es las vacas negras. Y si en el enunciado se sustituye el dato *4 días* por *2 días*, el alumno responderá que las vacas marrones, aunque en realidad el problema no tenga solución.

[3] Utilizando conocimientos algebraicos la cantidad desconocida se obtiene del siguiente modo:

• Asignar un valor a la condición de regularidad: *por ser desconocida, llamamos c a la condición de regularidad o cantidad de agua (medida en litros, por ejemplo), que vierte 1 grifo en 1 hora.*

• Calcular, en las dos situaciones, la constante de proporcionalidad:

Situación 1: **51·c**, pues 3 grifos vierten 3·c litros en 1 hora, y 51·c litros en 17 horas

Situación 2: **(5·T)·c**, siendo T el tiempo (en horas) que necesitan los 5 grifos para llenar el depósito

• Igualar los valores de la constante de proporcionalidad en las dos situaciones

$$51\cdot c = (5\cdot T)\cdot c, \text{ de donde } \mathbf{T= 51/5 \text{ horas}}$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Álvarez, M. D., y al. (2003a). *Matemáticas 1º ESO. Serie práctica*. Madrid: Santillana.

Álvarez, M. D., et al. (2003b). *Matemáticas 2º ESO. Serie práctica*. Madrid: Santillana.

Becerra, M. V., et al. (1997). *Matemáticas 2º E.S.O*. Madrid: McGraw-Hill

Behr, M. J. (1987). Ratio and proportion. A synthesis of eight conference papers. In Gergson, U.C.; Herscovics, N y Kierat, C (eds), *Psychology and mathematics education, Vol II*. Proceedings of the Eleventh International Conference, Montreal, Canadá.

Bigelow, J.C.; Davis, G.E. y Hunting, R.P. (1989). Some remarks on the homology and dynamics of rational number learning. *Paper presented at the Research Presession Annual Meeting of the National Teachers of Mathematics*. Orlando, Florida.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Universitat Autónoma de Barcelona.

Cólera, J., et al. (2000a). *Matemáticas Secundaria. 1º ESO. Serie Aula Abierta*. Madrid: Anaya.

Cólera, J., et al. (2000b). *Matemáticas Secundaria. 2º ESO. Serie Aula Abierta*. Madrid: Anaya.

Cramer, K. y Post, T. (1993). Proportional reasoning. *The Mathematics Teacher*. 86, pp. 404-407.

Cramer, K., Post, T. y Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In Owens, D. T. (ed), *Research Ideas for the Classroom, Middle Grades Mathematics*. New York: MacMillan Publishing Company, pp. 159-178.

Davis, G., Hunting, R.P. y Pearn, C. (1993). Iterates and relations: Elliot and Shannon's fractions schemes. In Hirabayashi, I; Nohda, N.; Shigematsu, K. y Lin, F (eds), *Proceedings of the Seventeenth Conference Of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. III.* The University of Tsukuba, Tsukuba City, pp. 154-161.

Fernández, A. y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 5, nº 2, pp. 397-416.

García, P., et al. (1996). *Matemáticas curso 1º ESO*. Santillana Secundaria. Madrid: Santillana.

Gárrulo, C. (1988). *Matemáticas 7 E.G.B*. Barcelona: Edebé.

Gómez, B. (2002). El análisis de un cuestionario: el perrito. *Actas VI Seminario de Investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico*. Santiago de Compostela.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: Murray

Heller, P. M., Ahlgren, A., Post. T., Behr, M. y Lesh, R. (1989). Proportional reasoning: the effect of two constext variables, rate type, and problem setting. *Journal of Research in Sciencie Teaching*, Vol, 26, nº 3, pp. 202-220.

INCE (2002). *Evaluación de la Educación Primaria 1999. Fallos y dificultades de los alumnos en la prueba de Matemáticas*. Instituto Nacional de Calidad y Evaluación. Madrid: Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación y Ciencia.

INECSE (2004). *Evaluación PISA 2003. Resumen de los primeros resultados en España*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia

Kieren, T.E. (1980). The rational number construct: its elements and mechanims. In Kieren, T. E. (ed), *Recent Research on Number Learning*. Columbia: Eric/Smeac, pp. 125-150.

Lamadrid, C. (1994). *Azimut. Matemáticas 7º E.G.B.* Madrid: Grupo Anaya.

López, J. A. y Moreno, Mª L. (1997). *Resultados de Matemáticas. Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS*). Madrid: Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, MEC. Madrid.

Margarit, J., Figueras, O. y Gómez, B. (2001). Ratio comparison: performance on ratio in similarity tasks. *Proceedings of the 25 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol I*. Utrech, Holanda.

Neuman, D. (1993). Early conceptions og fractions: A phenomenographic approach. In Hirabayashi, I; Nohda, N.; Shigematsu, K. y Lin, F (eds), *Proceedings of the Seventeenth Conference Of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. III*. The University of Tsukuba, Tsukuba City, pp. 170-177.

Pérez de Moya, J. (1562). *Aritmética práctica y speculativa*. Salamanca: Biblioteca Castro. Reedición en 1998. Madrid: Ediciones de la Fundación José Antonio de Castro.

Rico, L., et al., (1977). *Matemáticas 7. E.G.B.* Madrid: Anaya

Singer, J.A. y Resnick, L.B. (1992). Representation of proportional relationships: Are children par-part or part-whole reasoners? *Educational Studies in Mathematics,* vol 23, pp. 231-246.

Streefland, L. (1993). Fractions: A realist approach. In Carpenter, T.P.; Fennema, E. y Romberg, T.A. (eds), *Rational Numbers: An integration of research*. Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 289-325.

Tourniaire, F. y Pulos, S. (1995). Proporcional reasoning: a review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, vol 16, pp. 181-204

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. In Lesh, R. y Landau, M. (ed), *Acquisition of Mathematical Concepts and Proceses*. New York: Academic Press, pp.127-174.