

Un análisis estadístico implicativo de los resultados de pruebas escritas de Matemáticas en alumnos de Educación Secundaria

En este artículo mostramos un Análisis Estadístico Implicativo de los resultados obtenidos por 39 estudiantes de Tercero de Educación Secundaria Obligatoria en pruebas escritas de matemáticas de los bloques de contenidos curriculares, realizadas a lo largo del curso académico. Los resultados manifiestan las implicaciones y las similitudes entre los resultados en las pruebas mediante la codificación de los datos de dos modos diferentes en la matriz de datos.

This article presents a Statistical Implicative Analysis of the results obtained by 39 students of Third of Compulsory Secondary Education in written maths questionnaires regarding the section of curricular contents, realized along the academic course. The results show the implication and the similarities among the results in the questionnaires through the coding the data in two different ways in the matrix data.

Las matemáticas están actualmente muy diversificadas y constituyen una poderosa herramienta que permite la comprensión conceptual y la modelización de gran número de fenómenos naturales, técnicos y sociales. Las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) han de permitir a los estudiantes obtener la solvencia necesaria para poderse integrar en una sociedad altamente tecnificada y desarrollar capacidades como explorar, clasificar, analizar, generalizar, estimar, inferir, abstraer, argumentar o tomar decisiones.

La adquisición y desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas están influenciadas por las concepciones respecto a éstas de la sociedad y por el entorno escolar en que se desarrollan. Como indican Rico et al. (2008), los conceptos y las estructuras matemáticas se generan como herramientas de organización mental, natural y social, siendo el sistema educativo el que realiza la organización de los conceptos e ideas para que puedan ser usados contextualmente por los individuos integrantes de la sociedad. Señalan Rico y colaboradores (p.8) que “la planificación, como competencia clave del profesor de matemáticas, demanda el desarrollo de capacidades específicas para identificar, organizar, seleccionar y priorizar los significados de los conceptos matemáticos mediante el análisis cuidadoso de su contenido, análisis necesario para establecer las expectativas de aprendizaje, previo al diseño de tareas y necesario para la elección de secuencias de actividades”.

En este estudio se presenta un análisis implicativo realizado sobre los resultados obtenidos por alumnos de tercer curso de ESO en pruebas escritas de evaluación de diferentes unidades temáticas, lo que puede usarse como una herramienta para la planificación y mejora instruccional en el proceso de enseñanza y aprendizaje en esta etapa de enseñanza secundaria. Se trata del estudio cuantitativo de un determinado desarrollo curricular de matemáticas que puede permitir a los profesores reflexionar sobre la secuenciación, programación y evaluación de contenidos. Posteriormente tendrá que ser implementada con la introducción de elementos de carácter cualitativo sobre la comprensión que desarrollan los estudiantes de los diferentes conceptos.

El Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria

La Ley Orgánica 2/2006 de Educación (LOE) establece que uno de los ejes centrales del sistema educativo es determinar la definición y organización de currículo. La LOE, en su capítulo III, entiende por currículo “el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y

Samuel David Bodí Pascual

CEFIRE de Alcoi

criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en la presente Ley” (p.17166). Por su parte, Rico (1997a) denota que el término genérico de currículo denomina cualquier tipo de actividad que planifique la formación, que en el caso de la Educación Secundaria ha de responder a cuestiones como qué es el conocimiento, qué es el aprendizaje, qué es la enseñanza o en qué consiste el conocimiento útil. La organización, planificación y desarrollo del currículo se establece a través de los contenidos, de la metodología, de los objetivos y de la evaluación del proceso (Rico, 1997b). Las directrices estipuladas en los documentos oficiales se concretan en los proyectos curriculares a través de estas componentes.

Las enseñanzas mínimas correspondientes a la ESO están organizadas en el Real Decreto 1631/2006. En este Decreto se definen las competencias básicas del currículo de secundaria como aquellos aprendizajes imprescindibles que deben desarrollar los estudiantes al finalizar esta etapa. La competencia matemática se concreta como la habilidad para utilizar y relacionar los números, las operaciones, los símbolos y razonamiento matemático, que permiten interpretar y producir elementos de la realidad e informaciones, argumentar y resolver problemas de la vida cotidiana, lo que posibilitará una disposición favorable, de seguridad, de confianza hacia la información y las situaciones, y su utilización en diferentes contextos.

El currículo de matemáticas de ESO para la Comunitat Valenciana, establecido en el Decreto 112/2007, incluye en todos los cursos un bloque de contenidos comunes de resolución de problemas como eje transversal de la actividad matemática, distribuyendo el resto de los contenidos en cinco bloques: *números, álgebra, geometría, funciones y gráficas y estadística y probabilidad*. En el currículo anterior, implantado en el Decreto 39/2002, también se hace referencia a la necesidad de la resolución de problemas, agrupando los bloques de contenidos en *aritmética y álgebra, geometría, análisis, estadística y probabilidad*. Los desarrollos que cada uno de estos currículos marcan en el tercer curso de la ESO son sustancialmente análogos. El Decreto del año 2007 incorpora la noción de competencia mientras que el del año 2002 se centra en los conceptos, procedimientos y actitudes.

Señalan Llinares et al. (2005) que la idea de competencia matemática aparece en diferentes propuestas curriculares, resaltándose la idea de la importancia de que los estudiantes aborden problemas que atañan a la vida cotidiana. En este estudio (p.32) se indica que “los diferentes significados dados al término *competencia matemática* como se refleja en las propuestas curriculares subrayan el hecho de que esta competencia se apoya en el desarrollo de ciertas *capacidades* como modelizar, generalizar o comunicar. Estas capacidades se pueden entender como diferentes dimensiones de la idea de competencia”.

La concreción del currículo en la Programación Didáctica. El papel del profesor

Como apunta Fortuny (1990, p. 252) “el profesor se encuentra delante de sí con un diseño curricular base que debe desarrollar en sus clases cotidianas. Tiene que asegurar que sus alumnos alcancen unos objetivos terminales clasificados en hechos conceptuales, procedimientos, valores, actitudes y normas en un tiempo escolar determinado... En el desarrollo del proceso de enseñanza/aprendizaje intervienen entre otros los condicionantes de: a) Tiempo, b) Diferenciación, c) Tema, d) Lugar”. La programación y planificación que ha de realizar el profesor exige la toma de decisiones que, según Fortuny (1990), han de ser ejecutivas, eficientes y estratégicas, y se llevan a cabo mediante la determinación de categorías de programación que incidirán en una mayor profundidad en unas unidades en detrimento de otras.

El profesor ha de tomar decisiones en aspectos como la programación y secuenciación de contenidos, la organización y control en el aula, el proceso de construcción del conocimiento y la adquisición de significados por los estudiantes, tratando los errores apreciados en el proceso de enseñanza y la evaluación de los logros alcanzados por los alumnos (Parcerisa, 1996; Rico, 1997b; Marín, 1997). Los componentes del currículo (contenidos, metodología, objetivos y evaluación) determinan el nivel de planificación de la materia, teniendo el profesor que concretar el desarrollo curricular en cada bloque de contenidos y en las unidades didácticas.

Esta investigación de carácter implicativo con alumnos de tercer curso de ESO puede ayudar a los profesores en el análisis crítico, en la reflexión, en la planificación de la programación y en la secuenciación de las diferentes unidades didácticas a través de los resultados del análisis de similaridad y de las implicaciones que aparecen.

La selección de los contenidos para su aprendizaje en el aula se encuentra condicionada por la funcionalidad didáctica, por el desarrollo de las diferentes capacidades, por la relevancia social y cultural o por la significatividad psicológica. El profesor de matemáticas tiene que decidir las estructuras conceptuales que quiere que los alumnos adquieran, los elementos que han de organizar el currículo, los conocimientos previos que tienen los estudiantes o el contexto de aplicación de los contenidos, destacando su relevancia desde una perspectiva fenomenológica y la caracterización de los obstáculos epistemológicos. Es importante que el profesor plasme en los documentos no solo los contenidos, sino también el modelo de enseñanza que va a seguir para la aplicación en el aula (Llinares, 1994). Otro aspecto a priorizar por el docente es categorizar las características de las tareas en torno a un determinado tópico matemático que permitan su evaluación, diseño y elección para ser utilizadas en el proceso de ense-

ñanza y aprendizaje (García y Llinares, 1994).

Afirman Monereo et al. (1999, p.52) que “se tendrá que ofrecer a los profesores instrumentos de interpretación y análisis de la situación en la que se desarrolla su actividad, que les permitan tomar decisiones respecto a su actuación como aprendices y como docentes estratégicos”.

Desde esta perspectiva, asumimos el papel del profesor como agente activo de la construcción del conocimiento y de su propia práctica. Una concepción constructivista del aprendizaje y de la intervención pedagógica se plantea las concepciones y actitudes de los profesores sobre lo que supone enseñar y aprender (Hewson y Hewson, 1987), en la explicitación, en la toma de conciencia y en la evolución para su transformación. Investigaciones como las de Copello y Sanmartí (2001) o Jiménez y Wamba (2004) inciden en el modelo reflexivo de profesor para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. El conocimiento alcanzado a través de la reflexión permite caracterizar parte del conocimiento práctico adquirido de la teoría. Nosotros postulamos la reflexión del docente respecto al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, fundamentándola en la interacción social para promover y posibilitar la construcción del conocimiento.

Metodología de la investigación.

Participantes

En la investigación han participado 39 alumnos de tercero de ESO (14-15 años) de un Instituto público de Educación Secundaria, distribuidos en dos grupos de años académicos previos al curso 2007-2008. Estos estudiantes han cursado la materia de matemáticas, sin adaptación curricular. La aplicación de las pruebas escritas se ha realizado al final de las unidades didácticas, con aviso previo y después de impartir los contenidos curriculares correspondientes.

Instrumentos

Los instrumentos utilizados en este trabajo son las pruebas escritas realizadas por los estudiantes a lo largo del curso y que forman parte de la evaluación continua. Los cuestionarios responden a contenidos conceptuales y procedimentales de las unidades didácticas de los bloques curriculares.

Las pruebas escritas constan de un número de cuestiones comprendido entre 5 y 7 preguntas, y también contienen actividades de carácter no procedimental y de resolución de problemas. Todas las cuestiones tienen idéntico valor (1) y el resultado se pondera posteriormente para obtener una puntuación final en el intervalo $[0,10]$.

Las preguntas han sido formuladas por el mismo profesor en correspondencia a los contenidos curriculares, con actividades similares a las realizadas en el aula. La valoración de las cuestiones resulta de la evaluación de la adquisición de contenidos procedimentales y conceptuales que logran los alumnos en función de sus respuestas. A los estudiantes se les incide en la necesidad de ofrecer la justificación de las soluciones y de los razonamientos utilizados, valorando los procedimientos y justificaciones y no sólo el resultado obtenido.

Las pruebas escritas se realizan en la clase habitual, con una duración aproximada de 55 minutos. Las unidades didácticas que conforman cada una de las pruebas son las mismas para los dos grupos estudiados, con preguntas similares o idénticas para ambos al tratarse de grupos que cursan la misma materia.

Los contenidos de las pruebas de matemáticas de tercero de ESO utilizados en la investigación

Los contenidos que forman parte de las pruebas de nuestra investigación son aquellos que aparecen en la programación didáctica como concreción del desarrollo curricular. Los bloques curriculares tratados en este trabajo están desarrollados en unidades didácticas de *Aritmética y álgebra*, *Geometría y Análisis*, pero no tratan en este caso los epígrafes de *Estadística y probabilidad*.

La presentación de las pruebas escritas se realiza sin espacios para las respuestas, respondiendo los alumnos en folio aparte para no limitar sus respuestas, justificaciones y razonamientos. Por lo general, se permite el uso de calculadora científica.

Los contenidos trabajados se explicitan, a continuación, brevemente siguiendo el orden secuencial en que se desarrollaron en el aula.

Contenidos utilizados en las pruebas de la investigación. Tercero de ESO

Aritmética

1. Números.
Números enteros. Números decimales. Fracciones. Operaciones con fracciones. Números racionales. Números irracionales. Potenciación. Potencias de exponente entero. Jerarquía de operaciones y uso de paréntesis. Aproximación y redondeo.

2. Proporcionalidad.
Porcentajes. Problemas de proporcionalidad simple y compuesta. Repartos proporcionales. Problemas de interés simple y compuesto.

Álgebra

1. Lenguaje algebraico y polinomios.
Expresiones algebraicas, monomio y polinomios. Operaciones de suma, resta y multiplicación. Identidades notables.

2. Ecuaciones.

Ecuaciones de primer grado. Resolución. Ecuaciones de segundo grado. Resolución. Interpretación de soluciones. Resolución de problemas mediante ecuaciones.

3. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Sistemas de ecuaciones. Sistemas equivalentes. Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (reducción, igualación, sustitución). Resolución de problemas.

Análisis

1. Funciones y gráficas.

Formas de expresión de una función. Conceptos básicos. Variables independientes y dependientes. Dominio de definición. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos. Discontinuidad y continuidad en una función. Tendencias y periodicidad. Expresión analítica.

2. Función afín.

Funciones constantes. Función de proporcionalidad. Función afín. Estudio conjunto de dos funciones afines. Puntos de corte de dos gráficas. Situaciones prácticas a las que responden las funciones afines.

Geometría

1. Figuras en el plano. Triángulos. Teorema de Pitágoras. Cuadriláteros y circunferencia. Áreas.

2. Figuras en el espacio.

Poliedros. Esfera. Áreas de prismas, pirámides y troncos de pirámide. Áreas de cilindros, conos y troncos de cono. Área de la esfera, de la zona esférica y del casquete esférico. Cálculo de volúmenes de figuras espaciales. Coordenadas geográficas en la superficie terrestre. Husos horarios.

Las pruebas realizadas en el transcurso del curso agruparon las siguientes unidades didácticas:

Nº Prueba	Unidad(es) didáctica(s)
1	Números
2	Proporcionalidad
3	Lenguaje algebraico y polinomios
4	Ecuaciones
5	Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas
6	Funciones y gráficas. Función afín
7	Figuras en el plano. Figuras en el espacio

Análisis cuantitativo de los datos

Los datos de las pruebas se cuantifican para la evaluación en un rango comprendido entre 0 y 10, a fin de llevar a cabo la posterior evaluación de los alumnos junto con otros instrumentos de evaluación.

Nuestro objetivo de investigación pretende estudiar los datos obtenidos en las pruebas mediante el análisis estadístico

implicativo (Gras et al, 1997). Como indica Couturier (2007), este análisis estadístico permite establecer reglas de asociación en un conjunto de datos cruzando variables e individuos, marcando las tendencias de conjuntos de propiedades usando una medida de carácter no lineal de tipo inferencial. El software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) (Bodin et al., 2000) lleva a cabo estas agrupaciones jerárquicas.

El diagrama de similaridad aglutina grupos de variables en función de su homogeneidad lo que da pie a la interpretación de las agrupaciones con que se manejan las variables, produciéndose en cada nivel del gráfico una agrupación de similaridad en orden decreciente. El análisis jerárquico de similaridad permite interpretar en términos de semejanza clases de variables constituidas significativamente a ciertos niveles.

Por su parte, el gráfico implicativo da las relaciones de implicación entre las variables del cuestionario en el sentido que el éxito en la respuesta de un ítem implica el éxito en otra tarea relacionada.

En el estudio mostramos el tratamiento efectuado a los datos con dos tipos de codificación con el programa CHIC. Utilizamos una primera matriz de datos en el intervalo [0,1] que representan el resultado de la calificación de cada uno de los 39 alumnos en las 7 pruebas, trasladado el valor obtenido dividido por 10 para situarlos en el rango entre 0 y 1.

En segundo lugar se realiza una nueva codificación con valores binarios, 0 y 1, considerando que a un estudiante se le asigna un valor 1 en una prueba si el resultado ha sido igual o superior a 5, mientras que en caso contrario se le asigna el valor 0. En este segundo caso se trata de realizar el estudio en función de que los alumnos hayan rebasado el umbral mínimo para superar la prueba.

Resultados

En este apartado se dan los resultados medios de las pruebas realizadas y los estudios de similaridad e implicativo aplicado a las calificaciones otorgadas a los 39 estudiantes participantes.

Análisis de frecuencias

La Tabla 1 muestra las medias globales obtenidas en los 7 cuestionarios resueltos por el conjunto de los estudiantes y la dificultad de las pruebas, atendiendo a los niveles de clasificación de dificultad establecidos por García y Pérez (1989).

Nº Prueba	Unidad didáctica	Media	Dificultad	Porcentaje de éxito
1	Números	0,50	Dificultad media	46,15 %
2	Proporcionalidad	0,58	Fácil	69,23 %
3	Lenguaje algebraico y polinomios	0,47	Dificultad media	51,28 %
4	Ecuaciones	0,46	Dificultad media	48,72 %
5	Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas	0,53	Dificultad media	53,85%
6	Funciones y gráficas. Función afín	0,48	Dificultad media	53,85 %
7	Figuras en el plano. Figuras en el espacio	0,51	Dificultad media	56,41 %

Tabla 1. Medias y porcentaje de éxito en las pruebas.

Observamos que todas las pruebas están clasificadas como de dificultad media o fácil. Cinco de las siete pruebas tienen un porcentaje de alumnos que la superan superior al 50%, siendo el cuestionario más fácil el que trata los contenidos de *Proporcionalidad*, tanto por el resultado medio obtenido como por el porcentaje de éxito de los alumnos que la han superado. La prueba que obtiene menor media es la de *Ecuaciones*, aunque la que tiene un menor porcentaje de superación es la referente a la unidad de *Números*.

Estudio de las similitudes

En el estudio jerárquico de similitudes se puede estudiar la calidad de las agrupaciones en función de la longitud de las ramas, siendo la similitud más fuerte cuanto menor es esta longitud.

La Figura 1 muestra el árbol de similitud de los datos de las respuestas de los estudiantes en las siete pruebas, en función de la calificación obtenida y ponderada en el rango [0,1].

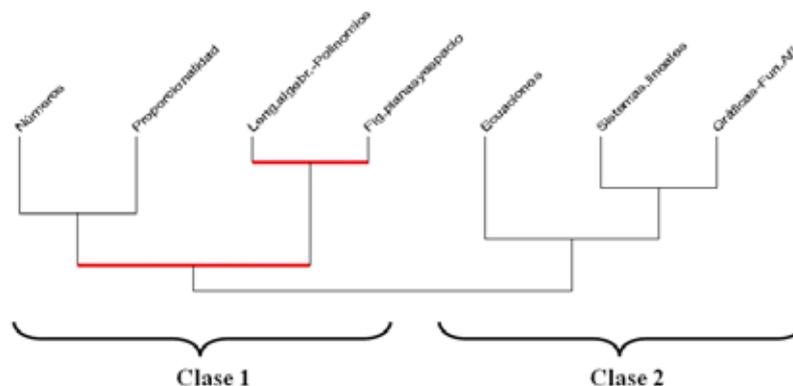


Figura 1. Diagrama de similitud de los resultados de los estudiantes en las pruebas.

En este diagrama aparecen dos clases que establecen las conexiones de similitud entre los diferentes cuestionarios. El primer grupo está compuesto por dos subclases, siendo la primera un nodo significativo que contiene las pruebas de *Lenguaje algebraico y polinomios* junto con la de *Figuras en el plano y en el espacio*, con un índice de similitud de 0,758. La segunda subclase de este grupo conexiona en el tercer nivel y está formada por las pruebas de *Números y Proporcionalidad*, con un índice de 0,683. Ambas subclases se unen con posterioridad en el penúltimo enlace de niveles con un índice bajo de similitud de 0,295.

En esta primera clase se unen inicialmente las pruebas que requieren expresiones y relaciones que implican lenguaje algebraico y la traducción a éste de enunciados del lenguaje natural para realizar cálculos en áreas y volúmenes. La segunda conexión en este grupo se refiere a las pruebas que tratan las operaciones con distintos tipos de números y la resolución de problemas de proporcionalidad y porcentajes.

El segundo grupo está constituido por las pruebas de *Sistemas lineales, Gráficas y función afín* y la de *Ecuaciones* que se agrupa a las anteriores en el cuarto nivel. La primera conexión en esta clase, que se produce en el segundo nivel con un índice de 0,730, parece indicar la influencia en los resultados de los estudiantes de la relación funcional entre dos variables lineales y la interpretación de situaciones que requieren conocer la relación lineal entre dos variables o la resolución de situaciones problemáticas donde aparecen dos variables.

El índice de conexión entre las dos clases principales es muy bajo, lo que muestra que existe poca similitud. Las agrupaciones de similitud se producen, a excepción de la del primer nivel, entre pruebas que tienen una secuenciación consecutiva en la programación en el aula: 3-7, 5-6, 1-2, 4-(5-6).

Se ha llevado a cabo un segundo estudio de similitudes codificando las calificaciones de los alumnos en las pruebas con los valores binarios 1 ó 0, según han superado o no la prueba con calificación mayor o igual a 5.

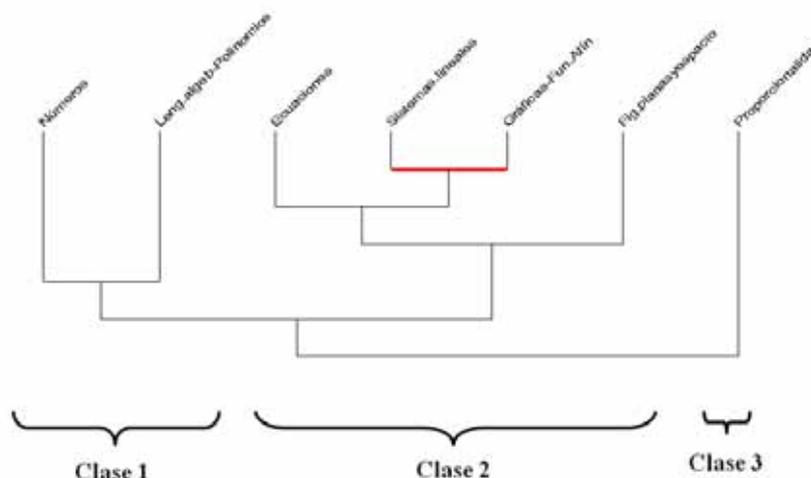


Figura 2. Diagrama de similaridad de la superación de las pruebas por los estudiantes.

Los resultados obtenidos mediante esta codificación en la matriz de datos ha ofrecido como resultado el árbol de similitud de la Figura 2.

Se observa en este segundo diagrama la formación de tres clases. Las similitudes obtenidas con esta nueva codificación son superiores a las obtenidas con la codificación por resultados en las pruebas. La Clase 1 está formada por las pruebas de *Números* y *Lenguaje algebraico y polinomios*, que tiene un índice de 0,942, en el cuarto nivel de significación.

La Clase 2 es la principal ya que en ella se establecen los tres primeros niveles de conexión. El primero agrupa las pruebas de *Sistemas lineales* con la de *Gráficas y función afín*, con índice de similitud de 0,989. Esta misma agrupación se realiza en la codificación anterior en el segundo nivel. A continuación se une a las anteriores la prueba de *Ecuaciones* con índice 0,966. Se añade al grupo en el tercer nivel la de *Figuras en el plano y en el espacio*.

Esta clase pone de manifiesto la influencia que tiene el uso de variables en la resolución de ecuaciones, sistemas, representaciones gráficas y problemas de obtención de áreas y volúmenes, para el éxito de los estudiantes en la superación de las pruebas.

En el nivel 5 se unen las Clases 1 y 2, con similitud 0,841. Posteriormente se asocia con menor índice la prueba de *Proporcionalidad*, que conforma en sí misma una única clase.

Gráficos implicativos

Para comprender mejor las relaciones que se establecen entre las diferentes pruebas podemos examinar los gráficos implicativos obtenidos con el programa CHIC.

En primer lugar examinamos el gráfico implicativo que aparece al codificar los resultados de los participantes en el intervalo [0,1]. Se opta por utilizar diferentes umbrales para que aparezcan todas las pruebas en el grafo y así poder estudiar las implicaciones. En color rojo aparecen las implicaciones al nivel de significación del 88%, en azul las del umbral del 85% y en verde las del 80%. Se usa el nivel del 88% porque es el primero en que al aplicar el programa aparecen implicaciones entre las diferentes variables. Cada flecha representa la implicación entre dos variables, en el sentido que si ocurre una variable conlleva la ocurrencia de la otra variable, considerando la incongruencia de un número pequeño de casos en que no se cumpla cuando se verifique a pero no b.

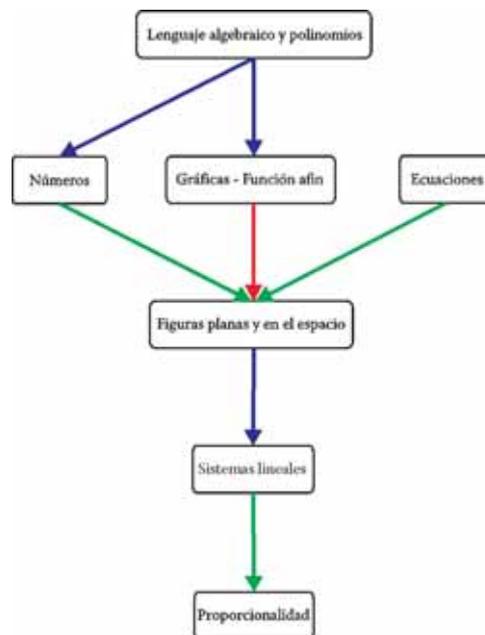


Figura 3. Gráfico implicativo de los resultados de los estudiantes en las pruebas.

Podemos ver en la figura 3 que la prueba que mayor influencia muestra es la de *Lenguaje algebraico y polinomios* al iniciar el árbol implicativo. La unidad didáctica de *Ecuaciones* pone de manifiesto su implicación en los resultados de las pruebas de *Figuras en el plano y en el espacio*, *Sistemas de ecuaciones lineales* y *Proporcionalidad*, siendo más débil que la intervención que evidencia la unidad de *Lenguaje algebraico y polinomios*.

Se observa que el mayor grado de influencia entre dos pruebas se tiene entre las unidades de *Gráficas y función afín* con la de *Figuras planas y en el espacio*. En el final del árbol se encuentran las unidades de *Sistemas de Ecuaciones lineales* y de *Proporcionalidad*.

En la figura 4 aparecen las implicaciones de los resultados de las pruebas de estos alumnos cuando han sido codificadas únicamente con los valores binarios 0 y 1, éxito o fracaso en la superación del cuestionario.

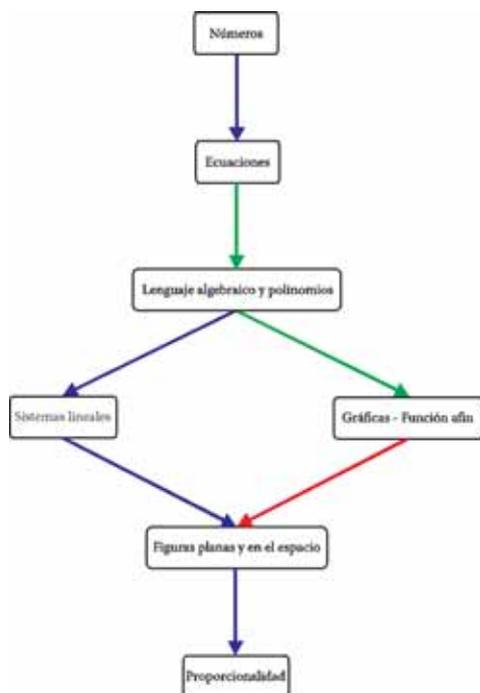


Figura 4. Gráfico implicativo de la superación de las pruebas por los estudiantes.

El gráfico implicativo ha sido diseñado en niveles de significación donde aparezcan todas las pruebas realizadas, para lo que se han utilizado los niveles del 99% (en rojo), del 95% (en azul) y del 90% (en verde).

En este diagrama se ve que la mayor influencia en la implicación la tiene el cuestionario de *Números*, que es la primera unidad didáctica de la secuenciación temporal, ya que inicia el camino de las implicaciones sobre la prueba de *Ecuaciones* y el resto de unidades didácticas. Cierra el camino el cuestionario de *Proporcionalidad*.

Conclusiones

En este trabajo se lleva a cabo un análisis implicativo y de similitudes de los resultados obtenidos por alumnos de tercero de ESO en las siete pruebas escritas de matemáticas realizadas a lo largo del curso, usando dos tipos de ponderación de los datos. Las relaciones implicativas ponen de manifiesto la implicación de unas pruebas sobre otras, y las de similitud indican la homogeneidad entre variables. Este tipo de análisis estadístico implicativo ha sido usado en nuestro país para estudiar diferentes aspectos matemáticos en educación secundaria (Pitarch, 2002; Gregori et al., 2007; Bodí et al., 2007; Delgado et al., 2007)

Los resultados de los gráficos de similitud evidencian dos grandes grupos de similitud. Uno que contiene las pruebas de *Ecuaciones*, *Sistemas lineales* y *Gráficas y funciones afines*, que se trabajan secuencialmente, y otro que incluye las de *Números* y *Lenguaje algebraico y polinomios*. Los gráficos muestran poca similitud en la conexión entre estos dos grupos, tanto si se usa el resultado obtenido como si se toma el éxito en las diferentes pruebas. Se observa que la temática de *Proporcionalidad* presenta poca similitud con el resto de unidades si se considera el éxito de los alumnos en la superación de los cuestionarios, presentando similitud de índice medio con la unidad de *Números* en la codificación mediante los resultados obtenidos.

El análisis implicativo muestra que se forman dos grupos de implicación cuando se estudian los resultados y aparece sólo uno si se valora el éxito obtenido. En el primer caso, en niveles de significación superiores al 80%, los resultados en la unidad didáctica que presenta más influencia en el resultado de los estudiantes con el resto de cuestionarios, es la de *Lenguaje algebraico y polinomios*, sin que aparezcan implicaciones entre los resultados de ésta y la de *Ecuaciones*. Cuando se analizan las variables en función de la superación de las pruebas aparece la implicación que tiene el éxito en la unidad de *Números* sobre el éxito obtenido en las demás pruebas, así como la de *Ecuaciones*.

En ambos gráficos implicativos se destaca la importancia de los resultados y éxito en los cuestionarios de *Números*, *Ecuaciones* y *Lenguaje algebraico y polinomios*. Estas tres pruebas parecen constituir el núcleo principal de influencia sobre los logros en el resto de unidades. La prueba que atañe a *Proporcionalidad* no manifiesta ninguna implicación sobre el resto ya que ocupa el último lugar del árbol, siendo sin embargo la que obtiene la media más alta en cuanto a resultados y éxito de superación. En ambas ramificaciones el nivel de mayor significación en las implicaciones se produce de la unidad de *Gráficas y función afín* hacia la de *Figuras en el plano y en el espacio*.

Los resultados de esta investigación pueden profundizarse con estudios de carácter cualitativo en las diferentes unidades. Se tendrá que tener en cuenta la organización secuencial del currículo o la variabilidad al aplicar la herramienta de análisis con el programa CHIC en diferentes etapas educativas, cursos o grupos de estudiantes.

La importancia de la selección de los criterios y tareas instruccionales en la evaluación del proceso de enseñanza y aprendizaje es señalada en diferentes trabajos de investigación (Parcerisa 1996; Rico 1997a; Llinares et al. 2005). Esta investi-

gación puede servir como herramienta de orientación a los profesores de educación secundaria para la secuenciación curricular o en la aplicación de una metodología de análisis de cuestionarios, de tareas, de unidades didácticas o del proceso de evaluación en su conjunto, situando las variables a estudiar dentro de un determinado contexto escolar. Estos estudios pueden completarse con investigaciones sobre la comprensión conceptual que tiene los estudiantes de secundaria de los tópicos matemáticos utilizados. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Boletín Oficial del Estado. Jefatura del Estado. Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. BOE nº 106 de 4 de mayo de 2006.
- Boletín Oficial del Estado. Ministerio de Educación y Ciencia. Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre., por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE nº 5 de 5 de enero de 2007.
- Bodí, S.D., Valls, J., Llinares, S. (2007). La comprensión de la divisibilidad en \mathbb{N} . Un análisis implicativo. En R. Gras; P. Orús; B. Pinaud y P. Gregori (Eds.), *Nouveaux Apports Théoriques à l'Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp.99-110). Universitat Jaume I : Castellón.
- Bodin, A., Couturier, R., Gras, R. (2000). CHIC: Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive. CHIC 1.2. Rennes: Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.
- Copello, M.I., Sanmartí, N. (2001). Fundamentos de un modelo de formación permanente del profesorado de ciencias centrado en la reflexión dialógica sobre concepciones y prácticas. *Enseñanza de las Ciencias*. 19(2) ,269- 284.
- Couturier, R. (2007). CHIC: utilisation et fonctionnalités. En R. Gras; P. Orús; B. Pinaud y P. Gregori (Eds.), *Nouveaux Apports Théoriques à l'Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp.41-49). Universitat Jaume I: Castellón.
- Delgado, M., De María, J.L., Ulecia, T. (2007). Aplicación de CHIC al estudio de las funciones elementales. En R. Gras; P. Orús; B. Pinaud y P. Gregori (Eds.), *Nouveaux Apports Théoriques à l'Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp.163-177). Universitat Jaume I : Castellón.
- Diari Oficial de la Generalitat Valenciana. Decreto 39/2002, de 5 de marzo, del Gobierno Valenciano, por el que se modifica el Decreto 47/1992, de 30 de marzo, del Gobierno Valenciano por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana. DOGV nº 4206 de 8 de marzo de 2002.
- Diari Oficial de la Comunitat Valenciana. Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana. DOCV nº 5562 de 24 de julio de 2007.
- Fortuny, J.M. (1990). Información y control en Educación Matemática. En S. Llinares y M.V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática* (pp. 237-294). Sevilla: Alfar.
- García, M., Llinares, S. (1994). Algunos referentes para analizar tareas matemáticas. *SUMA* (18), 13 -23.
- García, V., Pérez, R. (1989). *La investigación del profesor en el aula*. Madrid: Escuela Española.
- Gras, R., Peter, P., Briand, H. y Philippé, J. (1997). Implicative Statistical Analysis, In Hayashi, N. Ohsumi, N. Yajima, Y. Tanaka, H. Bock y Y. Baba (Eds.), *Proceedings of the 5th Conference of the International Federation of Classification Societies*, Vol. 2, pp 412-419, New York: Springer-Verlag.
- Gregori, P., Orús, P., Pitarch, I. (2007). Reflexiones sobre el análisis a priori de los cuestionarios basado en técnicas del Análisis Estadístico Implicativo. En R. Gras, P. Orús, B. Pinaud y P. Gregori (Eds.), *Nouveaux Apports Théoriques à l'Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp.51-69).Universitat Jaume I: Castellón.
- Hewson, P.W., Hewson, M. (1987). Science teachers' conceptions of teaching: implications for teachers education. *International Journal of Science Education*, 9, 425-440.
- Jiménez, R., Wamba, A.M. (2004). ¿Podemos construir un modelo de profesor que sirva de referencian para la formación del profesorado en didáctica de las ciencias experimentales? *Profesorado, revista de currículo y formación del profesorado*, 8 (1), 19-35.
- Llinares, S. (1994). La enseñanza de las matemáticas. Perspectivas, tareas y organización de la actividad. En L. Santaló y otros, *La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia* (pp.249-295). Rialp: Madrid.
- Llinares, S. (coord.), Diez, A., Más, J., Mula, A., Navas, L., Penalva, y otros (2005). *Modelización matemática y competencia lectora en Educación Secundaria Obligatoria*. Editorial Compobell. Murcia.
- Marín, A. (1997). Programación de unidades didácticas. En L. Rico (Coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp.195-226). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona - Horsori.

- Monereo, C., Castelló, M, Clariana, M., Palma, M, Pérez, M.LL. (1999). *Estrategias de enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Graó.
- Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares. Cómo elaborarlos, seleccionarlos y usarlos*. Barcelona: Graó.
- Pitarch, I. (2002). *Estadística y análisis de datos en ESO*. DEA. Departamento de Matemáticas. Universitat Jaume I: Castellón.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J.L., Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales. *SUMA*, 58, 7-23.
- Rico, L. (1997a). Consideraciones sobre el currículo de Matemáticas para Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp.15-38). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona - Horsori.
- Rico, L. (1997b). Los Organizadores del Currículo de Matemáticas. En L. Rico (Coord.). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp.39-59). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona - Horsori.

Anexo

En este anexo se muestran ejemplos de ejercicios planteados en las diferentes pruebas.

1. Números

1) Opera, sin calculadora, y simplifica en una única fracción:

$$\text{a) } \frac{\left(3 - \frac{2}{3} + 1\right) \cdot \left(4 - \frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{6-3}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{4}{5}\right)} \quad \text{b) } \frac{2^{-3} \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^{-2}}{2^{-5} \cdot 2^3}$$

2) Un vehículo tiene que cambiar el filtro de aceite cada 15.000 Km y las ruedas cada 40.000 Km. ¿Cuántos Km habrá recorrido para que ambos cambios coincidan? Razona tu respuesta.

2. Proporcionalidad

1) Tres hermanos poseen una empresa que proporcionó unos beneficios de 12.000 euros. Si los hermanos invirtieron 21.000 euros, 24.000 euros y 5.000 euros, respectivamente, ¿qué cantidad del beneficio corresponderá a cada hermano? Justifica tu respuesta.

2) Una máquina produce 3.000 tornillos en 9 días, funcionando cada día durante 8 horas. A la empresa llega un pedido de 2.000 tornillos, pero por problemas de reajuste sólo puede tener en funcionamiento la máquina 6 horas al día. ¿Cuántos días tendrá que tener en marcha la máquina para servir el pedido? Razona tu respuesta

3. Lenguaje algebraico y polinomios

1) Dados los polinomios $P = 4x^2 - 3x - 1$ y $Q = 2x^2 + 5x - 2$, obtén:

a) $3P - 2Q$ b) $P \cdot Q$ Elige cinco de estas frases y exprésalas en lenguaje justificando tu respuesta:

2) El perímetro de un triángulo equilátero

- El triple de la edad que tenía el años pasado
- El área de un cuadrado
- La tercera parte de un número natural, más su cuadrado
- Tres números naturales consecutivos
- La mitad de un número menos el doble del anterior

4. Ecuaciones

1) Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x-3}{5} - \frac{2x-4}{6} = 1 - \frac{2x}{5} + \frac{x}{3}$ b) $8x^2 - 512 = 0$

2) Un teatro tiene cuatro veces más asientos de butaca que de graderío y la mitad de platea que de graderío. Si el aforo es de 1100 personas, ¿Cuántas entradas hay de cada clase? Justifica tu respuesta.

5. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

1) a) Resuelve $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 3y = -10 \end{cases}$ b) Resuelve con un método distinto del anterior: $\begin{cases} \frac{2x-1}{2} + \frac{y-3}{3} = \frac{11}{6} \\ -\frac{2x}{5} + \frac{y-1}{10} = -\frac{6}{5} \end{cases}$

2) El perímetro de un rectángulo es de 64 cm. Sabiendo que su base tiene 6 cm. más que su altura. Plantea un sistema de ecuaciones y resuélvelo. Justifica tu respuesta.

6. Funciones y gráficas. Función afín

1) Un dispositivo de llenado y vaciado tiene un depósito de 200 litros que se llena en 30 minutos y se vacía en 15. En cada operación el depósito permanece lleno durante una hora. Dibuja una gráfica que represente la situación durante medio día. Detalla las características de la gráfica.

2) La cantidad que hay que pagar por el recibo del agua viene dado por la expresión: $y = 22 + 0.30x$, donde x es el número de metros cúbicos consumidos.

- a) ¿Si se han consumido 43 metros cúbicos qué se pagará? ¿Y por 60 metros cúbicos?
- b) Representa la función.
- c) Determina el número de metros cúbicos consumidos si se ha pagado un total de 142 euros. ¿Qué opinas de esta situación?

7. Figuras en el plano y en el espacio

1) Una pirámide de base cuadrada, tiene todas sus aristas de longitud 18 cm. Obtén el área y el volumen de la pirámide. Justifica tu respuesta.

2) Un reloj de arena tiene el diámetro de la base de 12 cm. y su altura total es de 30 cm. ¿qué volumen tiene el reloj de arena?