suma+ 62
Noviembre 2009, pp. 7-9

La superficie que abarca la vista desde la cima de un monte

Muchas veces subimos a pequeños promontorios por el placer de contemplar un paisaje, y quizás alguna vez nos preguntamos qué superfície abarca la vista desde ese punto, pero enseguida desistimos de buscar la respuesta a esa pregunta creyendo que su cálculo será difícil, o cuando menos engorroso. Nada más lejos de la realidad, si no somos demasiado exigentes y nos permitimos un pequeño error (¡inferior al 0,1% !).

People often climb up to high points to view scenic landscapes. They may sometimes wonder how big the area is that they are admiring, but soon give up finding the answer since calculating it seems virtually impossible. Well, nothing farther from the truth, so long as we're not too demanding and allow ourselves a small margin of error (less than 0.1%!).

Hace algunos años, un profesor del Departamento de Matemáticas (el sr. Simó Bosch Estany, catedrático actualmente jubilado) hizo notar al resto de profesores del Departamento que si subimos a un monte de altura L (en km), la superficie de la región que veríamos es aproximadamente 40.000L.

Esta propiedad nos respondería fácilmente a la pregunta que muchas veces nos hacemos cuando admiramos un paisaje desde la cima de un monte: ¿qué superficie debo estar contemplando? Bastaría con conocer la altura del monte (en km) y multiplicarla por 40.000 para tener una muy buena aproximación de dicho valor.

Este resultado se obtiene de considerar que esta altura L es insignificante frente al radio de la Tierra (R_T = 6.371 km) ya que el punto más alto al que podríamos llegar son los 8,848 km del Everest, lugar al que, por otra parte, no todo el mundo puede llegar.

A continuación, argumentamos esta propiedad.

Vamos a suponer que la Tierra sea una esfera perfecta. Entonces, la superficie de un casquete de altura h es $S=2\pi Rh$, siendo R el radio de la esfera.

Esta fórmula se obtiene mediante integrales:

Consideremos la Tierra cortada por un plano que pasa por el centro y tendremos la circunferencia de centro (0,0) y radio R (=6.371 km) y hacemos girar alrededor del eje vertical OY el arco de circunferencia que va de A a B, obteniendo el casquete cuya superficie será:

$$S = 2\pi \int_{R-h}^{R} f(y)\sqrt{1+\left(f'(y)\right)^2}\,dy \text{ , siendo}$$

$$f(y) = x = \sqrt{R^2 - y^2}$$

(esto se obtiene de que la ecuación de una circunferencia de centro (0,0) y radio R es $x^2+y^2=R^2$), y por lo tanto, sustituyendo $f(y)$ y

$$f'(y) = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - y^2}}$$

y resolviendo la integral se obtiene que $S=2\pi Rh$

Lluís Sabater Anticó
IES Llançà. Llançà (Girona)

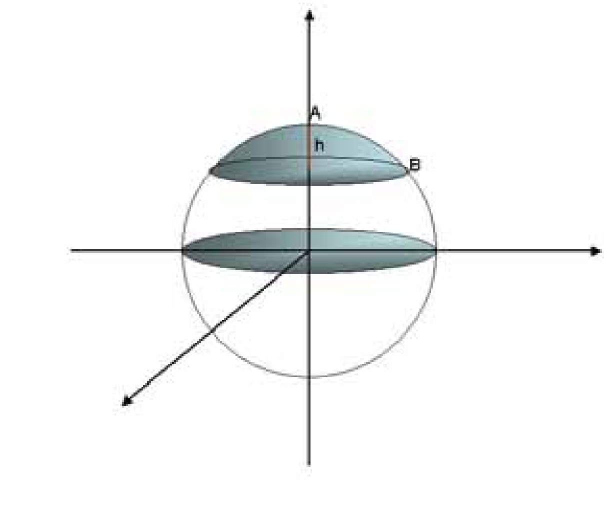

Figura 1

Consideremos ahora la misma sección de la Tierra pero situándonos en un punto P de altura L (la cima de un monte de altura L). Desde allí veremos una distancia m hasta el punto Q en el que la tangente a la circunferencia por el punto P toca a la Tierra. Esta tangente es perpendicular al radio que va de O (centro de la Tierra) a Q y por lo tanto podemos aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo PQO :

$(R+L)^2= m^2+R^2$ y haciendo cálculos se obtiene que $m^2=2RL+L^2$ y por ser insignificante L^2 frente a $2RL$ podemos poner que $m^2 \sim 2RL$

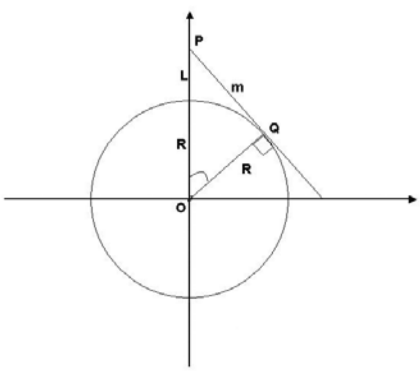

Figura 2

Pero por otra parte, para nosotros la Tierra es muy grande y podemos considerar que la distancia m es prácticamente el radio de un círculo, que por tanto tendrá área $A=\pi m^2 \sim 2\pi RL$ y donde resulta que el producto de los 3 primeros números es constante y vale $2\pi R=2\cdot 3{,}141592...\cdot 6.371 \sim 40.000$(más exactamente, 40.030,17...).

Por tanto, para simplificar cálculos y sin cometer un error excesivamente grande, *para conocer la extensión de terreno (en km²) que se ve desde lo alto de un monte de altura L (en km) basta con multiplicar L por 40.000.*

El cálculo del radio de este supuesto círculo (es decir, hasta qué distancia llega nuestra vista) es más complicado ya que es el valor de m, que hemos visto que es $m^2 \sim 2RL$ y por tanto habría que extraer una raíz cuadrada, aunque para según qué valores de L el cálculo es sencillo si consideramos que $R \sim 6.400$ km:
L = 0,5 km nos da m = 80 km
L = 2 km nos da m = 160 km

Error cometido

El error cometido no es grande pues resulta que la altura del monte es prácticamente la misma que la del casquete, como puede verse considerando los triángulos semejantes POQ y QOB.

Estos dos triángulos son semejantes por tener los mismos ángulos.

Los dos tienen un ángulo recto y los dos tienen el ángulo $\angle POQ = \angle BOQ$ y por tanto también tienen igual el tercer ángulo, y por tanto las razones entre lados correspondientes son iguales a la razón de semejanza:

$\dfrac{R}{R+L}=\dfrac{R-h}{R}$ y por tanto $1-\dfrac{h}{R}=\dfrac{R}{R+L}$ y por tanto $-\dfrac{h}{R}=\dfrac{R}{R+L}-1=-\dfrac{L}{R+L}$ y por tanto, por ser $R \sim R+L$ resulta que $h=\dfrac{R\cdot L}{R+L}\sim L$.

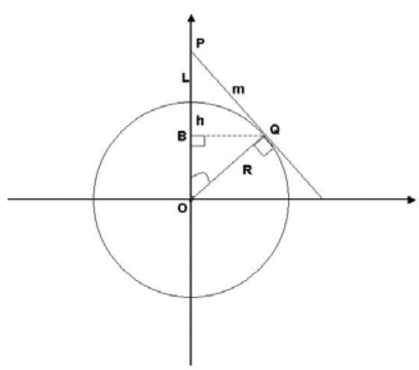

Figura 3

Ejemplos comparativos

En el caso L = 1 km

$h = \frac{R \cdot L}{R+L} = \frac{6.371}{6.372} = 0{,}999843$, y por tanto el área del casquete es S=40.023,8889 km^2, mientras que aplicando la fórmula A=40.000L se obtiene A= 40.000 km^2, es decir, un error de tan solo casi 24 km^2 donde el verdadero resultado es 40.023,8889 km^2.

Expresado en %, el error cometido es del 0,059%.

El gráfico nos da una idea del error cometido.

Figura 4

En el caso L = 0,5 km

$h = \frac{R \cdot L}{R+L} = \frac{31.85{,}5}{6.371'5} = 0{,}499961$ km, y por tanto la superficie del casquete es S=20.013,52562 km^2, mientras que aplicando la fórmula A=40.000L se obtiene A=20.000 km^2, es decir, un error de tan solo 13,5 km^2 donde el verdadero resultado es 20.013,52562 km^2.

Expresado en % el error cometido es del 0,067%.

Aplicándolo a 4 casos concretos de España

	Altura (km)	Superfície real casquete (km^2)	Superf. aprox. 40000L (km^2)	Diferencia (% del real)
Montserrat	1,236	49.467,68	49.440	0,056
Teide	3,718	148.745,35	148.720	0,017
Aneto	3,404	136.189,92	136.160	0,022
Sant Pere de Rodes	0,670	26.817,39	26.800	0,065

Obsérvese que la superficie visible desde la cima del Aneto, es mayor que la superficie de Aragón (47.669 km^2), Catalunya (31.980 km^2) y Navarra (10.421 km^2) juntas, y es casi 3 veces la de Aragón.

Los datos referentes a Sant Pere de Rodes han sido calculados por ser un punto emblemático del turismo en la comarca del IES del autor del artículo.

(Los cálculos y razonamientos anteriores se han hecho considerando que el monte al cual hemos subido no tiene alrededor suyo otros accidentes geográficos que puedan aumentar o disminuir el área visible hasta un horizonte tangente a la Tierra).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carreras, J. (dir.)(1986). *Gran Enciclopèdia Catalana*. Barcelona: Enciclopèdia Calana, S.A.