

La luna y el tejo

*Tiene forma gótica,
Los ojos, siguiéndolo se alzan y encuentran la luna
La luna es mi madre
Calva y salvaje.
Y el mensaje del tejo es negrura: negrura y silencio.*

Silvia Plath

*Y en la negrura evoluciona el camino de la luna...
y en la negrura el camino del engaño,
del engaño que atenaza al miedo,
del miedo que atenaza la vida
de la vida no vivida,
secuestrada.*



El zodíaco, la precesión y sus leyendas

El camino de las lunas, llena, menguante, nueva y creciente, es el zodíaco, una corona de estrellas, extendida 9° por encima y por debajo de la eclíptica, ese lugar imaginario de cuyos puntos “parte” el sol cada día, acompañado, casi siempre, de una constelación distinta a lo largo de aproximadamente 30 días, en los que la atraviesa hasta alcanzar la siguiente.

Esta corona de estrellas está formada por doce zonas, de 30° de amplitud cada una, caracterizadas por la presencia de una constelación particularmente prominente (o dos en el caso de Escorpio y Ofiuco).

El camino de las lunas lo es también del Sol y de los planetas, solemos decir “Saturno está en Leo”, por ejemplo.

Alrededor del 128 a.C., Hiparco de Rodas descubrió que la posición de los puntos equinociales no era fija y dedujo que el equinoccio de primavera había estado alguna vez en la constelación de Tauro, 4.000 años antes de nuestra era, en el neolítico superior.

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat
Valenciana “Al-Khwarizmi”
ariadna@revistasuma.es

Según una de esas interpretaciones, la pintura del Pozo de la Cueva de Lascaux sería una representación propiciatoria de las lluvias necesarias para que la semilla germine y las plantas maduren hasta la producción de sus frutos. En ella se encuentran representados los protagonistas de la historia de la agricultura: flecha clavada en bisonte hembra, soltando bolsa de agua de sus entrañas, junto a un hombre ¿muerto?, seis puntos y un ave que parece elevarse.

Las réplicas respectivas son las constelaciones Flecha, Tauro, las Híades o Lluviosas, Orión, las Pléyades y el Cisne, visibles todas a la vez en el cielo en el atardecer estival de hace 18 milenios.

Estas figuras y sus réplicas celestes simbolizarían el sacrificio litúrgico de la vaca a la Diosa Madre, el agua de la lluvia, la semilla que se entierra, las danzarinas en este rito primaveral y la resurrección o inicio de un nuevo ciclo agrícola, ligado a un nuevo ciclo celeste anual.

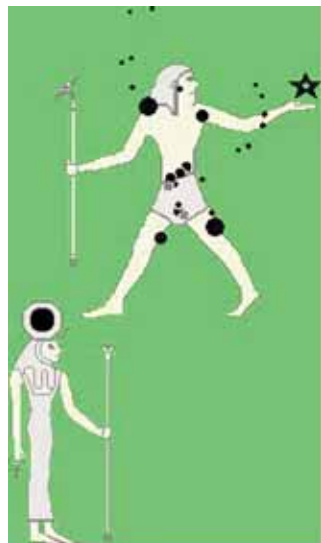
En la época en que se pintaron las figuras de Lascaux, el punto vernal estaba en Escorpio, es decir, la primavera empezaba con el sol en Escorpio. Por lo tanto, al anochecer, ¡¡¡la constelación que brillaba en el cielo era Tauro!!! (Ver flechas rojas en figura 1)

Las interpretaciones prehistóricas de las constelaciones dejaron su reflejo en los mitos de civilizaciones como la egipcia.

Para los egipcios la constelación de Orión, símbolo actual del invierno, representaba al dios Osiris, a veces Horus, sosteniendo en sus manos a la estrella Aldebarán o alfa de Tauro.

Isis, hermana de Osiris, está representada como la estrella Sirio, la más brillante del firmamento. La constelación a la que pertenece y que desde la Grecia Clásica reconocemos como el Can Mayor, **era una vaca**, en tiempos egipcios.

Su calendario empezaba cuando observaban a Sirio en su orto, poco antes del amanecer, fenómeno que anunciaba la crecida del Nilo, suceso crucial para la economía egipcia que ocurría en junio. Hoy, por la precesión de los equinoccios, se produce a finales de Agosto.



De este extraño mundo astronómico egipcio quedan hoy pocos rastros en el firmamento, ya que las constelaciones actuales tienen un origen fundamentalmente babilónico y griego. La única excepción de una constelación genuinamente egipcia, que hoy podemos ver en el cielo, es Ophiuco, la treceava zodiacal, que se ha mantenido fija en el firmamento, como una ruina arqueológica o un dinosaurio celeste.

También la constelación de Bootes, Epet para los egipcios, mantenía unos límites más o menos parecidos a los actuales, lo cual unido a su posición próxima a la osa o pata de la vaca celeste egipcia, justificaría su nombre, pastor de bueyes. El paso de vaca a buey y más tarde a toro, se explica por la patriarcalización de los mitos.

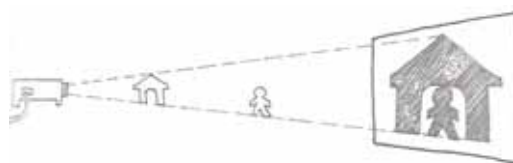
Sin embargo, es obvio que el interés de los antiguos pueblos por la disposición de las estrellas tuvo un motivo fundamentalmente práctico: servir de orientación a navegantes y viajeros, pues, por entonces, cuando un barco perdía de vista la costa corría grave riesgo de perderse. Así, relacionando cada una de las 88 constelaciones con algo conocido, era más fácil de recordar su contorno y su posición relativa, especialmente si se le asociaba una leyenda existente o incluso se inventaba una nueva, como una regla nemotécnica.

**Imágenes fantásticas que ayudan a reconocer los cielos.
Fantasías que impiden reconocer las tierras.
Tierras que hablan el lenguaje de las ciencias:
Las matemáticas.**

Problemas propuestos

Los problemas que proponemos en los números del año 2009, en esta sección, tienen como objetivo contribuir a deslindar las luces de las sombras, la literatura astronómica de la literatura astrológica, los mitos y las místicas de ayer y de hoy, de las aportaciones científicas, las creencias racionales de las creencias irracionales, las asociaciones infundadas de las observaciones contrastadas .

Los problemas de este número muestran que las posiciones, los tamaños, las distancias y los movimientos aparentes de los astros no coinciden con los que nos da el método científico, la razón, que, como dice Sabater, busca opiniones más reales, más próximas a lo real, con más carga de realidad. No está igualmente próxima a la realidad cualquier tipo de forma de ver, operar, entender... Y, además, *las apariencias engañan*:



Posiciones, distancias y tamaños aparentes

1. De qué tamaño os parece la Luna llena? ¿Es mayor o menor que el sol? ¿Es de igual tamaño a lo largo del día?
2. ¿Son las estrellas de una constelación puntos luminosos de una figura plana?
3. ¿Cómo podríamos medir las distancias y tamaños de la Tierra, la Luna y el Sol?
4. ¿Y la altura de las montañas de la Luna?
5. La luna se mueve sobre sí misma y alrededor de la Tierra, ésta también gira sobre su eje y en torno al sol ¿Y el sol, está quieto?

Soluciones a los problemas del número anterior¹

Por Daniel Gozalbo Bellés

El calendario

El calendario empieza cada año el día uno de enero, pero no siempre empieza en el mismo día de la semana ¿Cuántos modelos de calendario distintos pueden cubrir todas las posibilidades?

¿Podrías calcular, con agilidad, el día de la semana de un día cualquiera, si es una fecha posterior al viernes 15 de octubre de 1582?

a. El Ciclo Solar

Es conocido el hecho que la feliz coincidencia en domingo, del día 25 de Julio fiesta religiosa del Apóstol Santiago, es el origen de los años llamados Jubilares o año Jacobeo. Esto sucede en una sucesión regular de 6, 5, 6 y 11 años, por tanto se repite en un ciclo global de 28 años. ¿Cual es la razón de dicha repetición?. Es el llamado ciclo solar, en que los días del año, vuelven a coincidir con los días de la semana.

Si no existieran bisiestos, empezaría el año en domingo cada 7 años, al ser 7 los días distintos de la semana. Si dicho ciclo se entremezcla con el ciclo de bisiestos, aparece un ciclo común de 28 años que hace repetir la secuencia de los días del año con la de días de la semana. Existe por tanto una secuencia de 28 términos en la fecha de la semana en que empieza el año, que se repite cíclicamente.

La existencia de la reforma gregoriana, con la supresión de 3 bisiestos cada 400 años, hace que el ciclo de 28 días deba fraccionarse, a partir de la reforma, en cada una de las centurias

en que no se considera bisiesto el año secular, o bien tomar en cuenta un ciclo gigantino de 2800 años que no tiene ningún valor práctico.

b. Fecha Juliana.

Un año después de aprobada la reforma Gregoriana, Joseph Justus Scaliger, propuso un nuevo calendario de uso para astrónomos, que usaba únicamente el día como unidad de medida, con objeto de tener definido de manera unívoca cada día con un número real. Necesitaba para el nuevo sistema de referencia un origen. Con objeto que coincidieran los tres ciclos que latían en el calendario, desde la antigüedad, se propuso conseguir un nuevo ciclo que respetara el ciclo solar, el ciclo lunar y el ciclo de la indicción romana.

El primero servía para computar el tiempo en que vuelven a coincidir las fechas del calendario anual, con el orden de los días de la semana. Ese ciclo solar constaba de 28 años. Además sabía que el último ciclo solar empezó en 1560.

El segundo ciclo, de 19 años, garantizaba que las fases lunares, coincidieran con la fecha del calendario. El orden de un determinado año, dentro del ciclo era el número áureo del año, llamado así al ser escrito con letra de oro en los calendarios medievales. Conocía que el año 532, fue el primero de un ciclo Lunar.

La indicción romana indicaba el cómputo de los años en que se pagaba el tributo fiscal por los bienes, que había instaurado en su día por Constantino en el año 313 y se mantenía en vigor desde entonces. Sabía por tanto que el año 313 era el primero de un ciclo de indicción.

Es evidente que el nuevo ciclo debía ser el MCM (28,19,15) o sea 7.980 años. Pero cual debía ser el posible origen para que se cumplieran las tres condiciones que quería cumplir: que el año 1.560 fuera el primero de un ciclo de 28, el 532 primero del ciclo de 19 y que 313 fuera el primero del ciclo de la indicción romana. Si x es el número buscado

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 1560 \pmod{28} \\ x \equiv 532 \pmod{19} \\ x \equiv 313 \pmod{15} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \equiv 20 \pmod{28} \\ x \equiv 0 \pmod{19} \\ x \equiv 13 \pmod{15} \end{array} \right\}$$

Sistema de congruencias que tiene solución de acuerdo con un clásico teorema al ser los módulos, dos a dos, primos entre si.

De la primera ecuación: $x = 20 + 28k$; sustituyendo en la segunda, $20 + 28k \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow 1 + 9k \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow 9k \equiv 18 \pmod{19} \Rightarrow k \equiv 2 \pmod{19} \Rightarrow k = 2 + 19t$

Sustituyendo los resultados en la tercera ecuación obtenemos $20 + 28(2 + 19t) \equiv 13 \pmod{15} \Rightarrow 76 + 532t \equiv 13 \pmod{15}$

$$\Rightarrow 1 + 7t \equiv 13 \pmod{15} \Rightarrow 7t \equiv 12 \pmod{15} \Rightarrow t \equiv 6 \pmod{15}$$

o también $t = 6 + 15r$.

$$\text{Por tanto } x = 76 + 532(6 + 15r) \Rightarrow x = 3.268 + 7.980r$$

Si $r = 0$ el año origen sería el 3.268, año no utilizable si se quería que la mayoría de fenómenos astronómicos conocidos estuviera incluida con signo positivo. Tomó por tanto la decisión que $r = -1$ y, en dicho caso, $x = -4.712$. Para evitar el error de cómputo por la inexistencia de año cero, lo corrigió y adoptó como origen el 1 de Enero del año - 4.713 a las 12 del mediodía, que sería por tanto el origen 0 del nuevo calendario.

c. Cálculo del día de la semana de un día cualquiera, si es una fecha posterior al viernes 15 de octubre de 1582

El enunciado nos proporciona un dato necesario, el 15 de Octubre de 1582 era viernes. Partiremos por tanto de esa fecha, primer día del calendario renovado por el Papa Gregorio XIII.

Sea $d/m/a$ la fecha indicada para conocer su día de la semana. Si $a = 1.582$ contamos los días transcurridos entre el 15 de Octubre y el cálculo es elemental. El número de días transcurridos, módulo 7, nos indica los días adicionales a semanas completas, por tanto basta con calcular el resto y si es 1 será sábado, 2, domingo, etc. Supondremos pues que el año es posterior al 1.582.

a. Días transcurridos entre esa fecha y la finalización del año 1.582: 16 días de octubre + 30 días de noviembre + 31 días de diciembre. Un total de 77 días que módulo 7 es congruente con 0. Por tanto el año 1.582 finalizó en Viernes².

b. Años completos transcurridos entre la fecha dada y 1.583 (éste incluido). La cifra será la diferencia $a - 1.583$. Sea:

$$m \equiv (a - 1.583) \pmod{7}$$

c. Bisiestos incluidos entre ambas fechas³. Sea ⁴

$$n = [a - 1.583] + 1$$

d. Introducir la Reforma gregoriana, minorando el cómputo de bisiestos según los años centenarios no bisiestos, 1.700, 1.800, 1.900, 2.100, ... incluidos entre las fechas indicadas. Sea p = número de años centenarios no bisiestos entre las dos fechas.

e. Cálculo de los meses completos transcurridos del año indicado⁵: Sea q el resto congruente módulo 7 con la suma de los días de los meses completos transcurridos.

f. Días transcurridos en el mes indicado. Sea $r \equiv d$ módulo 7

g. Sea $s (m + n - p + q + r)$ módulo 7

h. Trasladar s al cómputo del día de la semana: Si $s = 1$ entonces es Sábado, $s = 2$ domingo, $s = 3$ lunes, $s = 4$ martes, $s = 5$ Miércoles, $s = 6$ jueves, $s = 7$ viernes.



Eclipses

¿Cuánto tardan los eclipses en volver a ocurrir en el mismo orden?

¿Cuál es la condición para que se produzca un eclipse de sol anular, visible desde un lugar de la Tierra?

¿Y total?

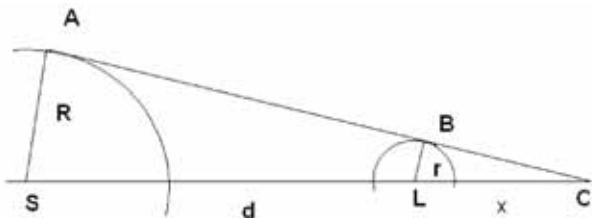
¿Podríamos estimar su probabilidad?

Un eclipse, sea de Sol o de Luna, solamente puede ocurrir si la Tierra, el Sol y la Luna están alineadas. Si el objeto que está en el centro es la Tierra, la Luna en el extremo opuesto será Luna Llena y si el objeto central es la Luna, estará en Luna nueva. El plano de la órbita de la Luna con el plano que describe la tierra alrededor del Sol, se cortan en una recta que se llama eje o recta de los Nodos. Por tanto para producirse un eclipse necesita como segunda condición que esten en el mismo plano o sea que la Luna esté en un Nudo. El tiempo entre pasajes sucesivos de la Luna a través de sus nodos se llama mes Dracónico, y tiene una duración de 27,212220 días. El tiempo entre dos sucesivas Lunas Nuevas o Llenas, es llamado el mes Sinódico, y es igual a 29,530589 días.

El ciclo común⁶ que los engloba es de 223 meses sinódicos (6.585,321 d), que coincide prácticamente con 242 meses dracónicos (6.585,357 d). Este período es el Saros, conocido ya en la antigüedad y equivale a 18 años, 10 días y 8 horas⁷.

Eclipses de Sol⁸

Representemos el cono de sombra de la Luna generado por la luz del Sol. Sea R el radio del Sol, r el radio de la Luna, d la distancia Sol-Luna, S el centro del Sol y L centro de la Luna, A punto de tangencia del Sol con la visual del espectador y B punto de tangencia de la visual de la Luna.



De la proporcionalidad de los triángulos OLB y OSA se deduce:

$$\frac{x}{r} = \frac{x+d}{R} \quad x = \frac{rd}{R-r} \quad x = \frac{d}{\frac{R}{r}-1}$$

Luego conocemos la longitud de la sombra en función de la distancia entre la Tierra y la Luna, y de sus radios respectivos. Veamos entre qué extremos puede variar dicha distancia x .

Sabemos que:

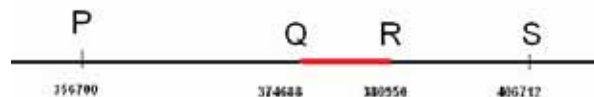
$$147,08 \text{ M Km} \leq \text{Distancia Tierra-Sol} \leq 152,11 \text{ M Km}$$

$$356.375 \text{ Km} \leq \text{Distancia Tierra-Luna} \leq 406.712 \text{ Km}$$

La distancia menor buscada será si la Luna ocupa el lugar más alejado posible de la Tierra y en cambio el Sol está lo más cercano posible a la Tierra. En ese caso, la longitud del cono de sombra es de 374.688 km.

La distancia mayor buscada será en el caso que la Luna esté lo más cercana posible y en cambio el Sol lo más alejado posible; en dicho caso la longitud del cono de sombra es 380.950 Km. Si los cálculos se realizan en función del radio terrestre, la longitud del cono de sombra de la Luna varía entre 57 y 59 radios terrestres, mientras que la distancia Tierra Luna varía de 56 a 64 radios terrestres.

Si el cono de sombra de la Luna alcanza la superficie de la Tierra, habrá un eclipse de Sol total.



Por tanto, solamente si la distancia Tierra-Luna se encuentra entre P y Q habrá eclipse total, entre Q y R, es una zona mixta de totales y anulares, y si la distancia está entre R y S el eclipse será anular.

Oposiciones

¿Cuánto tiempo es necesario para que Marte o Júpiter vuelvan a estar en oposición a la Tierra?

Marte y La Tierra

Los periodos de traslación de Marte y La Tierra son conocidos, 687 y 365,25 días respectivamente. Basta plantear:

$$365,26 x = 687 y \Rightarrow x = 1'88 y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{188}{100} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{25}{47} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{47}{25}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \frac{22}{25}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{25}{22}}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{22}}} \Rightarrow$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{22}{3}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{3}}}}$$

Despreciando el $1/3$, con esta aproximación ya resulta: $\frac{y}{x} = \frac{8}{15}$: cada 15 años terrestres se repite la oposición de Marte.

Júpiter y la Tierra

Sabiendo que un “año” de Júpiter son 11,86 años terrestres, podemos encontrar una aproximación usando el siguiente desarrollo:

$$\frac{x}{y} = \frac{11,86}{1} = 11 + \frac{86}{100} = 11 + \frac{1}{\frac{100}{86}} = 11 + \frac{1}{1 + \frac{14}{86}} = 11 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{7}}}$$

Cortando el desarrollo obtenemos la aproximación:

$$x = 83, \quad y = 7$$

Cada 83 años terrestres Júpiter repetirá la oposición con la Tierra.

Los días de la semana

¿Conoces el origen de los nombres y el orden de los días de la semana?

Es conocido que desde la remota antigüedad se conocen 7 astros en el cielo, les asignaban unas virtudes especiales y los consideraban protectores de sus trabajos y sus tiempos. En concreto cada uno protegía una hora diaria. Desde muy anti-

guo se consideró que el protector de la primera hora del día, era el protector primordial de ese día, e incluso, el día pasó a denominarse igual que al Dios protector de la primera hora.

La ordenación de esos astros la indicaba la mayor o menor distancia de dicho astro a la Tierra. Durante siglos se consideró: Luna, Mercurio, Venus, Sol, Marte, Júpiter y Saturno. Téngase en cuenta que hasta el renacimiento no se aceptó que Mercurio estaba más cercano al Sol que Venus. Como las 24 horas no son múltiplo de 7 y $24 \equiv 3 \pmod{7}$, el planeta protector del día siguiente era el que ocupaba tres posiciones posteriores al que empezó ese día y así sucesivamente.

Si el Planeta protector del primer día era p.e. la Luna, la primera hora del día siguiente era protegida por Marte, la primera del posterior día por Mercurio,... de forma que se inducía como orden de los días de la semana el actualmente conocido. Para que su visualización fuera pública, se representaba sobre un círculo en cuya circunferencia estaban marcados los planetas y en su interior un esquema indicaba la sucesión de los planetas para los días sucesivos.

EL HILO DE ARIADNA ■

NOTAS

- 1 En la solución de los problemas, debe tenerse en cuenta que tanto su planteamiento como los métodos utilizados, se adaptan necesariamente para el alumnado de 12 y 13 Años, –Primer o segundo curso de ESO–, para el que fueron concebidos. Se obvia por tanto cualquier fórmula más compleja, o procedimiento informático, que por otra parte se pueden encontrar con facilidad.
- 2 Esta simplificación nos sirve para reducir el cálculo en cualquier fecha posterior y considerar únicamente como fecha inicial el 31 de diciembre de 1583.
- 3 Es importante hacer notar si la fecha propuesta fuera de un año Bisiesto, que para el cálculo de los bisiestos transcurridos, debe tenerse en cuenta el carácter de bisiesto lo marca la existencia de un 29 de Febrero, por tanto, si la fecha dada es anterior al 29 de febrero, el cálculo de n debe disminuirse en una unidad. En caso de ser posterior, ese año sí entra en el cómputo de bisiestos.
- 4 Usamos [] para indicar el cálculo de la parte entera.
- 5 Recordar que $31 \equiv 3$; $30 \equiv 2$; $28 \equiv 0$ todos ellos módulo 7.
- 6 Un método sencillo para el cálculo de esa aproximación se realiza desarrollando en fracción continua el cociente: $272.120/295.306$

$$\frac{x}{y} = \frac{272120}{295306} = \frac{1}{11 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}}}}$$

las diferentes aproximaciones que se obtienen son:

$$\frac{12}{11}, \frac{13}{12}, \frac{38}{35}, \frac{51}{47}, \frac{242}{223}, \dots$$

- 7 Esas 8 horas provocan que la Tierra debe rotar 8 horas o 120° adicionales con cada ciclo. Esto implica, para los eclipses solares, un desplazamiento en cada ruta de la sombra de unos 120° hacia el oeste. De este modo una serie Saros de eclipses retorna a casi la misma región geográfica cada 3 periodos Saros o sea cada 54 años y 34 días.
- 8 En este ejercicio de proporcionalidad, solamente consideramos el caso de alineación exacta de los centros de los tres cuerpos. Hay numerosos estudios para los otros casos en que no están exactamente en línea recta denominada de los nodos lunares y en cambio pueden producirse eclipses, fundamentalmente parciales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERGUA, J.B. (1979): *Mitología Universal*, Ediciones Ibéricas, Madrid

HICKS, J. (1975): *Les Origins de l'Homme. Les Perses*. TIME-LIFE International (Nederland) B.V.

MARTÍNEZ, B. (1997): *Materials didàctics per a l'ensenyament de l'astronomia*, NAU llibres, València.

OSUNA, L. (1998): *Astronomía*, Aguacalra, Valencia.

RICHEPIN, M.J. (1990): *La nueva mitología griega y romana*, MUSA, Ripollet.