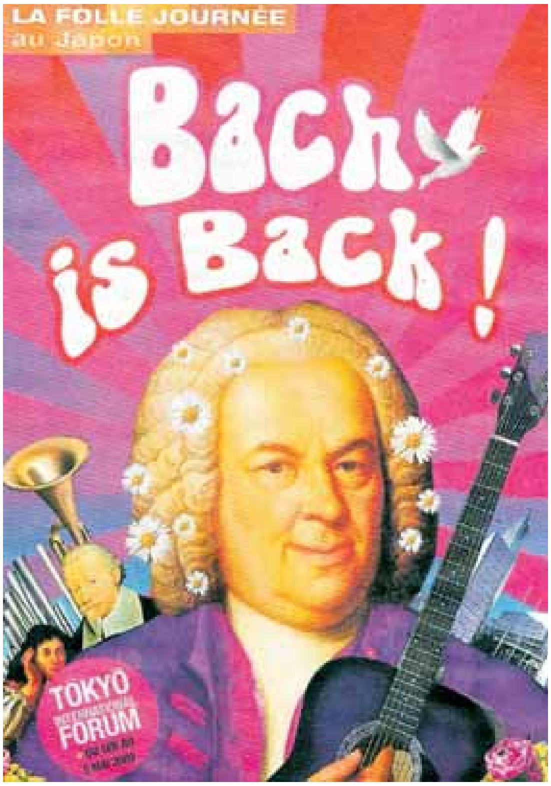
suma+ 61
Junio 2009, pp.113-118

Las matemáticas de Johann Sebastian Bach

Lo que Newton fue como científico, Bach lo fue como músico

C. F. Daniel Schubart, (1784/1785)



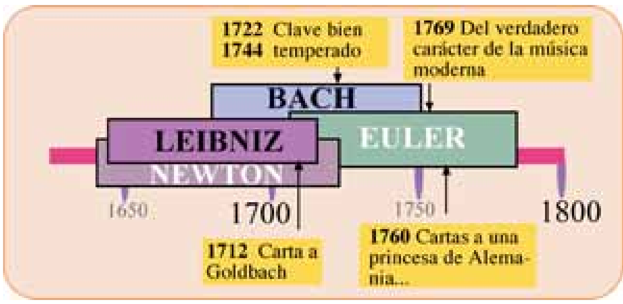
Mientras unos celebrábamos el Año Mundial de las Matemáticas, otros conmemoraban el doscientos cincuenta aniversario de la muerte de Johann Sebastian Bach (Eisenach, 1685 – Leipzig, 1750). Aunque no se aprovechó mucho esta coincidencia, lo cierto es que aparecieron algunos trabajos que mostraban el aspecto científico de sus composiciones. Actualmente, muchos festivales de música clásica, como el *Musika-Música* de Bilbao o *La Folle Journée* en Tokyo, por ejemplo, están dedicando la edición de 2009 a homenajear la figura de Bach. Por esta razón, no queremos dejar pasar de nuevo la oportunidad para reflexionar acerca de la vertiente matemática del compositor de Eisenach.

Bach perteneció a una de las familias de músicos más extraordinarias de la Historia, con más de treinta y cinco compositores famosos y muchos intérpretes destacados. Su reputación como organista y clavecinista se extendió por toda Europa. Además, tocaba el violín y la viola de gamba y fue, sin duda, el primer gran improvisador de renombre de la Historia de la Música. A pesar de esto, hubo que esperar a la generación de Mozart (1756 – 1791) y Beethoven (1770 – 1827) para que se le reconociera como uno de los más grandes compositores de todos los tiempos. Precisamente, atendiendo a la cantidad y calidad de su producción, fue Beethoven quien, haciendo un juego de palabras con el significado de su apellido en alemán, dijo de él que *"no debiera llamarse Bach (arroyo, en alemán), sino mar"*.

Contemporáneo de algunos de los más grandes matemáticos y científicos de la Historia –Leibniz, Newton y Euler–, Bach vivió en una época de auténtica revolución intelectual a la que, sin duda, contribuyó desde la Música. A pesar de la carta que su hijo Carl Philipp Emanuel escribió a J. N. Forkel advirtiendo que su padre "no era amante del seco material mate-

Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

mático", lo cierto es que la grandeza estructural de sus obras, así como la manera de zanjar un problema secular a través de *El clave bien temperado* (1722, 1744) son formas brillantes de hacer Matemáticas de las que Bach sólo fue consciente al final de su vida.



J. S. Bach fue contemporáneo de grandes matemáticos

De la simbología numérica a la Sociedad de Ciencias Musicales

Como bien afirma S. Russomanno (2000), la obra de Bach está plagada de claves numéricas. Por ejemplo, al sumar las cifras que corresponden a la posición en el alfabeto de las letras B-a-c-h, se obtiene el número 14 (2+1+3+8) y las cifras correspondientes a las letras J-S-B-a-c-h suman 41, o sea el revés de 14. Esta observación, que podría haber sido una simple anécdota, manifestaba una tácita predisposición hacia las leyes de la simetría y de la armonía universales que proporcionó muchas sorpresas en su obra. El manuscrito del coral para órgano *Von deinen Thron tret ich hermit* contiene en la primera línea 14 notas, mientras que el coral en su integridad suma 41 notas. Sin duda, la frecuencia con la que estos dos números aparecen en las obras de Bach no puede atribuirse a una casualidad. Por otra parte, en la primera sección del *Credo de la Misa en Si menor,* la palabra credo se repite 43 veces. Si se suman las posiciones en el alfabeto de las letras c-r-e-d-o, se obtiene precisamente el número 43. Las dos primeras secciones del mismo *Credo* suman 129 compases, o sea, 43 multiplicado por 3, número que simboliza la Trinidad. En la *Chacona* para violín aparecen continuas referencias a su primera mujer, María Bárbara: en la pieza aparece insistentemente el número 211 correspondiente a las palabras *In Christo Morimur*, y también los números 81 y 158 que se corresponden con la suma de las letras de María (40) Bárbara (41) y Johann (58) Sebastian (86) Bach (14), respectivamente. Pero, más allá de esta simbología numérica, que poco aporta a las Matemáticas, ¿había razonamientos matemáticos en sus composiciones?

Durante muchos años, Bach no fue consciente del rigor científico de sus obras porque, en palabras de su hijo Carl Philipp Emanuel, "no se dejaba arrastrar por profundas consideraciones teóricas y dedicaba, en su lugar, sus energías a la práctica". Pero, tras nueve años de negativa, en el verano de 1747, Johann Sebastian accedió a ingresar en la *Sozietät der Musicalischen Wissenschaften* (Sociedad de las Ciencias Musicales). Era una sociedad elitista, que sólo llegó a contar con veinte miembros, creada por L. C. Mizler (1711 - 1778), un alumno de Bach, que además de músico fue matemático, físico, filósofo y médico. El propósito era investigar la relación entre música y matemáticas y, de hecho, el propio Mizler contribuyó al objetivo de la Sociedad publicando un tratado de composición basado en el *ars combinatoria* de Leibniz. Cuando Johann Sebastian ingresó en la Sociedad, ya sabía que en su manera de abordar los cánones o las fugas se ocultaban razonamientos matemáticos. De hecho, para formar parte de la Soziëtat presentó como trabajo científico una pieza canónica basada en su *Vom Himmel hoch* (BWV 769), junto con un canon a seis voces de las Variaciones Goldberg. Además de estas dos obras aportó un retrato, otra de las exigencias de la selecta sociedad, que se ha convertido en la imagen más conocida de Bach.

Retrato de Bach encargado para su entrada en la Sozietät der Wissenschaften Musicalischen

La estructura de sus obras es pura geometría

La genialidad de Bach alcanza su cénit con el contrapunto y la fuga, composiciones en las que la estructura geométrica es incuestionable. Se parte de uno o varios temas y se les somete a transformaciones geométricas que mantienen la forma del tema: *traslaciones, giros y simetrías* que confieren a la obra una estructura muy rígida, pero en la que el compositor encontró una fuente de inspiración[1]. Se planteaba las fugas con el mismo rigor estructural que un geómetra, pero les añadía una velocidad y brillantez en la improvisación, que resultaron admirables. Sirvan como muestra las palabras de J. N. Forkel (1749 – 1818) refiriéndose a una visita Bach al rey Federico II de Prusia (1712 – 1786):

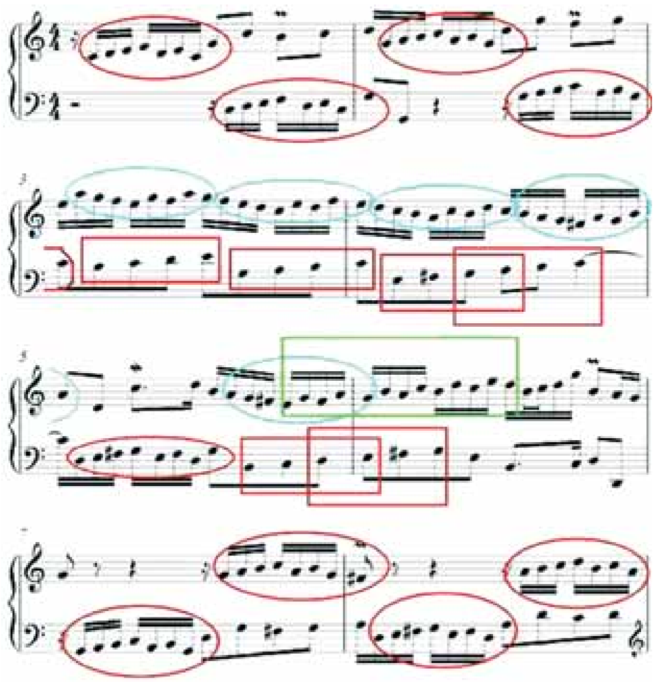
> Una noche, en los momentos en que [Federico el Grande de Prusia] preparaba ya su flauta y sus músicos estaban preparados para comenzar, un funcionario [...] dijo [...] ‘Señores el viejo Bach está aquí’. [...] El rey renunció a su concierto de esa noche e [...] invitó a Bach a probar cada uno de los fortepianos y tocar en ellos alguna improvisación. [...] Bach le pidió al rey un tema para una fuga, ofreciéndose a ejecutarla de inmediato, sin preparación alguna. El rey quedó admirado[2] [..] y expresó el deseo de oír una fuga a seis voces obligadas. Pero como no cualquier tema se presta para una armonía tan rica, Bach mismo eligió uno, y al punto, con asombro para todos los presentes lo desarrolló de la misma sabia y magnífica manera como había desarrollado antes el tema del rey.

La dificultad que entraña componer una fuga a seis voces es altísima, y la de improvisarla sólo ha estado al alcance de unos pocos. En palabras de Hofstadter (1987), la tarea de improvisar este tipo de fugas podría compararse, por decir algo, a la de jugar con los ojos vendados sesenta partidas simultáneas de ajedrez y ganarlas todas.

Aunque hacer el análisis preciso de una fuga exige conocimientos musicales que exceden en mucho de nuestro objetivo, a continuación veremos un análisis gráfico de ocho compases de la *Invención I* a dos voces en el que se da una muestra de la técnica (figura 1).

Sólo a modo de ejemplo, veamos algunas de las operaciones matemáticas a las que somete Bach el tema principal (*sujeto*) de la fuga. Para facilitar los cálculos hemos supuesto que la obra está afinada en el temperamento igual de 12 notas en el que las notas vienen dadas por

Do	Do#	Re	Mi^b	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	Si^b	Si
1	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$



El sujeto de la fuga aparece en el primer compás con las notas que se han marcado con una elipse roja:

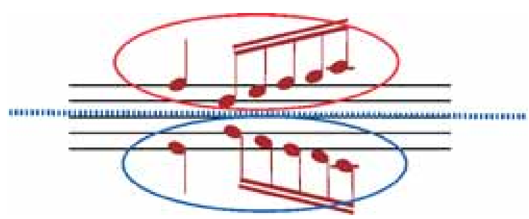
do, re, mi, fa, re, mi, do, sol.

En el compás siguiente, de nuevo marcado con una elipse roja, el tema se repite pero subiéndolo una quinta (do – sol), es decir

sol, la, si, do, la, si, sol, re = $2^{7/12} \times$ [do, re, mi, fa, re, mi, do, sol]

Este tipo de operación se repite muchas veces a lo largo de la fuga. Cada vez que en el pentagrama aparece una elipse de color rojo, se ha hecho una traslación (*transposición*) del tema principal subiendo o bajando un intervalo.

Otra operación muy utilizada por Bach es la simetría: toma las notas del sujeto y les aplica una simetría (en el pentagrama éstas aparecen en una elipse azul):



Muestra del tipo de simetría utilizada por Bach

Por ejemplo, hace una simetría de las notas la primera elipse roja,

$$\text{do}\times\left[1,\ 2^{2/12},\ 2^{4/12},\ 2^{5/12},\ 2^{2/12},\ 2^{4/12},\ 1,\ 2^{7/12}\right]$$

para obtener las notas de la primera elipse azul (la, sol, fa, mi, sol, fa, la sol):

$$\text{la}\times\left[1,\ 2^{-2/12},\ 2^{-4/12},\ 2^{-5/12},\ 2^{-2/12},\ 2^{-4/12},\ 1,\ 2^{-4/12}\right]$$

Salvo la última nota de la secuencia, los exponentes del 2 en ambas series son los mismos pero con el signo contrario.

Pero, sería injusto dar una idea demasiado simplista de una fuga. Además de estas operaciones, que se repiten con el resto de motivos de la composición, no podemos olvidar que el resultado de la obra debe ser armónico y agradable al oído.

Una demostración constructiva: El clave bien temperado

La mayoría de la música que escuchamos actualmente en occidente se basa en doce notas en cada octava: siete de ellas, *do, re, mi fa, sol, la, si*, llamadas naturales, y cinco más *do#, mi^b, fa#, sol#, si^b*, a mitad de camino entre cada dos de las naturales (excepto entre el mi – fa y si – do), llamadas alteradas. Para llegar a este consenso ha habido muchas batallas, pero la guerra la ganó Bach.

En el siglo VI a. C. los pitagóricos establecen un método para obtener las notas basado en el intervalo de quinta. Si al pulsar una cuerda tensa suena una nota, la nota que produce una cuerda que mide dos tercios de la longitud de la primera está una quinta más alta que la primera. Si volvemos a coger dos tercios de la nueva cuerda, tenemos otra nota y así sucesivamente.

Entre dos notas de frecuencias f_1 y f_2, de manera que $f_1 < f_2$, hay un intervalo de quinta si $f_2 = 3/2\ f_1$.

Si tomamos como referencia la nota Fa, el orden en el que aparecen las quintas es

Fa-do-sol-re-la-mi-si.

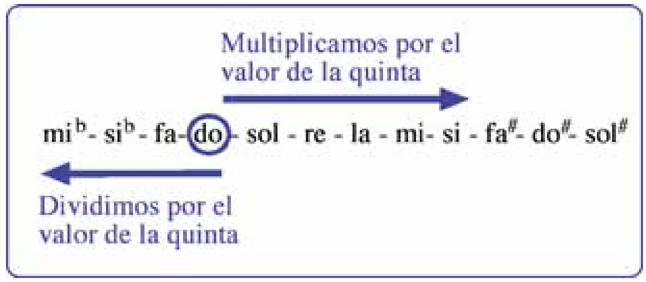
Para obtener más notas podemos subir más quintas, con lo cuál surgen notas alteradas por sostenidos

Fa$^{\#}$-do$^{\#}$-sol$^{\#}$-re$^{\#}$-la$^{\#}$-mi$^{\#}$-si$^{\#}$,

o bajar quintas para obtener los bemoles

Si^b-mi^b-la^b-re^b-sol^b-do^b-fa^b.

Si nos quedamos con 12 notas, el esquema que se obtiene es el siguiente:



Desde cualquier nota, por ejemplo el Do, para ir hacia la derecha se multiplica por el valor de la quinta y para ir hacia la izquierda se divide por este valor, así

$$\text{Sol} = \frac{3}{2}\text{Do}$$

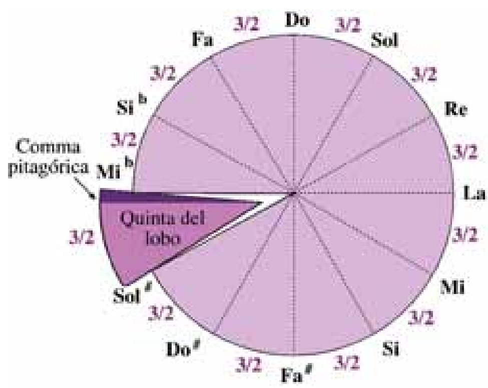
Si el esquema anterior lo planteamos sobre un círculo (círculo de quintas), comprobamos que la duodécima quinta no lo cierra, sino que lo sobrepasa ligeramente, porque con 12 quintas no tenemos 7 octavas exactamente,

$$2^7 = 128 \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129{,}7463$$

La diferencia entre estos dos valores se llama **comma pitagórica**, y se calcula utilizando las reglas para restar intervalos[3]:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \langle\text{-}\rangle\ 2^7 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{,}0136 .$$

Por pequeña que parezca, esta imprecisión ha sido uno de los principales temas de investigación de los musicólogos a lo largo de más de veinte siglos, porque dependiendo de la nota por la que se empiece, el desajuste se produce en una nota u otra.



Al haber una quinta más corta, denominada quinta del lobo, el sonido de ésta era desagradable, y esto hacía que no se pudiese utilizar, lo que imposibilitaba el uso de algunas tonalidades, la transposición o la convivencia de algunos instrumentos dentro de la misma agrupación. Mientras las composiciones se hacían para pocos instrumentos, esta dificultad no resultaba grave, pero en el Barroco, al aumentar el número de voces, el problema se hace insostenible, y más si pensamos en compositores como Bach, para los que las transposiciones eran una herramienta fundamental de su obra, como hemos visto en el apartado anterior.

A pesar de que desde el siglo XV los intérpretes cerraban el círculo "ajustando" (*temperando*) sus instrumentos, lo cierto es que los teóricos no llegan a un acuerdo. Grandes matemáticos, como Leibniz o Euler, propusieron modos diferentes de acabar con el problema. Para Bach, que además de extraordinario intérprete era constructor y reparador de órganos, contar con soluciones teóricas plausibles no era suficiente, necesitaba soluciones que conjugasen teoría y práctica. Por eso se plantea *El clave bien temperado*[4] como el matemático que hace una demostración constructiva. Necesitaba dar una solución práctica que acabase con las dificultades de poder interpretar en todas las tonalidades y a la vez zanjase las discusiones sobre qué temperamentos y sistemas de afinación eran los más adecuados.

Se ha discutido mucho acerca de si la propuesta de Bach era el temperamento igual de doce notas o alguno de los temperamentos que circulaban en Alemania, en especial a alguno de A. Werckmeister (1645 – 1706). En la actualidad, parece probado que Bach no se refería al temperamento igual (véase Di Benedetto, 2000), sino probablemente al temperamento de 1/4 de comma al que luego haremos referencia.

La solución al problema

Está claro que la mejor solución para cerrar el círculo de quintas no era quitar toda la comma de la última quinta, sino que podría distribuirse entre varias de ellas. Si se resta 1/12 de coma pitagórica, a cada quinta, la nueva quinta mide

$$\frac{3}{2}\ \langle - \rangle\ \frac{1}{12}\ \text{de comma} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[12]{\frac{3^{12}}{2^{19}}}} = \frac{3\cdot 2\sqrt[12]{2^7}}{2\cdot 3} = \sqrt[12]{2^7} \approx 1{,}49831$$

y con esto se obtiene el temperamento igual de 12 notas, que es el sistema de afinación que se utiliza normalmente. Este sistema de afinación, que ahora nos parece incuestionable, deforma todas las quintas en la misma cantidad y a muchos músicos del Barroco les parecía inaceptable. De hecho, los principales teóricos de la época de Bach proponen muchas variedades de temperamentos que consistían en reducir parte de la comma sólo en algunas quintas. A continuación mostramos algunos ejemplos:

Quinta	Werckmeister (1645-1706) 1/4 comma	Werckmeister (1645-1706) 1/3 comma	Neidhart (1685-1739) 1/12, 1/6 comma	Lambert (1728-1777) 1/7 comma
Sol#⇒Mi^b	3/2	3/2	3/2–1/12 de comma	3/2
Mib⇒Si^b	3/2	3/2	3/2–1/12 de comma	3/2
Sib⇒Fa	3/2	3/2	3/2	3/2
Fa⇒do	3/2	3/2	3/2	3/2–1/7 de comma
Do⇒sol	3/2–1/4 de comma	3/2–1/3 de comma	3/2–1/6 de comma	3/2–1/7 de comma
Sol⇒re	3/2–1/4 de comma	3/2–1/3 de comma	3/2–1/6 de comma	3/2–1/7 de comma
Re⇒la	3/2–1/4 de comma	3/2	3/2–1/6 de comma	3/2–1/7 de comma
La⇒mi	3/2	3/2	3/2–1/6 de comma	3/2–1/7 de comma
Mi⇒si	3/2	3/2	3/2–1/12 de comma	3/2–1/7 de comma
Si⇒fa#	3/2–1/4 de comma	3/2–1/3 de comma	3/2–1/12 de comma	3/2–1/7 de comma
Fa#⇒do#	3/2	3/2	3/2	3/2

Parece ser que el sistema de afinación al que se refería Bach con *El clave bien temperado* era el de Werckmeister de 1/4 de comma, que cierra el círculo de quintas acortando 1/4 de comma en las quintas siguientes:

Do-Sol, Sol-Re, Re-La, Si-Fa$^{\#}$.

Por lo tanto, el valor de estas quintas sería

$$\frac{3}{2}\ \langle - \rangle\ \frac{1}{4}\ \text{de comma} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[4]{\frac{3^{12}}{2^{19}}}} = \frac{3\cdot 2^4\sqrt[4]{2^3}}{2\cdot 3^3} = \frac{8\sqrt[4]{2^3}}{9} \approx 1{,}49493$$

Como es de suponer, cada uno de los temperamentos que circulaban a principios del siglo XVIII, con sus ventajas e inconvenientes, tenían sus seguidores y esto hacía que la situación fuese realmente complicada. Probablemente si Bach se hubiese dedicado a defender un temperamento, desde un punto de vista teórico, su propuesta no habría sido efectiva, por esto, para zanjar el problema era necesaria la "demostración constructiva": crear el clave bien temperado. Esta obra, que no se imprimió en vida del autor, consta de dos volúmenes con preludios y fugas compuestos en todas las tonalidades mayores y menores de la gama cromática y su principal objetivo era mostrar que su propuesta era viable y sonaba bien.

Esta composición, como gran parte de la obra de Bach, fueron ignoradas por la mayoría de sus contemporáneos, pero la revolución se había iniciado, y el hecho de que por primera vez el *temperamento* se desligase explícitamente de la idea de "truco práctico" de los intérpretes ya no tenía vuelta atrás: el temperamento formaba parte de la esencia misma de la composición.

MUSYMÁTICAS ■

«El que usted quiera editar las obras de Johann Sebastian Bach es algo que regocija mi corazón, que late todo para el arte sublime y grandioso de este verdadero padre de la armonía. Deseo ver pronto esa empresa en plena actividad. En cuanto abra usted mismo la suscripción, espero aportar yo mismo desde aquí»

Carta a F.A. Hofmeister, editor vienés. Ludwig van Beethoven S. XIX

Carátula original de la copia manuscrita del "Clave bien temperado"

NOTAS

1 Por ejemplo, *El arte de la fuga* (1751), una de las obras maestras de la Historia de la Música, se puede ver como una colección de ejemplos brillantes de estas transformaciones.

2 Tan exigente era Bach consigo mismo que quedó defraudado con la fuga hecha sobre el tema del rey, y a las dos semanas le hizo llegar conjunto de piezas basadas en este tema que se conocen como *La ofrenda musical*.

3 Podéis ver la aritmética de intervalos musicales en el cuadernillo del Día Escolar de las Matemáticas 2008, por ejemplo.

4 Creemos interesante aclarar que la expresión "bien temperado" no designa un temperamento concreto. Que el temperamento sea bueno no significa que sea mejor que los otros, hace alusión a que permite cerrar el círculo de quintas y, por tanto, la modulación en todas las tonalidades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GOLDÁRAZ GAÍNZA, J. J. (2004): *Afinación y temperamentos históricos*, Alianza Editorial, Madrid.

LIERN, V. (2009): "Las matemáticas de Johann Sebastian Bach", *El Diario de Bilbao*, 28 de febrero de 2009.

HOFSTADTER, D. R. (1987): *Göedel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle*, Tusquets Editores, Barcelona.

Internet

DI BENEDETTO, A. (2000): Johann Sebastian Bach odiava il temperamento equabile,

http://www.initlabor.net/controeducare/dibenedetto-bach.html#contenuto—

http://descargas.cervantesvirtual.com/servlet/SirveObras/01371852900163850770035/210294_0002.pdf

http://es.wikipedia.org/wiki/Johann_Sebastian_Bach

RUSSOMANNO, S. (2000): Una firma divina,
http://www.abc.es/cultural/dossier/dossier15/fijas/dossier_004.asp