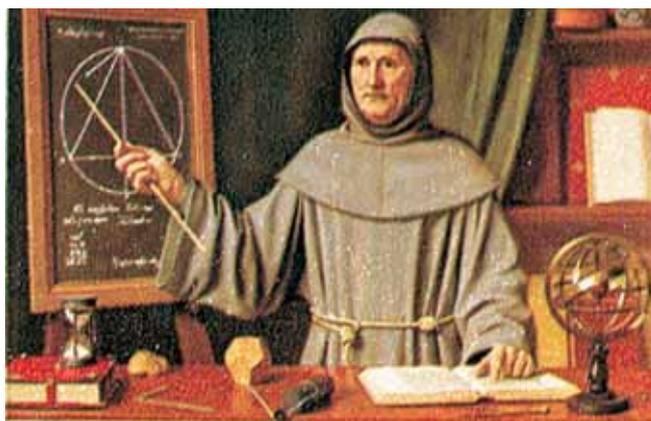


Hace 500 años, el 9 de mayo de 1509, escribía Daniele Gaetani al patricio veneciano Andrea Mocenigo lo siguiente:

Me complace sumamente, oh magnífico Andrea, la suerte que tiene el actual siglo de que se halle recién publicado el libro sobre *La Divina Proporción*, escrito por el maestro Luca Pacioli de Borgo Sansepolcro, esclarecidísimo representante de la orden minoritaria, de quien dudo que podamos en lo sucesivo encontrar algún émulo en materia matemática.

La fama que en los ambientes científicos y artísticos de la Italia renacentista de comienzos del siglo XVI expresa en este texto Andrea Mocenigo, se debía no tanto a sus aportaciones matemáticas originales cuanto a su capacidad para recopilar, difundir y enseñar los diversos contenidos de la materia conocidos en aquella época. Y es que, si hay talentos que destacan por su capacidad creativa, por su originalidad, hay también talentos que sobresalen por su capacidad de recoger y dar unidad a multitud de saberes dispersos de una determinada época. Los primeros contribuyen al avance del conocimiento, mientras que los segundos preparan las condiciones para que otros realicen los avances. Entre estos últimos, se encontraba preponderantemente Luca Pacioli.

Luca Pacioli había nacido en 1445 en el pueblecito de Borgo Sansepolcro, situado en los confines de la Toscana, perteneciente a finales del siglo XV a la república de Florencia. Aquí transcurre su juventud, y el ambiente y la tradición franciscana del pueblo debieron de influir no poco en su decisión posterior de ingresar en la Orden Menor de San Francisco. Sus primeros conocimientos laicos se los debe a la familia Folco



de Belfolci, en cuya casa trabajó como “apprenti”. Por otra parte, tiene ocasión de trabar amistad con Piero Della Francesca, y de asistir a las clases que este impartía, en las frecuentes visitas que realizaba a su pueblo natal de Borgo Sansepolcro. El propio Piero debió de introducirle en la corte de Urbino, cuyo duque poseía una espléndida biblioteca, donde encontró sin duda abundante material de textos antiguos que estimularon su afición por el estudio de las ciencias.

Santiago Gutiérrez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
hace@revistasuma.es

A los veinte años se dirige a Venecia, para trabajar en casa del mercader Antonio Rompiasi, como preceptor de sus hijos Francesco y Paolo. Con este motivo escribe un primer libro de *Álgebra*, que dedica a sus jóvenes alumnos. En Venecia asiste a las lecciones públicas de Doménico Bragadino, mejorando así notablemente su formación matemática. Como quiera que acompaña a Rompiasi en sus frecuentes viajes de negocios, lo aprovecha para aumentar sus conocimientos comerciales.

En 1470, al morir Rompiasi, se traslada a Roma, a casa de Leone Alberti, a la sazón secretario en la cancillería papal. Comienza sus estudios de Teología, y en 1472 ingresa en la Orden de los Franciscanos Menores. Aquí sirve de modelo a Piero Della Francesca para pintar la figura de San Pedro Mártir en el cuadro *Pala di Brera*, pintado entre 1472 y 1474.

En 1475, es nombrado, a propuesta de los estudiantes, lector de Matemáticas en Perugia, y es contratado en 1477, para enseñar Matemáticas, con un sueldo anual de 30 fiorines. En 1480, comienza una serie de viajes por varias universidades, enseñando Matemáticas, y regresa de nuevo a Perugia, en cuya universidad obtiene una cátedra para enseñar el Abaco, de 1486 a 1487. A continuación se toma un tiempo de descanso, dado el agotamiento que le ha producido su intensa actividad docente, y reaparece en 1490 en Nápoles para enseñar Teología y Matemáticas. De 1490 a 1493 se retira a su pueblo natal, donde se dedica a preparar la edición de su obra *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione et Proportionalità*, que se publica en 1494, para lo cual se traslada a Venecia, donde se va a imprimir.

La Summa...

Conviene detenerse un momento en la *Summa de Aritmética, Geometría, Proportioni et Proporcionalità* por la importancia que tuvo en su época. Efectivamente, escrita en lengua vulgar, puede ser considerada como el primer libro de álgebra del Renacimiento, dada la difusión que adquirió entre sus contemporáneos, a pesar de que ya diez años antes se había publicado la obra *Triparty* del francés Chuquet. La difusión llegó a tal extremo que, como señala C. Boyer, los antiguos historiadores del Álgebra pasaban directamente del *Liber abaci* de Fibonacci de 1202 a la *Summa* de 1494. En realidad, para su elaboración, Pacioli se apoyó fundamentalmente en los *Elementos* de Euclides, del que había hecho una traducción al Latin, y en los trabajos de Leonardo de Pisa o Fibonacci, el más grande matemático de la Edad Media.

El libro, en el que recopila todo el saber de su época, se compone de cinco capítulos. El primero de ellos, dedicado extensamente a la Aritmética y al Álgebra, es el más importante de todos. En él trata, por lo que se refiere a la Aritmética, de los

números perfectos e imperfectos, el sistema de numeración decimal, las progresiones aritméticas y geométricas, las fracciones y sus operaciones, y la teoría de las proporciones que sostiene “rige todas las cosas” (en este sentido, señala su importancia en Medicina, Mecánica, Pintura con la mezcla de colores, Arquitectura, y arte militar).

En cuanto al Álgebra, estudia las diferentes operaciones con polinomios y potencias, y resuelve las ecuaciones de grado no superior al cuarto. Además de las letras p y m para representar la suma y la resta, como era costumbre en la época, utiliza los términos: *co* para *cosa* (como llamaban a la incógnita), *ce* para censo (el cuadrado de la cosa), *cece* para la cuarta potencia de la cosa (cuadrado del cuadrado), y *ae*, inicial de *aequalis*, para el signo igual. En cuanto a las ecuaciones, resuelve las de primer y segundo grado, y al llegar a las de tercer grado sostiene que son imposibles de resolver, de modo que su álgebra no suponía ningún tipo de avance sobre la del propio al-Khwarizmi.

la Summa de Aritmética, Geometria, Proportioni et Proporcionalità, suponía la gran ventaja de reunir en un solo libro prácticamente todo el saber de la época

Por cierto, que la lectura de los escritos de Pacioli le supuso a Cardano una pequeña desmoralización al ver que, según decía, no se podía resolver la ecuación de tercer grado. No obstante, Cardano superó fácilmente el contratiempo y continuó trabajando la cuestión.

Los capítulos segundo, tercero y cuarto, los más originales, los dedica Pacioli a las aplicaciones comerciales de la Aritmética, con una detallada exposición de la doble contabilidad. En este sentido, se le considera como el padre de la moderna contabilidad. Hay que tener en cuenta que en aquella época, en Italia, había una gran actividad comercial, de modo que esta actividad demandaba una mayor aplicación de los conocimientos matemáticos.

El quinto capítulo, lo dedica a la Geometría. Trata de los triángulos, los cuadriláteros, el círculo, las áreas de diversos polígonos, y los volúmenes de sólidos. Pero, en esta parte no va más allá de Euclides.

Con todo, la *Summa de Aritmética, Geometría, Proportioni et Proporcionalità*, suponía la gran ventaja de reunir en un solo libro prácticamente todo el saber de la época. Sin él no se hubieran producido los avances que los matemáticos inmediatamente posteriores nos legaron, sobre todo en *Álgebra*, materia que, como se sabe, caracterizó la matemática del Renacimiento. Así lo reconoce Cardano, cuando después de señalar los errores que la *Summa...* contiene, sobre todo en los aspectos teóricos, afirma que si no llega a ser por ella, no habría podido él escribir su *Ars Magna*.

Publicada la *Summa*, Pacioli regresa a Urbino. Allí es acogido por numerosos cortesanos, pues su fama es ya notoria. Y de esta época data la famosa pintura que lo representa explicando uno de los teoremas de Euclides, de pintor desconocido, si bien se han formulado varias hipótesis acerca de la autoría del cuadro, pero ninguna demostrada. El cuadro es históricamente importante, ya que se trata del primer matemático retratado en vida.

En 1496, se traslada a Milán para enseñar Matemáticas, invitado por el duque Ludovico Sforza. Aquí se encuentra con Leonardo da Vinci, que se hallaba entonces al servicio del

duque, para quien realizaba su famosa estatua ecuestre. Pacioli, establece una gran amistad con Leonardo, que cristaliza incluso en una colaboración, de la cual se verán más adelante los brillantes frutos.

Pero, cae el duque en 1499, y ambos personajes se ven obligados a abandonar Milán, asentándose por algún tiempo en Florencia, no sin antes haber visitado algunas otras ciudades. De 1500 a 1505 desempeña varios puestos como docente en centros y universidades de Pisa, Perugia, Bolonia y Florencia. Precisamente, Alberto Durero realizó un viaje a Bolonia, en 1506, seguramente con la esperanza de encontrarse en ella con Pacioli, a quien le unía una gran amistad.

En 1505, se encuentra en Roma, donde permanecerá hasta 1508, año en que su protector, Pietro Soderini le concede el privilegio de la publicación de los *Elementos* de Euclides, por un periodo de 15 años. Con este motivo, realiza un último viaje a Venecia al objeto de preparar su impresión.

Permanece en Venecia hasta 1509 para cuidar de la edición de su otro gran libro, *De Divina Proportione*, que vería la luz ese mismo año.



De Divina Proportione

De todos los escritos de Luca Pacioli, solo dos han sido relevantes, la *Summa de Aritmética, Geometría, Proportioni et Proporcionalità*, y este *De Divina Proportione*, cuya publicación hoy conmemoramos.

El libro, *De Divina Proportione*, como indica su título, se dedica a exponer la teoría de una determinada proporción, la que hoy llamamos sección áurea o, como dirían los clásicos, “división de un segmento en media y extrema razón”. Trata de responder a la preocupación de los pintores del momento, interesados como estaban por sacar conclusiones prácticas de las matemáticas acerca de la teoría de la visión, esto es, la perspectiva. Así lo confirman los tratados y las ideas difundidas por pintores como Leonardo, Alberti, Piero Della Francesca, Bellini, Mantenga, Botticelli, Lippi,...y tantos otros ilustres renacentistas.

El libro, De Divina Proportione, como indica su título, se dedica a exponer la teoría de una determinada proporción, la que hoy llamamos sección áurea

Igual que ocurrió con la *Summa*, el tratado de la proporción áurea fue comenzado varios años antes, durante la estancia de Pacioli en la corte del duque Ludovico M. Sforza (il Moro), en Milán, fruto tanto de sus conversaciones de entonces con Leonardo da Vinci, como del ambiente que en los años finales del Quattrocento rodeó la corte del duque.

Para su elaboración, se sirve Pacioli de fuentes tan importantes como el *Timeo* de Platón, donde se habla del origen de la ciencia matemática, los *Elementos* de Euclides, los escritos de Vitruvio, y otras muchas obras procedentes tanto del mundo clásico como de la Edad Media y de la corriente humanista de su época.

Pacioli tiene en cuenta un principio fundamental, y es el de la primacía de las Matemáticas sobre cualquier otra disciplina. Para él, las Matemáticas están unidas a la observación, de modo que el acto de ver es el elemento básico que hace posible el conocimiento. Puede apreciarse aquí hasta qué punto llega en Pacioli la influencia de Platón. Efectivamente, según leemos en el *Timeo*, dice Platón:

Lo que ahora hemos de tratar es la utilidad esencial de los ojos, en orden a la cual nos lo ha dado el dios. De hecho, la vista según yo lo razono, ha sido creada para ser, en beneficio nuestro, el principio de la mayor utilidad. En efecto, de todas las disertaciones que actualmente cabe hacer acerca del Mundo, ninguna podría haberse hecho nunca, si los hombres jamás hubieran visto ni los astros, ni el sol, ni el cielo. En cambio, en la situación actual, existen el día y la noche, los meses, los periodos regulares de las estaciones, los equinoccios, los solsticios, todas las cosas que vemos, que nos han procurado el conocimiento del número, que nos han dado el conocimiento del tiempo y nos han permitido especular sobre la naturaleza del universo. Gracias a ello nos ha sido dada esta especie de ciencia, de tal calidad que ningún bien mayor fue dado ni será dado a los mortales por los dioses. Este es, digo, el beneficio más considerable que nos dan los ojos.

La importancia de la visión se halla tan extendida en esta época que no es de extrañar que haya sido precisamente entonces cuando se ha inventado la Perspectiva, materia que considera Pacioli como formando parte de las disciplinas matemáticas. Y siendo como era la perspectiva una preocupación de los pintores, no es de extrañar así mismo la relación y hasta la colaboración entre matemáticos y pintores de la época.

Pues bien, nos encontramos con que el sustrato matemático de la perspectiva es la teoría de las proporciones. Y es una de esas proporciones lo que estudia Pacioli en la primera parte de su libro. En total, son 71 los capítulos de que consta, redactados a modo de cartas dirigidas al duque de Milán, Ludovico M. Sforza. Comienza, por definir los vocablos *matemático* y *disciplinas matemáticas*. Como buen renacentista, profesa un concepto muy amplio de la palabra *matemáticas*. Así nos dice, en el capítulo III:

... y, para nuestro propósito, por ciencias y disciplinas matemáticas se entienden la aritmética, la geometría, la astronomía, la música, la perspectiva, la arquitectura y la cosmografía, así como cualquier otra dependiente de estas.

En el capítulo V, trata de la *sección áurea*, que Pacioli llama *divina proporción*, y que da lugar al título de la obra. La justificación de tal nombre hay que buscarla en el doble razonamiento que solía hacer nuestro fraile, místico y científico. De las cinco razones que aporta para conceder el apelativo de *divina* a esta proporción, veamos, a modo de ejemplo, la tercera:

... así como Dios no se puede propiamente definir ni puede darse a entender a otros mediante palabras, nuestra proporción no puede nunca determinarse con un número inteligible ni expresarse mediante cantidad racional alguna, sino que es oculta y secreta y es llamada irracional por los matemáticos.

Aplica la divina proporción a la división de un segmento en dos partes tales que el todo sea a la mayor como la mayor es a la menor. En nuestro lenguaje simbólico, si tomamos como

unidad la longitud de un segmento, y este lo dividimos en dos partes, a y $1 - a$, podemos expresar la divina proporción así:

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a}$$

La razón $1/a$ es la razón áurea o, como la designó Leonardo da Vinci, el Número de Oro. De la ecuación se obtiene:

$$\frac{1}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618034\dots$$

El número de oro es pues irracional y suele simbolizarse por la letra griega ϕ . Está considerado como el canon de la belleza. Se halla presente en la arquitectura, desde la antigua Grecia, en el Partenón, por ejemplo, hasta el diseño de documentos actuales, como el DNI, las hojas de papel DIN, ..., incluso se encuentra ampliamente difundido en la naturaleza.

Asombró tanto a los matemáticos que hizo decir a Kepler:

La geometría tiene dos grandes tesoros: uno de ellos es el Teorema de Pitágoras; el otro, la división de un segmento en media y extrema razón. El primero lo podemos comparar a una medida de oro, el segundo lo podríamos considerar como una preciosa joya.

Pacioli tiene en cuenta un principio fundamental, y es el de la primacía de las Matemáticas sobre cualquier otra disciplina

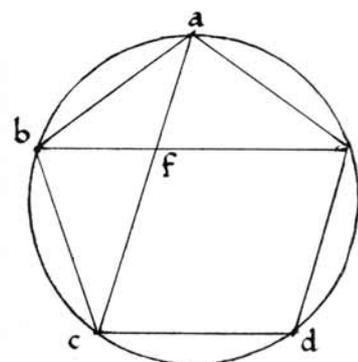
En los siguientes capítulos, estudia Pacioli las 13 propiedades y consecuencias más importantes de la divina proporción. En el capítulo XII, por ejemplo:

Si una cantidad se divide según nuestra proporción y a su parte menor se le añade la mitad de la mayor, el cuadrado de la suma será siempre el quintuplo del cuadrado de la mitad de dicha parte mayor.

Da ejemplos numéricos de las propiedades y remite, en cuanto a las demostraciones a las correspondientes de los *Elementos* de Euclides.

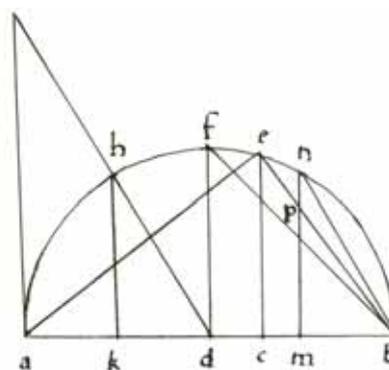
En el capítulo XVIII, estudia la que considera como más “excel-sa” de las propiedades, y que va a servir para enlazar con las otras partes del libro, que se refieren a los poliedros, a saber:

Si en el círculo se forma el pentágono equilátero y en sus dos ángulos más próximos se trazan dos líneas rectas desde los extremos de sus lados, estas, necesariamente, se dividirán entre sí según nuestra proporción, y cada una de sus partes mayores será siempre el lado de dicho pentágono.



La segunda parte del libro estudia los poliedros regulares y otros dependientes de ellos, cómo se forman y qué relación existe entre sus lados y el diámetro de la esfera circunscrita a ellos. De este modo, en los capítulos XXIV a XXX, demuestra por qué hay solo cinco poliedros regulares, e indica cómo se construyen los cinco poliedros regulares inscritos en una esfera.

En el capítulo XXXI, describe cómo se pueden encontrar los lados de los cinco poliedros regulares a partir del diámetro de una misma esfera, en la cual quedan inscritos.



En los capítulos siguientes, estudia la proporción de todos los poliedros regulares entre sí en cuanto a capacidad y superficie se refiere; las posibles inclusiones de unos en otros, deduciendo que son doce y no veinte, dado que no todos admiten ser incluidos en los demás; trata asimismo de los poliedros dependientes de los regulares, obtenidos a partir de ellos, por adición de otros cuerpos, produciendo los poliedros estrellados, o por truncamiento, produciendo los que denomina poliedros *abscisus*, (abscisión, en castellano: separación de una parte de un cuerpo con un instrumento cortante); estudia

los cuerpos oblongos, cilindros, prismas, conos, pirámides y figuras truncadas; finaliza con la definición de varios términos matemáticos (centro, diámetro, diagonal, cateto, perpendicular, hipótesis, etc.).

El libro, además, ofrece unas maravillosas ilustraciones de los distintos cuerpos geométricos estudiados, realizadas nada menos que por Leonardo da Vinci, con quien, según se ha dicho, había trabado Pacioli una especial amistad.

Acabada la edición de su *Divina Proporción*, se traslada a la universidad de Perugia, donde ejerce de nuevo la docencia, cosa que realiza no sin dificultades, dado lo avanzado de su edad y lo mermado de su salud. En 1510, le nombran comisario del monasterio de Borgo Sansepolcro. A instancias del papa León X, en 1514, se traslada a Roma para hacerse cargo de la cátedra de Matemáticas en la Sapiencia. Parece ser que su muerte se produjo en su pueblo de Borgo el año 1517.

HACE ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

PACIOLI, L. (1991): *La Divina proporción*, Ediciones Akal, Madrid.

