

Piero di Benedetto d'Franceschi (1416ca -1492), conocido como Piero della Francesca, era natural de Borgo Sansepolcro, un pueblo pequeño en el alto Tíber.

Además de pintor fue matemático y realmente combinó ambas profesiones, ilustrando con dibujos sus libros de matemáticas y valiéndose de las matemáticas en su trabajo de pintor.

En este cuadro esa simbiosis es patente, aunque, al mirarlo con ojos matemáticos nos llevaremos más de una sorpresa.

En la Pala di Brera nada carece de intención; está llena de engaños visuales y de guiños matemáticos.

Trataremos de desvelar al lector algunos de ellos, referentes al espacio, en esta entrega de Arte con ojos matemáticos, dejando para la siguiente los relativos a la luz .



Pala di Brera o Sacra Conversazione, Piero della Francesca, ca. 1472, Pinacoteca di Brera, Milán

Francisco Martín Caslderrey

IES Juan de la Cierva (Madrid)

fmc@revistasuma.es

Piero matemático

De la vida de Piero se sabe poco. Vasari en *Le vite* dice de él:

Piero estudió matemáticas en su juventud; y, aunque desde los quince años se había encaminado a la pintura, nunca abandonó el estudio de esta ciencia. [...] Fue Piero un grandísimo estudioso del Arte, se ejercitó mucho en la perspectiva, y alcanzó un altísimo conocimiento de Euclides. Comprendió mejor que todos los demás géometras el trazado de los giros de los cuerpos regulares, y las mejores explicaciones que sobre estos asuntos que existen, provienen de su pluma.

Nació en el Borgo Sansepolcro (Toscana) en la segunda década del Quattrocento. En una familia relativamente acomodada dedicada al comercio. Su padre fue por dos veces concejal de Sansepolcro. Debió, por tanto, Piero, como era habitual entre los hijos de los comerciantes, acudir a una *scuola d'abaco*, donde aprendería rudimentos de aritmética, geometría y un poco de álgebra y contabilidad.

Sus estudios como pintor, parece que empezaron como aprendiz en algún taller en su pueblo natal, hasta que sus capacidades personales superaron el estrecho marco geográfico de su entorno y tuvo que viajar a Florencia y a otras cortes italianas renacentistas. Viajó también a Roma, donde trabajó al servicio del Papa Pío II, pero sus frescos en las estancias vaticanas, fueron destruidos poco tiempo más tarde, durante el pontificado de Julio II, para ser sustituidos por los de Rafael.

Su obra artística fue poco conocida y estudiada hasta prácticamente el siglo XX. En los noventa se restauraron sus frescos del *Ciclo de la Vera Cruz* de la Basílica de San Francisco en Arezzo, que son una auténtica maravilla.

Fue maestro y amigo de Luca Pacioli, el autor de la *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità* (1494) y *De Divina Proportione* (1497) natural también de Sansepolcro, al que, como veremos retrató en la *Pala Montefeltro*, en el papel de San Pedro Mártir de Verona.

En sus últimos años, con la vista ya muy escasa, redactó los tres libros matemáticos que han llegado hasta nuestros días: *De prospectiva pingendi*, *Trattato d'abaco* y *De quinque corporibus regularibus*; aunque Vasari afirma que escribió muchos otros que no nos han llegado.

De prospectiva pingendi, es un expéndido tratado de cómo dibujar en perspectiva, no sólo un paisaje o un interior arquitectónico, sino incluso la figura humana.

El *Trattato d'abaco*, según confiesa el autor en la introducción, no fue escrito para su uso en una escuela de ábaco, sino

a petición de sus amigos, probablemente, artesanos como él de la pintura. Por lo demás su estructura es similar a la de otros tratados de ábaco, con una única novedad muy significativa: el peso de la geometría es mucho mayor de lo habitual. De hecho, 48 de las 127 páginas están dedicadas a ella.

En el ámbito meramente aritmético el *Trattato d'abaco* puede servir de muestra de otros tratados de la época. Veamos como ejemplo cómo introduce la regla de tres:

Siete varas de tela cuestan nueve libras, ¿cuánto costarán cinco varas?

La libra era una moneda de la época, cuyo nombre derivaba del antiguo valor de una libra (de peso) de plata. Cada libra florentina estaba dividida en 20 sueldos, y estos en 12 dineros, exactamente como las libras esterlinas, divididas en 20 chelines y estos en 12 peniques, hasta la reforma decimal de 1971. La respuesta al problema es la siguiente:

Deberás hacer esto: multiplica la cantidad que desees saber por lo que cuestan las siete varas de tela, que eran 9 libras, esto es 5 por 9, que hacen 45; divide después el resultado por 7, obtendrás 6 libras y te restarán 3 libras; conviértelas en sueldos y obtendrás 60, divídelos por 7, te dará como resultado 8 sueldos y te restarán otros 4; trasfórmalos en dineros, eso hace 48; divide otra vez entre 7, el resultado es 6 dineros y 6/7. Por tanto tendrás que 5 varas de tela a ese precio costarán 6 libras 8 sueldos 6 dineros y 6/7.

En el *Libelus de quinque corporibus regularibus* retoma muchos de los problemas geométricos del tratado de ábaco, pero, en algunos casos, de manera más desarrollada y completa. El objetivo central de este libro es el estudio de los cinco sólidos platónicos: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro.

Los problemas presentados en este tratado son del tipo:

Tomemos un cuerpo esférico cuyo diámetro mida 7. Quiero poner en él una figura con cuatro caras triangulares equiláteras, de manera que cada vértice toque la circunferencia [sic]. ¿Cuánto medirán las aristas?

Como aproximación de π usa 22/7. Estudia también en el *Libelus* seis de los trece poliedros arquimedianos.

Como vemos, Piero, además de un pintor excelente, fue un matemático de cierta altura en el contexto de su época, y aunque esta faceta de su vida sea mucho menos conocida para el gran público, era obligado hacer referencia a ella en esta sección por ser SUMA una revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Además, como veremos, sin esta consideración no se podría entender la obra artística de Piero della Francesca en su conjunto, ni de la *Pala di Brera*, objeto central de este artículo, en particular.

La Pala di Brera

El cuadro de Piero titulado *Sacra conversazione* o *Pala Montefeltro*, viene denominándose unánimemente desde el ochocientos *Pala di Brera*, por encontrarse en la actualidad, y desde las requisiciones napoleónicas, en la Pinacoteca de Brera, en Milán.

Observándolo, vemos un espacio arquitectónico de estilo clásico representado en perspectiva cónica central, casi absolutamente simétrico, en su disposición. Destaca lo que parece ser el ábside de una iglesia que en una primera impresión parece de planta semicircular. Los arcos de los lados, nos hacen pensar en una planta de dos naves perpendiculares. El ábside se cubre con una bóveda de cañón cubierta de casetones. La bóveda termina en un cascarón a cuarto de esfera, cubierto interiormente por una concha de vieira gigante, desde la que pende sostenido por una cadena dorada un huevo.

También aparentemente en semicírculo, se disponen nueve personajes agrupados que rodean a la Virgen, que sentada en un trono, con las manos juntas, sostiene sobre el regazo al Niño, que relajadamente distendido parece que duerme.

La composición de los personajes resalta la simetría de la arquitectura y la rubraya; la Virgen junta las manos y nos mira frontalmente resaltando el eje vertical. Los restantes personajes se reagrupan en dos tríos de santos y otras dos parejas de ángeles, dispuestos también de manera simétrica con respecto al eje central. La simetría sólo se rompe, de una manera muy marcada, en la disposición del donante, arrodillado a la derecha en el primer plano. Se trata de Federico de Montefeltro, Duque de uranio, personaje controvertido, apasionado y apasionante de la Italia del *Quattrocento*, vestido con una armadura de gala y como en todos sus retratos, de perfil, ya que había perdido el ojo derecho y parte del entrecejo en un torneo. La asimetría en la disposición de Federico resalta por ausencia la reciente muerte de su mujer Battista Sforza, pocos meses después del nacimiento muy esperado de su primer hijo varón, Guidobaldo. La crítica no se pone de acuerdo en la datación del cuadro, aunque la mayoría de los autores lo sitúan entre 1472, año del nacimiento de Guidobaldo y 1474.

La palabra *pala* en italiano, hace referencia a un cuadro de altar, y la de Brera parece ser que estaba destinada en un primer momento a la iglesia de San Donato degli Osservanti, donde fue enterrado Federico, para trasladarse a la iglesia de San Bernardino, concebida como mausoleo para los Montefeltro, una vez que ésta fue acabada. El traslado a Milán, sede actual, se realizó en 1811, en las requisiciones hechas por Napoleón, en las que participó el matemático Gaspar Monge.

Los santos son, de izquierda a derecha, San Juan Bautista, patrono de Battista Sforza, San Jerónimo y San Bernardino de Siena, de la orden franciscana, canonizado en 1450; en la dere-



Pala di Brera, Piero della Francesca, Pinacoteca de Brera Milán (detalle). De izquierda a derecha, San Francisco, San Pedro Mártir (retrato de Luca Pacioli) y San Juan Evangelista

cha están San Francisco, mostrando sus estigmas, San Pedro Mártir de la orden dominicana, con la herida en el cráneo que le causó su asesino, y San Juan, con su evangelio en la mano.

Sabemos que el rostro de uno de los santos retrata a un amigo de Piero. Se trata de fra Luca Pacioli, otro importante matemático renacentista. Los rostros de los ángeles, al contrario que los de los santos, resultan mucho menos realistas, probablemente era más difícil encontrar caras de amigos a los que retratar como ángeles y Piero los crea de su propia imaginación, vistiéndolos con telas lujosas, decoradas con joyas variadas.

Simbólicamente el cuadro establece un paralelismo entre la arquitectura representada y los personajes. Así la Virgen, en el centro, se identifica con el edificio que simbólicamente representa la Iglesia, como comunión de los fieles. Además, las cabezas de los santos están dispuestas en correspondencia con los pilares corintios acanalados del edificio y los ángeles con los paneles de mármol que decoran el ábside, de los cuales, el central, de pórvido, es el único que vemos de frente y se sitúa exactamente detrás de la Virgen.

Por último está la concha y sobre todo el huevo que, en el plano de la imagen, pende sobre la cabeza de la Virgen. Parece ser que no era extraño en las iglesias colgar huevos de avestruz, objeto extraño que podía atraer la atención de los visitantes, símbolo según algunos de la virginidad y según otros de la Iglesia.

Con ojos matemáticos

Empecemos a mirar con ojos matemáticos y comencemos analizando el espacio delimitado por la arquitectura que vemos en el cuadro. Aprovechándonos de la simetría haremos el trazado de la mitad izquierda, para luego duplicarlo de forma especular sobre la derecha. El resultado aproximado es el siguiente (ver figuras 1 y 2).



Figura 1. Trazado de la arquitectura de la Pala di Brera, con el punto de fuga

Observando el proceso vemos que la simetría del edificio representado es total, con excepción hecha de una estrecha franja en el lado derecho, que en la figura 2 viene marcada por las líneas arquitectónicas que sobresalen del contorno del cuadro. Se sabe, a raíz de la restauración llevada a acabo en 1982, que las dimensiones del cuadro original fueron recortadas en todos sus lados, pero fundamentalmente en la parte inferior.

El soporte está formado en la actualidad por ocho tablas de madera dispuestas horizontalmente, pero parece demostrado que originariamente el número de tablas era nueve. Podemos suponer, sin por ello dar mucho margen al error, que el cuadro era, por tanto, de una altura aproximada de 9/8 de la actual.



Figura 2. Compleción por simetría del trazado de la arquitectura de la Pala di Brera

Si observamos en detalle los arranques de los arcos que se ven sobre las molduras en los dos laterales, veremos que no pueden corresponder a la parte final de los que vemos en escorzo a ambos lados, sino que son los extremos de un nuevo arco, paralelo a los del ábside y al plano de la imagen, que hemos completado en las figuras 1 y 2. El recorte en los laterales y en la parte superior, serían, en nuestra opinión mucho menores

y probablemente ocasionados sólo por el normal deterioro de los cantos sufrido en los traslados. El inferior, sin embargo, correspondería a una tabla entera.

La reconstrucción de las medidas originales. Una hipótesis

Las medidas actuales de la tabla son 170 cm × 250 cm. Si añadimos en vertical 1/8 del total obtendríamos unas medidas de 170 cm × 281 cm, faltando por considerar los recortes laterales y superiores. Es razonable pensar, al menos, en el terreno de la hipótesis, que al encargar la tabla al carpintero se le dieran unas medidas determinadas, y que probablemente una de las dos se expresase en un número entero de unidades de medida. Pues bien, la unidad de medida de longitud usada en esa época era el *braccio fiorentino*, que equivale a 58,36 cm.

Expresadas las medidas en brazos florentinos vemos que la anchura corresponde prácticamente a tres brazos florentinos (175,08 cm) y, multiplicando esta altura por el número áureo, Φ , obtendríamos 283,29 cm. La coincidencia numérica hace bastante plausible la hipótesis. En ese caso, el cuadro original sería un rectángulo áureo de tres brazos florentinos de ancho, que habría sufrido un recorte de aproximadamente un octavo de su altura total en el lado inferior, un par de centímetros en el borde superior y otros recortes similares a ambos lados, algo mayor el de la derecha (figura 3).

El espacio en la *pala* de Piero della Francesca

La perspectiva matemática, inventada poco tiempo antes por Brunelleschi y descrita por primera vez por Leon Battista Alberti en *De pictura* y años después por el mismo Piero della Francesca en su *De prospectiva pingendi*, alcanza un grado altísimo de perfección en la concepción del espacio en el que se desarrolla la escena de la *Pala Montefeltro*. Intentaremos deshacer el proceso de seguido por Piero, para, de esta manera recomponer el espacio que vemos representado en el cuadro.

El proceso de representación en perspectiva no es siempre inversible; es necesario para poder deshacerlo valerse de unos ciertos recursos y poder tener algún dato sobre lo representado. Necesitamos en primer lugar encontrar en la imagen un cuadrado que se sitúe en un plano perpendicular al plano de la imagen es decir paralelo al suelo en un plano horizontal. Usándolo podremos tomar medidas en los planos en profundidad, paralelos al del cuadro, determinar el punto de vista, es decir, la distancia a la que se debe situar el espectador para poder ver el cuadro de manera que la perspectiva resulte realista. Podremos también determinar la planta de la iglesia que vemos y la situación relativa a ella de los personajes representados.

1. La peana sobre la que está el sitial de la Virgen es un cuadrado. Observemos la plataforma en la que se encuentra el sitial de la Virgen. Esta cubierta por una alfombra que hemos reproducido en la figura 4. La alfombra, orlada por una cenefa estrellada, tiene dibujada una estrella de ocho puntas formada por dos cuadrados entrelazados que entre sí forman un ángulo de 45°. Si observamos la distancia de los vértices visibles de esa estrella en el lado izquierdo de la imagen y en el frontal, veremos que la separación de la cenefa es aparentemente la misma. Por simetría, hemos de suponer que la alfombra es cuadrada. Pero si nos fijamos, la cenefa cuelga por delante en su totalidad, mientras que a los lados, casi media cenefa se encuentra sobre la peana de la virgen. Podría esto hacernos pensar que la plataforma

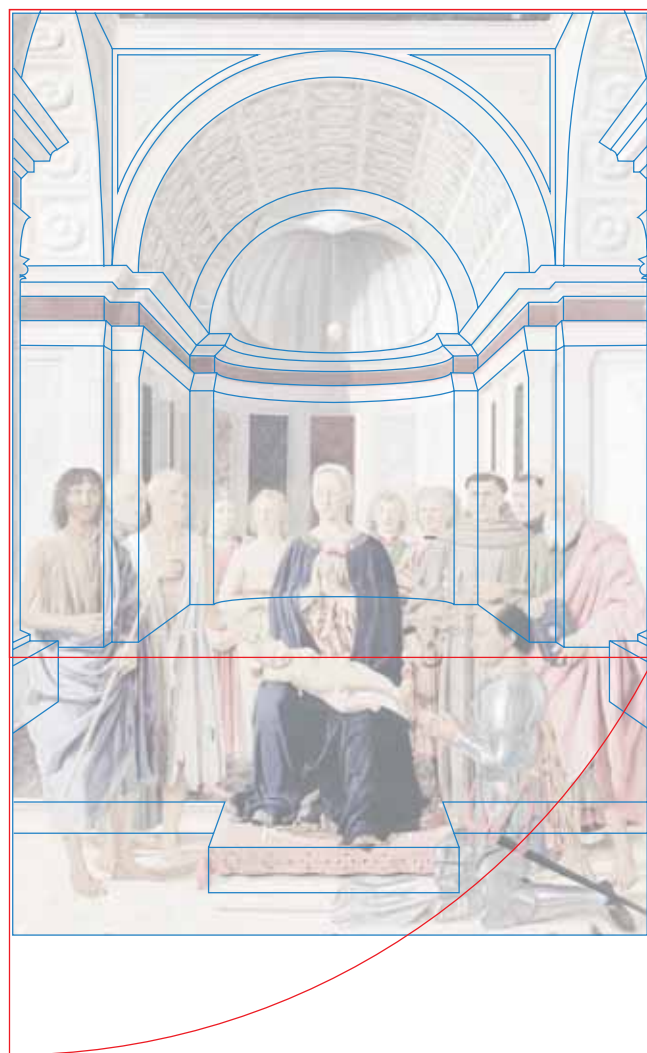


Figura 3. Medidas originales probables de la *Pala di Brera*, formando un rectángulo áureo de tres brazos florentinos de anchura, es decir unos 175 cm × 283 cm, eso significaría que ha sido recortada en unos 33 cm en altura y unos 5 en anchura

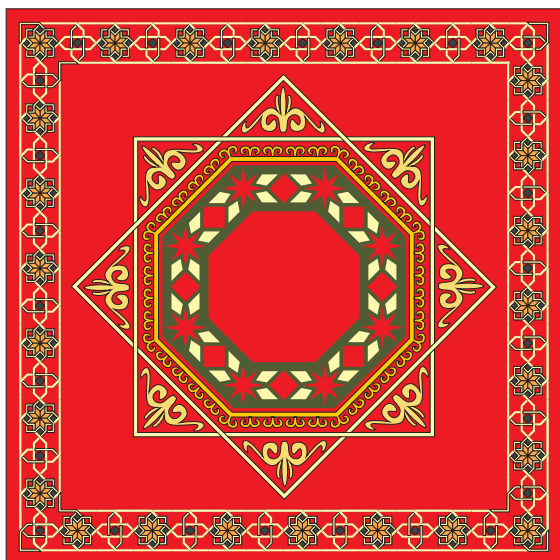


Figura 4. Reproducción de la alfombra bajo el sitial de la Virgen en la Pala di Brera

sea rectangular, pero, si analizamos que al estar ésta unida al suelo del presbiterio, la alfombra no puede colgar por detrás, necesariamente y aun siendo ambas, peana y alfombra cuadradas, el trozo que cuelga por delante ha de ser más que el que cuelga a cada lado. Por tanto, podemos afirmar que la Virgen se encuentra sobre una peana cuadrada.

II. El punto de fuga está sobre el rostro de la Virgen. Esto es fácilmente observable prolongando líneas perpendiculares al plano del dibujo y observando dónde se cortan. En la figura 1 hemos usado la de la arista de la cornisa que bordea el ábside y reaparece en el lado izquierdo de la imagen, y una de los lados de la peana sobre la que está sentada la Virgen. En la figura 5 lo hemos señalado con la letra O.

III. El eje de simetría del cuadro, divide la peana de la Virgen en dos partes iguales. Esto es obvio, ya que la arista frontal de la peana, es paralela al plano del dibujo, y la línea que pase por su punto medio y por el punto de fuga, es decir el eje de simetría del cuadro, es la mediatriz de dicha arista.

IV. Dividimos la peana en cuatro. Para ello, trazamos la diagonal, figura 5, y una paralela a la arista frontal por el punto de intersección de la diagonal y el eje de simetría. Es decir, sabiendo que ABCD es un cuadrado, trazamos la diagonal AC, que corta al eje central en P y trazando una paralela a AB por P obtenemos MN. Los cuadriláteros ASPM, BNPS, CQPN y DMPQ son todos cuadrados e iguales.

V. Ajedrezado del suelo. Usando ahora uno de estos cuadrados, por ejemplo CQPN, y trazando una diagonal, podemos formar una retícula de cuadrados sobre el suelo. El resultado del proceso lo podemos ver en la figura 6, en la

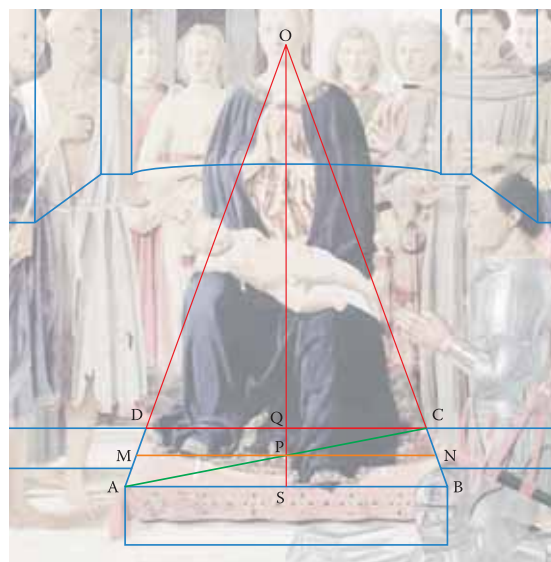


Figura 5. Partición en cuatro cuadrados de la peana de la Virgen

que hemos cuadrículado el plano en el que se encuentra el presbiterio usando como tesela el cuadrado de la peana de la Virgen.

VI. Medición del Espacio. El proceso anterior nos permite medir distancias en el espacio. Para usar como medida la peana de la Virgen observemos que San Juan Bautista, el primero de los santos por la izquierda mide $3/2$ del lado de dicha peana. Si atribuimos una medida al santo de 175 cm, entonces, el lado de la peana sería de 116,7 cm, que es aproximadamente dos brazos florentinos.

Las medidas totales, expresadas en brazos, serían aproximadamente las siguientes (figura 6): La nave mide de anchura 8 brazos florentinos; la longitud visible la podemos dividir en varios tramos; el más cercano a nosotros mide, desde el borde del cuadro original, hasta la línea que delimita el presbiterio, 6 brazos; el tramo comprendido entre la línea del presbiterio y la más cercana del cruce de la nave y el crucero es un cuadrado de 8 brazos de lado, al igual que el cuadrado delimitado por el cruce de las naves; el espacio situado debajo de la bóveda de casetones mide 10 brazos de longitud por 8 de anchura y el ábside en profundidad mediría algo más de 2 brazos. El espacio total resultaría así mucho más profundo de lo que aparenta y mucho menos monumental por su anchura y su altura.

Las medidas resultan por tanto sorprendentes. Por ejemplo, la anchura de la nave mediría sólo 467 cm, el huevo, estaría a una distancia horizontal de la cabeza de la Virgen de 26 brazos, es decir, unos 15 metros. El diámetro de este último sería de 23 cm, lo que confirmaría que es un huevo de avestruz.

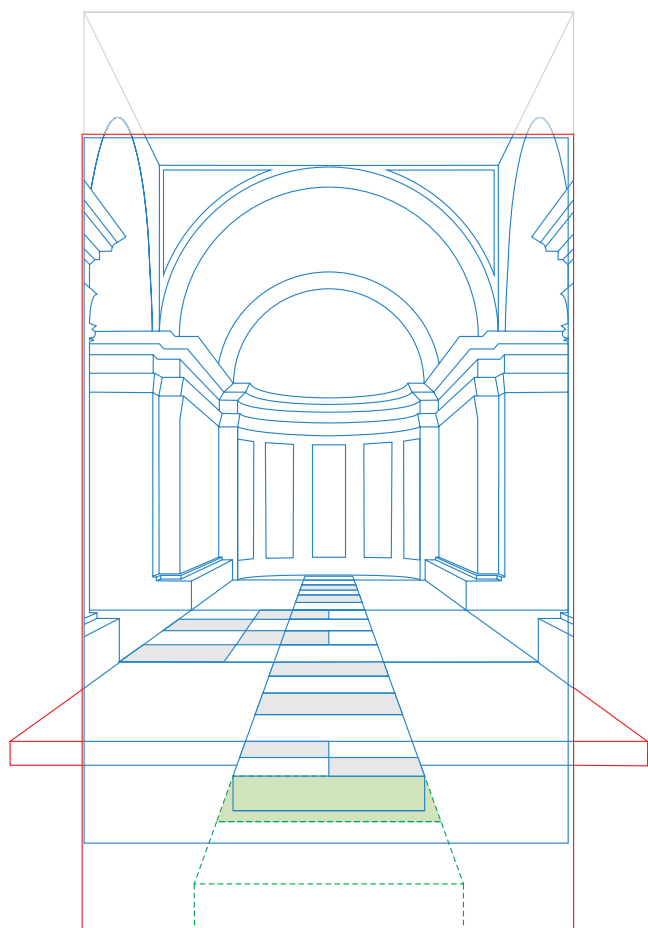


Figura 6. Esquema de la arquitectura representada en la *Pala de Brera*. En trazo azul las líneas en el interior del cuadro, el rectángulo azul delimita las dimensiones actuales, el rectángulo rojo las posibles dimensiones del cuadro originalmente, en gris se ha prologado hacia arriba la arquitectura, por último, las líneas verdes a trazos, prolongan hacia el frente el plano del suelo del presbiterio y la plataforma de la Virgen, hasta el límite de las dimensiones originales

VII El ábside no es semicircular. En efecto, como ya hemos señalado el ábside mide algo menos de 2 brazos de profundidad mientras que de anchura mide 7, ya que el arco que lo define tiene medio brazo de anchura. Resulta así semielíptico, con ejes de 7 y 2,15 brazos. Lo que supone que la elipse sea inscribible en un rectángulo áureo. Figura 7.

VII La Virgen mide más de dos metros de altura. Hemos tomado como medida de San Juan Bautista 1,75 metros. San Juan y la Virgen, se encuentran aproximadamente en el mismo plano, paralelo al del dibujo. Una persona sentada en una silla disminuye su altura en un 20% aproximadamente, variando poco este porcentaje con la altura de la silla y, puesto que la cabeza de la Virgen sobresale sobre la línea de las de los santos, aun considerando que éstos se encuentran en un plano unos 15 cm más bajo que el del

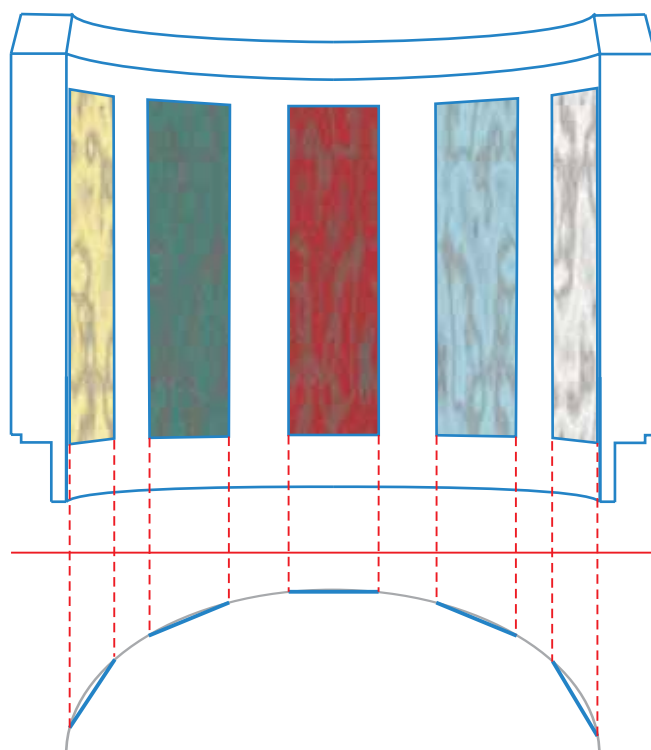


Figura 7. Reconstrucción de la planta del ábside en la *Pala di Brera*

sitial de la Virgen, ésta mediría en proporción 2,08 m de altura. Aunque pase desapercibido a simple vista, la Virgen es desproporcionadamente grande en relación con los santos. Obviamente Piero sigue también en este cuadro la tradición medieval, que establece la jerarquía en la composición en relación con el tamaño con el que los personajes son representados. Los ángeles, por el contrario resultan ser muy bajitos, poco más de 1,50 m.

IX Reconstrucción de la planta. Estamos ya en condiciones de reconstruir la planta del espacio escénico representado en la *Pala Montefeltro*. De acuerdo con los datos anteriores, la planta sería aproximadamente la siguiente, figura 8.

Como ya hemos señalado las dimensiones sorprenden; el espacio, que parecía mucho menos profundo resulta ser enorme, de 20 m; la anchura es de medidas casi domésticas, no alcanzando siquiera los cinco metros.

X Determinación del punto de vista. En su *De prospectiva pingendi*, escrito en la misma época en que pintó la *Pala*, Piero establece las reglas de la perspectiva matemática. En esencia, éstas no difieren de las de Alberti en su *De pictura* (1436), ni de las que definió a principios del *Quattrocento* Brunelleschi.

El proceso propuesto es el siguiente. Queremos representar en el plano del dibujo *ABCD* un cuadrado perpendicular a él

y de las mismas dimensiones, de la manera en la que se vería desde un punto V , situado sobre la perpendicular al plano $ABCD$ por O . Alargamos el plano $ABCD$ hacia uno de sus lados y dibujamos, en la horizontal que pasa por O , un punto V' de manera que OV sea igual a OV' . Trazamos la línea $V'B$ que corta a AD en P ; por P trazamos una horizontal que corta a OA y OB en los puntos A' y B' . El trapecio $ABB'A'$ es la representación buscada del cuadrado.

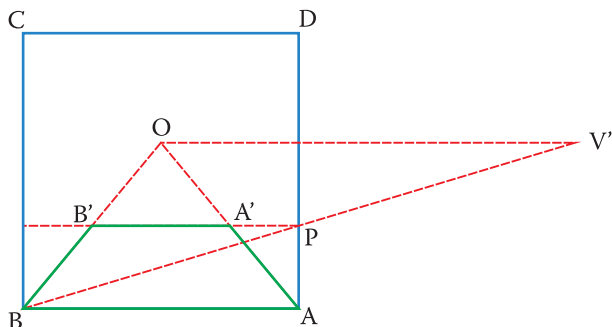


Figura 9. Método de representación en perspectiva propuesto por Piero en *De prospectiva pingendi*

Aplicando este proceso de manera inversa a la *Pala de Brera*, obtenemos la figura 10, que fija el punto de vista a una distancia aproximada de 5,8 m, es decir 10 brazos florentinos.

En la siguiente entrega terminaremos el análisis matemático del cuadro, mirando en él la luz con ojos matemáticos.

ARTE CON OJOS MATEMÁTICOS ■

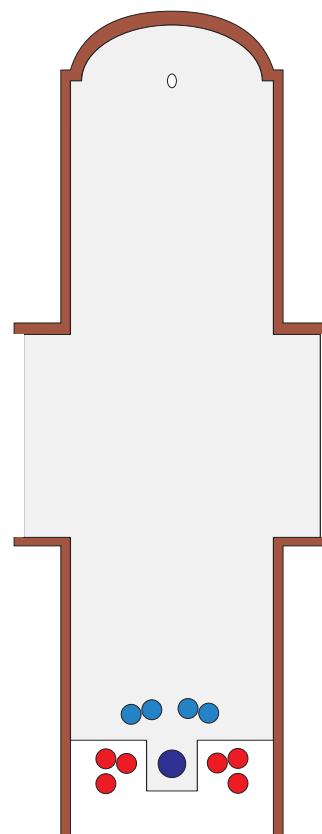


Figura 8. Reconstrucción de la planta en rojos ubicación aproximada de los santos, en azul oscuro la Virgen y en azul claro los ángeles; el hueco de avestruz aparece en blanco

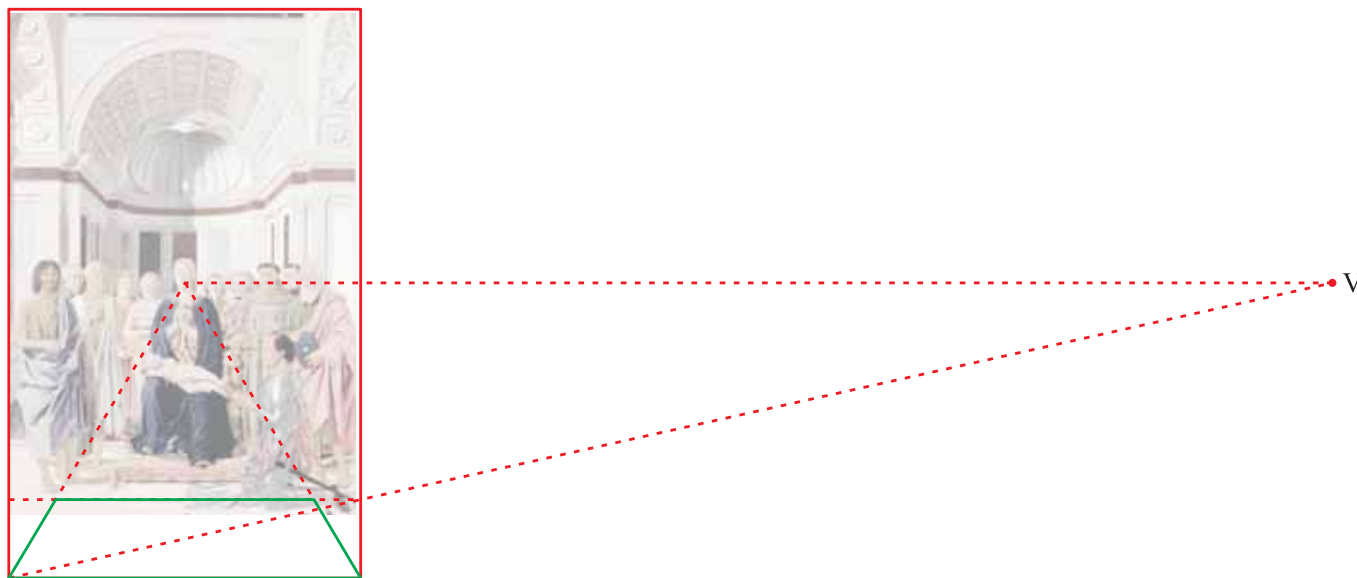


Figura 10. Determinación del punto de vista en la *Pala de Brera*, siguiendo el método de Piero della Francesca