

Identificación de los errores en los contrastes de hipótesis de los alumnos de Bachillerato

En este trabajo se recoge un estudio de los errores que cometen los alumnos de bachillerato al resolver problemas de Contrastes de Hipótesis en los exámenes de la PAU (Prueba de Acceso a la Universidad). A raíz de éstos, se señalan aquellas dificultades y confusiones más frecuentes con las que tropieza el alumno, y se sugieren algunas alternativas para ayudar a superarlas, tratando de contribuir en el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta materia.

In this work we present a study of the mistake that high school students make when solving Contrasts of Hypothesis problems in access to university test (PAU exam). As a result of these, those more frequent difficulties and confusions, where students find a hurdle are pointed out, and some alternatives are suggested to help to overcome them. Thus we try to contribute in the process of teaching-learning of this matter.

Introducción

El reconocimiento de la utilidad de la Estadística en distintas disciplinas científicas, ha llevado a incrementar los contenidos de Inferencia en la enseñanza no universitaria, tal vez sin un estudio didáctico previo de la complejidad de los conceptos implicados. Así, en España, los dos años de bachillerato de la especialidad de Ciencias Sociales, contemplan la asignatura: “Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales” donde figura entre los contenidos de Inferencia Estadística, conceptos como la estimación de la media, la estimación de la proporción, y los contrastes de hipótesis para la media y para la proporción.

Los Contrates de Hipótesis son uno de los procedimientos de Inferencia Estadística, utilizados para valorar la evidencia proporcionada por los datos de una muestra a favor o en contra de una hipótesis sobre la población. Esto conlleva el conocimiento por parte del alumnado, de la lógica global del desarrollo del proceso de decisión, así como la comprensión de una serie de conceptos como son hipótesis nula y alternativa, población y muestra, parámetro y estadístico, nivel de significación, región de aceptación y de rechazo. Algunos de estos conceptos tienen cierta complejidad para los estudiantes de bachillerato, sobre todo aquellos relacionados con el concepto de probabilidad, como es el caso del nivel de significación. Esto unido al hecho de que los alumnos estudian muchas

veces la materia de manera aislada, sin establecer ninguna relación con las aplicaciones originales donde surge el problema, hace más difícil el aprendizaje de los contrastes.

El interés por analizar las concepciones erróneas de los estudiantes sobre los Contrastes de Hipótesis, a nivel universitario, se puede apreciar en trabajos como Batanero (2000); Vallecillos y Batanero (1997); Moreno y Vallecillos (2005). No obstante, el origen de estos errores es anterior a la universidad, surgiendo a nivel de bachillerato. De hecho se ha constatado en trabajos como Ramos y Espinel (2003) y Espinel, Ramos y Ramos (2007), que algunos de los errores cometidos por los alumnos de bachiller no se corrigen y se mantienen a nivel universitario. Así se pueden citar algunos errores detectados frecuentemente, como es confundir el nivel de significación a con el punto crítico z_{α} , o también, confundir el valor

Carmen Elvira Ramos Domínguez

Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación. Universidad de La Laguna

María Candelaria Espinel Febles

Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna

Rosa María Ramos Domínguez

Departamento de Estadística e Investigación Operativa I. Universidad Complutense de Madrid.

que toma el estimador con el valor hipotético del contraste. El estudio de los errores es una línea de trabajo muy eficaz en Didáctica de la Matemática, que está motivada por la inquietud en la forma de enseñanza aprendizaje más adecuada (Socas, 1997).

Las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU) tienen como objetivo valorar la madurez académica, los conocimientos y las competencias adquiridas en el bachillerato. Dicha prueba esta regulada por Real Decreto y se celebra durante 3 días, mañana y tarde, sobre seis materias del segundo curso de bachillerato. La calificación global de la prueba se obtiene mediante la media ponderada de los exámenes de las asignaturas obligatorias (40% de Matemáticas + 40% de Física + 20% de Dibujo). La calificación definitiva para el acceso a la universidad es una media ponderada de la nota media del expediente académico en el bachillerato (60%) y la calificación en la PAU (40%).

Este trabajo se centra en una muestra de exámenes de la PAU del Distrito de Canarias, en la especialidad de Matemáticas de Ciencias Sociales de la convocatoria de Junio de 2007. En base a una revisión de estos exámenes, hemos realizado un estudio sobre las dificultades de concepción e interpretación que tienen los bachilleres con la Inferencia Estadística y en particular con las pruebas de significación. En primer lugar se recoge la estructura de la prueba y las preferencias del alumnado ante los ejercicios planteados. De este análisis y de otros estudios previos (Ramos y Espinel, 2003; Espinel, Ramos y Ramos, 2007) se ha observado que los alumnos optan mayoritariamente por las preguntas de Inferencia Estadística, y más concretamente, por las de Contrastes de Hipótesis. En el siguiente apartado se analizan dos preguntas, referidas a los Contrastes de Hipótesis. En ambos casos se ha llevado a cabo un conteo sistemático de los errores cometidos por los alumnos, y se especifican las estrategias utilizadas por los mismos, que generalmente coinciden con las recogidas en los libros de textos. Finalizamos aportando diversas sugerencias para subsanar las dificultades que, de forma más persistente, presentan los alumnos en los problemas de Contrastes de Hipótesis, y proponiendo algunas alternativas de mejora de su enseñanza - aprendizaje.

Datos generales del estudio

En este apartado se presenta una descripción de las preguntas del examen de la PAU además de los porcentajes de preferencias y superación de las preguntas.

La estructura del examen para la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales se plantea con dos opciones excluyentes: Prueba A y Prueba B.

www.gobiernodecanarias.org/educacion/general/pwv/scripts/materias.asp

En la anterior dirección de Internet se pueden encontrar los enunciados de las preguntas que componen ambas pruebas. Cada una de estas opciones consta de cinco preguntas. El alumno debe elegir una de las pruebas (A ó B) y dentro de ella, sólo debe responder como máximo a cuatro de las cinco preguntas. La prueba A se compone de dos preguntas de Estadística (Contraste e Intervalos, y Tamaño muestral e Intervalos), dos de Análisis (Funciones y Máximos) y una de Ecuaciones. La prueba B tiene tres preguntas de Estadística (Estimación puntual e Intervalos, Tamaño muestral y Probabilidades, y Contrastes), una de Análisis (Funciones) y una de Programación Lineal.

La muestra obtenida para el estudio consta de 399 exámenes (204 de la prueba A y 195 de la B) de la asignatura “Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales” de la convocatoria de Junio de 2007 procedente de alumnos presentados en la Universidad de La Laguna.

Las siguientes Tablas 1 y 2 muestran los resultados obtenidos tanto en lo referente a las preguntas elegidas, como al porcentaje de alumnos con la pregunta aprobada. Entendiendo por aprobada que hayan obtenido una puntuación superior a la mitad (1,25) de la puntuación máxima asignada a cada pregunta (2,5). El porcentaje de Elección de la pregunta se realiza teniendo en cuenta el número de alumnos que han elegido la correspondiente opción. Y el porcentaje de Aprobados de cada pregunta se ha calculado en relación al número de alumnos que han elegido dicha pregunta, no simplemente la prueba, ya que no tienen que contestar todas las preguntas de la prueba elegida.

Preguntas de la prueba A:	Elección	Aprobados (≥1,25)
1.- Contraste de Hipótesis e Intervalo de Confianza	87,19%	67,80%
2.- Intervalos de Confianza y Tamaño muestral	92,61%	84,04%
3.- Funciones	83,74%	27,65%
4.- Máximos y mínimos	13,79%	53,57%
5.- Resolución de Ecuaciones	92,61%	75,00%

Tabla 1: Preferencias y resultados de la prueba A

Preguntas de la prueba B:	Elección	Aprobados ($\geq 1,25$)
1.- Estimación puntual e Intervalo de Confianza	67,35%	32,57%
2.- Tamaño muestral y Probabilidades	96,43%	78,83%
3.- Contrastes de Hipótesis	96,43%	61,90%
4.- Funciones	39,28%	54,54%
5.- Programación Lineal	78,57%	42,21%

Tabla 2: Preferencias y resultados de la prueba B

Como se puede apreciar en las Tablas 1 y 2 se refleja una cierta tendencia por parte del alumnado a elegir las preguntas con contenidos estadísticos. Mientras que las preguntas menos elegidas son las relacionadas con el Análisis Matemático. Señalar también que las preguntas de Estadística son las que más alumnos las superan, a excepción de la pregunta 1 de la opción B, con un 32,57% de aprobados. Esta pregunta presenta tres apartados, dos de estimación puntual, y un tercero de estimación por intervalos. El motivo de que pocos alumnos hayan superado la puntuación de 1,25 en la misma, creemos que se debe, a la dificultad que surge en el razonamiento que debe hacer el alumno, ante la obtención de los datos necesarios para contestar los apartados, a partir del enunciado. De forma general, los alumnos aplican las técnicas aprendidas para resolver los problemas, aunque no las lleguen a entender completamente. Parece que no son capaces de razonar y buscar la forma de conseguir determinados resultados a partir de la información disponible. Posiblemente la enseñanza en bachillerato incide más directamente en la estimación por intervalos, y no hace tanto hincapié en el significado de tal intervalo. De hecho como se observa en la Tabla 1, la pregunta 2 de estimación por intervalos muestra bastante éxito, un 84,04% de aprobados, frente al 32,57% sobre estimación puntual e intervalo de confianza de la pregunta 1 en la Tabla 2.

Asimismo se puede observar que dentro de las preguntas de Estadística, las preguntas relacionadas con Contrastes de Hipótesis, pregunta 1 prueba A y pregunta 3 prueba B, son de las más elegidas por el alumnado, siendo los porcentajes de elección superiores al 85%. Además, el porcentaje de aprobados en estas preguntas es bastante alto, entre el 60% y 70%.

Por otra parte, a pesar de que las preguntas de Inferencia Estadística son de las más elegidas, los alumnos no consiguen completar estas preguntas con éxito. De hecho el porcentaje de alumnos que se quedan por debajo del 1,25 es considerable, siendo en las dos preguntas de contrastes, un 32% y 38%, en las opciones A y B, respectivamente. Además aunque el

porcentaje de aprobados es alto, sin embargo sólo un porcentaje reducido llegan a alcanzar la máxima nota de 2,5, lo que conduce a que las calificaciones en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales sean bajas. Como se refleja en la siguiente Figura 1, las calificaciones medias en los últimos años oscilan entre 4,42 y 5,47, siendo la nota media de éstas 5,03.

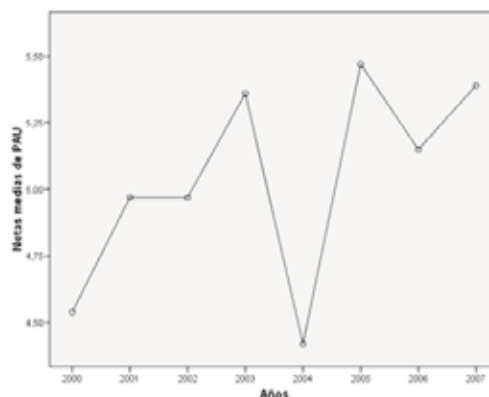


Figura 1: Evolución de las Notas de las Matemáticas Aplicadas a las CC.SS. II en la PAU

Análisis de los problemas de contraste de hipótesis

En este apartado se presentan las dos preguntas sobre contrastes que aparecen en el examen tanto en la prueba A como en la B, con sus respectivas soluciones y un listado de los errores encontrados en la corrección del examen. Para este estudio nos hemos centrado en los exámenes de dos correctores de la prueba, que corresponden a una submuestra de 132 exámenes de la opción A y 97 de la opción B.

Prueba A. Problema 1

Enunciado: En el año 1990 el 25% de los partos fueron de madres de más de 30 años. Este año se ha tomado una muestra de 120 partos de los cuales 34 fueron de madres de más de 30 años.

- Con una significación del 10%, ¿se puede aceptar que la proporción de partos de madres de más de 30 años sigue siendo como mucho del 25%, frente a que ha aumentado?
- Obtener un intervalo de confianza de la proporción de partos de madres de más de 30 años al 90% de confianza.

Solución del problema propuesta por los coordinadores de la prueba:

Apartado a).-

Formulación del contraste:

$$\left. \begin{array}{l} H_0 : p \leq 0,25 \\ H_1 : p > 0,25 \end{array} \right\}$$

Datos recogidos del problema:

$$n = 120; \hat{p} = \frac{34}{120} = 0,283; \alpha = 0,1; z_{0,1} = 1,28$$

Región de rechazo:

$$\left\{ \hat{p} > p_0 + z_{\alpha} \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right\} = \left\{ \hat{p} > 0,25 + 1,28 \sqrt{\frac{0,25 \times 0,75}{120}} \right\} = \left\{ \hat{p} > 0,3 \right\}$$

Como $\hat{p} = 0,283 < 0,3$ se acepta H_0 .

Apartado b).-

Datos:

$$n = 120; \hat{p} = \frac{34}{120} = 0,283; \alpha = 0,1; \frac{\alpha}{2} = 0,05; z_{0,05} = 1,64$$

Intervalo de confianza:

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right] = \left[0,283 - 1,64 \sqrt{\frac{0,283(1-0,283)}{120}}, 0,283 + 1,64 \sqrt{\frac{0,283(1-0,283)}{120}} \right] = [0,283 \pm 0,067] = [0,216, 0,35]$$

A continuación se presenta la Tabla 3 que recoge la distribución del número de alumnos que han elegido la prueba A, según responden o no a la pregunta 1. Hay 26 alumnos que eligiendo la opción A no realizan la pregunta 1, y 106 que si la contestan. De estos últimos, sólo 50 la realizan de forma correcta, el resto, 56, cometen algún tipo de error.

Resultados:	Total
Bien	50
No la eligen	26
Incorrectas	56
Totales	132

Tabla 3: Resultados de la Pregunta 1 de la prueba A

Errores que cometen los alumnos en el apartado a) de la pregunta 1			Total
Formulación Equivocada del Contraste	Colocación errónea del signo igual	9	23
	Permuta de las Hipótesis	8	
	Confusión entre el estimador de p y el valor hipotético p ₀	4	
	Causa indeterminada	2	
No formula el contraste		8	8
Estadístico erróneo		2	2
Confusión entre el α y el punto crítico		2	2
Elección incorrecta del α		4	4
Búsqueda errónea en las tablas		13	13
Región Crítica y de Aceptación mal construidas	Consecuencia del error de formulación	4	34
	Confusión entre el estimador de p y el valor hipotético p ₀	14	
	Región de aceptación construida con un menos	9	
	Error de cálculo	5	
	Consecuencia de un punto crítico erróneo	1	
	Cambio de la región de aceptación por la de rechazo	1	
Errores de números reales		2	2
Total de errores encontrados:			88

Tabla 4: Descriptiva de los errores del apartado a) de la pregunta 1

En la Tabla 4 se muestra una descripción de los errores cometidos en el apartado a) de la pregunta 1, junto al número de alumnos que presentan tal error en su examen. En un total de

56 exámenes se observan 88 errores, ya que un mismo alumno puede presentar varios errores en la pregunta. Como se aprecia en dicha Tabla 4, el error más frecuente (34 veces) está relacionado con la construcción de las regiones crítica y de aceptación, principalmente debido a la confusión entre el estimador \hat{p} y el valor hipotético p_0 . Otro error a destacar en la respuesta de los estudiantes, que repiten con frecuencia (23 veces), es la equivocación en la formulación del contraste, a veces por causa de una confusión de la colocación del signo igual, o por el intercambio de la hipótesis nula y alternativa, o incluso, por confundir el valor que toma el estimador \hat{p} con el valor hipotético p_0 . Este tipo de error es muy importante, porque condiciona los resultados del resto del proceso de decisión. También merece especial atención, por el número de veces que aparece (13 veces), los errores debidos a la búsqueda del punto crítico z_a en las tablas.

El apartado b) de este problema 1, pide construir un intervalo de confianza. Aunque aquí no se muestra una descripción de los errores cometidos por los alumnos, hay que resaltar el error de sustituir \hat{p} (0,283) por el valor hipotético p_0 (0,25) en la desviación típica del estimador. Este tipo de error es en cierta medida justificable, ya que los alumnos, en el apartado a) destinado al contraste de la proporción consideran el estadístico:

$$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

que se distribuye, supuesta cierta la hipótesis nula, como una normal estándar. Dicho estadístico \hat{p} contiene p_0 en la media y en la desviación típica. Sin embargo, en el intervalo de confianza que no se dispone de información, se debe considerar el estimador

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

que usa \hat{p} en la desviación típica del estimador y también se aproxima a la distribución normal estándar.

Prueba B. Problema 3

Enunciado: Dos estudiantes quieren contrastar si el consumo medio en teléfono móvil entre los estudiantes es como máximo de 10 euros frente a si es mayor. El primero, en una muestra de 36 estudiantes, obtuvo una media de 10,4 euros con una desviación típica de 2 euros. El segundo obtuvo, en una muestra de 49 estudiantes, una media de 10,39 con una desviación típica de 2 euros.

- ¿Qué decisión toma el primero con un nivel de significación del 10%?
- ¿Qué decisión toma el segundo con un nivel de significación del 10%?

Solución del problema propuesta por los coordinadores de la prueba:

Apartado a).- Formulación del contraste:

$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu \leq 10 \\ H_1 : \mu > 10 \end{array} \right\}$$

Datos recogidos del problema:

$$n = 36; \quad \bar{x} = 10,4; \quad \sigma = 2; \quad \alpha = 0,1; \quad z_{0,1} = 1,28$$

Región de rechazo:

$$\left\{ \bar{x} > \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = \left\{ \bar{x} > 10 + 1,28 \frac{2}{\sqrt{36}} \right\} = \left\{ \bar{x} > 10,42 \right\}$$

Como $\bar{x} = 10,4 < 10,42$ se acepta H_0 .

Apartado b).- Formulación del contraste:

$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu \leq 10 \\ H_1 : \mu > 10 \end{array} \right\}$$

Datos recogidos del problema:

$$n = 36; \quad \bar{x} = 10,4; \quad \sigma = 2; \quad \alpha = 0,1; \quad z_{0,1} = 1,28$$

Región del rechazo:

$$\left\{ \bar{x} > \mu_0 + z_a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\} = \left\{ \bar{x} > 10 + 1,28 \frac{2}{\sqrt{49}} \right\} = \left\{ \bar{x} > 10,36 \right\}$$

Como $\bar{x} = 10,39 > 10,36$ se rechaza H_0 .

En la Tabla 5 se presenta el total de alumnos de la muestra que eligen la prueba B, 97 alumnos, y su reparto según responden o no a la pregunta considerada. Del total de alumnos, 10 optan por no elegir dicha pregunta mientras que 87 si la contestan. Señalar además, que 42 alumnos contestan correctamente la pregunta 3, y 45 cometen algún tipo de error.

Resultados:	Total
Bien	42
No la eligen	10
Incorrectas	45
Totales	97

Tabla 5: Resultados de la Pregunta 3 de la prueba B

En la Tabla 6 se muestran los errores detectados en esta pregunta 3 y se indica el número de alumnos que presentan tal error. En un total de 45 exámenes se observan 63 errores. Aunque pueda parecer que son menos los errores cometidos, se ha de tener en cuenta que esta opción la eligen menos alumnos.

Errores que cometen los alumnos en la pregunta 3			Total
Formulación equivocada del contraste	Colocación errónea del signo igual	2	13
	Permuta de las hipótesis	8	
	Falta el parámetro en el contraste	3	
Búsqueda errónea en las tablas		20	20
Región crítica y de aceptación mal construidas	Confusión entre el estimador de μ y el valor hipotético μ_0	11	24
	Región de aceptación cambiada de signo	4	
	Error de cálculo	2	
	Región de aceptación incorrecta	1	
	Cambio de la región de aceptación por la de rechazo	6	
Errores de números reales		6	6
Total de errores encontrados:			63

Tabla 6: Descriptiva de los errores de la pregunta 3

En este problema 3, al igual que en el problema de la opción A, el error más frecuente (24 veces) está relacionado con la construcción de las regiones crítica y de aceptación. Y es también motivado por no distinguir el valor que toma el estimador \bar{x} y el valor hipotético μ_0 . El siguiente error por orden de frecuencia (20 veces), es en este caso, la búsqueda incorrecta en las tablas, debido a equivocaciones o a concepciones erróneas de la probabilidad. En cuanto al error sobre el enunciado equivocado de las hipótesis, cometido en 13 ocasiones, hemos de manifestar que en este caso, se debe sobre todo al intercambio de la hipótesis nula por la alternativa. Aunque a nivel teórico los alumnos saben que la hipótesis nula se enuncia con el propósito de ser rechazada, no son consecuentes a la hora de extraer tal hipótesis del enunciado del problema.

Estrategias usadas por el alumnado

Las estrategias metodológicas que siguen los libros de texto para introducir los contrastes de hipótesis se basan en la estrecha relación que hay entre los intervalos de confianza y los contrastes. Esto es, la hipótesis que se contrasta se puede rechazar si el valor muestral del estimador no pertenece al

intervalo de confianza. Al consultar las tres editoriales más utilizadas en los centros de bachillerato de Canarias: Anaya (Colera y otros, 2003), Santillana (Nortes y otros, 2003) y SM (Vizmanos y otros, 2004), se observa que todas sugieren una serie de pasos a seguir. Tanto Anaya como Santillana explican de forma teórica y sobre el contraste bilateral, el cálculo de la región de aceptación de forma similar a la construcción del intervalo, partiendo de la ley de probabilidad del estimador del parámetro. Mientras en los contrastes unilaterales presentan las regiones de aceptación sin un desarrollo previo de las mismas, sino como una deducción del caso bilateral. Si bien, la editorial Santillana para el caso del contraste de la proporción utiliza indistintamente el intervalo de confianza y el estadístico del contraste. Por otro lado, la editorial SM centra su proceso metodológico en el cálculo del estadístico del contraste e indica la distribución que éste sigue cuando la hipótesis nula es cierta. Entonces de forma intuitiva y apoyándose en gráficos muestra al alumno que cuando el valor muestral no está próximo al valor hipotético se rechaza la hipótesis nula. A modo de resumen, el siguiente esquema de la Figura 2 muestra las estrategias de los libros de texto.



Figura 2: Estrategias de los Libros de Texto

En los exámenes de la muestra analizada se observa que los alumnos utilizan sobre todo los intervalos de confianza para construir la región de aceptación. No obstante, algunos alumnos calculan el estadístico del contraste y construyen las regiones de aceptación y rechazo, representándolas mediante un gráfico. Se ha apreciado también que el uso de los gráficos de la distribución del estimador del parámetro, parece facilitar la comprensión de los conceptos usados, y permite al alumno reflexionar de forma natural, lo que le conduce a conclusiones adecuadas del problema.

Reflexiones y alternativas para la mejora del aprendizaje de los contrastes

Como hemos podido observar en los errores mostrados en las Tablas 4 y 6, muchos de los alumnos presentan dificultades de comprensión del proceso de decisión e interpretan de forma incorrecta los resultados. Algunas de las causas de estos errores se deben a dificultades lingüísticas, a la falta de herramientas lógicas, a dificultades de extraer la estructura

del proceso de decisión de las experiencias, y a la dificultad de comprender el concepto de aleatoriedad. A continuación se listan y analizan los distintos errores encontrados en la revisión de los exámenes, y se proponen algunas sugerencias para tratar de subsanarlos y allanar los obstáculos del aprendizaje de esta materia.

Formulación equivocada del contraste

Se observa en los alumnos una dificultad a la hora de elegir las hipótesis adecuadas, a partir del enunciado de los problemas. Así se pueden apuntar principalmente, tres tipos de errores relacionados con el planteamiento del contraste: Colocación errónea del signo igual al plantear el contraste; Permuta de las hipótesis y Confusión entre el estimador y el valor hipotético.

En lo que refiere a la *colocación errónea del signo igual al plantear el contraste*, tanto el hecho de repetirlo en ambas hipótesis, como sólo ponerlo en la hipótesis alternativa, proponemos insistir a los alumnos que el signo igual ha de colocarse siempre en la hipótesis nula, independientemente del contraste unilateral o bilateral que se plantee; ya que en otro caso, no se sabría que distribución sigue el estimador del parámetro cuando la hipótesis nula es cierta.

Otro tipo de fallo muy común en la formulación de los contrastes unilaterales es la *permuta de las hipótesis*. Esto es, los alumnos tienden a confundir los papeles de las hipótesis nula y alternativa, en ocasiones como consecuencia de no prestar mucha atención a la forma en que se presentan las cuestiones. Es conveniente evitar las ambigüedades del enunciado que pueden confundir al alumno. Hay que dejar claro en el enunciado a donde se quiere llegar con la investigación, lo que iría en la hipótesis alternativa. O por el contrario, la afirmación que se “duda” y que se pretende comprobar, que iría en la hipótesis nula. Frases tales como: “existen evidencias estadísticas de que los datos indiquen cierta afirmación” o “de los datos se deduce esta afirmación”, o bien “se puede concluir de estos datos la afirmación” pueden ayudar a enseñar al alumno que dicha afirmación es lo que va en la hipótesis alternativa. Mientras que expresiones como “comprobar o contrastar tal afirmación” llevan a colocarla en la hipótesis nula.

De igual forma, es conveniente que el profesorado en sus explicaciones sobre contrastes hagan hincapié en la interpretación correcta de expresiones del lenguaje como: a lo sumo, como mucho, no sobrepasa, al menos, se mantiene, como máximo, como mínimo. Tales expresiones, en ocasiones, generan dudas de interpretación del enunciado en los alumnos.

El uso de analogías o metáforas a la hora del planteamiento del contraste también pueden ayudar al alumno a comprender cómo se debe formular, y a relacionar la situación estudiada con una situación familiar para el mismo (Martín, 2003). Ver en Feinberg (1971), el ejemplo del juicio de un presunto culpable de asesinato.

Por último, la *confusión entre el estimador y el valor hipotético* proviene de no discernir entre los parámetros muestrales, parámetros poblacionales y datos a comprobar. Tal vez sería aconsejable antes de comenzar con la estimación y contrastes de hipótesis, enseñar al alumno con diversos problemas y ejemplos en los que identificarán cual es la característica en estudio, cómo se distribuye, parámetros poblacionales de qué depende, estimador del parámetro, valores que toman dichos estimadores en la muestra y valores de los parámetros poblacionales que se pretende comprobar, esto es, valores hipotéticos.

En resumen, cabe admitir el hecho de que la ambigüedad verbal y la insuficiente comprensión del enunciado del problema, sean las causas potenciales de los errores acerca del planteamiento apropiado de las hipótesis nula y alternativa.

Ausencia de la formulación del contraste

En muchos exámenes se observa como el alumno pasa directamente al cálculo del estadístico sin formular el contraste. En este sentido, sería beneficioso orientar al alumno a seguir los siguientes pasos en la resolución del problema (Vizmanos y otros, 2004):

- Paso 1. Formulación de hipótesis: nula y alternativa
- Paso 2. Fijar el nivel de significación
- Paso 3. Elegir el estadístico del contraste y determinar su distribución.
- Paso 4. Construcción de la región de aceptación.
- Paso 5. Calcular el valor que toma el estadístico del contraste para la muestra.
- Paso 6. Aceptación o rechazo de la hipótesis nula, e interpretación de la decisión en el contexto del enunciado del problema.

Estos pasos o similares, se recogen en los textos de las editoriales más utilizadas, y muchos alumnos parecen seguirlos. No obstante, algunos siguen el proceso de decisión pero omiten algunos pasos que parecen considerar irrelevantes, cuando no es cierto. Este es el caso de los que se saltan la formulación del contraste, y al llegar al final no tienen claro lo que se acepta o se rechaza. Como dice Moore (1998), “los datos son números con un contexto”. Por tanto sería conveniente, en el paso 6, acostumbrar al alumnado a interpretar los resultados

en el contexto del enunciado y no a quedarse simplemente en la conclusión estadística de aceptar o rechazar la hipótesis nula.

Construcción errónea del estadístico

Otro error detectado en los exámenes es que equivocan la expresión del estadístico. Creemos que esto es debido a que se han aprendido de memoria su fórmula sin asimilar su significado. Posiblemente los alumnos no se percatan que el estadístico proporciona el grado de proximidad o separación entre el valor muestral (\hat{p} o \bar{x}) y el valor hipotético con el que se quiere comparar (μ_0 o p_0), teniendo en cuenta la variabilidad de los datos:

$$\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ o } \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$$

Para evitar este error, sugerimos explicar al alumno de forma intuitiva y lógica, que el estadístico surge de manera natural como una medida de esa separación, para tratar de decidir sobre la población a partir de los datos observados en la muestra. Por tanto, los valores pequeños del mismo conducen a aceptar la hipótesis nula, y por el contrario, valores grandes a rechazarla. De esta forma, creemos que es más fácil que deduzcan su expresión y no la aprendan de memoria.

Confusión entre el nivel de significación α y el punto crítico z_α

Según hemos observado en los exámenes, los alumnos confunden con frecuencia el nivel de significación α con el punto crítico z_α , esto es, no distinguen que uno es una probabilidad, mientras que el otro es un valor de la recta real. Este error también aparece con frecuencia en los problemas de cálculo de probabilidades. Sin embargo, aquellos alumnos que utilizan estrategias gráficas, diferencian con más facilidad ambos conceptos y cometen menos errores. Como consecuencia de esto, sería aconsejable incentivar al alumnado para que utilice las representaciones gráficas de la distribución muestral, donde se representen los puntos críticos sobre la recta real, y las probabilidades, como el área que deja dicha distribución debajo de ella y a la derecha del punto crítico. En este sentido el uso de algunos "applets" puede ayudar al alumno a reforzar los conceptos requeridos, mediante imágenes de los mismos.

Elección incorrecta del α

Existen algunos valores del nivel de significación usados de forma general por los libros de textos. El alumno por costumbre tiende a utilizar éstos, sin comprobar el que se cita en el enunciado. Para evitar este tipo de error es aconsejable trabajar con distintos valores de α . De hecho, a veces al realizar un

cambio del nivel de significación, valores no demasiado significativos del estadístico, esto es, que están en el límite, hacen que la decisión elegida cambie. Esto contribuye de forma favorable al hecho, de que los alumnos puedan apreciar mejor que el aceptar la hipótesis nula no supone que sea cierta, o al contrario, rechazarla no supone que sea falsa, sino que existe cierta posibilidad de cometer un error.

Otro tipo de confusión que se observa en los exámenes es entre z_α y $z_{\alpha/2}$. Este intercambio de los puntos críticos obedece a dos posibles causas. Por un lado, debido a que tienden a elegir $z_{\alpha/2}$ con independencia de que el contraste sea unilateral o bilateral. O bien, por la búsqueda en las tablas, donde se usa la misma notación para la probabilidad α , que deja bajo la curva y a la derecha de un punto arbitrario, y el nivel de significación. Habría que insistir en el manejo de las tablas, calculando para distintos valores de α , los valores críticos z_α y $z_{\alpha/2}$.

Búsqueda errónea en las tablas

Una equivocación muy común es la confusión en las tablas de las probabilidades por los puntos de la recta real. El apoyo en los gráficos supone una ayuda para tratar de identificar y diferenciar ambos valores. De esta forma el alumno puede verificar si el valor encontrado se encuentra en el rango del estimador, y no es una probabilidad entre 0 y 1. Aunque a veces éste intervalo $[0,1]$ coincida con el rango del estimador.

Región Crítica y Región de Aceptación mal construidas

De los errores encontrados en relación con las regiones de aceptación y rechazo destacamos cuatro: Confusión entre \hat{p} y p_0 ; Región de aceptación construida con un signo menos; Error de Cálculo y Cambio de la región de aceptación por la de rechazo.

En lo que se refiere a la *confusión entre* \hat{p} y p_0 , un aspecto a tener en cuenta de los contrastes sobre la proporción, y que puede conducir a este tipo de error, es el hecho de que en el intervalo de confianza el estimador del parámetro \hat{p} , se distribuye como una

$$N\left(p, \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

mientras que en el contraste, el estadístico \hat{p} se distribuye supuesta cierta la hipótesis nula, como una

$$N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$$

Por otra parte, en los dos problemas de contrastes analizados, se presenta un contraste unilateral con cola a la derecha, esto es, de la forma menor o igual frente a mayor. Esto induce al error de construir una *región de aceptación con un signo menos*. La mayoría de los alumnos utilizan la región de aceptación en lugar de la de rechazo para resolverlo. Por este motivo, al fijarse en la hipótesis nula tratando de recordar la expresión de la región de aceptación, pueden llegar a confundir el menor o igual con un signo menos en la expresión. Una solución a esta dificultad podría consistir en incentivar que el alumno siempre represente gráficamente en la distribución del estimador la estimación obtenida y el valor hipotético, y aplique la lógica de la proximidad de ambos valores para obtener las conclusiones.

Los exámenes reflejan que los *errores de cálculo* cometidos en el proceso, se deben sobre todo a las prisas a la hora de despejar. Así operaciones como elevar al cuadrado, las convierten en raíces cuadradas, o en lugar de multiplicar, dividen, etc. Una forma para evitar esto, es la práctica de ejercicios de resolución de ecuaciones.

Por último, suelen realizar un *cambio de la región de aceptación por la de rechazo*. Muchos de ellos confunden el propósito de ambas regiones. No llegan a captar que las regiones se construyen a partir de la idea de que determinados valores del estadístico (condicionados por la separación entre el valor muestral y el hipotético) conducen a aceptar la hipótesis nula y otros valores a rechazarla. Se propone entonces incidir en el concepto de estadístico y los valores que pueda tomar.

Errores de Números Reales

El manejo de los números reales no es una cuestión intrínseca de la Estadística, pero el no dominarlos lleva a errores en los resultados. Un tipo de error, que frecuentemente se ha visto en los exámenes, es el de posicionar de forma errónea un valor negativo o decimal en la recta real. Esto supone regiones de aceptación mal construidas, e interpretación inadecuada de los resultados.

Téngase en cuenta que la partición de los errores detectados al corregir los exámenes de la PAU no es totalmente disjunta, ya que algunos de los errores vienen condicionados por otros anteriores en el proceso de decisión. Por otro lado, en la mayoría de los errores se aporta como solución el uso de gráficos, donde el alumno pueda ver representados muchos de los conceptos que intervienen en el proceso. Por este motivo, consideramos conveniente trabajar con “applets” didácticos en los que los estudiantes perciban de forma clara sus concepciones erróneas. En este sentido está claro, que cada vez más, se necesita usar las nuevas tecnologías para ayudar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje. A continuación se

citan algunas direcciones donde encontrar determinados “applets”, que pueden contribuir en el proceso de enseñanza de la Estadística a los alumnos de bachillerato.

<http://ucs.kuleuven.be/java/index.htm>

Aquí se recogen una serie de “applets”, que muestran diversos conceptos sobre Estadística, en particular, se presenta un grupo de “applets” destinados a los Contrastes de Hipótesis.

<http://www.aulademate.com/article-topic-10.html>

En la anterior dirección se pueden encontrar unidades didácticas con “applets”, además de exámenes de la PAU sobre las matemáticas de bachillerato.

<http://www.math.csusb.edu/faculty/stanton/m262/>

En esta dirección se muestran algunos “applets” sobre Probabilidad y Estadística, cuyo autor es el profesor Charles Stanton del Departamento de Matemáticas de la Universidad de California en San Bernardino.

<http://bcs.whfreeman.com/bps3e/>

Esta dirección contiene la página web de la tercera edición del libro titulado “The Basic Practice of Statistics” del famoso estadístico Moore (1998). Aquí también se puede enlazar con una serie de recursos didácticos para el estudiante, entre los que se encuentran un bloque de “applets” estadísticos. En especial se destaca el “applet” destinado al razonamiento sobre el estadístico del contraste. Además en castellano se encuentra el libro *Estadística Aplicada Básica* del mismo autor, que se referencia en la bibliografía.

Finalmente, nos gustaría señalar que cómo la Inferencia Estadística sirve para resolver problemas de las ciencias y de la vida cotidiana, la enseñanza de la misma debería realizarse con problemas reales, mediante los cuales los estudiantes puedan desarrollar su conocimiento de esta materia, trabajando las diferentes etapas de un problema práctico. De esta forma, las analogías con situaciones reales contribuirían de forma positiva a la hora de un mejor entendimiento del significado de los conceptos utilizados, y favorecería el aprendizaje. En este sentido, desde las Instituciones Estadísticas se está fomentando la divulgación de la Estadística mediante concursos escolares. En esta línea citamos las siguientes páginas webs:

<http://www.seio.es/descarga/IIIConcursoProyectosEducativo.pdf>

En esta dirección se encuentran las bases para el concurso de proyectos educativos de Estadística e Investigación Operativa para profesores de enseñanza secundaria y bachillerato, pro-

movido por la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa.

http://www.gobiernodecanarias.org/istac/w_escolar.htm

En esta página web se encuentra información y materiales relativos a la colaboración entre el Instituto Canario de Estadística y la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton", para promover acciones que favorezcan el conocimiento de la Estadística, con el fin de ayudar a profesores y alumnos en su labor de enseñanza y aprendizaje de esta materia, a través de datos del entorno Canario.

Otras páginas web a resaltar por su calidad en cuanto al contenido sobre Inferencia Estadística, son las que se citan a continuación.

http://descartes.cnice.mecd.es/materiales_didacticos/inferencia_estadistica/contraste.htm

Esta corresponde al Proyecto Descartes de Innovación en el área de Matemáticas, para la Enseñanza Secundaria Obligatoria y el Bachillerato desarrollada por el Ministerio de Educación y Ciencia (2004).

http://www.cnice.mec.es/pamc/pamc_2001/2001_inferencia_estadistica/

Página creada por José Miguel Rodríguez Morales, dirigida a alumnos de 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales.

<http://www.terra.es/personal2/jpb00000/home.htm>

Página diseñada por el profesor Juan del Pozo Baselga que recoge apuntes y ejercicios de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BATANERO, C., GODINO, J.D., GREEN, D.R., HOLMES, P. Y VALLECILLOS, A. (1994): Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.
- BATANERO, C. (2000): Controversies around the role of Statistical tests in experimental research. *Mathematical Thinking and Learning*, 2(1-2), 75-98.
- COLERA, J., GARCÍA, R. Y OLIVERA, M. J. (2003): *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. Segundo bachillerato*. Anaya, Madrid.
- ESPINEL, M.C., RAMOS, R. Y RAMOS, C. E. (2007): Algunas alternativas para la mejora de la enseñanza de la inferencia estadística en secundaria. *Números 67. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas*. <http://www.sinewton.org>
- FEINBERG, W. E. (1971): Teaching the Type I and II errors: the judicial process. *The American Statistician*, 25, 30-32.
- MARTÍN, M.A. (2003): "It's like...you know": The use of Analogies and Heuristics in Teaching Introductory Statistical Methods. *Journal of Statistics Education*, 11(2).
<http://www.amstat.org/publications/jse/v11n2/martin.html>
- MOORE, D. (1998): *Estadística Aplicada Básica*. Antoni Bosch Editor. Barcelona.
- MORENO, A. J. Y VALLECILLOS, A. (2005): La Inferencia Estadística Básica en la Enseñanza Secundaria. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.
- NORTES, A., JIMÉNEZ, P. Y OTROS (2003): *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. 2º bachillerato*. Santillana, Madrid.
- RAMOS, R. Y ESPINEL, M.C. (2003): Estimación Estadística: Algunas dificultades observadas en la PAU. *Actas de las XI Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Puerto de la Cruz. Tenerife.
- SOCAS, M. (1997): Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico (coordinador) *La educación Matemática en Enseñanza Secundaria*. 12 ICE. Universitat de Barcelona. Barcelona.
- VALLECILLOS, A. Y BATANERO, C. (1997): Conceptos activados en el Contraste de Hipótesis Estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en didactique des mathématiques* 17(1), 29-48.
- VIZMANOS, J. R. Y ANZOLA, M. (2004): *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. Segundo de Bachillerato*. Algoritmo. SM, Madrid.