suma+ 61
Junio 2009, pp. 7-15

La recta tangente: notas históricas y actividades para el aula

Se hace un recorrido histórico por el concepto de tangente, se analizan las ideas que del mismo tienen los alumnos, y se exponen algunas actividades relacionadas, para el aula de matemáticas.

A historical itinerary has bean done on the tangent concept, the pupils ideas of this theme are analyzed, and some activities related to it are shown, for the mathematics classroom.

Este artículo trata de la recta tangente. Los alumnos de Cálculo, tanto en bachillerato como en la Universidad saben, en su mayoría, encontrar la tangente a una curva en un punto utilizando la derivada. Sin embargo, la mayoría dudan cuando se les muestra un dibujo de una curva y una recta, y se les pregunta si esa recta es tangente a la curva. Esto quiere decir que no tienen una idea clara del concepto geométrico de tangencia. Cosa que, por otro lado, no es de extrañar teniendo en cuenta que los matemáticos tardaron más de 2000 años en aclarar este concepto.

En primer lugar, se hace un breve recorrido histórico donde se muestran algunos intentos por calcular esta recta, cuando no se sabía exactamente qué características tenía. En segundo lugar se analizan las ideas que tienen los alumnos acerca de la recta tangente, y se propone una actividad, útil para afianzar la idea geométrica de la tangencia, que consiste en obtener la tangente a un polinomio, sin usar la derivada. En tercer lugar se exponen algunas actividades relacionadas con la tangente para el aula de matemáticas. Todas ellas se estructuran en tres pasos: exploración, enunciado y prueba guiada. Tienen que ver con las subtangentes, las tangentes a exponenciales o las rectas tangentes de Descartes.

Notas históricas

Desde la época griega, la búsqueda de la recta tangente a una curva en un punto ha sido uno de los asuntos que más ha interesado a los matemáticos. El problema era que el concepto de tangente se intuía, pero no se era capaz de dar una definición formal e inequívoca del mismo. Hasta que Cauchy, en 1823, definió la derivada y solventó el problema, los matemáticos intentaron obtener la tangente a una curva en un punto mediante diversos e ingeniosos métodos, hoy día totalmente olvidados. En esta sección se hará un breve recorrido por estos métodos.

Los griegos tenían la idea de que la tangente a una curva era una recta que "tocaba" a la curva sin cortarla. Hay que destacar a Euclides (325 a. C., 265 a. C.), quien analizó el comportamiento de una recta trazada por una circunferencia y formando un ángulo recto con su diámetro (ver Suzuki, 2005). Las dos propiedades que observó parecían constituir para él las características de la tangente:

1. La recta sólo tiene en común un punto con la circunferencia.
2. Es imposible interponer otra línea entre esa recta y la circunferencia.

Apolonio (262 a. C., 190 a. C.), en sus libros dedicados a las cónicas desarrolló métodos geométricos para la construcción

Félix Martínez de la Rosa
Departamento de Matemáticas. Universidad de Cádiz

de rectas tangentes a parábolas, elipses e hipérbolas. Aquí mostramos su método para construir rectas tangentes a parábolas:

Sea P un punto de la parábola de vértice E, con PD perpendicular al eje de simetría de la parábola. Si A está el eje de simetría y AE = ED, entonces AP será tangente a la parábola en P (Figura 1).

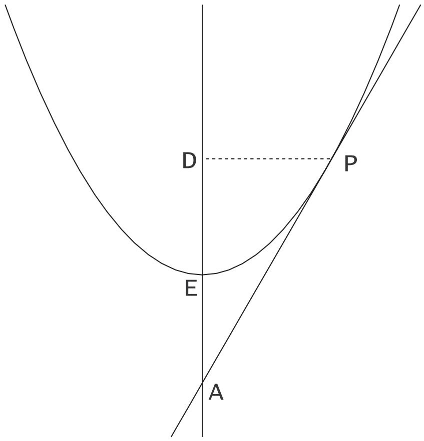

Figura 1

En la primera mitad del siglo XVII (antes de los trabajos de Newton y Leibniz), se desarrollaron algoritmos puramente algebraicos para encontrar tangentes. Los algoritmos, basados en la resolución de ecuaciones y en las propiedades de las curvas, dieron lugar a un tipo de Cálculo enteramente libre del concepto de límite. Sin embargo, a finales del siglo XVII (a partir de Newton y Leibniz) estas técnicas fueron relegadas al papel de curiosidades históricas.

Como muestra de esas técnicas antiguas, destacamos la ideada por Descartes (1596-1650), descrita en su libro “La Géométrie” de 1637, para obtener tangentes a curvas (ver Suzuki, 2005):

> Encontrar una circunferencia tangente en un punto C a una curva dada. Esto se hace igualando circunferencia y curva y obligando a que sólo se corten en un punto.
>
> Ya que la recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio, como decía Euclides, esta recta es fácil de calcular.

Es obvio que este método sólo es viable para curvas sencillas, pero vale la pena ver un ejemplo.

Encontrar la tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto $C(a^2, a)$ (Figura 2).

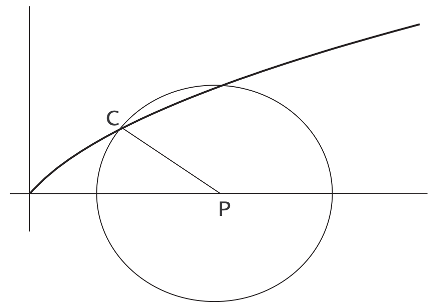

Figura 2

Solución: Tomemos una circunferencia de radio r y centro, $P(h, 0)$ cuya ecuación es:

$$(x - h)^2 + y^2 = r^2$$

Los puntos de intersección entre circunferencia y curva se obtienen de resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y^2 + x^2 - 2hx + h^2 - r^2 = 0 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y en la primera ecuación se obtiene:

$$x^2 + (1-2h)x + (h^2 - r^2) = 0$$

Suponiendo que la circunferencia y la curva se cortan en $C(a^2, a)$, entonces $x = a^2$ es raíz de la ecuación. Pero para que se produzca la tangencia, debe ser la única raíz. Por tanto debe cumplirse que:

$$x^2 + (1-2h)x + (h^2 - r^2) = (x - a^2)^2$$

Igualando los coeficientes de x se obtiene que $1 - 2h = 2a^2$, y por tanto:

$$h = a^2 + \frac{1}{2}$$

Es decir, el centro de la circunferencia tangente a $y = \sqrt{x}$ en (a^2, a) es:

$$P(a^2 + \frac{1}{2}, 0)$$

La tangente en C es perpendicular al radio PC, cuya pendiente es $-2a$, por tanto la pendiente de la tangente en $C(a^2, a)$ es

$$\frac{1}{2a}$$

En el siglo XVII, las curvas se describían, a menudo, como la trayectoria de una partícula que se mueve. Por ejemplo, una circunferencia es la trayectoria recorrida por un punto en el borde de una rueda giratoria. Esta idea fue utilizada por Newton (1643 – 1727) y Roberval (1602 – 1675) para estudiar las tangentes. Newton visualizó la tangente a una curva como la dirección en la que la partícula se mueve en un instante concreto, asociando la tangente con el vector velocidad de la partícula. El método de encontrar tangentes a través del vector velocidad lo denominó “método cinemático”. Así mismo, Roberval especificó que la dirección del movimiento de un punto que describe una curva es la tangente a la curva en cada posición del punto. Un recorrido por estos métodos puede verse en Suzuki (2005) y Wolfson (2001).

En ese mismo siglo, los matemáticos fueron adoptando lentamente la idea de la recta tangente a una curva como la posición límite de una secante para la cual los puntos de corte con la curva se acercan y se acercan hasta coincidir. De modo que la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto A(x, $f(x)$), es la recta a la que se aproximan las rectas secantes trazadas por A y por un punto cercano de la curva, B($x+h$, $f(x+h)$), cuando B se aproxima a A (Figura 3).

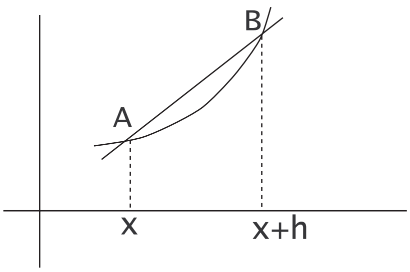

Figura 3

En la figura 3 se intuye que si h desaparece, la secante se convierte en tangente. Fermat (1601-1665), rival de Descartes, fue uno de los primeros en desarrollar esta idea, anticipando ya el concepto de derivada (ver Coolige, 1951).

Los matemáticos del siglo XVII (Fermat, Descartes, Wallis, Barrow, etc) eran capaces de calcular la pendiente de la tangente a una curva en un punto. Por ejemplo para $f(x) = x^3$, la pendiente de la secante por A y B es:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=3x^2+3xh+h^2$$

Así que para obtener la pendiente de la tangente, hay que considerar que h es una cantidad que puede despreciarse, de donde se deduce que la pendiente buscada es $3x^2$.

Observemos que la pendiente de la recta AB está bien definida, siempre que A y B sean distintos, es decir si $h \neq 0$. El problema era cómo definir la pendiente cuando $h = 0$ y A=B. Naturalmente, esa pendiente está ligada al concepto de derivada, que aún tardaría en concretarse.

El camino recorrido hasta llegar a la solución definitiva fue arduo. Resulta interesante ver, en el artículo Grabiner (1983), el orden cronológico en el que se desarrollaron los estudios que culminaron con el concepto de derivada: primero fue usada, después fue descubierta, después explorada y desarrollada, y por último fue definida.

Hubo que esperar hasta el siglo XIX para que Cauchy (1789-1857) resolviera, definitivamente el problema en 1823, dando una precisa definición de la derivada en términos del nuevo concepto denominado límite, definiendo a $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ como la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $(a, f(a))$.

La idea de la recta tangente

La relación entre recta tangente y derivada, expresa una bella conexión entre la geometría y el análisis. Sin embargo esta relación parece una simple obviedad, ya que en la propia definición formal de recta tangente se incluye la derivada. Pero ¿podemos darle un sentido geométrico a la recta tangente, aparte de la derivada, y relacionar después ambos conceptos?

1) Para saber qué idea tienen los alumnos acerca de la recta tangente, es interesante mostrarles las figuras 4, 5, 6, 7 y 8, y preguntarles si creen que alguna de ellas representa una recta tangente a una curva.

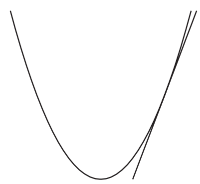

Figura 4

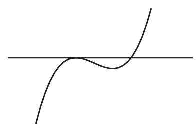

Figura 5

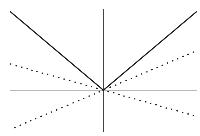

Figura 6

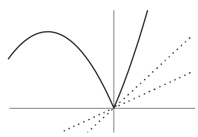

Figura 7

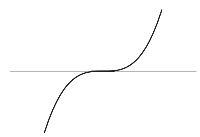

Figura 8

En la figura 4 la respuesta no admite discusión, ahí hay una recta tangente. Los motivos de esta opinión son dos: la recta sólo corta a la curva en un punto, y en ese punto esa recta roza a la curva sin atravesarla.

En cuanto a la figura 5, existen dudas, porque, aunque la recta roza a la curva en un punto, tiene el problema de que la atraviesa por otro, aunque en general se inclinan por que existe tangencia en el punto de la izquierda.

En las figuras 6 y 7, parece evidente que el eje x es tangente en el origen: toca a la gráfica en un solo punto y no atraviesa a la curva. Claro que otras rectas que pasan por el origen también cumplen esas condiciones y podrían ser tangentes.

Por último, no hay dudas para la figura 8, la recta no puede ser tangente porque atraviesa por la mitad a la curva.

2) Una primera justificación, exclusivamente geométrica, del concepto de tangente a funciones polinómicas, puede hacerse a través de la exploración de las dos siguientes cuestiones (ver Arao, 2000).

¿Cuándo el eje X es tangente a la gráfica de un polinomio en $x = a$?

Para ilustrar esta pregunta mostramos las figuras 9, 10 y 11.

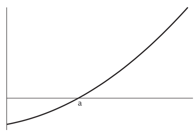

Figura 9

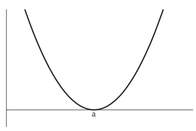

Figura 10

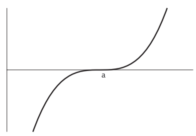

Figura 11

La primera condición de tangencia debe ser que el polinomio pase por el punto (a, 0), cosa que cumplen las tres gráficas, y para ello debe contener el factor $(x - a)$.

Pero la tangencia necesita algo más: un contacto superior al que se produce en la figura 9. Es decir, el roce entre la tangente y la curva debe ser más intenso, como en la figura 10. Para que esto se produzca, el polinomio debe contener, al menos, el factor $(x - a)^2$. En cuanto a la figura 11, primero debemos eliminar la idea preconcebida de que una tangente no puede atravesar a la curva. Salvadas la sorpresa inicial de los alumnos, en seguida advierten que la intensidad del contacto entre tangente y polinomio es mayor que en las otras figuras. Esto se debe a que el polinomio contiene el factor $(x - a)^3$, y al aumentar el grado, aumenta la intensidad del contacto.

¿Cuándo una recta es tangente a la gráfica de un polinomio en $x = a$?

La intuición obtenida de la primera cuestión, nos lleva a la conclusión de que una recta $y = mx + b$ es tangente a la gráfica de un polinomio $p(x)$ en $x = a$, cuando el contacto entre ambos, en ese punto, es tan intenso como para que $p(x) - (mx + b)$ contenga, al menos, el factor $(x - a)^2$. Es decir, $p(x)$ debe tener la forma:

$$p(x) = (mx + b) + q(x)(x - a)^2.$$

De esta manera, es muy fácil construir polinomios cuya tangente en un punto sea una recta dada.

Obtener un polinomio cuya tangente en $x = 1$ *sea* $y = 3x - 1$.

Solución: Un polinomio con las características pedidas puede ser $p(x) = (3x - 1) + (x + 3)(x - 1)^2$ (Figura 12).

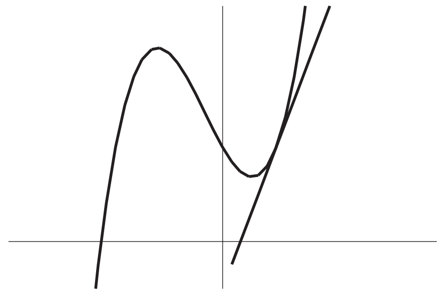

Figura 12

La exploración anterior puede expresarse a través de una curiosa relación entre la tangente y la división de polinomios (ver Arao, 2000):

La recta $y = mx + b$ es tangente a la gráfica de un polinomio $p(x)$ en $x = a$ si y sólo si $mx + b$ es el resto del cociente $p(x)/(x - a)^2$.

3) En general, para funciones de cualquier tipo, el concepto del contacto intenso entre recta y curva, se relaciona con la idea del parecido: cuanto mayor sea el contacto, mayor es el parecido entre la tangente y la curva cerca del punto de tangencia.

Pero además, la tangente debe ser la recta que más se parece a la curva en el punto. De hecho, mostrando la gráfica de $y=|x|$ (Figura 6), se aprecia que cualquier recta que pase por el origen se parece menos que la recta $y = x$ por la derecha, y menos que $y = -x$ por la izquierda, y esto nos hace intuir que no existe tangente en ese punto: no es posible dibujar una recta que se parezca más que ninguna otra a la gráfica de la función, cerca del punto de tangencia (para la figura 7 el razonamiento es análogo).

En otras palabras, el concepto de máximo parecido significa que la tangente en un punto es la mejor aproximación lineal a la curva en ese punto. De acuerdo con esta idea, en el artículo de Bivens (1986) se propone la siguiente definición de recta tangente:

Una recta L que pase por P(a, $f(a)$), se denomina recta tangente a la gráfica de f en P, si L es la mejor aproximación lineal de f cerca de P.

De esta manera se muestra a la recta tangente como un objeto geométrico por sí mismo, independiente de la derivada. La relación entre recta tangente y derivada se aclara con el siguiente enunciado (cuya demostración puede verse en Bivens, 1986):

La gráfica de una función f tiene una recta tangente $y = f(a) + m(x-a)$, *en* P(a, $f(a)$), *si* y sólo si existe $f'(a)$ y coincide con la pendiente m de la recta.

4) Una última observación geométrica sobre la tangente surge planteando la figura 13.

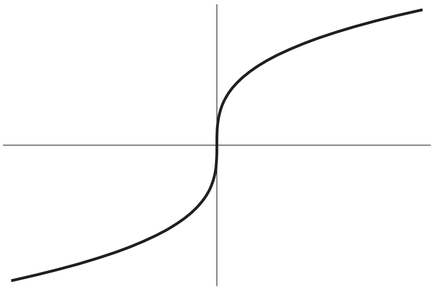

Figura 13

Esta gráfica es la misma que la figura 8, intercambiando los ejes. Por tanto si la recta de la figura 8 es la mejor aproximación lineal a la curva en el origen, la de la figura 13 también debería serlo. Geométricamente tenemos una tangente. El problema es que por ser una recta vertical, su pendiente es infinito. Por eso, para casar el concepto geométrico de recta tangente con el analítico de derivabilidad, cuando el límite:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

es infinito y f es continua en a, la función también se considera derivable en $x = a$, con derivada infinita.

Actividades para el aula

En relación con los ejercicios relacionados con la recta tangente, los profesores, básicamente, nos limitamos a calcular su ecuación. En este trabajo proponemos algunas actividades para el aula, que dan una sencilla y particular mirada a estas rectas. Dos de ellas están relacionadas con conceptos clásicos (subtangentes y rectas de Descartes) pero muy interesantes para plantearlos en la clase, debido a las reflexiones y al afianzamiento de conceptos que de ellos se deriva.

Se propone estructurar cada una de ellas en tres partes:

Primera: Realizar una sencilla exploración que aclare la actividad, y oriente sobre la posible conclusión.

Segunda: Enunciar correctamente el resultado que se observa en la exploración.

Tercera: Probar, de una manera guiada, los enunciados.

Gráfica de tangentes mediante las subtangentes

Esta actividad consiste en el trazado de rectas tangentes, uniendo el punto de tangencia con el punto de corte de la tangente con el eje x. Dicho punto se obtiene gracias al clásico, pero muy poco utilizado, concepto de la subtangente.

Exploración

Dada una curva $y=f(x)$, la ecuación de la recta tangente en $(a, f(a))$ es $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Supongamos que $f'(a)\neq 0$. Haciendo $y = 0$, se obtiene el punto por el que la tangente corta al eje x:

$$x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

Por tanto, la recta tangente pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a-s(a), 0)$, donde $s(a)$ es la denominada *subtangente* (ver figura 14), definida en cada punto a donde $f'(a)\neq 0$, por

$$s(a) = \frac{f(a)}{f'(a)}$$

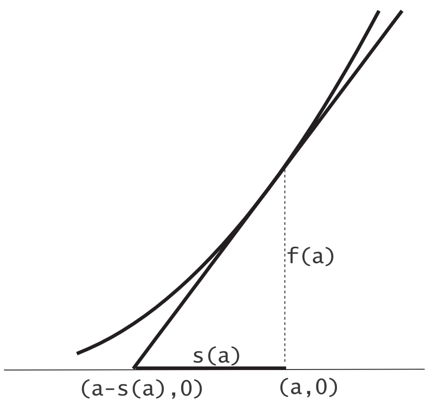

Figura 14

El trazado de tangentes mediante el cálculo de las subtangentes es útil si éstas son fáciles de calcular. Para funciones exponenciales y potencias de x, este método es especialmente sencillo.

El concepto de subtangente, es un clásico del análisis. Por ejemplo, las curvas exponenciales fueron introducidas en 1684 cuando Leibniz (1646-1716) planteó el problema de encontrar todas las curvas con subtangentes constantes. La solución son las curvas exponenciales. Para una constante $b\neq 0$, se verifica:

$$f(x) = Ke^{\frac{x}{b}}$$

para alguna constante $K\neq 0$, si y sólo si $s(x) = b$.

Actividad 1: obtener, a través de las subtangentes, la tangente en $x=a$ para e^x y e^{-x}.

La subtangente de $f(x) = e^x$ en $x = a$ es $s(a)=1$. Por tanto, la recta tangente en $x = a$ pasa por los puntos (a, e^a) y $(a - s(a), 0) = (a-1, 0)$ (Figura 15).

La subtangente de $f(x) = e^{-x}$ en $x = a$ es $s(a)=-1$. Por tanto, la recta tangente en $x = a$ pasa por los puntos (a, e^{-a}) y $(a - s(a), 0) = (a + 1, 0)$ (Figura 16).

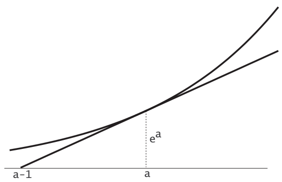

Figura 15

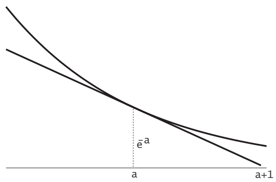

Figura 16

Actividad 2: obtener, a través de las subtangentes, la tangente en $x=a$ para x^2, x^3 y x^{-1}.

La subtangente de $f(x) = x^2$ es $s(x)=x/2$. Por tanto, la recta tangente en $x = a$ pasa por los puntos (a, a^2) y $(a - s(a), 0) = (a/2, 0)$ (Figura 17).

La subtangente de $f(x) = x^3$ es $s(x)=x/3$. Por tanto, la recta tangente en $x = a$ pasa por los puntos (a, a^3) y $(a - s(a), 0) = (2a/3, 0)$ (Figura 18).

La subtangente de $f(x) = x^{-1}$ es $s(x)=-x$. Por tanto, la recta tangente en $x = a$ pasa por los puntos (a, a^{-1}) y $(a - s(a), 0) = (2a, 0)$ (Figura 19).

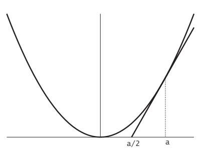

Figura 17

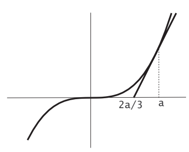

Figura 18

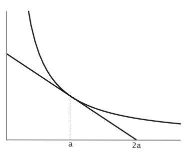

Figura 19

Enunciado para las exponenciales

Para una constante *$b\neq 0$, se verifica que $f(x)=Ke^{x/b}$,* para alguna constante *$K\neq 0$,* si y sólo si *$s(x)=b$.*

Demostración: Dada la función $f(x)=Ke^{x/b}$, se cumple que $f'(x)=(K/b)e^{x/b}$, por tanto $s(x)=b$.

Recíprocamente, si $f(x)/f'(x)=b$, entonces $1/b = f'(x)/f(x)$. Realizando la integral de obtiene que $\ln f(x)= (x/b) + \ln K$. Por tanto $f(x)=Ke^{x/b}$.

Enunciado para las potencias de x

Se verifica que $f(x)=Kx^{1/b}$, para alguna constante *$K\neq 0$,* si y sólo si *$s(x)=bx$.*

Demostración: Dada la función $f(x)=Kx^{1/b}$, se cumple que $f'(x)=(K/b)x^{(1/b)-1}$, por tanto $s(x)=bx$.

Recíprocamente, si $f(x)/f'(x)=bx$, entonces $1/(bx) = f'(x)/f(x)$. Realizando la integral de obtiene que $\ln f(x)= (1/b)\ln x + \ln K$. Por tanto $f(x)=Kx^{1/b}$.

En Apostol y Mamikon (2002) y Martinez de la Rosa (2004), puede encontrarse más información sobre las subtangentes y sobre su utilidad para calcular visualmente el área de una región sencilla.

Tangentes a funciones exponenciales

En Skala (1997) se propone una interesante actividad relacionada con las tangentes a las funciones exponenciales, que afianza el conocimiento de estas funciones.

Exploración

En primer lugar, se dibujan algunas funciones exponenciales $f(x) = a^x$, para $a>1$(Figura 20). El caso $0< a <1$ es análogo. A continuación se trazan las rectas tangentes, pasando por el origen, a esas curvas. Una vez trazadas, se marcan los puntos de tangencia. Parece cumplirse el hecho de que estos puntos están situados en una línea horizontal (Figura 21).

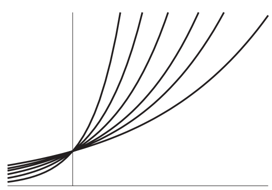
Figura 20

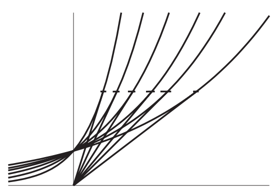
Figura 21

Las rectas que pasan por el origen y son tangentes a una exponencial verifican que sus puntos de tangencia están todos alineados.

Demostración. Tomemos $f(x) = a^x$, para $a>0$, $a\neq 1$. La pendiente de la tangente es la derivada. Además, la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje x. Con estas dos ideas, es sencillo comprobar que el punto de tangencia es:

$$\left(\frac{1}{\ln a}, a^{\frac{1}{\ln a}} = e\right)$$

Por tanto los puntos buscados están sobre la recta horizontal $y = e$.

Rectas tangentes de Descartes

Las funciones polinómicas se analizan con amplitud en los cursos de bachillerato. Aquí se propone una actividad, relacionada con las rectas tangentes, que requiere el análisis de este tipo de funciones, y afianza los conceptos *puntos de inflexión*, *concavidad* y *convexidad.*

Se propone hacer un estudio de aquellas funciones polinómicas, que tengan una recta tangente que corte a la curva únicamente en el punto de tangencia. Este tipo de rectas se denominan tangentes de Descartes.

1ª parte. Exploración de las parábolas y polinomios cúbicos.

La observación de una parábola permite intuir que, en cada punto, la tangente corta a la curva únicamente en el punto de tangencia (Figura 22). Por otro lado, una breve exploración nos convence de que los polinomios cúbicos cumplen la propiedad buscada cuando la tangente se traza por el punto de inflexión (Figura 23).

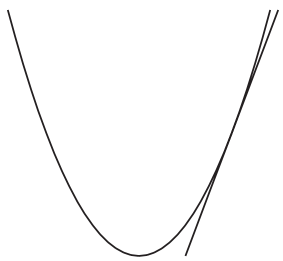

Figura 22

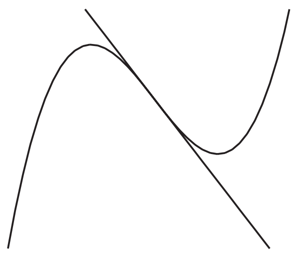

Figura 23

Enunciado para las parábolas

Las parábolas tienen una tangente de Descartes en cada punto.

Demostración. Tomemos la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$. Si $a>0$ entonces $f''(x)=2a>0$, por tanto la tangente en cada punto siempre queda por debajo de la curva, y sólo la corta en el punto de tangencia (Figura 22).

Enunciados para polinomios cúbicos

a) Los polinomios cúbicos tienen un único punto de inflexión.

Demostración. Tomemos $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Ya que $f''(x) = 6ax+2b$, el punto de inflexión es $x=-(b/3a)$.

b) En el punto de inflexión existe una recta de Descartes.

Demostración. Sea $x=x_0$ el punto de inflexión de f. Entonces sólo en ese punto la función pasa (por ejemplo) de convexa a cóncava, por lo que la tangente en x_0 no vuelve a cortar a la curva (Figura 23).

c) En un punto distinto al de inflexión, no existe recta de Descartes.

Demostración. Si un punto no es de inflexión, podemos suponer que $f''(x)>0$ en un entorno del punto (Figura 24). Entonces la tangente en ese punto quedará por debajo de la curva. Si el coeficiente de x^3 es positivo, entonces, alejándonos lo bastante hacia la izquierda del punto de tangencia, la curva se situará por debajo de la tangente y por ello volverá a cortarla, por lo que no será una tangente de Descartes.

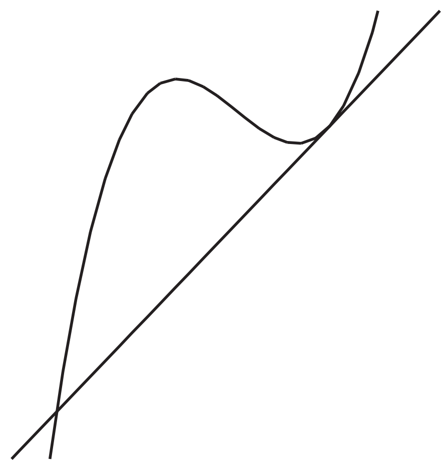

Figura 24

2ª parte. Encontrar una función polinómica que tenga exactamente dos rectas tangentes de Descartes.

En la primera parte vimos que las parábolas tienen tangente de Descartes en cada punto, y que las cúbicas sólo tienen una. Ampliamos el estudio a funciones de grado cuatro y cinco.

La figuras 25, 26 y 27 representan las gráficas de las funciones de grado cuatro: x^4, x^4-x^2, x^4-x^2+x. La observación nos permite deducir que no pueden cumplir la condición que se busca, porque cualquier punto alejado de los de inflexión, admite una recta de Descartes.

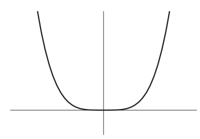

Figura 25

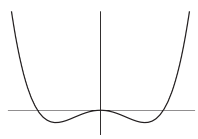

Figura 26

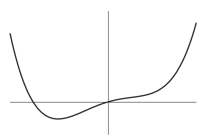

Figura 27

Probemos con funciones de grado cinco. Un análisis similar al hecho en la primera parte para las cúbicas nos dice que las tangentes de Descartes deben trazarse por los puntos de inflexión. Construyamos una función de grado cinco, con dos puntos de inflexión, como la de la figura 28.

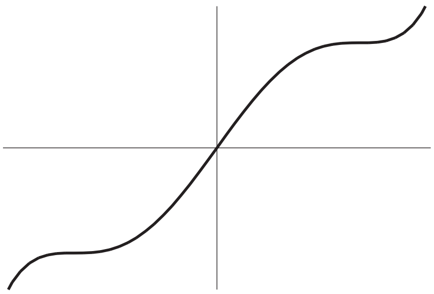

Figura 28

Tomemos $f(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$. Podemos fijar los puntos de inflexión en $x = 2$ y $x = -2$. Para simplificar podemos suponer que las tangentes en 2 y −2 sean horizontales y, por ejemplo, que $f'(0) = 1$. Hay que resolver el sistema:

$$\begin{cases} f'(0) = 1 \\ f'(2) = 0 \\ f'(-2) = 0 \\ f''(2) = 0 \\ f''(-2) = 0 \end{cases}$$

La solución es:

$$a = \frac{1}{80}, b = 0, c = -\frac{1}{6}, d = 0, t = 1$$

Por tanto la curva buscada es:

$$f(x) = \frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$$

Las dos tangentes de Descartes (figura 29) son:

$$y = f(2) = \frac{16}{15}, y = f(-2) = -\frac{16}{15}$$

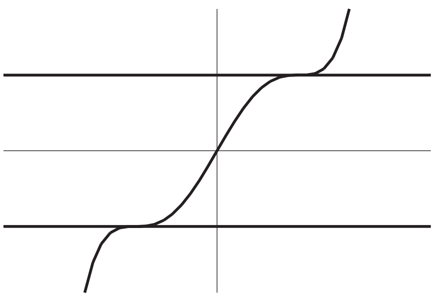

Figura 29

Un estudio más completo sobre las rectas tangentes de Descartes puede verse en Barnier (2007).

Una curiosa propiedad de la tangente

La optimización es uno de los temas destacados en el estudio de las funciones de una variable. Aquí proponemos ilustrarlo con una actividad, (ver Eddy y Fritsch, 1994 y Paré, 1995), sobre la minimización de un área.

Dada una curva convexa en un intervalo, se trata de encontrar un punto por donde trazar una tangente, de manera que el área comprendida entre la curva y la tangente sea mínima. Destacamos esta interesante propiedad, porque su demostración puede hacerse sin recurrir a cálculo alguno.

Exploración

Se dibuja una curva convexa en un intervalo. Trazando tangentes, se puede intuir que el área entre la curva y la tangente se va haciendo más pequeño a medida que el punto de tangencia se acerca al punto medio del intervalo (Figura 30). ¿En qué punto se minimiza el área? Lo sorprendente de esta exploración es que el aparente resultado (el punto medio) es independiente de la ecuación de la curva.

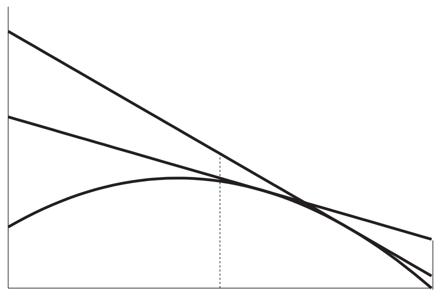

Figura 30

El área comprendida entre una función convexa en un intervalo y su tangente, es mínima si la tangente se traza por el punto medio del intervalo.

Demostración. Veamos la figura 31.

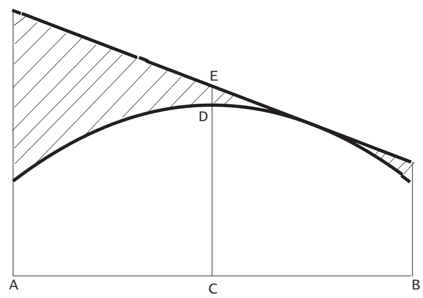

Figura 31

El área del trapecio es la suma del área constante bajo la curva y del área rayada. Por tanto, para minimizar el área rayada basta con minimizar el área del trapecio. Ya que el área del trapecio es el producto de la base por la altura trazada desde el punto medio C, para minimizar su área basta hacerlo con la altura CE. La altura CE se hace mínima cuando E=D, por tanto tenemos el resultado. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APOSTOL, T. M. Y MAMIKON, A. M. (2002): Subtangents. An aid to visual calculus. *The American Math. Monthly*, vol. 109, nº 6, 525-533.

APOSTOL, T. M. Y MAMIKON, A. M. (2002): Tangents and subtangents used to calculate areas. T*he American Math. Monthly*, vol. 109, nº 10, 900-907.

ARAO, J. (2000): Tangents without calculus. *The College Math. Journal*, vol. 31, nº 5, 406-407.

BARNIER, W. (2007): Descartes tangent lines. *The College Math. Journal*, vol. 38, nº 1, 47-49.

BIVENS I. C. (1986): What a tangent line is when it isn´t a limit. *The College Math. Journal*, vol. 17, nº 2, 133-143.

COOLIGE, J. L. (1951): The story of tangents. *The American Math. Monthly*, vol. 58, nº 7, 449-462.

EDDY R. H. Y FRITSCH, R. (1994): An optimization oddity. *The College Math. Journal*, vol. 25, nº 3, 227-229.

GRABINER, J. V. (1983): The changing concept of change: the derivative from Fermat to Weiertrass. *Mathematics Magazine*, vol. 56, nº 4, 195-206.

MARTINEZ DE LA ROSA, F. (2004): Aportaciones a la matemática visual. *Epsilon*, vol. 20, nº 60, 449-459.

PARÉ, R. (1995): A visual proof of Eddy and Fritsch's minimal area property. *The College Math. Journal*, vol. 26, nº 1, 43-44.

SKALA, H. (1997): A discover-e. *The College Math. Journal*, vol. 28, nº 2, 128-129.

SUZUKI, J. (2005): The lost Calculus (1637-1670): Tangency and optimization without limits. *Mathematics Magazine*, vol.78, nº 5, 339-353.

THURSTON H. (1969): Tangents: an elementary surveys. *Mathematics Magazine*, vol. 41, nº 1, 1-11.

WOLFSON P. R. (2001): The crooked made straight: Roberval and Newton on tangents. *The American Math. Monthly*, vol. 108, nº 3, 206-216.