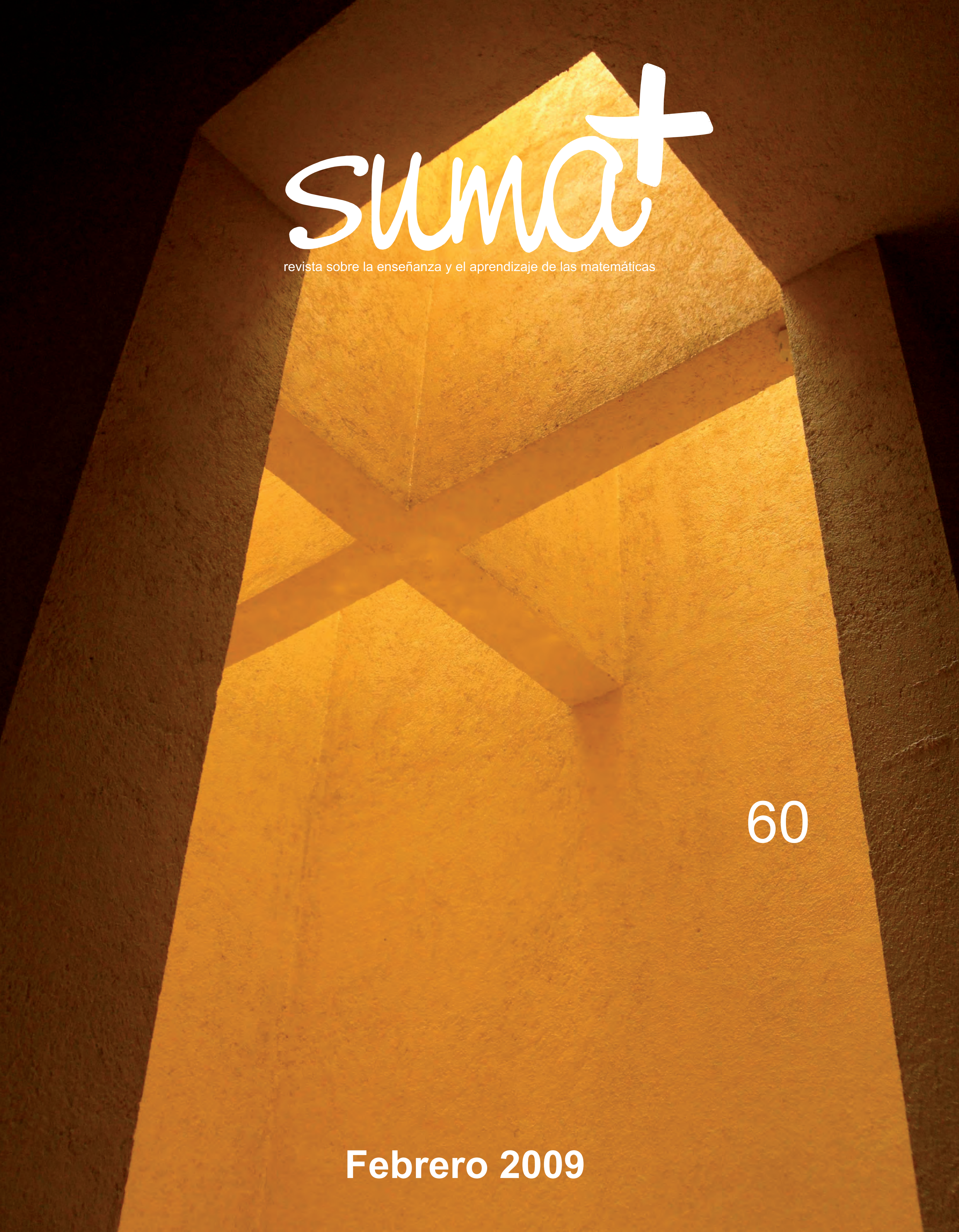


suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

60

Febrero 2009

suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada: *O. Monzó*
Fotografía de la portada:
Por tragaluz, *elepé*
Maquetación
T. Queralt y O. Monzó
Revista Suma
Apartado 498
E-46900-Torrent (España)
Fax:+(34) 912 911 879
Tirada: *6700 ejemplares*
Depósito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

Índice

60 ***Febrero 2009***

actividades de la FESPM

SUMA es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral, cuyo objetivo es tratar sobre aquellos aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje, destinada al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en Torrent (Valencia) - ESPAÑA

suma+

no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

suma+ 60
Febrero 2009

Sobre la formación inicial del profesor de matemáticas

La formación inicial del profesorado de matemáticas en España ha supuesto históricamente un problema que las sucesivas reformas legislativas no han podido resolver. Nos referimos a los conocimientos y habilidades básicas que debe adquirir un futuro docente, para desarrollar su tarea profesional en aquella etapa educativa a la que se dedicará tras los estudios en la Universidad.

Los futuros maestros de educación infantil y primaria se preparan en las Escuelas de Magisterio con unos planes de estudio que, desaparecida la especialidad de ciencias, incluyen un escaso número de créditos dedicados a la didáctica de las matemáticas. Un estudiante de magisterio puede acabar perfectamente su carrera sin haberle dedicado más del 10% del total de los créditos a conocer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y su didáctica, mientras que, seguramente, a lo largo de su vida profesional se verá abocado a enseñarlas sin tener la formación inicial adecuada.

Por otro lado, los profesores de secundaria han continuado hasta ahora habilitándose, tras la licenciatura correspondiente, mediante el Curso de Aptitud Pedagógica (CAP), cuyo resultado se critica por poco eficiente. Algunos cambios propuestos, como el título de Especialización Didáctica, se pusieron en práctica por algunas Universidades, pero sin una aplicación general en todo el estado.

Estamos en plena reconversión de los planes de estudio, según los criterios del compromiso de Bolonia, que debería revisar con mayor racionalidad los estudios de los futuros maestros, de cara a convertilos en profesionales competentes. Por eso pedimos desde aquí una mayor presencia de aquellas asignaturas que permitan al futuro maestro conocer y dominar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por considerarse una asignatura instrumental que requiere de unos conocimientos específicos.

En cuanto al profesorado de secundaria, el Máster que habilitará para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, su desarrollo y puesta en práctica puede constituir un reto para nuestro sistema educativo. Planificado con una duración de 60 créditos europeos, el Máster se distribuye de manera que 12 créditos se corresponden con el módulo genérico, 24 con el módulo específico de la asignatura, y 16 créditos dedicados al prácticum en la especialización, incluyendo el Trabajo fin de Máster. Este cambio que se propone en la formación inicial supone una apuesta por un mayor conocimiento de los procesos pedagógicos y didácticos del futuro profesor, y esperemos que el resultado sea satisfactorio. Sin embargo, los criterios de acceso a la realización del Máster de Profesor de matemáticas solamente exigen la superación de 18 créditos de matemáticas de los 240 que suponen los estudios de grado que haya cursado el estudiante, lo cual consideramos una decisión polémica pues puede habilitar a esta profesión a personas que hayan estudiado carreras con un bajo conocimiento de contenidos matemáticos.

Pero no perdamos de vista que esto solamente es el punto de salida de una carrera, cuya principal fuente de aprendizajes es la experiencia y que nunca se termina de aprender lo suficiente. También pedimos desde aquí una planificación y un desarrollo serio de estos estudios, de cara a que no se conviertan en un puro trámite.

No queremos acabar el editorial sin hacer referencia a la celebración del año 2009 como Año Internacional de la Astronomía, declarado por las Naciones Unidas en su 62 Asamblea General. Esta ciencia, ligada históricamente a las matemáticas, ha permitido a la Humanidad grandes avances, a la vez que ha estimulado su investigación para descubrir nuevos mundos matemáticos. Aprovechemos la propuesta para mirar hacia el cielo, tal y como hizo Galileo en su día, para dar a conocer las matemáticas celestes, con el fin de mejorar lo que nos rodea aquí en la Tierra. ■

Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

suma+ 60
Febrero 2009, pp. 7-20

Maxima, un sistema libre de cálculo simbólico y numérico

Dentro del contexto de las TIC aplicadas a la enseñanza de las matemáticas, se propone la introducción del sistema libre de cálculo simbólico Maxima, inicialmente desarrollado en el MIT. Maxima ofrece a estudiantes, profesores y profesionales un amplio conjunto de herramientas de cálculo, tanto simbólico como numérico, así como capacidades avanzadas de representación gráfica y un lenguaje de programación sencillo de aprender. También se incluyen ejemplos de actividades de aula reales.

Within the context of ICT applied to mathematics education, we propose the introduction of the Maxima computer algebra system, a free software project originally developed at MIT. Maxima is able to bring students, teachers and professionals a wide range of computing tools, both symbolic and numeric, together with strong plotting capabilities and an easy to learn programming language. Examples of real classroom activities are also included.

Introducción

Se presenta y describe el programa Maxima. Aunque habitualmente encuadrado en lo que se conoce como Sistemas de Cálculo Simbólico (o CAS, *Computational Algebra System*), Maxima es realmente un programa de matemáticas generales, pues junto a sus habilidades simbólicas hay que añadir las numéricas y gráficas, así como un lenguaje de programación propio que lo convierten en un entorno versátil y adaptable a todas las necesidades, tanto como calculadora personal, como herramienta pedagógica o instrumento de investigación.

Se configura este artículo en seis secciones: en la primera se aborda su historia, desde sus comienzos en el MIT hasta el momento actual como un proyecto libre alojado en los repositorios de Sourceforge; se pasa a continuación a mostrar algunos de los entornos de usuario más comunes, seguido de una sesión de trabajo en la que se hace un breve recorrido por las capacidades más destacables de este programa; continúa con una serie de ejemplos de aplicación del programa como herramienta pedagógica, para terminar con unas reflexiones finales y comentarios sobre recursos disponibles.

Historia de Maxima

A finales de los años sesenta, varias agencias gubernamentales norteamericanas, como el *U.S. Departament of Energy* (DOE), *National Aeronautics and Space Administration* (NASA), *Office of Naval Research* (ONR) y *U.S Air Force* (USAF), notaron la necesidad de disponer de un software matemático que les permitiera superar la dependencia que tenían respecto de programas exclusivamente numéricos, los cuales ya se venían utilizando desde la época de von Neumann y sus trabajos con el ENIAC, unos veinte años atrás, para la predicción meteorológica mediante la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales. La idea consistía en ver la manera de que las máquinas manipulasen las expresiones matemáticas de forma similar a como lo hacen los humanos.

Por esa época, en el MIT (*Massachussets Institute of Technology*) se presentó una tesis doctoral sobre integración simbólica cuyo autor era Joel Moses y que había sido supervisada por Marvin Minsky, uno de los gurús de lo que por aquella época ya se llamaba Inteligencia Artificial. Las agencias antes mencionadas aportaron los fondos necesarios y firmaron con el MIT un acuerdo para el desarrollo de este proyecto, al cual se le daría el nombre de Macsyma, (*MAC's SYmbolic MAnipulation system*), ya que MAC (*Machine Aided Cognition*) había sido el nombre original del equipo

Mario Rodríguez Riotorto
IES Punta Candieira de Cedeira. A Coruña

encargado de desarrollar el proyecto, más tarde conocido como Laboratory for Computer Science. En palabras del propio Marvin Minsky, Macsyma pretendía automatizar las transformaciones simbólicas que realizaban los matemáticos, a fin de entender la capacidad de los ordenadores para actuar de forma inteligente.

El proyecto arranca en 1969 y se desarrolla en lenguaje Lisp durante la década de los setenta. En 1982, ya finalizado el proyecto, una copia es transferida al DOE y otra a la empresa Symbolics Inc., que comercializaba las que se conocían como Lisp Machines. Symbolics se limitó a utilizar Macsyma como una demo para sus máquinas, pero nunca mostró interés en el desarrollo y mejora de este programa; tiempo después los derechos fueron vendidos a otra empresa, que aunque sí dedicó dinero y esfuerzos en la mejora del software, fue un fracaso comercial frente al auge que ya habían cobrado Mathematica y Maple, ambos inspirados en el propio Macsyma, y nacidos durante la década de los ochenta.

Pero hubo otra historia paralela. La copia que el MIT había enviado al Departamento de Energía, conocida como DOE-Macsyma, era utilizada por un reducido grupo de investigadores, que aunque no tenían permiso para distribuirla, sí les permitía trabajar sobre ella, depurar el código y actualizarlo al nuevo estándar Common Lisp. La figura clave de esta época fue William Schelter de la Universidad de Texas en Austin; fue él quien mantuvo viva la llama de DOE-Macsyma para la comunidad científica y fue también él quien en 1998 conseguiría el permiso del DOE para distribuirla bajo la *General Public License* de la *Free Software Foundation;* es decir, a partir de ahora Maxima, así renombrada para evitar problemas legales con la versión comercial, tendría su código abierto y pasaría a ser libre (para redistribuirlo, modificarlo, estudiarlo y mejorarlo). Poco tiempo después, en julio de 2001, Schelter fallece, pero su legado queda con nosotros. Sin él, dado el fracaso de la versión comercial, quizás la comunidad hubiese perdido irremisiblemente Maxima.

Hoy en día el proyecto Maxima se aloja en los repositorios de Sourceforge (Maxima Team, 2008a) y es mantenido por un grupo internacional de programadores cuyo interés no es otro que el de seguir mejorando este programa que por ser libre, paradójicamente, no es de nadie y es de todos. Desde su página web se puede acceder a toda la información relevante. El manual de referencia y diverso material introductorio también se encuentran en castellano (Maxima Team, 2008b, 2008c).

Entornos de ejecución

Maxima se puede ejecutar en Linux, Mac y Windows. Tanto el código fuente como algunos binarios precompilados se pueden descargar desde la página de proyecto[1].

El proyecto Maxima centra su atención en el desarrollo y mantenimiento de su motor matemático sin preocuparse en exceso sobre las interfaces de usuario, tarea que se deja para proyectos mantenidos por otros equipos de programadores. No obstante, los desarrolladores del programa mantienen dos interfaces de sofisticación mínima, uno de texto (Maxima) y otro semigráfica (Xmaxima); la Figura 1 es una captura del entorno de texto y la Figura 2 del entorno semigráfico. Como se ve, las expresiones matemáticas se construyen en ambos en base a caracteres ASCII; El entorno Xmaxima tiene la particularidad de disponer de un sencillo visor de páginas web en su ventana inferior que le permite acceder a la ayuda o a cualquier otro documento en formato HTML.

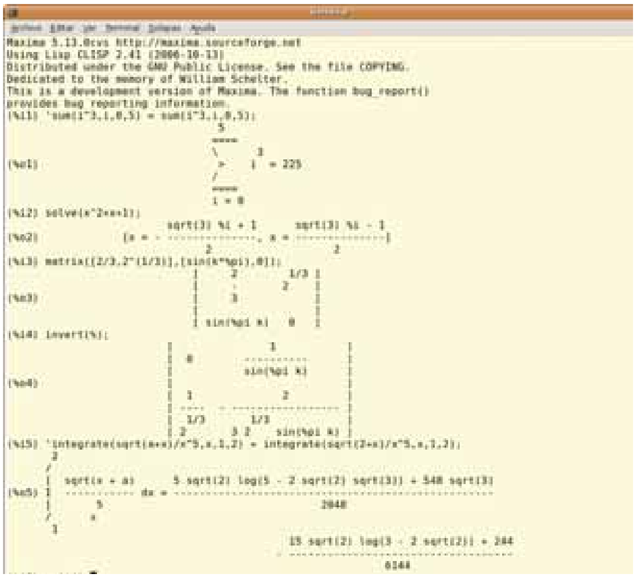


Figura 1

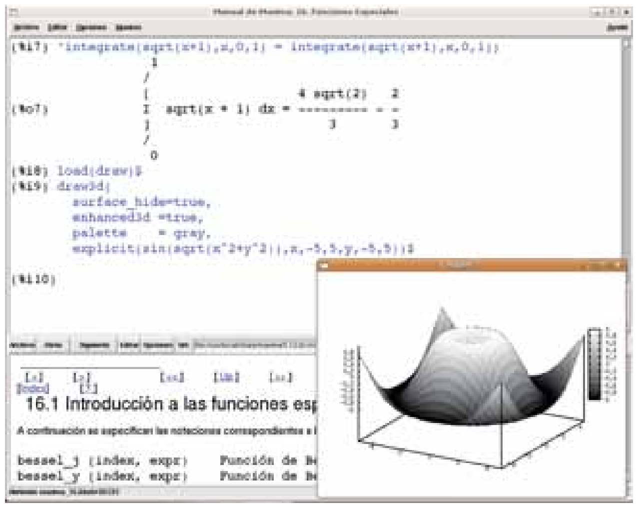


Figura 2

Probablemente el interfaz gráfico más utilizado sea Wxmaxima, que junto con los dos anteriores, son los que vienen incluidos en el ejecutable que se distribuye para usuarios de Windows. Es de más fácil uso que los dos anteriores, ya que junto a una mejor notación matemática, incorpora una serie de menús que facilitan el uso del programa; la Figura 3 es una captura de Wxmaxima en acción bajo Linux.

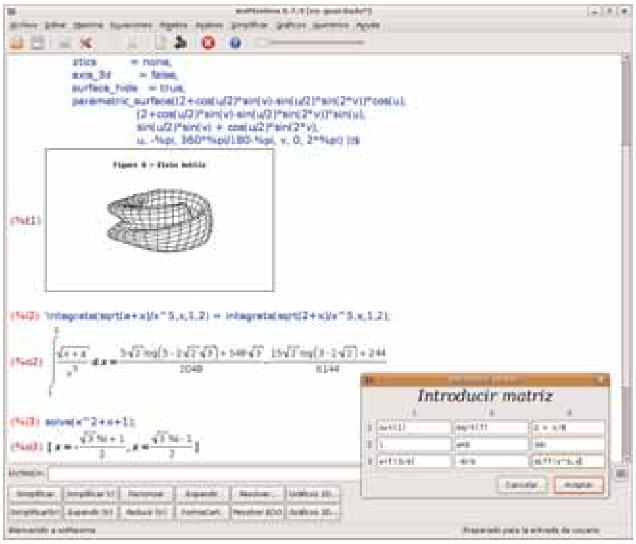


Figura 3

Un paso más en cuanto a nivel de sofisticación es el programa Texmacs, que se trata de un editor de textos WYSIWYG capaz de poder abrir sesiones de otros programas y formatear sus salidas a LaTex, con lo cual el nivel de presentación de expresiones matemáticas es óptimo, tal como se puede apreciar en la Figura 4.

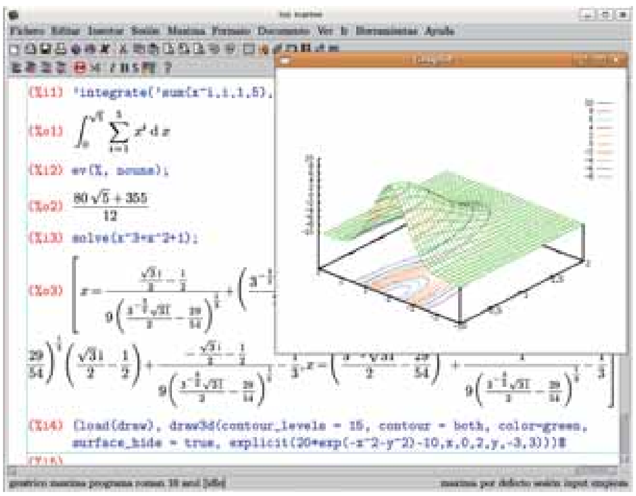


Figura 4

Existe también cierta actividad por parte de la comunidad de usuarios orientada al desarrollo de interfaces vía web, esto es, servidores de internet que tienen instalado Maxima y que permiten que un visitante que accede a la página pueda realizar cálculos, con cualquier navegador y desde cualquier equipo remoto. A éstos y a algunos otros entornos relacionados con Maxima se tiene acceso desde la página web del proyecto[2].

Una sesión con Maxima

Una vez se llama al programa veremos la cabecera, que incluye cierta información sobre la compilación y cómo ayudar al proyecto en caso de encontrar fallos:

```
Maxima 5.14.0cvs http://maxima.sourceforge.net
Using Lisp CLISP 2.41 (2006-10-13)
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
Dedicated to the memory of William Schelter.
This is a development version of Maxima. The function bug_report()
provides bug reporting information.
(%i1)
```

Tras la cabecera, el símbolo *%i1* nos indica que Maxima está esperando nuestra primera entrada (*i* de *input*). Pidámosle ahora la ejecución de un sencillo cálculo:

(%i1) (5/10 + 5!)^2;
(%o1)

$$\frac{58081}{4}$$

(%i2)

La instrucción debe terminarse con el punto y coma (;) antes de pulsar la tecla de retorno. La respuesta que se obtiene está etiquetada con *%o1* (*o* de *output*), indicando después que está a la espera de la segunda entrada por parte del usuario. Como se ve, Maxima evita dar resultados en formato decimal, pero se le pueden solicitar haciendo uso de la función *float*, tal como se indica a continuación, donde se calcula el valor de π en doble precisión:

(%i2) float(%pi);
(%o2)

3.141592653589793

Si se quiere mayor precisión, se asignará a la variable global *fpprec* el número de decimales deseado y se hará uso de la función *bfloat* (*b* de *big float*). En este ejemplo se ve que el operador a utilizar para asignar un valor a una variable son los dos puntos (:) y que cuando una instrucción termina con el símbolo de dólar ($) Maxima omite el resultado calculado, de ahí que no aparezca *%o3*

(%i3) fpprec:200$ bfloat(%e);

(%o4)

2.7182818284590452353602874713526624977572470936\
9995957496696762772407663035354759457138217852516\
6427427466391932003059921817413596629043572900\
3429526059563073813232862794349076323382988075316\
95251019b0

Junto con las constantes *%pi* y *%e* (la base de los logaritmos naturales) Maxima también conoce la razón áurea (*%phi*), la constante de Euler-Mascheroni (*%gamma*) y la unidad imaginaria (*%i*), la cual utilizaremos para construir números complejos. En los siguientes ejemplos autoexplicativos, las parejas de símbolos /* *y* */ encierran comentarios que el intérprete de instrucciones ignorará:

(%i5) z1: 3+4*%i; /* complejo en forma rectangular */
(%o5)

$$4i+3$$

(%i6) z2: exp(7*%pi/8*%i); /* forma polar */
(%o6)

$$e^{\frac{7i\pi}{8}}$$

(%i7) z1+z2;
(%o7)

$$e^{\frac{7i\pi}{8}}+4i+3$$

(%i8) rectform(%); /* pide forma rectangular */
(%o8)

$$i\left(\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)+4\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)+3$$

(%i9) polarform(%o7); /* pide forma polar */
(%o9)

$$\sqrt{\left(\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)+4\right)^2+\left(\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)+3\right)^2}\,e^{i\arctan\left(\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)+4}{\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)+3}\right)}$$

En los ejemplos anteriores, el símbolo *%* aislado hace referencia al último resultado devuelto por Maxima, mientras que *%o7* se refiere, obviamente, a la salida número siete.

En materia algebraica, Maxima puede expandir y factorizar expresiones, así como calcular valores numéricos de las misma,

(%i10) expand((a-b)^2*(a-1));
(%o10)

$$ab^2-b^2-2a^2b+2ab+a^3-a^2$$

(%i11) factor(%);
(%o11)

$$(a-1)(b-a)^2$$

(%i12) /* Valor numérico. ¡Ojo: se usa la igualdad! */
subst([a=1/5, b=2], %);
(%o12)

$$-\frac{324}{125}$$

Existen varias funciones para la resolución de ecuaciones, siendo la más general *solve*. En el siguiente ejemplo se resuelve un sistema no lineal que incluye un coeficiente literal,

(%i13) solve([3*x^2-y=6,x^2=y+a],[x,y]);
(%o13)

$$\left[\left[x=\frac{-\sqrt{6-a}}{\sqrt{2}},y=-\frac{3a-6}{2}\right],\left[x=\frac{\sqrt{6-a}}{\sqrt{2}},y=-\frac{3a-6}{2}\right]\right]$$

Los corchetes delimitan listas cuyos elementos se separan por comas, por lo que los argumentos de *solve* son dos listas, la primera con las ecuaciones a resolver y la segunda con las incógnitas a aislar; el resultado que se obtiene es también una lista. Dado que Maxima está programado en Lisp (*List Processing*) no es de extrañar su habilidad para operar y manipular esta estructura de datos, con la cual, dicho sea de paso, se puede representar cualquier otro tipo de información estructurada. La siguiente secuencia muestra algunas de sus posibilidades,

(%i14) r: [1/2,[a,3],sqrt(3)/2,%pi];
(%o14)

$$\left[\frac{1}{2},[a,3],\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right]$$

(%i15) r[3]; /* devuelve el tercer elemento */
(%o15)

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(%i16) reverse(r); /* le da la vuelta a la lista */
(%o16)

$$\left[\pi,\frac{\sqrt{3}}{2},[a,3],\frac{1}{2}\right]$$

(%i17) r[2]: 0; /* cambia segundo elemento */
(%o17)

$$0$$

(%i18) r; /* estado actual de r */
(%o18)

$$\left[\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2},\pi\right]$$

(%i19) map(sin, r); /* aplica seno a elementos */
(%o19)

$$\left[\sin\left(\frac{1}{2}\right),0,\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right),0\right]$$

(%i20) apply("+", r); /* suma elementos */
(%o20)

$$\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$$

(%i21) 5*r; /* producto de número por vector */
(%o21)

$$\left[\frac{5}{2},0,\frac{5\sqrt{3}}{2},5\pi\right]$$

(%i22) r.[a,b,c,d]; /* producto escalar */
(%o22)

$$\pi d+\frac{\sqrt{3}c}{2}+\frac{a}{2}$$

(%i23) r+[a,b,c,d]; /* suma vectorial */
(%o23)

$$\left[a+\frac{1}{2},b,c+\frac{\sqrt{3}}{2},d+\pi\right]$$

Vemos que las propias listas se pueden interpretar como vectores y operar como tales.

En cuanto al cálculo infinitesimal, Maxima puede calcular límites, tal como muestran los siguientes ejemplos,

(%i24) limit(1/sqrt(x-1),x,inf); /* x tiende a infinito */
(%o24)

$$0$$

(%i25) limit(1/(x-1),x,1,plus); /* límite por la derecha */
(%o25)

$$\infty$$

El símbolo *inf* hace referencia al infinito y *minf* al menos infinito, de igual modo que plus se utiliza para calcular el límite lateral derecho y minus para el izquierdo. A continuación se aborda el cálculo de la derivada de una función:

(%i26) diff(x^log(a*x),x); /* primera derivada respecto de x */
(%o26)

$$x^{\log(ax)}\left(\frac{\log(ax)}{x}+\frac{\log(x)}{x}\right)$$

(%i27) diff(x^log(a*x),x,2); /* segunda derivada */
(%o27)

$$x^{\log(ax)}\left(\frac{\log(ax)}{x}+\frac{\log(x)}{x}\right)^2+x^{\log(ax)}\left(\frac{-\log(ax)}{x^2}-\frac{\log(x)}{x^2}+\frac{2}{x^2}\right)$$

y la integración,

(%i28) integrate(cos(x)^3/exp(x),x); /* integral indefinida */
(%o28)

$$\frac{e^{-x}\left(3\sin(3x)-\cos(3x)+15\sin(x)-15\cos(x)\right)}{40}$$

(%i29) integrate(cos(x)^3/exp(x),x,0,2); /* integral definida */
(%o29)

$$\frac{e^{-2}\left(3\sin(6)-\cos(6)+15\sin(2)-15\cos(2)\right)}{40}+\frac{2}{5}$$

La forma más directa de construir una matriz es mediante la función *matrix*, que admite como argumentos tantas listas como sea necesario, cada una de ellas representando una fila,

(%i30) A: matrix([2,-6,0],[4,6,-3],[0,4,0]);
(%o30)

$$\begin{pmatrix}2 & -6 & 0\\ 4 & -6 & -3\\ 0 & 4 & 0\end{pmatrix}$$

(%i31) ident(3); /* matriz identidad de orden 3 */
(%o31)

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(%i32) invert(A); /* inversión de A */
(%o32)

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4}\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}\\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

(%i33) A.%; /* producto matricial */
(%o33)

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

No nos extendemos más en mostrar las capacidades simbólicas y numéricas de Maxima, siendo imposible hacerle justicia a este programa en sólo unas pocas páginas. Sí se puede mencionar que aunque aquí se ha dado un breve esbozo en base a contenidos que resultan familiares a alumnos de nivel de secundaria, las habilidades de Maxima van mucho más allá de este nivel. No se ha hecho referencia alguna a los métodos numéricos de resolución de ecuaciones o de integración, ni a los procedimientos de cuadratura de ecuaciones diferenciales, a los módulos de probabilidad, simulación estocástica, estadística descriptiva e inferencial, álgebra lineal (vectores y valores propios, descomposiciones de Jordan), operaciones con conjuntos, combinatoria, teoría de grafos, análisis tensorial y un largo etcétera. El manual de referencia, traducido al español (Maxima Team, 2008b), es accesible desde el propio programa haciendo uso del operador *?*, tal como muestra el siguiente ejemplo en el que se pide información sobre cierta función,

```
(%i34) ? sqrt

 — Función: sqrt (<x>)
     Raíz cuadrada de <x>. Se representa internamente por
     `<x>^(1/2)‘.
     Véase también `rootscontract’.

     Si la variable `radexpand’ vale `true’ hará que las raíces
     `n’-ésimas de los factores de un producto que sean
     potencias de `n’ sean extraídas del radical; por ejemplo,
     `sqrt(16*x^2)‘ se convertirá en `4*x’ sólo si `radexpand’
     vale `true’.
```

Cuando Maxima se carga en la memoria, no todas sus funciones son accesibles, ya que muchas se encuentran en módulos o paquetes adicionales que se distribuyen junto con el núcleo del programa. Un ejemplo de esto es el paquete *draw*, un interfaz para la generación de gráficos en dos y tres dimensiones3. La siguiente secuencia carga el paquete con la llamada a la función *load* y luego genera una escena en dos dimensiones, que incluye una función explícita, otra paramétrica y un conjunto de puntos aislados generados aleatoriamente; el resultado en la Figura 5.

```
(%i35) load(draw)$
(%i36) draw2d(
        key          = “Polinomio cubico”,
        explicit(%pi*x^3+sqrt(2)*x^2+10,x,0,2),
        color        = blue,
        key          = “Curva parametrica”,
        line_width   = 3,
        nticks       = 50,
        parametric(2*cos(rrr)+3, rrr, rrr, 0, 6*%pi),
        line_type    = dots,
        points_joined = true,
        point_type   = diamant,
        point_size   = 3,
        color        = red,
        line_width   = 1,
        key          = “Datos empiricos”,
        points(makelist(random(40.0),k,1,5)),
        title        = “REPRESENTACION DE CURVAS”,
        terminal     = eps )$
```

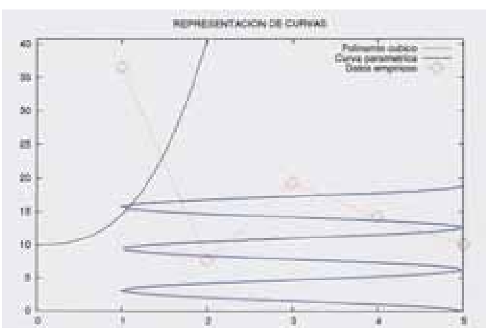


Figura 5

Los argumentos de *draw2d* son de dos tipos: *opciones*, los que tienen igualdades, y *objetos gráficos*, cuyas sintaxis son similares a las funciones. Las opciones se leen secuencialmente y una vez se les asignan valores éstos se mantienen activos hasta que se vuelven a cambiar o hasta el final de la descripción de la escena. Algunas opciones afectan a cómo se dibujarán los objetos y otras hacen referencia al gráfico en su conjunto.

La siguiente instrucción genera un gráfico tridimensional consistente en una superficie explícita y dos curvas paramétricas. El resultado en la Figura 6.

```
(%i37) draw3d(
        color        = green,
        explicit(exp(sin(x)+cos(x^2)),x,-3,3,y,-3,3),
        color        = blue,
        parametric(cos(5*u)^2,sin(7*u),u-2,u,0,2),
        color        = brown,
        line_width    = 2,
        parametric(t^2,sin(t),2+t,t,0,2),
        surface_hide  = true,
        title        = “Superficies y curvas”,
        color        = red,
        label([“ARRIBA”,-2,0,3]),
        label([“ABAJO”,2,0,-3]),
        rot_horizontal = 10,
        rot_vertical   = 84,
        terminal       = eps )$
```

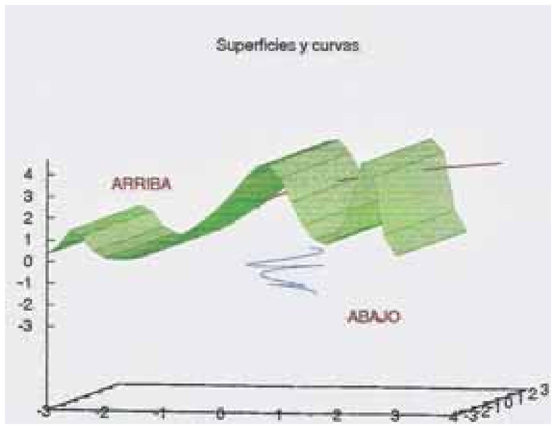


Figura 6

La opción gráfica *terminal* es la que se encarga de seleccionar el formato del gráfico; se admiten eps, png, jpg, gif y gif animado, siendo su valor por defecto la ventana gráfica de la pantalla[4].

Otra de las características de Maxima es un lenguaje de programación sencillo que incluye los elementos básicos de declaración de variables locales, diferentes tipos de bucles y condicionales. A modo de ejemplo, el siguiente código define una función de nombre *fact* que admite un único argumento, que debe ser entero no negativo, del que devuelve su factorial. El operador que permite definir la función es *:=* , al que le sigue un condicional que controla si el argumento es entero no negativo; si la condición se verifica, entonces se crea un bloque con variable local *prod* inicializada a 1 y que irá recogiendo los sucesivos productos; terminado el bucle, el valor *prod* será el mostrado al usuario. De evaluarse el condicional como falso, entonces se emitirá un mensaje de error.

```
(%i38) fact(n):=
         if integerp(n) and n >= 0
           then block([prod:1],
                  for k:1 thru n do prod:prod*k,
                  prod)
           else error("Ojo: ", n, "no es entero no-negativo") $
```

Una vez definida la función, podemos hacer algunos cálculos:

```
(%i39) fact(-6);
Ojo:  - 6 no es entero no-negativo
#0: fact(n=-6)
 — an error.  To debug this try debugmode(true);

(%i40) fact(0);
                                        1
(%i41) fact(200);

788657867364790503552363213932185062295135977687\
173263294742533244359449963403342920304284011984\
623904177212138919638830257642790242637105061926\
624952829931113462857270763317237396988943922445\
621451664240254033291864131227428294853277524242\
407573903240321257405579568660226031904170324062\
351700858796178922222789623703897374720000000000\
000000000000000000000000000000000000000
```

Este ejemplo sirve también para mostrar que Maxima no pone límites al número de dígitos de los enteros. Valga también decir que esta función no era necesaria, pues ya se dispone de la función factorial nativa compilada (*200!;*). En la definición de funciones se admite la recursividad y la admisión de un número arbitrario de argumentos, así como que éstos puedan ser funciones, además de expresiones o nombres de variables. La práctica habitual es que el usuario escriba su propio código en un fichero de texto de extensión *.mac* y que una vez dentro de Maxima lo cargue ejecutando la instrucción *load("ruta/fichero.mac")*.

Por último, para los más intrépidos, téngase en cuenta que el hecho de que Maxima sea libre implica que su código fuente en Common Lisp es accesible para el usuario, lo que a su vez conlleva la posibilidad de escribir directamente los propios paquetes en este lenguaje, lo que en determinados contextos permitirá generar rutinas más rápidas. En todo caso, no es necesario conocer Lisp a fin de sacarle partido al programa, pudiendo implementar cualquier procedimiento en lenguaje Maxima.

Maxima como recurso pedagógico

En general, se pueden considerar tres contextos diferentes en los que un programa de estas características puede resultar útil: investigación, matemática aplicada y docencia.

Sin duda es en el campo de la investigación donde un programa de matemáticas generales tenga menos peso, ya que campos especializados requieren de software específico; excepción evidente es el campo del álgebra computacional, donde Maxima, al ser de código abierto y estar programado en un lenguaje especialmente adaptado al procesamiento simbólico, aventaja a otros programas similares de carácter comercial, en los que el código fuente queda oculto al usuario o, en este caso, investigador.

En un contexto más pragmático, que es el de la matemática aplicada, Maxima gana en importancia; no en vano algunos de sus programadores actuales son ingenieros que desarrollan su actividad profesional en el ámbito industrial. Maxima puede superar con ventaja otras herramientas matemáticas a las que los ingenieros están habituados, como las hojas de cálculo o programas de cálculo numérico específico con ninguna o escasa capacidad de procesamiento simbólico. Maxima ha importado potentes rutinas numéricas mediante la traducción a Lisp de programas libres escritos originariamente en Fortran y bien conocidos y puestos a prueba durante muchos años (*quadpack* para integración numérica o *lapack* para álgebra lineal son un par de ejemplos).

Pero sin duda el campo en el que un programa libre como Maxima tiene pocos rivales es el de la formación y docencia. Ningún docente puede sugerir a sus alumnos que intenten disponer de programas como Mathematica o Maple en sus equipos (¿no sería ésta una invitación encubierta a la piratería?), y pocos afortunados podrán sugerir a sus administradores la compra de múltiples licencias para dotar a sus laboratorios y aulas de informática con estos u otros programas de pago. El libre acceso a un programa de cálculo simbólico, numérico y gráfico puede romper esquemas en lo que al uso de las TIC en la enseñanza matemática se refiere. Junto con Maxima, otros programas de cálculo simbólico y código abierto son Axiom o SymPy.

Se presentan a continuación algunas ideas sobre el uso de Maxima como herramienta pedagógica. La mayor parte de ellas han formado parte de nuestra actividad docente en secundaria, bien por parte del autor, bien por parte de otros colegas.

Ejemplo 1

Esta actividad está orientada a alumnos de tercero de ESO. Se trata de ir resolviendo ecuaciones paso a paso, haciendo énfasis en las operaciones que hay que hacer cada vez; la idea es romper con la clásica dinámica de "lo que está sumando pasa restando", etc. El diálogo se efectúa en inglés porque el grupo para el que se escribió era una sección bilingüe (enseñanza CLIL); el cambio de idioma implica únicamente abrir el fichero texto que guarda el programa[5] e ir traduciendo las cadenas alfanuméricas correspondientes. Las entradas que realiza el alumno se han marcado con -> para facilitar la interpretación de la sesión; tales entradas deben ir seguidas de una pulsación de la tecla de retorno:

```
        (%i1) load(ec1)$ /* carga fichero con programa */

=== WELCOME TO FIRST DEGREE EQUATIONS ===

        Exercise number ... (max. 4)
->      1 ;
        The unknown of this equation is:  x
```

$$3x+1=7x$$

```
         +: Add an expression
         -: Subtract an expression
         *: Multiply by an expression
         /: Divide by an expression
         p: Remove parentheses
         f: Factorize
        Your choice is ...
->      +;
        Write number or algebraic expression:
->      -1;
```

$$3x=7x-1$$

```
         +: Add an expression
         -: Subtract an expression
         *: Multiply by an expression
         /: Divide by an expression
         p: Remove parentheses
         f: Factorize
        Your choice is ...
->      -;
        Write number or algebraic expression:
->      7*x;
```

$$-4x=-1$$

```
         +: Add an expression
         -: Subtract an expression
         *: Multiply by an expression
         /: Divide by an expression
         p: Remove parentheses
         f: Factorize
        Your choice is ...
->      /;
        Write number or algebraic expression:
->      -4;

        Congratulations! You did it:
```

$$x=\frac{1}{4}$$

———————————————————

```
        Exercise number ... (max. 4); 0 => Exit
->      0;
```

En esencia, se trata de un bucle que presenta de cada vez un menú con las acciones que el alumno puede realizar; si éste realiza una acción que no sea la óptima, como por ejemplo dividir por -5 en lugar de -4 en el último paso, Maxima se lo admitirá, pero tendrá que arreglar la situación haciendo únicamente uso de las opciones del menú. Para clarificar, veamos cómo hubiese sido el diálogo en este caso:

```
         +: Add an expression
         -: Subtract an expression
         *: Multiply by an expression
         /: Divide by an expression
         p: Remove parentheses
         f: Factorize
        Your choice is ...
->      /;
        Write number or algebraic expression:
->      5;
```

$$-\frac{4x}{5}=-\frac{1}{5}$$

```
         +: Add an expression
         -: Subtract an expression
         *: Multiply by an expression
         /: Divide by an expression
         p: Remove parentheses
         f: Factorize
        Your choice is ...
->      *;
        Write number or algebraic expression:
->      -5/4;

        Congratulations! You did it:
```

$$x=\frac{1}{4}$$

Aquí se ha mostrado una sencilla ecuación de primer grado, pero la idea se puede extender a segundo grado (el alumno tratará de formar cuadrados de binomios y extraer la raíz cuadrada), sistemas de ecuaciones e incluso ecuaciones con coeficientes literales, no numéricos. Nótese que en ningún momento se ha hecho uso de las rutinas de resolución de ecuaciones de Maxima.

Ejemplo 2

Cuando en una sesión de álgebra en secundaria se hace necesario trabajar con problemas contextualizados, se podrán ensayar más problemas si la parte mecánica de resolución de la ecuación resultante se deja a la máquina; así, para cada problema, la secuencia de la tarea a realizar por parte del alumno sería:

1. Lectura, interpretación y extracción de los datos necesarios para la resolución del problema.
2. Diseño del modelo matemático y planteamiento de la ecuación o sistema.
3. Resolución con Maxima de la ecuación o sistema.
4. Interpretación y validez de las soluciones y eliminación de las no válidas dentro del contexto dado.

El hecho de que el paso número 3 se deje a la máquina permitirá un ahorro de tiempo que se podrá dedicar a realizar más problemas y trabajar con más intensidad el resto de los apartados. Huelga decir que esto no exime al alumno de saber resolver ecuaciones manualmente, pero en esta sesión se trabaja más la matematización de situaciones contextualizadas. Al contrario que en el ejemplo anterior, aquí sí que será necesario hacer uso de las rutinas de Maxima para resolver ecuaciones, principalmente *solve*. Sigue un ejemplo de enunciado y su resolución.

> El tratado matemático chino más antiguo del que se tiene noticia es el Suan shu shu, encontrado en unas excavaciones realizadas durante el año 1983 en la tumba de un oficial administrativo enterrado en el año 186 AC (Dinastía Han Occidental). El documento está escrito en 190 tiras de bambú y consta de una amplia colección de problemas aritméticos. Este problema es el número 51 de la serie: “En un reparto, si a cada persona se le dan dos monedas, entonces sobran tres monedas; si a cada persona se le dan tres monedas, entonces faltan dos monedas. ¿Cuántas personas y monedas hay?”

Si llamamos p al número de personas y m al de monedas, podemos plantear el modelo como:

$$\begin{aligned} 2p &= c - 3 \\ 3p &= c + 2 \end{aligned}$$

o como:

$$\begin{aligned} 2p + 3 &= c \\ 3p - 2 &= c \end{aligned}$$

En cualquier caso, Maxima resuelve. Los alumnos podrán comprobar rápidamente qué modelos de los planteados por ellos son equivalentes.

```
(%i1) solve([2*p=c-3, 3*p=c+2], [p,c]);
(%o1)
```

$$[[p = 5, c = 13]]$$

```
(%i2) solve([2*p+3=c, 3*p-2=c], [p,c]);
(%o2)
```

$$[[p = 5, c = 13]]$$

Ejemplo 3

Cuando un Departamento Didáctico decide incluir en su programación que sus alumnos adquieran a lo largo de su formación secundaria unas mínimas habilidades en técnicas de programación, no es difícil que puedan llegar al último curso de Bachillerato con el bagaje necesario para afrontar determinadas tareas de desarrollo de algoritmos numéricos con el lenguaje de Maxima, siempre que haya un planteamiento conjunto entre los miembros del Departamento. Tal objetivo se puede conseguir si ya en la ESO utilizan Maxima a modo de calculadora, para luego trabajar a un nivel elemental condicionales y bucles, al tiempo que escriben sus primeras funciones. Algunos bloques del currículo del Bachillerato se prestan muy bien a que luego se ejerciten estas habilidades. De una unidad didáctica de la asignatura optativa de segundo de Bachillerato Métodos Estadísticos y Numéricos se han extraído los siguientes problemas (la Figura 7 que acompaña al enunciado del problema también se ha generado con las rutinas gráficas de Maxima[6]):

Problema 1. Sea una función *f(x)* a integrar numéricamente en el intervalo [a, b] haciendo uso de n rectángulos de igual base,

Figura 7

a) ¿Cuánto mide la base d de los rectángulos?
b) Supón que llamamos x_i a los sucesivos puntos de la partición, tal como muestra el gráfico adjunto, ¿cómo expresarías el área del primer rectángulo? ¿del segundo? ¿del último? ¿del i-ésimo rectángulo?
c) ¿Cómo expresarías x_i en función de a y de d?
d) Haciendo uso de los resultados de los apartados anteriores, completa la siguiente expresión:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{\dots\dots}^{\dots\dots} \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Problema 2. La programación de un integrador numérico pasa por escribir un código que realice las operaciones deducidas en el problema anterior. Trata de escribir tú mismo este código atendiendo a las siguientes especificaciones:

- El nombre de la función a programar y sus argumentos deben ser *intnum(fun,var,a,b,n)*, donde *fun* es el integrando, *var* es el nombre de la variable independiente, *a* y *b* los límites del intervalo de integración y n el número de rectángulos.

- Utiliza un *block* que te permita especificar las variables locales que vayas a necesitar.
- Una de las variables, de valor inicial nulo, deberá ir guardando las sumas de las áreas.

Siguen en esta unidad algunos otros problemas en los que se invita al alumno a poner a prueba su algoritmo comparándolo con integrales definidas de fácil resolución manual y comprobar cómo varía la precisión alterando el parámetro *n*. También se le pedirá la integración de funciones que ni él ni Maxima podrán resolver de forma exacta, así como diseñar variantes como que la altura de los rectángulos se evalúe en los puntos medios de los intervalos de la partición o la sustitución de rectángulos por trapecios.

En definitiva, de lo que se trata es de llegar a una expresión como para a partir de ella conseguir un programa similar a éste:

```
intnum(fun,var,a,b,n):=
  block([suma: 0, d: (b-a) / n],
    for i:1 thru n do
      suma: suma + subst(var = a+i*d, fun),
    float(d * suma) )$
```

y realizar cálculos tales como

```
(%i1) intnum(u^2,u,0,1,100);
(%o1)                    0.33835
```

Ejemplo 4

En el sistema educativo alemán existe una prueba al final de la formación secundaria similar a nuestra Selectividad. A diferencia de la nuestra, tal prueba, allí llamada *Abitur*, es propuesta por los propios docentes de secundaria a sus alumnos. El siguiente problema ha formado parte de la *Abitur* presentada a los alumnos de un Instituto (*Gymnasium*) de la ciudad de Aquisgrán (*Aachen*) en el año 2006, la cual debían realizar frente a un ordenador con Maxima instalado y un procesador de textos para escribir y presentar sus resultados[7]:

> El gráfico de la función coseno hiperbólico recibe el nombre de catenaria, pues su forma se ajusta a la de una cadena que cuelga sujeta por sus extremos y expuesta a la atracción gravitatoria. Haciendo uso de cierto parámetro positivo del cual dependerá la forma de la curva, tenemos :
>
> $$f(x)=\cosh(x/a)$$
>
> a) Obtén las representaciones gráficas de la catenaria para a = 1, 2, 3 y 4 en el dominio [-8, 8] y rango [0, 12] para las ordenadas. Añade para cada función una leyenda que haga referencia al valor paramétrico utilizado.
>
> b) Demuestra que para cualquier a positivo, el punto más bajo de la catenaria se encuentra en el punto T(0, a).

En primer lugar se espera que el alumno defina en Maxima la función correspondiente y haga una representación gráfica como la siguiente, cuyo aspecto se muestra en la Figura 8.

```
(%i1) f(a,x):= a*cosh(x/a)$
(%i2) load(draw)$
(%i3) draw2d(
        yrange   = [0, 12],
        grid     = true,
        terminal = eps,
        key = "a = 1", color = black, explicit(f(1,x), x, -8, 8),
        key = "a = 2", color = red  , explicit(f(2,x), x, -8, 8),
        key = "a = 3", color = blue , explicit(f(3,x), x, -8, 8),
        key = "a = 4", color = green, explicit(f(4,x), x, -8, 8) )$
```

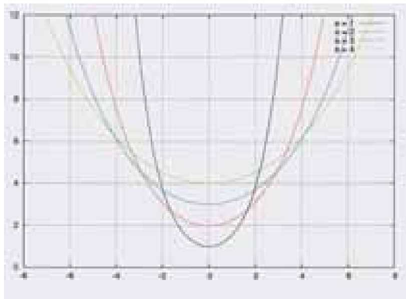


Figura 8

La respuesta a la segunda pregunta requiere echar mano de las capacidades simbólicas de Maxima, calculando la derivada de la función, igualándola a cero y resolviendo la ecuación resultante:

```
(%i4) diff(f(a,x), x)=0;
(%o4)
```

$$\sinh\left(\frac{x}{a}\right)=0$$

```
(%i5) solve(%,x);
(%o5)
                  [x=0]
```

Luego las coordenadas del punto crítico son, para un a>0 arbitrario,

```
(%i6) [0,f(a,0)];
(%o6)
                  [0, a]
```

Sólo falta comprobar ahora que la segunda derivada de la catenaria es positiva en este punto, para asegurar que el punto crítico corresponde a un mínimo local:

```
(%i7) diff(f(a,x),x,2);
(%o7)
```

$$\frac{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{a}$$

(%i8) subst(x=0, %); /* evaluando en x=0 */
(%o8)

$$\frac{1}{a}$$

que obviamente es positivo al serlo el parámetro a.

El problema propuesto tiene más apartados, los cuales transcribimos a continuación:

> c) Describe brevemente una interpretación del parámetro a de la función de la catenaria.
> d) Un arco en forma de catenaria invertida es el Gateway Arch en St. Louis, Missouri, EEUU. Su perfil externo tiene una altura de 192 m y en el suelo una anchura de 192 m. El perfil interno tiene una altura de 187.50 m y un ancho a nivel del suelo de 161.50 m. La función de una catenaria invertida es $arch(x) = -a\cosh(x/a) + a + h$. Demuestra que su punto más alto se encuentra en HP(0, h).
> e) Calcula los parámetros a y h de los perfiles externo e interno del Gateway Arch. El parámetro a debe calcularse numéricamente; utiliza para ello una de las funciones de Maxima para el efecto, tomando como solución inicial 1.0.
> f) Dibuja los perfiles del Gateway Arch. Utiliza el dominio [-100, 100] y el rango [0, 200] para las ordenadas.
> g) Calcula la superficie limitada por el perfil interior y el suelo.
> h) Calcula nuevamente el parámetro a del perfil externo, pero ahora realiza tú mismo cada iteración del método de Newton. Resuelve la ecuación:
> $$-a\cosh(96/a) + a + 192 = 0$$
> comenzando con la solución inicial a = 30,0. Comprueba tu resultado con el del apartado e).

En el apartado e) el alumno debe hacer uso de la función *newton* que ejecuta el algoritmo de Newton-Raphson y que ya viene incluida en Maxima. En el apartado g) deberá utilizar la función *integrate* que ya conocemos.

Ejemplo 5

En este ejercicio se plantea el uso de Maxima para demostrar ciertos resultados de carácter teórico.

> Sean $X_1 \sim N(m_1, s_1)$ y $X_2 \sim N(m_2, s_2)$ dos variables aleatorias normales independientes; sea también $Z = X_1 + X_2$. Demuestra que Z es también una v.a. normal y calcula sus parámetros.

Para resolver el problema tenemos en cuenta que la función característica de Z (la transformada de Fourier de su función de densidad) es igual al producto de las funciones características de X_1 y X_2.

```
(%i1) /* Función densidad de una normal N(m,s) */
    f(x,m,s):= 1 / (s*sqrt(2*%pi)) * exp(- (x-m)^2/(2*s^2))$
(%i2) /* Función característica de una normal N(m,s) */
    phi(t,m,s):= integrate(f(x,m,s)*exp(%i*t*x),x,minf,inf)$
(%i3) /* En general, para una N(m,s)... */
    (assume(s>0), phi(t,m,s));
(%o3)
```

$$e^{\frac{2imt - s^2t^2}{2}}$$

Se calcula el producto de las funciones características de X_1 y X_2 y se reduce el resultado; comparando éste con la salida *%o3* parece claro que estamos ante la función característica de una normal:

```
(%i4) (assume(s1>0, s2>0), phi(t,m1,s1) * phi(t,m2,s2));
(%o4)
```

$$e^{\frac{2im_2t - s_2^2t^2}{2} + \frac{2im_1t - s_1^2t^2}{2}}$$

```
(%i5) radcan(%);
(%o5)
```

$$e^{\frac{(s_2^2 + s_1^2)t^2 + (-2im_2 - 2im_1)t}{2}}$$

Una sencilla llamada a la función solve nos dirá qué valores corresponden a la esperanza y desviación típica de Z:

```
(%i6) solve([realpart(log(%o3))=realpart(log(%o5)),
          imagpart(log(%o3))=imagpart(log(%o5))],
          [m,s]);
(%o6)
```

$$\left[\left[m = m_2 + m_1, s = -\sqrt{s_2^2 + s_1^2}\right], \left[m = m_2 + m_1, s = \sqrt{s_2^2 + s_1^2}\right]\right]$$

Evidentemente, desechamos la primera solución, en la que $s<0$.

Reflexiones finales

Como se ha visto, los sistemas de cálculo simbólico pueden utilizarse como herramienta pedagógica en todos los niveles de la enseñanza. La propia experiencia, así como el intercambio de impresiones con otros colegas que también hacen uso de este y otros programas similares, permiten extraer algunas conclusiones, por supuesto opinables y posiblemente sujetas a no pocas matizaciones (García et al., 1995).

Como ventajas, destaca la flexibilidad que un sistema programable tiene a la hora de amoldarlo a multitud de situaciones, niveles y necesidades. Sistemas de cálculo como Maxima o similares permiten experimentar directamente sobre modelos reales, de mayor dificultad matemática, evitando la dispersión de esfuerzos en cálculos tediosos y centrando la atención más en los conceptos que en las habilidades manipulativas, reforzando lo creativo frente a lo rutinario, permitiendo dedicar más tiempo a reflexionar sobre los modelos y los resultados. Las capacidades gráficas ayudan a interpretar los aspectos geométricos de los fenómenos bajo estudio; los gráficos son inmediatos, al contrario que cuando se hacen a mano en la pizarra, permitiendo la interactividad cambiando parámetros, tranformando las funciones, etc. Muy importante, la licencia libre de Maxima permite que los alumnos puedan disponer de él en casa, pudiendo diseñarse nuevas formas de trabajo personal y colaborativo. Otras materias que hacen uso de la matemática pueden también beneficiarse de él, incluso permitiendo el desarrollo de proyectos interdisciplinares; en particular, el tema de programación en las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) es otro excelente ámbito de aplicación de Maxima, ya que al disponer de un lenguaje muy sencillo e intuitivo, el alumno que tenga que programar algoritmos lo puede hacer más fácil, ir al grano, sin preocuparse de declaraciones de variables, herencias de clases, crear otras estructuras de datos previas, etc., con el valor añadido de que el alumno aprende a controlar un programa que le será útil en su formación superior y durante su futuro profesional, no siendo pocos los departamentos universitarios y escuelas técnicas que están migrando a ésta y otras herramientas de código abierto, como Octave o R. Finalmente, el uso de software libre no es ajeno a la educación en valores. El alumno debe ser informado de que esto va más allá de la simple gratuidad del programa; lo que realmente hay detrás es la idea de que el conocimiento científico es un legado al que todo el mundo tiene derecho: a usarlo, a estudiarlo, a mejorarlo y a participar en su desarrollo.

> *Los sistemas de cálculo simbólico pueden utilizarse como herramienta pedagógica en todos los niveles de la enseñanza*

Como en todo, también aquí hay inconvenientes. Aunque parece que cada vez menos, no siempre existe una disponibilidad razonable de los recursos informáticos y de hardware. Por otro lado, el docente que quiera hacer uso de estas herramientas, tendrá que reflexionar sobre la confección de nuevas formas de elaboración de contenidos y de evaluación de alumnos, tendrá que aprender el uso de una nueva herramienta, con su lenguaje de programación, que siendo sencillo y fácil de aprender sin mucho esfuerzo, le permitirá adaptar la herramienta a su forma de trabajo. Sin duda hay un trabajo extra por parte del profesor que quizás en algunos casos no se valore suficientemente a nivel administrativo.

> *Sistemas de cálculo como Maxima o similares permiten experimentar directamente sobre modelos reales, de mayor dificultad matemática*

En cuanto al alumnado, existen ciertos riesgos, como que éste abandone sus esfuerzos por adquirir habilidades y automatismos manuales, o una pérdida del sentido crítico, materializándose en una fe ciega en los resultados del ordenador. Todo programa de ordenador tiene sus límites; de vez en cuando es bueno llevar al alumno hasta estos límites a fin de que experimente por qué no debe uno fiarse en exceso de una máquina. Una regla de oro: evitar convertir una clase de Matemáticas en una clase de Maxima; los errores sintácticos frenan la marcha de la clase; es imprescindible que los alumnos tengan que escribir al teclado lo menos posible durante la clase, a lo que ayudan en este aspecto los interfaces gráficos como Wxmaxima, cuyos menús permiten realizar un gran número de cálculos..., pero con cuidado, ya que hemos observado que los entornos gráficos pueden dispersar la atención del alumno (menús, opciones, botones, tipos de fuentes, colores, ventanas, más ventanas). Pero en fin, nada que una buena planificación de la clase no pueda solventar; en todo caso, la pauta a seguir será, como en todo lo que se empieza, la sabia estrategia de la prueba y el error, evitando tropezar dos veces en la misma piedra.

Comentarios a la bibliografía y enlaces

Desde que nace Macsyma hasta el momento actual, el programa ha pasado por varias manos y han existido, como ya queda comentado más arriba, dos historias paralelas. De cada una de estas etapas, han quedado registros escritos en forma de manuales, artículos científicos, tesis doctorales y *Technical Reports*. Algunas de las referencias que se comentan, y otras a las que aquí no se hace referencia, no son fáciles de conseguir y otras van pasando de mano en mano por la vía del escaneado y el correo electrónico. Aún así he decidido incluirlas aquí por su interés histórico y porque sus títulos sugieren el alcance y difusión que este software de cálculo simbólico tuvo durante las décadas de los ochenta y noventa, antes de la caída de la versión comercial y su renacimiento en la versión libre de Maxima.

Durante la etapa de su gestación en el MIT se han producido multitud de documentos alrededor de Macsyma, no sólo *Technical Reports* para consumo interno, sino también para el público en general (MathLab Group, 1983; Fateman, 1977). Cuando Macsyma cambia de manos, la empresa que lo adquiere también generará documentación (Bogen, 1986; Symbolics, 1988) y lo mismo hará la siguiente, y actual propietaria, cuyo nombre coincide con el del programa (Macsyma, 1995; Jones et al., 1997).

La licencia libre de Maxima permite que los alumnos puedan disponer de él en casa, pudiendo diseñarse nuevas formas de trabajo personal y colaborativo

A lo largo de dos décadas, el uso de Macsyma en diferentes ámbitos ha sido constante, hasta que ha ido decayendo debido a una dudosa gestión empresarial y a la presión ejercida por Mathematica y Maple. Se citan algunas de las numerosas referencias existentes en la literatura, como su uso en el análisis estadístico (Heller, 1991), en Física (Ari, 1989), en la educación (Bratcher, 1989) y otros contextos (Delest, 1991; Clarkson, 1989; Ivie, 1978; Kwok, 1991; DeLoatch, 1987). También por su interés histórico, merece ser destacado el uso que Stephen Wolfram (1979), *alma mater* del Mathematica, hizo de Macsyma en relación a los diagramas de Feynman; además, entre Richard Feynman y él hubo un intercambio de cartas en las que ambos discutían sobre las posibilidades de Macsyma como herramienta de cálculo en física de partículas (Feynman, 2006).

Con el nacimiento del nuevo milenio, Macsyma languidece y Maxima toma la alternativa. Buena parte de las referencias citadas contienen material de indudable interés para la versión libre, aunque los dos programas no son completamente compatibles. Aunque los dos mantienen en común buena parte del núcleo simbólico desarrollado en el MIT, a partir del momento en el que se produce la bifurcación, las filosofías de desarrollo cambian y a iguales problemas se les dan soluciones diferentes; quizás esta diferencia se acentúa cada vez más en el momento presente, dado el dinamismo que está adquiriendo la versión libre.

Desgraciadamente, las referencias bibliográficas impresas relativas a Maxima aún están pendientes de publicación. El material existente circula en formatos electrónicos (esto es, html y pdf) a través de la red, probablemente a tenor de los tiempos que vivimos. La fuente fundamental de información es la página del proyecto (Maxima Team, 2008a), desde donde se puede acceder a la documentación más relevante, como el Manual de Referencia (Maxima Team, 2008b) y diversos tutoriales (Maxima Team, 2008c), algunos de ellos también en español. En estas páginas se encuentran enlaces a otros sitios en los que se hace uso de Maxima, especialmente como herramienta educativa, y en las que el lector encontrará abundante información adicional.

Abundando en el aspecto formativo, cualquier otro documento (libro, unidad didáctica, etc.) dedicado al uso de los sistemas de cálculo simbólico, no necesariamente Maxima, dará ideas y sugerencias sobre su uso en el aula (García et al., 1995).

NOTAS

1 http://sourceforge.net/project/platformdownload.php?group_id=4933

2 Un entorno muy versátil y que también utiliza salidas en formato LaTex es el editor Emacs, de amplio uso en sistemas Unix y también muy utilizado por usuarios de Maxima en Mac. Todo lo relativo a su instalación y configuración se puede consultar en la página:
http://members3.jcom.home.ne.jp/imaxima

3 Common Lisp no incluye rutinas gráficas, por lo que Maxima necesita un programa externo que realice los gráficos, que en este caso es Gnuplot. El ejecutable de instalación de Windows ya lo incluye, pero los usuarios de Linux y Mac deberán comprobar que tienen instalada la versión 4.2 de Gnuplot como mínimo.

4 Una amplia galería de las posibilidades gráficas del paquete draw, junto con los códigos correspondientes, se pueden ver en:
http://www.telefonica.net/web2/biomates/maxima/gpdraw

5 http://www.telefonica.net/web2/biomates/maxima/ec1.mac

6 El código que ha generado este gráfico es:

```
load(draw)$

f(x):=x^3-x^2-2*x+10$

draw2d(
  yrange=[-2,23],
  fill_color=cyan,
  rectangle([-2,f(-1.5)],[-1.5,0]),
  rectangle([-1.5,f(-1)],[-1,0]),
  rectangle([-1,f(-0.5)],[-0.5,0]),
  rectangle([-0.5,f(0)],[0,0]),
  rectangle([0,f(0.5)],[0.5,0]),
  rectangle([0.5,f(1)],[1,0]),
  rectangle([1,f(1.5)],[1.5,0]),
  rectangle([1.5,f(2)],[2,0]),
  rectangle([2,f(2.5)],[2.5,0]),
  rectangle([2.5,f(3)],[3,0]),
  /* marcas eje-x */
  xtics = {[“a=x0”,-2],[“x1”,-1.5],[“x2”,-1],
        [“x3”,-.5],[“x4”,0],[“x5”,0.5],[“x6”,1],
        [“........”,2],[“b=xn”,3]},
  /* la curva */
  line_type=solid,
  line_width=3,
  explicit(f(x),x,-2,3),
     terminal = eps)$
```

7 Se reproduce aquí el examen de *Abitur*, junto con la solución parcial al mismo, con el amable permiso de su autor, el profesor Volker van Nek.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARI, N. (1989): *Application of computer code MACSYMA for electromagnetics*, en *Proceedings of the IASTED International Symposium*. Editor HAMZA, M. Expert Systems Theory and Applications, Anaheim, CA, USA, 1989. Acta Press.

BOGEN, R. (1986): *MACSYMA reference manual*. Symbolics, Inc. Cambridge Center, Cambridge, MA, USA, version 12 edition.

BRATCHER, K. (1989): *Utilization of the MACSYMA software for instructional programming*. Department of Mechanical Engineering, University of Louisville, Louisville, KY, USA.

CLARKSON, M. (1989): *An improved Laplace transform package for MACSYMA*. SIGSAM Bulletin, 19(2):31–33, Mayo.

DELEST, M. (1991): *Enumeration of polyominoes using Macsyma*. Theoret. Comput. Sci., 79(1):209–226, Febrero.

DELOATCH S. (1987): *MACSYMA usage at Langley*. NASA contractor report NASA-CR 172518, NASA, Washington, DC, USA.

FATEMAN, R. et al., editors (1977): *Proceedings of the 1977 MACSYMA Users' Conference*, number CP-2012 in NASA conference publication, Washington, DC, USA.

FEYNMAN, R. (2006) *¡Ojalá lo supiera! Las cartas de Richard Feynman*. Crítica, Barcelona.

GARCIA, A., MARTINEZ, A., MIÑANO, R. (1995): *Nuevas Tecnologías y Enseñanza de las Matemáticas*. Editorial Síntesis. Madrid.

HELLER, B. (1991): *MACSYMA for statisticians*. Wiley series in probability and mathematical statistics. Applied probability and statistics. John Wiley and Sons, New York, NY, USA.

IVIE, J. (1978): *Some Macsyma programs for solving recurrence relations*. ACM Transactions on Mathematical Software, 4(1):24–33, Marzo.

JONES, BARTLETT (1997): *Introduction to Macsyma*. Macsyma Inc. Sudbury, MA, USA.

KWOK, Y. (1991): *Application of MACSYMA to solutions of ordinary differential equations*. International journal of mathematical education in science and technology, 22(6), Noviembre.

MACSYMA Inc. (1995): *Macsyma user's guide*. Macsyma, Inc., Arlington, MA, USA, segunda edición.

MATHLAB GROUP (1983): *MACSYMA Reference Manual, Version Ten*. Massachusetts Institute of Technology, Computer Science Lab., Cambridge, MA, USA.

MAXIMA TEAM (2008a): *Maxima, a Computer Algebra System*.

http://maxima.sourceforge.net

MAXIMA TEAM (2008b): *Manual de Maxima. Traducción en español del Manual de Referencia*.

http://maxima.sourceforge.net/docs/manual/es/maxima.pdf

MAXIMA TEAM (2008c): *Documentation*.

http://maxima.sourceforge.net/documentation.html

SYMBOLICS Inc. (1988): *Macsyma User's Guide*. Burlington, MA, USA.

SYMBOLICS Inc. (1988): *MACSYMA reference manual*. Symbolics, Inc., Computer Aided Mathematics Group. Burlington, MA, USA, version 13 edition.

WOLFRAM, S. (1979) *MACSYMA tools for Feynman diagram calculations*, en *Proceedings of the 1979 MACSYMA Users Conference*, Editor LEWIS, E. Massachusetts Institute of Technology, Laboratory for Computer Science. Cambridge, MA, USA.

SUMA+ 60
Febrero 2009, pp. 21-34

Formación en práctica reflexiva de matemáticas, desde la perspectiva de un grupo de formadores

¿Qué es la práctica reflexiva? ¿Por qué un curso de formación permanente en práctica reflexiva de matemáticas? ¿Por qué diversos formadores de matemáticas nos embarcamos en este proyecto? ¿Qué diferencias pensamos que había respecto a los cursos de formación que habitualmente impartimos? ¿Cómo respondieron los profesores y profesoras asistentes al curso?

What do we mean by reflective practice? Why an in-service teacher training course on reflective practice in Maths? Why did a group of in-service teacher trainers in Maths get involved in this project? What differences did we think there were, compared to the in-service courses we usually teach? How did the teachers who attended the course respond?

Cuando asistimos a un curso para el profesorado[1], un formador o formadora excelente y con mucha experiencia nos explica cómo hace sus clases y el porqué de sus métodos. Nos presenta sus actividades de aula, son fantásticas, seguro que atrapan a su alumnado. Vemos un vídeo de su clase, es la clase ideal, los alumnos trabajan, están motivados, hacen preguntas interesantes. Todo está muy bien, aprendemos mucho, pero salimos un poco deprimidos de la sesión, ¿algún día nuestras clases serán así? ¿Nos va a servir este curso para mejorar nuestras clases? ¿Podremos incorporar algo de lo que hemos aprendido o, ante la avalancha de nuevas estrategias, deberemos conformarnos con seguir el libro de texto como venimos haciendo hasta ahora?

Durante los cursos 2005-2006 y 2006-2007, el Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya, en colaboración con los ICE de las universidades catalanas inició un programa de formación permanente del profesorado de matemáticas basado en la metodología de la práctica reflexiva. Según esta metodología, los cursos de formación deben partir de la práctica docente de cada profesor o profesora y, mediante la reflexión y el contraste de opiniones en el grupo, deben introducir nuevas teorías y estrategias que repercutan directamente en el aula de los profesores asistentes, a través del proyecto de mejora que éstos elaborarán en la última fase del curso.

Nos acogimos al proyecto cómo formadores y formadoras de este programa porque en su presentación, a inicios del curso 2005, nos pareció una propuesta atractiva ya que partía de la realidad de los profesores y profesoras asistentes al curso para mejorar algún aspecto de su práctica en el aula. Intuimos que estos cursos de formación reunían unas características que los hacían diferentes de los que habíamos impartido a lo largo de nuestra vida profesional. Así se confirmó durante nuestra propia formación y en el primer curso piloto que tuvo lugar en el año escolar 2006-2007.

La idea de escribir este artículo para la revista SUMA se gestó en julio del 2007, cuando en las JAEM de Granada, nos descubrimos explicando nuestra experiencia, de manera informal, pero con gran entusiasmo. ¿En qué se diferencian estos cursos de los otros que habíamos impartido hasta ahora? ¿Cómo se organiza una sesión de trabajo? ¿Qué actividades se realizan para conseguir los propósitos planteados? ¿Qué conclusiones podemos extraer de la experiencia?

Marta Berini López-Lara. *IES Joanot Martorell. Esplugues de Llobregat.*
Daniel Bosch Blanch. *IES les Corts. Barcelona.*
Martí Casadevall Pou. *IES Arquitecte Manuel Raspall. Cardedeu.*
Iolanda Guevara Casanova. *IES Badalona VII. Badalona*
Damià Sabaté Giménez. *ICE (Institut de Ciències de l'Educació) de la UPC.*
ABEAM

Unos cursos de formación diferentes

Los cursos de Formación en Práctica Reflexiva se impartieron en fase piloto desde el mes de enero hasta el mes de mayo del 2007 y actualmente se hallan en su fase extensiva. Antes de iniciar los cursos de pilotaje, participamos en un intenso programa de formación, desde enero del 2006 hasta diciembre del 2007. La Formación en Práctica Reflexiva ya tenía un amplio recorrido en el ámbito de las lenguas (castellana, catalana e inglesa) que sirvió de base para nuestro propio trabajo. Como hemos dicho en la introducción, se trata de unos cursos de formación *diferentes*. Veamos cuáles son algunas de sus características diferenciadoras:

- En todo momento el protagonista del curso es el profesorado asistente: los formadores y las formadoras no aparecen como expertos que sugieren cómo deben hacerse las clases, sino que actúan como acompañantes de un ciclo reflexivo que va desde la observación en el aula hasta la introducción de innovaciones para la mejora de la práctica educativa. El centro de ese ciclo lo ocupa, en todo momento, el profesorado que participa en el curso.

- Aunque la formación es individual, el grupo de participantes debe convertirse en una comunidad de aprendizaje cuyo objetivo es apoyar al profesorado en su ciclo reflexivo. Esto permite aprovechar de manera creativa, la diversidad de los y las asistentes tanto respecto a la experiencia como a la formación.

- Más allá de pretender que el profesorado introduzca mejoras concretas en su práctica docente, el curso quiere establecer el hábito de la observación constructiva, de la reflexión compartida y del contraste de ideas, para que los y las docentes no dejen nunca de intentar mejorar en su trabajo.

Una sesión de trabajo en el IES Vallès, curso 2006-07. Foto IG

- En estos cursos, se trata de hacer emerger las auténticas inquietudes y creencias que subyacen en la práctica docente a partir de la observación en el aula y del debate en el seno de la comunidad de aprendizaje. Esto permite, además, que las personas que participan en el curso sistematicen y den coherencia y consistencia a algunas de las ideas utilizadas en sus aulas.

- Se persigue la coherencia entre lo que se hace en el curso de formación y lo que se pretende que los y las participantes adopten como metodología de trabajo en el aula, es decir: el día a día no ha de consistir en lamentarse por la situación personal de cada uno en el aula, sino que el curso debe servir como espejo para la práctica docente de cada persona.

- Esta actividad de formación debe desarrollarse durante un largo período del curso escolar para permitir un intercambio constante entre lo que ocurre en el día a día de las aulas y lo que se trabaja en el curso.

- Se trata pues de un proceso de autorregulación y de desarrollo profesional. La práctica reflexiva debe permitir al profesorado participante tomar conciencia de aquello que está haciendo, de sus concepciones y percepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para poder contrastarlo desde otras perspectivas. Es por ello que la práctica reflexiva induce a introducir pequeños cambios razonados, justificados y siempre de acuerdo con el discurrir de la persona que los protagoniza.

- El equipo del profesorado formador está en activo impartiendo también clases en sus aulas; esta condición no es baladí; es la garantía de que los conocen el día a día y de primera mano lo que acontece en las aulas. Vive y comparte los mismos problemas y las mismas inquietudes que el profesorado participante y sabe ponerse en su lugar cuando hace falta.

- Los formadores y formadoras, que actúan por parejas, no evalúan ni juzgan la práctica docente de los y las participantes, sino que los acompañan para que sean ellos mismos quienes recojan la información sobre sus clases, la analicen y decidan qué quieren cambiar.

- El grupo, la comunidad de aprendizaje, actúa en todo este proceso como soporte y los formadores son los responsables de acompañar al grupo y a cada individuo en su proceso reflexivo. Además, el hecho de que los formadores y formadoras actúen por parejas permite una dinámica más viva, posibilita el acompañamiento individual cuando es necesario y ayuda a dar puntos de vista más variados.

Características de las sesiones de trabajo

Durante el curso se alternan las sesiones de trabajo presencial (8 en la fase piloto y 10 en la fase extensiva, todas de 3 horas) con las sesiones telemáticas en un entorno MOODLE[2]. A continuación se detallan algunos aspectos referentes a las sesiones presenciales, a los diferentes momentos del curso y a algunas de las actividades que se proponen, así como también al espacio virtual.

El desarrollo de las actividades presenciales

En las sesiones presenciales se alterna la reflexión individual, el contraste de ideas en pequeño grupo y la puesta en común para compartir inquietudes y buscar alternativas didácticas.

Cada sesión ha sido meticulosamente preparada por el equipo de formadores y constituye un eslabón del ciclo reflexivo que se quiere introducir, como método de trabajo sistemático de cara al futuro de cada profesor o profesora asistente al curso.

El ciclo reflexivo. Figura DM

El objetivo central del curso no es instruir a los asistentes sobre educación matemática, presentar una lista de problemas interesantes, o proponer unas consignas sobre la gestión del aula, sino ayudarles a sistematizar el proceso de observación, análisis y cambio de la propia práctica docente. Pero a su vez, quiere un poco más: pretende convertir este método en un hábito de trabajo permanente para cada profesor o profesora. Se busca que la práctica reflexiva se incorpore a la rutina habitual y así, del mismo modo que se suceden los cursos escolares en la vida profesional de cada profesor o profesora, se sucedan también, a partir de ahora, los ciclos reflexivos.

Las sesiones se inician aludiendo a las tareas propuestas en el espacio virtual y comentando cuestiones que han aparecido en el foro u otros aspectos que se trabajan en las sesiones telemáticas. Se entra después en la tarea propia de la sesión: preparar la observación de una clase, analizarla, decidir qué aspectos deben concretarse y observar de nuevo, cómo se confecciona un plan de mejora,... Cada sesión tiene su objetivo concreto que depende del momento del ciclo reflexivo pero, a grandes rasgos, el método de trabajo es bastante parecido.

Las tareas empiezan con una reflexión individual de cada asistente, después llega el turno de la verbalización por parejas o del contraste de opinión en grupo, dependiendo de la actividad, y se acaba con una puesta en común buscando características generales o la relación entre los diferentes aspectos surgidos en los pequeños grupos. En algún caso, cuando se está preparando la intervención que deberá hacer cada profesor o profesora en su aula, se deja un último momento final para que cada persona, después de escuchar las diversas intervenciones del grupo, reajuste su plan de acción si lo considera oportuno.

Todas estas tareas se realizan mediante el soporte de hojas de trabajo preparadas por los formadores y de las que se mostrarán ejemplos en este artículo. La secuencia descrita anteriormente aparece como actividad tipo: 1, 2 o 4, *n*, dónde los números indican el número de participantes, primero reflexión individual, después por parejas o en grupo de cuatro y finalmente puesta en común.

Un proceso como el descrito anteriormente puede ocupar una parte importante de la sesión, porque es el punto central, pero a veces es duro y puede resultar árido; esta es la razón por la que en todas las sesiones hay además un tiempo dedicado a la resolución de problemas y por eso mismo el título oficial del curso es *La Práctica Reflexiva. El uso metodológico de los problemas en el aula de matemáticas.* Así, en cada sesión se comenta un problema que previamente se ha dado a conocer entre los asistentes a través del MOODLE. Son problemas de diferentes tipos y su elección no ha sido precisamente aleatoria sino que se busca que en cada problema haya elementos diferenciadores que cubran diversos tipos de procesos y contenidos matemáticos.

Hacia el final de la sesión se preparan y se comentan las nuevas intervenciones que se deberán realizar individualmente en el MOODLE antes de la sesión siguiente. Se concretan los plazos de participación en el espacio virtual, se especifica cuándo deben estar colgadas las intervenciones, cómo se deben organizar los foros, cuál será la intervención de los formadores, ...

¿Y por qué no acabar cada sesión con un regalo matemático? Una sesión de trabajo de tres horas puede tener un final feliz. Un regalo satisface y ayuda a sentirse bien, en último término deja constancia de que alguien pensó en nosotros, es agradable. Por descontado, todos los regalos tienen un toque matemático: el medidor de diámetros, las tarjetas para adivinar números, el juego de los rascacielos al estilo sudoku, el tangram en forma de T para la sesión de teoría, etc, etc.

Los diez regalos de las diferentes sesiones en el curso 2007-08. Foto IG

Concluida la descripción a grandes rasgos de una sesión presencial de tres horas, en los párrafos siguientes se exponen los diferentes momentos del curso –inicial, medio y final–, se analizan los objetivos de cada etapa y se ilustran con algunas de las actividades propuestas.

Los tres momentos del curso

Una profesora, un profesor solo en clase, delante de la pizarra un poco asustado porque tiene treinta alumnos pendientes de él y duda sobre lo que debe hacer, como el delantero antes de un penalti. ¿Cómo romper con la soledad del docente delante de sus alumnos y alumnas? ¿Con quién compartir las dudas y las inquietudes de clase?

El curso quiere partir de la propia práctica docente de los profesores y profesoras asistentes pero, ¿cómo se crea la confianza suficiente en el grupo para que los profesores estén dispuestos a sincerarse y no se sientan juzgados o fiscalizados? Hace falta crear una comunidad de aprendizaje.

En las sesiones iniciales un grupo de profesores y profesoras, y un formador y una formadora que también están en activo dando clases, se disponen a poner en marcha una comunidad de aprendizaje que se mantendrá a lo largo del curso escolar. Cuando se haya generado la confianza suficiente, será el momento oportuno para compartir experiencias de igual a igual. ¿Qué estrategias utilizar para empezar a conseguirlo? Una pegatina con el nombre ayuda a memorizar los de todas las personas asistentes; colgar la foto en el MOODLE y el perfil de cada uno, permite, en la privacidad de la lectura, conocerse un poco más, evitando las presentaciones orales en las que no se presta atención porque se está pensando más en qué decir cuando nos llegue el turno, que en escuchar las diferentes presentaciones. Cuidar el crecimiento y la consolidación de la comunidad llevará su tiempo y estará presente en el contenido de las primeras sesiones y en el seguimiento a través del MOODLE entre sesión y sesión, comprobando que todo el profesorado del grupo interviene tanto en las sesiones presenciales cómo en las virtuales e interesándose individualmente por ellos si no es así.

Puesto que el curso trata de familiarizar al profesorado con las bases de la Práctica Reflexiva, nada mejor que vivirlo desde la propia experiencia. La primera tarea que se propone en este sentido consiste en caracterizar actividades de clase que los participantes consideren positivas, tanto desde el punto de vista de sentirse cómodo con ellas, como de considerar que funcionan en el aula. El paso siguiente consistirá en tirar del ovillo para ver por qué se consideran positivas, qué tienen en común todas ellas y qué las diferencia de otras actividades que no parecen tan satisfactorias. Se ha iniciado así el ciclo reflexivo.

ACTIVIDAD 1 (1,2,n)
Sentirse bien en la clase

1.1 Pensad, individualmente, en una actividad de trabajo como profesores/as de matemáticas en la ESO que os haya funcionado y en la que os hayáis sentido bien. Reflexionad individualmente 10 minutos y haced una breve descripción de la actividad.

1.2.1 Reflexionad en parejas durante 10 minutos y responded a las preguntas: ¿Cuáles son los elementos que han hecho que las actividades funcionaran? ¿Hay elementos comunes?

1.2.2 ¿Qué elementos os han hecho sentir bien en esta actividad?¿Hay elementos comunes?

1.3 Puesta en común.
Enumerad, por parejas, todos aquellos elementos que han hecho que funcionaran bien las clases y los que han permitido que os sintierais bien en ellas.

Por qué me he sentido bien con esta actividad en la clase

Gestión de la clase:

Se ha trabajado en grupo
Ha habido experimentación
Ha habido participación de todo el alumnado
Ha habido discusión entre ellos
Han usado material manipulable
Han podido salir del aula
Han usado las TIC
Han trabajado los juegos

Cuestiones de sentimientos del profesorado:

Buena relación entre el alumnado
Se sentían implicados con el trabajo
Había ambiente de trabajo
Sólo había que guiarlos
Ha habido colaboración entre ellos
Ha habido motivación para resolver los problemas
¿Ya es la hora?
No han preguntado: ¿Esto para qué sirve?

Cuestiones de sentimientos del alumnado:

Había concentración, interés y atención
Tenían confianza en sí mismos
Sensación de euforia/ estaban contentos
Han razonado y reflexionado
Contentos por ayudar a los compañeros
No han sentido frustración por los errores

Contenidos matemáticos:

Contextos reales
Contextos que les ven la utilidad
Contextos relacionados con experiencias suyas
Contextos significativos para ellos
No había rutinas

La actividad 1

También hay que meditar sobre la resolución de problemas, y pensar cómo introducir la reflexión sobre el uso metodológico de los problemas en el aula de matemáticas. Actualmente, nadie pone en duda que la resolución de problemas debe ser un elemento importante en las clases de matemáticas, pero la realidad dista bastante de ser así, y por eso cualquier ocasión de reflexionar sobre este quehacer matemático debe aprovecharse. Para esta ocasión se presentan dos tareas interrelacionadas. A partir de un problema concreto presentado de la manera más aséptica posible, sin contexto, sólo la estructura propiamente matemática, se propone a los asistentes que lo resuelvan por parejas. Es un problema abierto abordable con distintos enfoques que llevan a soluciones diferentes. En la puesta en común se analizan los distintos puntos de vista que aparecen.

A continuación se invita a los asistentes a que, otra vez por parejas, decidan cómo presentarían el problema a una clase, concretando el nivel, el tipo de enunciado, los contenidos y los procesos matemáticos que aparecen relacionados con el problema, cómo lo trabajarían en clase y de qué manera evaluarían el trabajo producido en el aula. Finalmente, en una puesta en común, se recogen y analizan las diferentes aportaciones.

ACTIVIDAD 2 (2, n)
Un problema de reparto de gastos

2.1. Os proponemos un problema para resolver en parejas. Tenéis 10 minutos.
Se trata de hacer simplemente la resolución argumentada sin contaminarla por la visión de enseñante de matemáticas y por lo tanto dejando de lado las posibles implicaciones de cara a su uso académico en el aula.

Es un problema que presenta una situación corriente de reparto de gastos. Muestra una situación problemática que puede admitir diferentes respuestas o soluciones válidas. Al menos así se ha podido comprobar planteándolo a diferentes alumnos/as o profesores/as. No os preocupéis si sólo encontráis una respuesta; será vuestro punto de vista que contrastaremos en la puesta en común.

Problema:

- Consideramos tres puntos A, M i B. El punto M equidista de A i de B.
- Una persona X sale en coche desde el punto A. Va hasta el punto B y vuelve a A. Pasa tanto a la ida como a la vuelta por M.
- A la ida, X recoge a una persona Y en el punto M. Hacen juntos el viaje hasta el punto B y el regreso hasta M.
¿Cómo deben repartirse las dos personas el gasto total de combustible del coche?

2.2. Puesta en común de las respuestas y estrategias de resolución.

La actividad 2

Estas primeras sesiones tienen además otro objetivo: promover la cultura de la observación. La comunidad de aprendizaje tiene que servir para compartir y para ello se precisa confianza y transparencia. ¿Pero, qué se va a compartir? ¿Cómo se observa de manera sistemática y rigurosa para después analizar? Se necesita un método de observación para captar la realidad del aula -el punto de partida- para poder después compartir dudas e inquietudes sobre lo que acontece en la propia clase, documentarlo con hechos concretos, tangibles que se puedan mostrar a otros y a nosotros mismos.

De la cultura de la observación deben enumerarse algunas cuestiones importantes que se tratan en estas primeras sesiones. En primer lugar, mirar las clases en sentido positivo. Se está muy acostumbrado a destacar aquello que no funciona. Debemos actuar de forma más optimista, mirar lo que funciona, aprender de ello y extrapolar, como se ha hecho en la primera tarea descrita anteriormente, la de caracterizar actividades que satisfacen y que se consideran positivas.

En segundo lugar, ¿cómo diferenciar, al registrar una observación, las valoraciones de los hechos, de las evidencias? Para este cometido se plantea una tarea concreta: visionar un vídeo de unos minutos de una clase y pedir a los asistentes que apunten qué han visto o qué han oído. A continuación se les hace clasificar lo que han anotado, en hechos y valoraciones.

ACTIVIDAD 4 (1, n)
Hoja de observación de un vídeo de unos minutos de una clase

4.1. ¿Qué habéis visto al visionar el video?

4.2 Puesta en común.

Hechos	**Valoraciones**

Puesta en común de la actividad 4 : observación de un vídeo de unos minutos de una clase	
Hechos	**Valoraciones**
La posición de las mesas y el profesor con relación a la pizarra.	Actitud positiva del alumnado y buen ambiente de trabajo.
Organización de la clase en grupos.	El profesor da confianza.
Se trata de una discusión o puesta en común.	Hay poca interacción entre los alumnos.
El profesor es el conductor, hace participar a todos los alumnos, los voluntarios y los demás.	El profesor hace preguntas muy cerradas.
El profesor hace preguntas que inducen las respuestas y el descubrimiento de los errores.	El profesor da alguna explicación demasiado rápida y borra la pizarra sin dar tiempo a seguirla.
Los alumnos levantan la mano para hablar.	Los alumnos no saben porqué están haciendo esta actividad.
El alumnado no escribe.	No parece que todos los alumnos sigan la discusión.

La actividad 4. Síntesis de la puesta en común en uno de los grupos

En general, la primera vez que los asistentes realizan un ejercicio de este tipo, concentran todas sus observaciones en la columna de las valoraciones, ¡con razón tenemos tanto miedo a ser observados! Se trata de ver de nuevo el vídeo sabiendo que se buscan hechos, evidencias, vistas o bien oídas y que han de concretar en qué momento del vídeo aparecen.

ACTIVIDAD 5 Trabajo no presencial a colgar en el moodle como una tarea.
Detección de hechos y evidencias

Visiona el video otra vez pensando que tendrás que responder a las preguntas siguientes.

¿Qué he visto?	**¿Dónde lo he visto?**
¿Qué he escuchado?	**¿Dónde lo he escuchado?**

¿Qué he visto?	**¿Dónde lo he visto?**
Parece una puesta en común de una actividad	En los dos vídeos
El profesor escucha al alumnado, le hace pensar incluso a aquellos que no han hecho el trabajo	En el primer vídeo
El alumnado levanta la mano para pedir la palabra. El resto está en silencio	En los dos vídeos
No es la clásica clase magistral	En los dos vídeos
El profesor no acepta la respuesta “no lo sé” y le obliga a razonar	En los dos vídeos
El profesor vocaliza con claridad	En los dos vídeos
Un profesor sentado en la mesa	En el extremos de la clase
El profesor pregunta las respuestas, que parecen haber sido trabajadas anteriormente por el alumnado y espera las diferentes respuestas, dejando primero que el alumnado vea las diferentes posibilidades.	En los dos fragmentos.
Aprovecha un error de un alumno para repasar la teoría.	Vídeo 2
Están corrigiendo un ejercicio, de una manera parecida a la que utilizamos nosotros en el curso para poner en común las ideas: se escucha a todo el mundo y se apuntan les diferentes respuestas, viendo que hay más de una correcta.	En los dos vídeos
La pizarra se utiliza para anotar lo que responde el alumnado.	Durante toda la filmación
El alumnado no apunta muchas cosas en sus apuntes	En los dos vídeos
El alumnado está agrupado en grupos de 4. En cada grupo hay chicos y chicas.	En la clase de matemáticas
El alumnado está pendiente del profesor y de la pizarra	En el primer vídeo
La actitud del alumnado es bastante pasiva, en general	Fragmento 2, vídeo 1

¿Qué he visto?	¿Dónde lo he visto?
La agrupación de 4 en 4 alumnos no parece activar la dinámica del aula; estos agrupamientos habrían de permitir más intercambio de ideas entre el alumnado	Fragmento 2, vídeo 1
Loa alumnos copian las otras soluciones posibles.	En los dos fragmentos del vídeo.
Cuando se habla de expresiones algebraicas parece que hay más participación	Fragmento 1, vídeo 2
Diferentes expresiones de un número: como fracción y como número decimal	En el primer vídeo
Pizarra bien iluminada	En el primer vídeo

La actividad 5. Síntesis de las evidencias recogidas en el moodle de las aproximadamente 30 enviadas por uno de los grupos

Cuando los asistentes son capaces de distinguir entre hechos objetivos y valoraciones se considera que están capacitados para empezar a observar su propia práctica docente. Ahora se trata de decidir cómo lo van a hacer, ¿mediante una filmación de vídeo?, ¿a través de un guión o una tabla de observación?. ¿Quién va a realizar la observación?, ¿ellos mismos?, ¿otro profesor o profesora que va a entrar en su clase?

Estas evidencias iniciales, recogidas en un video, un cuestionario, una encuesta,... son las que más adelante se utilizarán para comparar con las recogidas después de implantar un plan de mejora. Se parte de la propia práctica docente con muestras, se diseña un proyecto de mejora, se implementa y se recogen después nuevas muestras comparables con las iniciales para constatar si ha habido mejora. Por eso es importante, en las primeras sesiones, familiarizarse con los instrumentos de observación y de análisis de la práctica docente. Estos serán los que permitirán captar la realidad del momento concreto que se quiera analizar.

Esta semana he empezado a observarme. Cosas que he visto:
Normalmente no dejo a los alumnos suficiente tiempo para pensar los problemas, ya sea porque veo que algunos están muy perdidos, otros dan, rápidamente, cualquier resolución por buena… A menudo empiezo dando pistas de por dónde puede ir el problema, o los hago pensar a partir de alguna pregunta que ya les da alguna pista, doy demasiadas pistas… No pido que piensen una solución posible del problema antes de hacer ningún cálculo. Una vez resuelto un problema no pido si hay otras estrategias de resolución.
He empezado a poner en práctica alguno de los aspectos que hemos comentado: ahora, una vez leído el problema, hago que uno o dos alumnos me expliquen, con sus palabras, de qué va el problema y qué es lo que hay de hallar…

Primeras observaciones

¿Quién observa a quién y cómo se observa? En nuestra cultura educativa sentirse observado equivale a sentirse juzgado como cuando el inspector o la inspectora observa al docente para valorarlo en las prácticas o en el acceso a cátedras. ¡Qué lejos estamos del *Critical Friend*[3] de los países del norte de Europa! Debemos tender hacia este modelo, observar para conocer la realidad con detalle y a partir de esta realidad, decidir qué se quiere mejorar. Y por qué no observar acompañado, tener alguien con quien compartir y comentar la observación, pero sin interferir, dejando libertad para que cada uno decida. La decisión final la debe tomar cada profesor y cada profesora; el grupo y los formadores actúan de espejo, le acompañan, pero finalmente es cada profesor quien va a decidir qué va a cambiar de su práctica docente. Para desdramatizar el hecho de observarse y especialmente de ser observado y para superar los sentimientos negativos que podía generar diseñamos la actividad 7.

ACTIVIDAD 7 (1, 4, n, 4, n)
Observación y sentimientos

7.1. Individualmente.
La idea de observarte o de ser observado/a mientras das la clase, ¿qué sentimientos te provoca?

7.2. En grupos de cuatro, clasificad los sentimientos
POSITIVOS NEGATIVOS

7.3. Puesta en comúns.

7.4. En los mismos grupos de cuatro, explicad cómo os podríais sentir bien en un proceso de observación. (Pensad en condiciones a vuestro alcance)

7.5. Puesta en común

Valoración de la tercera sesión del curso

¿Qué hemos hecho?

La jornada ha estado centrada en la cultura de la observación como herramienta constructiva y no evaluativa.
Primero hemos reanalizado el video que ya habíamos trabajado para analizar y focalizar la observación.
Después hemos analizado diferentes aspectos de la observación, todos primero para crear fuertes puentes positivos en nuestra propia observación.

¿Qué he observado?

"Observar es ser consciente de aquello que vemos". El intercambio de sentimientos que nos produce la propia observación.

¿Cómo lo he vivido?

El trabajo con el grupo que he trabajado ha sido agradable y enriquecedor el compartir los diferentes puntos de vista, con una tranquila disponibilidad por mi parte.

> He llegado a conclusiones sobre la disponibilidad de que sea observada mi tarea docente.
>
> En algún momento me parecían insistentes las diferentes perspectivas que trabajábamos de la observación.
> ¿Por qué lo he vivido así?
>
> Está claro que si nos implicamos en un curso de Matemáticas reflexivas, ya tenemos cierta disponibilidad a todo tipo de análisis desde diferentes ángulos de nuestro trabajo.
>
> Sí que a veces siento que me pierdo en la terminología, aunque a la vez también noto que adquiero una cultura propia y criterio propios de la observación.

La actividad 7. Intervención de una alumna en el moodle después de la sesión.

También es importante adentrarse en el proceso de focalización, en concretar cada vez más las inquietudes personales de la práctica docente. Puesto que no se puede observar todo, no se puede hacer un plan de mejora que pretenda mejorarlo todo, se debe elegir, concretar, desmenuzar. Este proceso se conoce cómo focalización.

Podemos preguntarnos ¿para qué sirve el grupo si de hecho se trata de una tarea individual de análisis de la propia práctica docente? La respuesta es: el grupo da apoyo, el grupo ayuda a que uno mismo, cuando se ve en la tesitura de explicar lo que más le preocupa, haga un esfuerzo de organización mental de sus propias ideas. También resulta interesante darse cuenta de que no se está solo, otros compañeros y compañeras tienen las misma inquietudes, o parecidas. Aparece entonces la necesidad de asociarse por inquietudes, para buscar juntos estrategias que las solucionen.

A partir de ese momento, cada vez que una tarea se deba hacer en grupo, éste estará constituido por personas con la mismas inquietudes. En la cuarta sesión, los componentes del grupo ya se conocen un poco, ya no hacen falta las pegatinas con el nombre, en el ambiente se respira confianza, nadie se siente controlado y fiscalizado, se está dispuesto a compartir porque la comunidad de aprendizaje se está consolidando.

Desde un punto de vista más formal en esta sesión se cierra el portafolio inicial, la carpeta donde cada participante alumno recoge su punto de partida, las muestras recogidas en la observación de la propia clase, las reflexiones personales, lo que le preocupa y lo que quiere modificar, en definitiva, cuáles son las expectativas personales en relación con la práctica reflexiva que está iniciando.

Las sesiones intermedias tienen como objetivo elaborar el plan de mejora de la propia práctica docente introduciendo elementos teóricos que lo sustenten. En el grupo se realizará el contraste entre lo que se ha observado y algunas alternativas teóricas y prácticas, para que cada uno decida qué incorpora como propio en su proyecto de plan de acción.

En el plan de acción se define lo que se quiere mejorar y porqué, y se concretan las actividades de clase que se van utilizar.

Título del agrupamiento de inquietudes	Profesorado	Inquietud
Actitud y motivación de los alumnos	A. P.	Cómo hacer atractivos los problemas de cara al alumnado.
	D. A.	Cómo hacer atractivos los problemas de cara al alumnado.
	M. M. G.	La actitud de los alumnos frente a los problemas.
	A. B.	La actitud de los alumnos frente a los problemas.
	E.V.	Estimular al alumnado para que pierda el miedo y tome confianza para resolver problemas.
	F.R.	Estimular el razonamiento y la perseverancia en el alumnado.
	H. C	La actitud de los alumnos frente a los problemas.
	E.C.	La actitud de los alumnos frente a los problemas.
	S. P.	Conexión de los problemas con otras áreas del currículum.
Pautas y estrategias en la resolución de problemas	V. C.	Estimular el razonamiento y la perseverancia en el alumnado.
	A. M.	Trabajar diversas estrategias en la resolución de problemas.
	V. F.	Dar pautas para que los alumnos resuelvan el problema solos.
	G. M.	Dar pautas para que los alumnos resuelvan el problema solos.
	F. K.	Que la clase se anime resolviendo problemas
	P. G.	Interpretación de los resultados de los problemas.

Resultado del agrupamiento de inquietudes en una de los grupos

Todo debe estar justificado, pero a menudo la propia práctica docente no deja lugar para grandes reflexiones teóricas. ¿Dónde buscar? ¿Tal vez alguien haya escrito ya sobre este tema? Si al empezar el curso sobraba la teoría didáctica y se quería partir de la propia realidad, ahora, cuando se empieza a elaborar el plan de acción, aparece de manera natural la necesidad de saber más acerca de la práctica docente. Es ahora cuando el grupo está maduro para introducir la reflexión teórica.

Se precisa más información, leer cuestiones relacionadas con las que se están analizando, disponer de más material para preparar actividades de clase diferentes de las que se venían haciendo hasta ahora.

Los alumnos en el IES Joan Brossa familiarizándose con una nueva actividad: la medida de distancias con el taquímetro. Foto IG

ACTIVIDAD 8 (1,1, x, n,1)
Ficha de lectura

8.1. DURANTE la lectura y de forma individual:
Leed el artículo o las citas intentando encontrar respuesta a tus inquietudes (apunta las palabras clave, transcribe las frases,...)

8.2. DESPUÉS de la lectura y de forma individual:
Decide qué quieres comentar con tus compañeros sobre lo que ha significado para ti la lectura

8.3 En el grupo del mismo ámbito de interés:
8.3.1 Escucha las intervenciones de tus compañeros/as y toma notas.
Intercambiad vuestras anotaciones. Primero aclarad las posibles dudas e identificad puntos de vista (aspectos) en común. Escoged después algunos puntos de vista (aspectos) que veáis de forma diferente.

Esta parrilla os puede ayudar:

Aspectos que comparto	**Aspectos que veo de forma diferente**	**Tengo una pregunta**

8.3.2 ¿Qué aspectos, del pequeño grupo o individuales, os gustaría compartir con los otros grupos porque relacionan cuestiones observadas en el aula con alguna de las ideas que aparecen en el documento?

8.5. Puesta en común en el gran grupo

8.6. Como conclusión del proceso de lectura compartida y de forma individual:
Después de haber leído, compartido en el pequeño grupo y escuchado las aportaciones de todos los grupos, selecciona y escribe aquellos aspectos que quieras incorporar en tu proceso de reflexión:

a) ¿Qué me llevo yo?
b) ¿Qué aporta a mi clase?
c) ¿Qué quiero incorporar, cambiar, transformar,...

Pero atención, no habrá recetas mágicas, el grupo y los formadores van a suministrar nueva información, pero cada uno la deberá procesar individualmente, en coherencia con la manera personal de entender las clases matemáticas. Las decisiones que tome cada persona al diseñar su proyecto de mejora son para aplicarlas en su propia práctica docente, se deben pensar para una clase concreta y un alumnado real y conocido.

Se incluyen, en esta etapa del curso, actividades de lectura de citas y contrastes de opinión que los formadores preparan de acuerdo con las inquietudes surgidas en el grupo. Identificar aquellas inquietudes que conectan con la propia manera de ver la educación matemática es de gran ayuda para ir asentando las bases teóricas del plan de acción. Ver escrito, por una persona de reconocida autoridad en el ámbito de la educación matemática, aquello que se intuye como una mejora de la propia práctica docente, reconforta y da ánimos para llevarlo a cabo.

En resumen, en las sesiones intermedias las tareas que se proponen van encaminadas a que cada uno prepare su plan de acción contrastando las ideas con las personas que pertenecen al mismo grupo, porque tienen inquietudes comunes y están diseñando planes de mejora que se pueden recoger bajo un mismo título.

En este momento del curso, en el portafolio intermedio de cada profesor o profesora, se recogen la tareas más significativas que le han conducido a la elaboración del plan de acción, las citas y lecturas sugerentes y las nuevas actividades de clase, presentadas por los formadores u otros miembros del grupo, que le han motivado o que directamente han sido su fuente de inspiración para diseñar las nuevas propuestas que incluye en su plan de acción.

Este período finaliza con la presentación, por parte de cada profesor o profesora, de las grandes líneas de actuación de su plan de mejora. De esta manera se comparte la propuesta con la comunidad, que puede sugerir algún cambio, antes de llevarla a la práctica. Se pretende fomentar con ello la cultura del trabajo en equipo y el compartir inquietudes y proyectos. Este trabajo es propio del departamento de matemáticas de cada centro pero a menudo, por razones diversas, no se realiza con la cotidianeidad requerida. Si el proceso de compartir se desarrolla satisfactoriamente en el curso, implícitamente se despierta en los asistentes la necesidad de trabajar en equipo en el departamento del Instituto y si esto no es posible, pensar en formar parte de algún grupo de trabajo que posea las mismas inquietudes.

Hemos llegado al final del ciclo reflexivo y de las sesiones. En las dos últimas, los asistentes presentan sus comunicaciones. En ellas exponen lo que ha representado para ellos el método de la Práctica Reflexiva y cómo les ha funcionado el plan de acción al llevarlo a cabo en su aula. Estas dos sesiones son muy importantes de cara a fijar en cada alumno lo que se lleva para sí, para su futuro como profesor o profesora, lo que realmente le ha sido útil del curso. La exposición final se entiende pues como una actividad de síntesis para organizar y fijar ideas y no como una actividad para evaluar a los profesores y profesoras. Toda la documentación y las últimas reflexiones de los participantes en relación a cómo han vivido el curso constituirán su portafolio final.

Comunicación final de una profesora / alumna

Portafolios inicial

Punto de partida: Observaciones y reflexiones

- En todos los ámbitos se dice que la experiencia es un grado, y estoy de acuerdo. Pero aunque mis compañeros estuviesen más avezados que yo a las aulas, me di cuenta que compartíamos las **mismas inquietudes**, y que las preguntas, dudas y reflexiones que yo me hacia con sólo dos cursos de experiencia, siguen siendo las mismas al cabo de bastantes años. En el curso, después de hacer un análisis y clasificación de inquietudes (todas muy importantes), tomé la decisión de mejorar la que hacía referencia a **mantener la atención y el interés en el aula**.

- Quiero remarcar la tarea de autoobservación que nos mandaron hacer. Aunque ya tenía conciencia de ello, vi que mi metodología de clase era la misma que había vivido como estudiante en el instituto, con la diferencia de que mis alumnos no eran ni de lejos similares a los alumnos de aquellos tiempos. Observé, entre otras cosas, que mandar salir alumnos a la pizarra para la corrección de los deberes no era demasiado eficaz y que a las preguntas de los alumnos daba casi la solución mediante pistas y no hacía uso para nada del método socrático de contestar una pregunta con una pregunta.

Portafolios intermedio

Contraste

- Durante el curso nos hicieron ver la gran importancia que tiene, cuando se trata de *enganchar* a los alumnos, el hecho de tratar situaciones reales de su entorno en los problemas de clase. Este tipo de enunciados normalmente no aparecen en los libros de texto y representa un trabajo extra para el profesor. Durante el curso hemos tratado diversas situaciones de este estilo que pueden dar mucho juego en las clases. Estoy totalmente convencida que trabajar de esta manera es definitivo para intentar hacer interesantes las matemáticas.

- Otro aspecto que quiero remarcar es el énfasis que hemos puesto en el curso en el **trabajo en equipo**. A partir de trabajar de esta manera en el curso y de las experiencias de uno de los formadores, hemos visto que además de crear un buen clima en la clase, a nivel de aprendizaje funciona mucho mejor.

- Resaltar por último que desde el punto de vista de los formadores no es tan importante la materia que se de, como la **capacidad de razonar**. Es la primera vez que me encuentro con esta idea desde que estoy en el mundo de la enseñanza y la suscribo totalmente.

Portafolios final

Plan de acción

Aprovechando una actividad comentada en el curso y experimentada con éxito en los institutos de Cardedeu con alumnos de 3º de ESO, hacemos un pequeño trabajo sobre las elecciones municipales.
Con esta tarea trabajaremos una **situación real y cercana** donde intervienen las matemáticas, **trabajaremos en grupo**, haremos **una predicción del resultado** y se pedirá que extraigan **conclusiones**. Después lo compararemos con el resultado real de las elecciones y buscaremos los posibles motivos de nuestros errores.

¿Cómo me ha funcionado? El balance es positivo, si bien pienso que se podría mejorar.

- El hecho de tener muy pensado el trabajo me ha dado seguridad para plantear las clases y saber hasta donde quería que llegasen los alumnos.

- Por otro lado, los alumnos no estaban acostumbrados a trabajar en grupo, y por mucho que insistiese en que en primer lugar habían de pensar individualmente, tenían tendencia a hacerlo en grupo directamente.

- En las sesiones he observado que:
  - El ambiente de la clase es distendido.
  - Los grupos que pensé son acertados y me ha permitido apreciar mejor a ciertos alumnos que estaban apagados en su lugar habitual.
  - Por otro lado, hay alumnos que no se han involucrado lo suficiente y quizás se lo han tomado de manera demasiado festiva.
  - Y también hay alumnos que no han hecho suficiente trabajo reflexivo.

¿Cómo me he sentido? Me ha gustado hacer esta actividad diferente de las clases convencionales que acostumbro hacer. Me ha hecho reflexionar mucho sobre cómo montarla, a qué grupos dedicarla, me ha hecho dudar mucho. Pero una vez lo decidí todo, fui hacia adelante con confianza. Y creo que esto es lo más importante: estar seguro de lo que haces.

Para más adelante...

Además de seguir reflexionando sobre las clases, intentaré aplicar, pasito a pasito y en la medida de mis posibilidades, algunas de las estrategias que hemos visto en el curso. Y voy a intentarlo, no sólo para captar la atención y motivar a los alumnos, sino también para seguir encontrando estimulante el trabajo que hago.

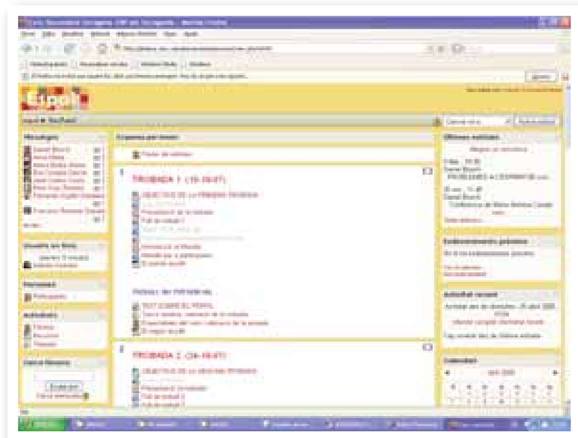
Un ejemplo de portafolio de una profesora del curso (se ha respetado el texto en negrita de la autora)

La evaluación se ha realizado a lo largo de todo el curso, la asistencia a las sesiones y la participación en el MOODLE son los pilares sobre los que se sustenta la certificación del curso. Exceptuando las bajas que se producen en las dos primeras sesiones, a partir de la tercera la asistencia y la participación suelen mantenerse estables para el resto del curso y todos los asistentes obtienen el certificado.

A su vez el profesorado evalúa el curso a través de un cuestionario en la red similar para todos los cursos de Práctica Reflexiva de las diferentes materias. En el caso de matemáticas, algunos formadores optamos por añadir un cuestionario más específico en la última sesión, que nos diera también información para mejorar el curso piloto de cara a la extensión del programa de formación para este año escolar. Algunas de las respuestas y sugerencias aparecen en las conclusiones de este artículo.

El entorno MOODLE

Una de las principales características de las actividades de formación en la práctica reflexiva ha sido el hecho de que las sesiones presenciales han tenido el sólido soporte del entorno virtual de enseñanza y aprendizaje cooperativo MOODLE. Este entorno facilita una ágil comunicación personal tanto bidireccional como multidireccional, permite una gestión cómoda de los contenidos documentales y facilita también un seguimiento por parte de los equipos de formación del trabajo que realizan los profesores y profesoras que asisten al curso.



El curso en el entorno moodle

MOODLE es el elemento básico de cohesión y contacto del grupo entre sesión y sesión, pero además permite descubrir a los y las participantes en la formación, su potencialidad didáctica como instrumento de pensamiento conjunto y de coconstrucción. En las primeras sesiones, cuando el grupo no está todavía suficientemente cohesionado y hay falta de confianza, el entorno virtual facilita que el contacto entre participantes y formadores sea privado.

Comentarios de una profesora/alumna después de la segunda sesión y respuesta del profesor del curso

He observado que la metodología de las sesiones se repite y sigue el mismo proceso (reflexión individual, en parejas y/o en grupo pequeño y puesta en común)
Esta manera de trabajar me obliga a mantener la atención sobre lo que se está haciendo ya que se obliga a avanzar individualmente para hacer aportaciones al grupo y para poder discutir y entrar a hacer valoraciones.
Se pide un trabajo muy pautado y estructurado.

Lo he vivido bien, en general. En algún momento, sobre todo al final, tuve la sensación de que mis clases son bastante distintas de la forma que se me propone, que hago reflexionar poco a mis alumnos y que mis clases son poco activas y demasiado reiterativas.

Creo que lo he vivido así porque es necesario hacer "tambalear" los conceptos, la metodología; hay que perder la seguridad, dudar, reflexionar e intentar continuar creciendo sobre aquello que se tambalea y que se debe asegurar para ir hacia delante.

Valoración final: ha ganado el espíritu positivo y estaba contenta con el trabajo que se me proponía y ya me planteaba cómo, cuándo y con qué alumnos haría la observación.

Nadie es perfecto y de los errores se aprende. Tal como decís, se debe ir poco a poco y asegurar bien los cambios. Para cambiar, hay que verlo claro, estar seguro, convencido y pensar que servirá para mejorar.

MLC, después de la segunda sesión

Gracias por tu valoración.

Estoy contento de saber que te sentiste bien en la sesión y que te haya hecho pensar sobre cómo hacer las clases.

Está bien hacer tambalear nuestras maneras de hacer y esto que dices de la reflexión en el trabajo del aula, me parece muy interesante.

Pero recuerda que hay que ir paso a paso y de momento lo que os proponemos hasta el próximo encuentro es que hagáis una pequeña observación pautada y organizada de alguna actividad de vuestra aula. Esto ha de permitir el próximo día concretar las inquietudes de cada uno para hacer el proceso del ciclo reflexivo que pretendemos en el curso.

Ciertamente leer valoraciones como la tuya nos anima a trabajar para acompañaros en todo lo que esté a nuestro alcance, con el fin de que el curso os sea agradable y provechoso.

Que tengas una buena observación.

MC

Intervención de una alumna en el forum del moodle y respuesta del formador

A medida que el grupo adquiere confianza, aunque las tareas sigan siendo individuales, todos los participantes tienen acceso a ellas mediante foros, de manera que pueden opinar y reflexionar sobre los temas que se han trabajado entre las sesiones presenciales.

Por otra parte, el MOODLE ha sido objeto de aprendizaje y, de acuerdo con uno de los objetivos del curso, se ha convertido en un contenido más. Todos los participantes, en mayor o menor medida, se han familiarizado con el entorno MOODLE, lo que permite que en algunos casos, se planteen la posibilidad de trasladar la experiencia a su práctica docente.

Por último, conviene comentar que para conseguir que el profesorado asistente conozca su funcionamiento y con la finalidad de garantizar su aprendizaje a lo largo de las sesiones del curso, durante las primeras sesiones presenciales se han de dedicar algunos momentos de trabajo y de familiarización con él. Desde un principio, es importante que el conjunto de participantes se integre en este entorno virtual, incluyendo la descripción de su perfil como enseñante, que cada uno cuelgue su fotografía, aprenda a entrar en los apartados básicos,… También hay que reservar una parte del tiempo de todas las sesiones del curso para usarlo y aclarar dudas sobre su utilización.

Conclusiones

La práctica reflexiva abre nuevas perspectivas en la formación del profesorado porque lo sitúa en el centro de la formación y hace ineludible la transformación de aspectos concretos de su propia práctica docente. Esta metodología genera un proceso de evolución permanente, basado en ciclos encadenados y sucesivos. Cada ciclo se inicia con la auto observación de la propia práctica docente y se concluye con la puesta en práctica de alguna nueva acción educativa que pueda mejorar la práctica observada al iniciar el ciclo. En el proceso ha habido contraste de opiniones con los otros profesionales asistentes al curso y enriquecimiento personal en la búsqueda de nuevas maneras de afrontar la situación didáctica que se pretendía mejorar.

¿Cómo respondieron los profesores y profesoras asistentes a los cursos impartidos?

Las respuestas al cuestionario del Departament d'Educació, general para todos los cursos de Práctica Reflexiva de cualquier área, resultaron altamente positivas. En nuestros cursos pedimos, atendiendo precisamente al carácter experimental de los mismos, que nos hicieran llegar sus reflexiones referentes al funcionamiento y organización de las sesiones, pero también a lo que se llevaban para sí de la formación recibida. Sus primeras reflexiones nos daban el contrapunto para mantener o modificar las sesiones y las segundas eran una medida aproximada de la repercusión del curso en el desarrollo profesional de los asistentes.

Aspectos relativos a la formación recibida valorados muy positivamente por nuestros alumnos y alumnas en los tres grupos que pilotamos:

- disponer de un tiempo y de un espacio para poder reflexionar y compartir experiencias con otros profesores
- constatar el buen ambiente en las sesiones presenciales que predispone a formular y compartir ideas entre los asistentes
- familiarizarse con la práctica de observarse y ser observado en clase desde una perspectiva científica
- experimentar una manera de trabajar en el curso de formación -reflexión individual seguida de contraste en pareja o en grupo de cuatro para finalizar con puesta en común de todo el grupo- susceptible de ser trasladada al aula
- perder el temor a la falta de tiempo para atreverse a innovar y decidir trabajar de una manera más reflexiva en clase
- conocer problemas diferentes a los que habitualmente hacemos en clase y que a menudo no se encuentran en los libros o están al final del capítulo y no se hacen.

Todas estas aportaciones se pueden resumir en una reflexión general que nos hizo una profesora más o menos así:

> Me ha gustado el curso porque ha respondido a la necesidad que tenía, a pesar de mi dilatada experiencia, de reflexionar sobre los propios métodos de enseñanza y aprendizaje y de buscar nuevos retos de acuerdo con los nuevos problemas que plantea el alumnado que se incorpora al sistema educactivo...

¿Qué novedad se llevaron que suponga algún cambio en su trabajo? Citemos también, como ejemplo, una de las reflexiones recibidas:

> Sobre todo el método utilizado: dedicar un tiempo a reflexionar sobre lo que estás haciendo, cómo lo haces y cómo lo podrías mejorar. Para esto último, es fundamental el trabajo en grupo, pues te aporta nuevas visiones para abordar los problemas…

También destacaban que el curso les había introducido en la cultura de la observación sistemática y organizada, les había subrayado la importancia de cuidar los aspectos emocionales en les clases y el potencial del trabajo en grupo, tanto entre profesores como entre alumnos. A la vez, habían conocido problemas diferentes ligados a la realidad y distintas visiones para afrontar las inquietudes que compartimos.

Finalmente consideraron que, a pesar de todo lo que habían aprendido, les quedaba la sensación de que necesitaban continuar con el soporte de la comunidad de aprendizaje creada. A pesar de que ésta continuidad no quedó plasmada este curso con un módulo más de profundización en práctica Reflexiva, nos consta que uno de los tres grupos trabaja en la actualidad por su cuenta como grupo de trabajo autónomo dependiendo de un ICE.

¿Y nosotros, qué sensaciones hemos tenido durante el curso piloto realizado? El hecho de movernos en un terreno desconocido, jugando como formadores un papel nuevo, provoca, qué duda cabe, una cierta inquietud. Inquietud que resolvimos, en parte, con una preparación milimétrica (minuto a minuto) de las sesiones presenciales del curso y, en parte, por el desarrollo del mismo: se consiguió, y con una cierta rapidez, crear verdaderas comunidades de aprendizaje. Hemos visto, con satisfacción, como la mayoría de los profesores ha concluido, con éxito, un ciclo reflexivo.

Cabe destacar por último, que parte de la metodología utilizada en la Práctica Reflexiva puede utilizarse en cualquier curso de formación. Nosotros, como el profesorado asistente al curso, también hemos incorporado la Práctica Reflexiva no sólo a nuestras clases sino incluso a otros cursos de Formación de profesorado que continuamos impartiendo durante el curso escolar 2007-08. ■

NOTAS

1 A lo largo del artículo distinguiremos entre formador/formadora: persona que imparte el curso de formación; profesor/profesora: asistente al curso de formación; alumno/alumna: los y las estudiantes de secundaria.

2 MOODLE: Modular Object Oriented Dynamic Learning Environement. Véase el apartado c) El entorno MOODLE

3 Critical Friend: amigo crítico

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, A., BUSQUETS O., ESTEVE, O, TORRA. M. (2006): "La reflexió sobre la pròpia pràctica: una eina per progressar en l'ensenyament de les matemàtiques", *Biaix*, n.º 25, 37- 43.

ESTEVE, O., RAFOLS, J., BUSQUETS, O. (2006): "La pràctica reflexiva: una modalitat de formació del professorat", *Guix*, n.º 323, 11-15.

ESTEVE, O. (2004): "Nuevas perspectivas en la formación de profesorado de lenguas: hacia el aprendizaje reflexivo o aprender a través de la práctica". *Actas de l'Erste Tagung zur Didaktik für Spanisch und Deutsch als Fremdsprache (Primer encuentro de profesores de alemán y de español como lengua extranjera),* Instituto Cervantes, Bremen.

ESTEVE, O. (2000): "Hacia un modelo alternativo de formación de profesorado de lenguas extranjeras. La práctica reflexiva colectiva como base de la autoformación: un ejemplo práctico a partir de la reflexión sobre el tratamiento de la gramática en la clase de alemán/LE, Espejo de idiomas, *Cuadernos de didáctica* nº1, VélezMálaga: Escuela Oficial.

FREUDENTHAL, H. (1991): *Revising mathematics education,* Kluwer, Dordrecht.

GÓMEZ CHACÓN, INÉS Mª.(2000): *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*, Narcea, Madrid.

GOÑI, J.Ma. [et al.]. (2000): *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*, Graó, Barcelona.

GORGORIÓ, N. [et al.].(2000): *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*, Graó-ICE UAB, Barcelona.

KORTHAGEN, F. A. (2001): *Linking Practice and Theory. The Pedagogy of Realistic Teacher Education*, LEA, London.

SCHÖN, D. (1983): *El profesional reflexivo: cómo piensan los profesionales cuando actúan*, Paidós, Barcelona.

SCHÖN, D. (1987): *La formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*, Paidós/MEC, Madrid.

Los Centros del Profesorado de la provincia de Sevilla, en colaboración con la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, convocan el **IV Encuentro provincial del profesorado de Matemáticas** dirigido a los niveles educativos de infantil, primaria, secundaria y universidad, bajo el lema *Investigar e innovar con las matemáticas*.

El encuentro se desarrollará durante los días 12, 13 y 14 de noviembre de 2009 con el siguiente horario:

Jueves 12 de 16:30 a 20:30
Viernes 13 de 9:00 a 14:00 y de 16:30 a 20:30
Sábado 14 de 9:00 a 14:00

Existe una web en la que se irá colocando la información sobre esta actividad cuya dirección es:

http://jornadasevilla.260mb.com

suma+ 60
Febrero 2009, pp. 35-41

Las *Liciones de mathemáticas* de Thomas Cerda: doscientos cincuenta años (1758-2008)

Al cumplirse 250 años de la publicación de las Liciones de mathemáticas *en España, presentamos una semblanza biográfica de su autor y la reseña de los aspectos más destacados de la obra, así como la trascendencia de la misma en los círculos académicos españoles de la segunda mitad del siglo XVIII.*

There are just passed 250 years from the first edition of the book Liciones de mathemáticas*, written by Thomas Cerda in Spain. In this paper we introduce a short biographical semblance of the author and we review the most outstanding traits of the book. We also underline the influence of this work in the Spanish academic groups at the middle of the XVIII century.*

Introducción

El siglo XVIII europeo se conoce como el Siglo de las Luces y se caracteriza por la ruptura científica y cultural con un pasado cargado de influencias religiosas y fundamentos filosóficos aristotélicos. El nuevo modelo apuesta por el progreso social y el desarrollo económico, impulsa la racionalidad del pensamiento y la experimentación en la ciencia y concede una significativa importancia a la educación. Estos principios se materializan en los ámbitos políticos y culturales en la denominada Ilustración. Existen evidencias documentadas de que, en España, la difusión de estas ideas se produjo paulatinamente, desde comienzos de ese siglo, hasta llegar a su punto culminante durante el reinado de Carlos III (Aguilar Piñal, 1996; Maz, 2005).

Las matemáticas españolas no fueron ajenas a esta corriente. Entre los primeros autores que incorporan y difunden los avances matemáticos de la época en obras escritas en castellano están Tomás Vicente Tosca, Juan Bautista Corachan y Thomas Cerda[1]. Este último escribió una obra matemática titulada *Liciones de mathemáticas o elementos generales de aritmética y álgebra para el uso de la clase*, considerada como "uno de los mejores, si no el mejor texto español de la época para la enseñanza de la aritmética y el álgebra" (López Piñero y otros, 1983; p. 21).

En el año 2008 se cumplieron 250 años de su publicación. Por este motivo presentamos un breve estudio sobre la mencionada obra y su autor. Con el pretexto de esta efemérides subrayamos que el estudio de la evolución de los conceptos e ideas reflejadas en los manuales de textos de matemáticas es objetivo primordial de la Educación Matemática, ya que contribuye a establecer vínculos entre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, su historia, así como con la propia disciplina matemática.

Thomas Cerda: semblanza biográfica

Algunos investigadores señalan que este insigne español nació el 22 de diciembre de 1715 en la ciudad de Tarragona (Benítez i Riera, 1996; López Piñero, 1983) según la información que Torres Amat (1836) ofrece en sus *Memorias*; sin embargo, el Abate Lorenzo Hervás y Panduro (1794), quien

Alexander Maz Machado
Departamento de Matemáticas. Universidad de Córdoba
Luis Rico Romero
Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

fue discípulo de Cerda, indica como fecha de nacimiento el 30 de diciembre de 1718. A la edad de 17 años es admitido en la Compañía de Jesús, el 3 de abril de 1732, y se ordena sacerdote en 1749.

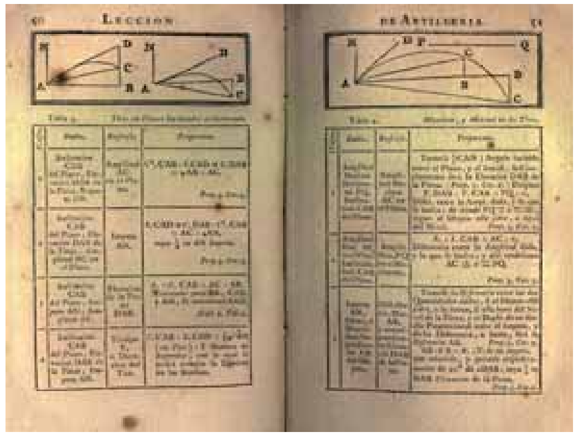
Cerda se dedicó a la enseñanza e impartió clases de Filosofía en Zaragoza. De allí pasó a la Universidad de Cervera donde proporcionó un importante impulso al estudio científico al introducir nuevas perspectivas en la filosofía y en la ciencia (Navarro Brotóns, 2006). Durante su estancia en Cervera publica en 1753 *Jesuiticae Philosophiae Theses*, libro en el que trata aspectos de física, astronomía y matemáticas tal como se hacia en otros países europeos; además coincide con el también jesuita Mateu Aymerich uno de los primeros científicos experimentales españoles. Durante su estancia como profesor de esta universidad estuvo al tanto de los avances matemáticos que se producían en Europa a través de dos importantes revistas científicas que se recibían en allí: el *Acta Eruditorum* de Leipzig, publicación iniciada por Leibniz, y la *Histoire de L´Académie Royale des Sciences* de París.

En 1754 es becado por el rey Fernando VI para perfeccionar sus conocimientos en Francia (Benítez i Riera, 1996), de forma que en 1755 concluye su etapa como profesor en Cervera y se traslada a Marsella. En el Real Observatorio de Marsella profundiza sus conocimiento matemáticos bajo la dirección del jesuita Esprit Pezenas, célebre náutico y astrónomo de la época (Hervás y Panduro, 1794), quien había realizado en 1749 la versión francesa del *Treatise of Fluxions* de Maclaurin.

Retorna a Barcelona alrededor de 1757. A instancia del ayuntamiento de la ciudad se crea expresamente para él una cátedra de matemáticas en el Colegio de Nobles de Santiago de Cordelles, cargo que ocupa hasta 1764. Durante esta época publica *Liciones de mathemáticas o elementos generales de aritmética y álgebra para el uso de la clase* (1758) en dos tomos. La idea original de Cerda era publicar cinco tomos y por tal razón, ese mismo año, el 3 de diciembre de 1758, escribe una carta a Thomas Sympson (la carta se encuentra en la biblioteca de la Academia de Historia) solicitándole consejo sobre qué otras partes de la matemática debería incluir en los futuros tomos para una adecuada enseñanza (Navarro Brotóns, 2006).

En 1764 concluye su labor en Cordelles y es llamado a Madrid por el rey Carlos III con el doble propósito de ser preceptor de los infantes y Cosmógrafo del Supremo Real Consejo de Indias siendo retribuido con una "pensión anual de mil dobles" (Benítez i Riera, 1996; p. 195). En estos años se le encarga de la segunda cátedra de matemáticas del Colegio Imperial (más tarde refundado como Reales Estudios de San Isidro) permaneciendo en ella hasta el momento de la expulsión de la orden en 1767. En esta institución Cerda sustituyó al jesuita Christian Rieger, quién había hecho observaciones del paso de Venus en 1761 (Udias Valina, 2003). Además coincidió con el también jesuita Juan Wendaligen, matemático checo, quien desde 1759 era maestro del Príncipe de Asturias y los infantes.

El 16 de mayo de 1764 Carlos III funda el Real Colegio de Artillería de Segovia y Cerda, animado por su director Feliz Gazola, pública en Barcelona *Lecciones de artillería* (1764), con motivo de la apertura de las clases de este Colegio.



El 2 de abril de 1767 se ordenó el extrañamiento de la orden jesuita del reino español y las posesiones de ultramar y, con ella, la expulsión de los miembros de la congregación. Como se ha mencionado antes, esta noticia toma a Cerda en Madrid. Fue embarcado en el chambequín *Garzota* el 27 de abril de 1767, desde el puerto de Cartagena, con destino a Italia (Giménez, 1995). Sobre la estancia de Cerda en tierras italianas, Hervás y Panduro (1794; p.21) relata:

> […] D. Tomás Cerda ilustre y honradísimo sabio, y á la vista humana digno de la mayor fortuna, de que se le privó el comun y fatal destíno de sus compañeros; pero él ha sabido adquirisela en su venerable vejéz, con el retiro que ha logrado de la caridad de los Padres Dominicanos de la Ciudad de Forli, entre los que ha determinado vivir hasta volar á las celestiales regiones, que fueron el objeto, no menos de sus lecciones matemáticas, que de su celestial meditacion.

Thomas Cerda murió el 18 de marzo de 1791 en el convento de los padres dominicanos de la ciudad italiana de Forlí, siendo sepultado en la iglesia del mismo convento (Hervás y Panduro, 1794).

Publicaciones e influencia educativa y científica

Si bien la producción bibliográfica de Cerda no es tan extensa como la de otros matemáticos españoles del siglo XVIII como

Benito Bails o Mariano Vallejo, publicó unos textos muy apreciados e innovadores en su época. Sus obras son las siguientes:

- *Prolusiones philosophiea* (Barcelona, 1753).
- *Liciones de mathemáticas o elementos generales de aritmética y álgebra para el uso de la clase* (Barcelona, 1758).
- *Lecciones de geometría y trigonometría*. (Barcelona, 1758)
- *Lecciones de Matemática o elementos generales de geometría para uso de la clase* (Barcelona, 1760).
- *Lecciones de artillería para el uso de la clase* (Barcelona, 1764).

Torres Amat (1836) indicaba que Cerda había dejado en Madrid un manuscrito y a punto de imprimir, un curso completo de Matemáticas, con dos tomos de Geometría sublime y de Mecánica. Se da la circunstancia de que en 1972 se descubrieron en la Academia de Historia de Madrid una serie de manuscritos atribuibles a Cerda (Aguilar Piñal, 1996), entre ellos se hayan unos cuadernos dedicados a:

- un tratado de aritmética,
- un tratado de álgebra,
- un tratado de geometría,
- unas adicciones a la astronomía,
- Tratado de instituciones geográficas,
- un tratado de trigonometría esférica y proyecciones estereográficas,
- instituciones ópticas,
- máquinas en general,
- instituciones cronológicas,
- Hidrostática, aerometría e hidráulica, y
- una introducción al algoritmo de fluxiones donde se pueden ver definiciones de variable o fluxiones y se hace uso de los infinitesimales (Garma, 1988).

Cerda fue discípulo de Gregorio Mayans y Siscar, quien le transmitió el deseo de renovación del pensamiento español a través de las ideas del movimiento novator; esto, unido al contacto que en Francia tuvo con las ideas científicas de su época, hicieron de él uno de los más destacados abanderados en la introducción de los nuevos conocimientos de las ciencias exactas en España y, según sus biógrafos, uno de los mejores matemáticos españoles del siglo XVIII.

La importancia del conocimiento matemático de Cerda y la trascendencia de su obra en la formación científica de la época quedan manifiestas en una carta que el 2 de noviembre de 1768, Francisco Subirás envía al Conde de Campomanes proponiendo plagiar las obras de Cerda, cuando solo había trascurrido un año desde la expulsión de los jesuitas del reino:

> […] he pensado cómo poder hacer corrientes los libros de matemáticas del Tomás Cerda, regular expulso, y es echando en cada obra una portada que diga: <<Lecciones de…. entresacadas de tal y tal autor, sin hacer memoria del tal Cerda, ni del corrector; […] El público desea esta obra y tengo entendido que de la Geometría hay muchos ejemplares. De lo que se produjese se pudiera surtir la clases de matemáticas que ni aún compás tiene (citado por Astorgano, 2003)

Cerda estudió las matemáticas de su época, las asimiló, se convirtió en profesor de matemáticas y produjo libros que contenían las últimas novedades en matemáticas procedentes de Newton, Leibniz y Euler, especialmente la teoría de las ecuaciones superiores y la teoría de series, que presenta en el Tomo II de las *Liciones mathemáticas.*

En la dedicatoria de las *Lecciones de Artillería* propone al Comandante General de la Artillería y Director de la Escuela de Artillería de Segovia, Félix Gazola, a que instara al rey para la fundación de una Academia Matemática, tal como ya habían propuesto otros matemáticos antes que él. La modernidad e importancia de esta obra matemática destinada a la formación de los militares hace que llegue incluso a ser referenciada en la revista alemana *Hermes* de 1830, casi setenta años después de su publicación,

Cerda desempeñó en Barcelona una cátedra pública sobre Astronomía así como de enseñanzas matemáticas, estas lecciones sirvieron de inspiración para que, a partir de una tertulia privada, más adelante se diera origen a la Conferencia Físico-matemática Experimental, que estuvo formada por 16 miembros fundadores, muchos de los cuales habían sido asistentes de la cátedra. Esta Conferencia fue reconocida por cédula real otorgada por Carlos III en 1765 transformándose en la Real Conferencia Física (Puig, 2002), institución que, posteriormente, será la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.

Cerda es considerado uno de los primeros autores españoles que introdujeron la física newtoniana, el sistema de Copérnico así como el cálculo diferencial e integral en España (Udias Valina & Udinas, 2003), como tal es reconocido por José Celestino Mutís célebre botánico y matemático que exploró y realizó catalogaciones de la flora y fauna en el Nuevo Mundo, quién señala como grandes propulsores del sistema copernicano a "[…] los españoles Don Jorge Juan, con los celebres jesuitas, Cerda, Ximena, Wendlingen, […]" (Citado por Espinosa, 2002; p. 273)

Para algunos investigadores Thomas Cerda podría calificarse como el punto de partida de las matemáticas modernas en Cataluña (Gullaman, 1989), como lo evidencia el hecho que en los primeros años del siglo XIX, en la cátedra de matemáticas del Colegio de Nobles de Cordelles, en la que él impartió clase cincuenta años antes, aún se usaban los textos impresos de Cerda (Barca Salom, 1993).

Entre los muchos discípulos de Cerda destacamos a Francesc Beell, profesor de matemáticas de la Conferencia Físico-matemática Experimental, quién además se encargo de la docencia de las matemáticas en Colegio de Nobles de Santiago de Cordelles tras la expulsión de los jesuitas. También lo fue Juan Antonio Desvalls y de Ardena, Marques de Lupiá y Vicepresidente de la Academia Nacional de Ciencias Naturales y Artes de Barcelona, insigne ilustrado quien:

> bajo la direccion del célebre P. Tomas Cerda, aprendió en toda su extensión las matemáticas, estas ciencias tan interesantes como olvidadas en aquellos tiempos, ciencias tan aptas para corregir los errores del entendimiento (Llaró y Vidal, 1821; p. 6).

Un destacado lingüista y filólogo español, autor de más de 90 obras, como fue Lorenzo Hervás y Panduro, se refiere a Cerda como *mi maestro* y recuerda algunas de las reflexiones que le compartía sobre su aprendizaje:

> No dudo de lo que dices, me respondio mi maestro: el estudio astronómico te ha descubierto un nuevo mundo […] Hé aquí, discípulo mio, descubiertos el fundamento natural y la diferencia de conocimientos, que del Supremo Hacedor tenias antes y ahora tienes (Hervás y Panduro, 1794; p.22).

Algunas obras de Cerda se hallaron en la biblioteca de un matemático y autor de la talla de Benito Bails (Arias de Saavedra, 2002), uno de los autores de textos matemáticos más influyentes en el ultimo cuarto del siglo XVIII, lo cual indica el buen concepto que de sus obras se tenía.

Liciones de matemática: 250 años

La primera obra matemática que Cerda publica estando en la universidad de Cervera es *Liciones de Mathematica, o Elementos Generales de Arithmetica y Algebra para el uso de la clase.* Tomos I y II. (1758), en la imprenta de Francisco Suriá, Impresor de la Real Academia de Buenas Letras de dicha ciudad. Cerda establece en el propio título que el libro es un tratado de Aritmética y Álgebra.

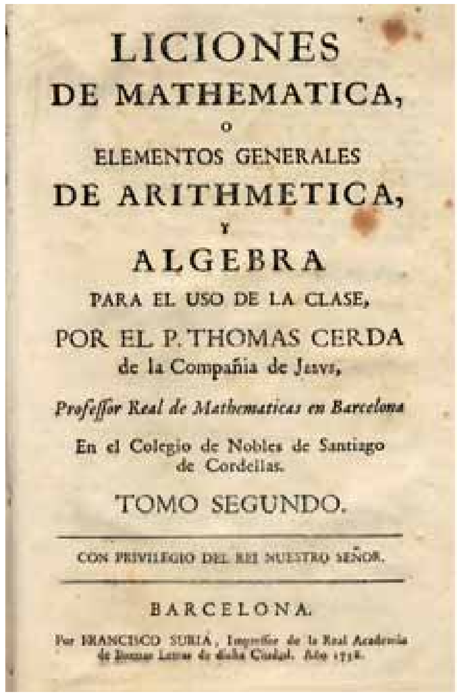
La obra está dedicada a la juventud española, como se indica en la introducción:

> Para vosotros, ò Nobles Jovenes, Delicias, y Esperanzas de nuestra Nacion Española se trabaja unicamente esta Obrita, à fin de evitar la molestia de escribir en la Clase, y poder dar con alguna mayor extension estos Tratados, los mas esenciales, por ser los fundamentos de esta grande Ciencia de las Mathematicas.

Desde el punto de vista didáctico, Cerda es conciente de la importancia del libro de texto en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y así lo señala:

> Es verdad, que algunas veces la dificultad de escribir en la Clase algunos Tratados hace, que en los Manuscritos se encuentren de suerte, que es imposible el entenderlos; por eso mi principal cuidado, y conato es el imprimir mis Liciones, ya porque habiendo de escribir en la Clase, el tiempo mas apreciable, à los Discipulos, que es el que está con sus Profesores, se pierde casi todo en un trabajo material, siempre inútil, y tal pernicioso, ya tambien porque la penuria del tiempo obliga à omitir muchas cosas bastantes necesarias, otras darlas tan superficialmente, que no merecen nombre de Elementos; en fin por impreso, sin tanta molestia, se puede dar quatro veces mas, y mejor de le que se da por escrito.

La lámina que ilustra la portada del libro "representa una mujer armada a lo heroico con varios genios que tienen en las manos los instrumentos de esta ciencia" (Cean Bermúdez, 1800) fue encargada al grabador Francisco Bois, reflejando el cuidado y esmero dado a la publicación de esta obra.


LICIONES
DE MATHEMATICA,
O
ELEMENTOS GENERALES
DE ARITHMETICA,
Y
ALGEBRA
PARA EL USO DE LA CLASE,
POR EL P. THOMAS CERDA
de la Compañia de Jesus,
Professor Real de Mathematicas en Barcelona
En el Colegio de Nobles de Santiago
de Cordellas.
TOMO SEGUNDO.
CON PRIVILEGIO DEL REI NUESTRO SEÑOR.
BARCELONA.
Por FRANCISCO SURIÀ, Impressor de la Real Academia
de Buenas Letras de dicha Ciudad. Año 1758.

El tomo I consta de 316 páginas y está dividido en 20 capítulos; el tomo II tiene 237 páginas, y sus capítulos son 18.

El tomo I está ordenado de manera que la Aritmética aparece como introducción al Álgebra; el capítulo primero, explica la diferencia entre Aritmética y Álgebra, el segundo define las propiedades y valor de los números, definiendo en el tercero las reglas fundamentales de la Aritmética. En los capítulos siguientes se abordan las operaciones del Álgebra, las fracciones numéricas y algebraicas así como las fracciones decimales. En el capítulo séptimo estudia las razones y proporciones, dedicando los siguientes a la regla de tres directa e inversa, simple y compuesta, así como sus aplicaciones; se continúa con el estudio de las potencias, raíces y radicales, concluyendo con el estudio de las progresiones aritmética, geométrica y los logaritmos.

En el tomo II se estudian las ecuaciones de primer, segundo y tercer grado, llegando hasta el estudio de las ecuaciones superiores y al método de Newton. Se trata de un libro de Álgebra en el sentido moderno del término, que incorpora los avances recientes de su época.

Cerda dice que procura seguir en el texto el estado en el que se encuentran las ramas de las matemáticas en Inglaterra y Francia; en el texto se citan los libros *New complete and universal system or body of decimal arithmetik*, y *The Young Student´s Memorial Book, or Pocket Library* de Benjamin Martin, *Introductio in analisis infinitorum* de Euler, y los *Elementos de álgebra* de Saunnderson, entre otros.

Toma ideas de Harriot, Newton, MacLaurin, Riccati, de Moivre, e incluye las soluciones de Cardano y Descartes a las ecuaciones de tercero y cuarto grado (López Piñero y otros, 1983); todo ello es indicativo de que Cerda estaba al tanto de los desarrollos matemáticos que se venían produciendo en Europa a partir del siglo XVII.

Para Cerda "la Mathemática en comun es una Ciencia, que trata de la Magnitud, y Extensión" (p. 1, tomo I) y "procede por definición, esto es, explicaciones claras y limpias del sujeto de que se trata, ò termino, de que se sirve: por Postulados, o Hipótesis" (p. 3); estas proposiciones son probadas por "Demonòtracion. que es decir prueba evidente que se deduce inmediatamente de los Axiomas o de otras Proposiciones ya demonstradas" (p. 3); asimismo define lo que entiende por magnitud y número, de la siguiente forma.

Define magnitud como "todo aquello, que es capaz de aumento, y disminución efto es, que añadiendofele algo de la misma efpecie, fe aumenta, y quitandofele algo, fe difminuye." (p. 1, tomo I). Es interesante destacar los ejemplos de magnitud que proporciona, ya que incluye casos de la dinámica: "Affi una linea, un cuerpo, un efpacio, un movimiento, una fuerza es magnitud." (p. 1, tomo I).

De igual forma defina la Cantidad como "Toda Magnitud fe puede comparar con otra de la mifma efpecie, efto es, linea con linea, cuerpo con cuerpo, efpacio con efpacio; y por configuiente le es igual, mayor, ò menor, y folo por efte cotejo con otra, como medida, podemos llegar a conocer fu quantidad, ò quan grande fea" (pp. 1-2, tomo I).

La idea de número la expresa de la siguiente forma: "si la quantidad, ò magnitud, que medimos, es preciòsamente igual à la que tomamos por medida, fe llama Unidad, ò uno: fi la contiene dos, ò mas veces, fe llama Numero" (p. 2, tomo I).De manera implícita Thomas Cerda asume el término de cantidad como resultado de comparar una magnitud con otra; la cantidad es el resultado de medir una magnitud.

En el texto queda claro que considera:

> La Arithmetica es una Ciencia, que trata de los Numeros, efto es, da Reglas para inferir unas quantidades de otras [...] La parte de la Arithmetica, que fe firve para fus operaciones de las expreffiones determinadas 0, 1, 2, &c. fe llama fimplemente Arithmetica y fus expreffiones, de que fe firve, Numeros, o Chârectéres Arithmeticos. La parte que fe firve de las expreffiones univerfales , e indeterminadas a, b, c, &c. fe llama Algebra o Arithmetica Univerfal, pero entrambas fe fundan en unos mifmos principios, [...] (pp. 5-6, tomo I).

Y continúa:

> [...] aunque el modo de obrar es algo diferente el uno del otro; el del Algebra es mas facil, y expedito, porque no eftá atado a tantas leyes y circunftancias, el de la Arithmetica es mas dificil, y penofo. (p. 6, tomo I).

Cerda muestra así su preferencia por el Álgebra, cuyo desarrollo formal se presta a menos interpretaciones que la Aritmética. Esto se aprecia en el distanciamiento que Cerda procura mantener con la interpretación de los negativos como naturales relativos y su preferencia por la interpretación algebraica, como números enteros.

En el texto se indica que los escolios ilustran lo ya demostrado. Todo esto refleja una construcción formal de las matemáticas partiendo de axiomas, postulados, teoremas y reglas generales.

Acerca del número escribió:

> Por nombre de Numeros entendemos aquí la unidad 1, el complexo de muchas unidades , como 2, 3, 4, &c. ò alguna parte de la unidad, como 1/3, 1/4, 2/3, &c. A. la unidad, ò al complexo de muchas unidades, llamamos Enteros, ò un Todo, à las partes de la unidad llamamos Quebrado, ò Fraccion (p. 9, tomo I).
>
> lo que es un entero refpecto de una denominacion, es quebrado refpecto de otra. Affi un pie es un entero refpecto de pie, pero un quebrado, ò 1/3 refpecto de vara (p. 10, tomo I).

Cerda dedica el Capítulo VI a las fracciones decimales, a su formación y a las operaciones entre fracciones decimales.

En la introducción al álgebra dedica un solo párrafo para decir que son términos, cantidad "complexa" y "simple". Luego pasa a indicar cuáles son las cantidades polinómicas. El texto continúa con la enunciación de reglas para la suma, resta, multiplicación y división de cantidades algebraicas. Además presenta la regla universal para los signos del producto.

La idea de generalidad matemática queda manifiesta cuando explica la diferencia entre la aritmética y el álgebra:

> Pero para tratar la Arithmetica de eftos Numeros, ò quantidades, es menefter, que tenga algunas expreʃʃiones, ò ʃeñales, que los expriman; y para efto tiene dos efpecies de expreʃʃiones, las unas determinadas, efto es, que exprimen un numero determinado, otras indeterminadas, y univerò-ales, que fon indiferentes para fignificar qualquier numero, y quantidad, y con las que hace fus operaciones univerʃales, efto es, verdaderas en cualquier numero, y quantidad particular que fe las quiera fignificar (pp. 5-6, tomo I).

Cerda enfatiza la diferencia en el tratamiento operacional que se hace para las cantidades en el Álgebra respecto a la Aritmética:

> hasta ahora hemos hecho las operaciones del aritmética en Numeros determinados, por consiguiente sus operaciones, y resultados solo exprimian quantidades particulares. Pero ahora hemos de hacer las operaciones universales, y en qualesquiera generos de cantidades, por consiguiente los Chàracteres han de significar indeterminadamente qualquier genero de quantidad, que queremos. (p. 48, tomo I).

El siglo XVIII fue un período histórico muy dinámico en el desarrollo de las matemáticas y en el que se fueron extendiendo ciertas notaciones en distintos campos matemáticos, las cuales en muchas ocasiones no eran únicas. Cerda brinda algunas indicaciones de esas variadas notaciones como en el caso de la división:

> El feñal que indica la operación es diferente en varios Autores; unos ponen folo dos puntitos entre las dos quantidades, fiendo la primera el Dividendo, la fegunda el Divifor. Affi (a+b) : (c+d) fignifica Quociente de a+b dividido por c+d; otros Inglefes en lugar de los dos puntos ponen ÷ (p.72, tomo I).

En esta obra se aprecia el uso de la moderna notación algebraica para las operaciones y ecuaciones apoyada en unas explicaciones que, aunque retóricas, son cortas y básicas. Como cuando explica la existencia de raíces negativas y las diferencia de las cantidades imaginarias:

> […] porque no es mifmo $\sqrt{-a^2}$, que $-a^{2/2}$ = -a, que es quantidad posible, pero negativa, y $\sqrt{-a^2}$ es quantidad impofible; por lo tanto las Raices impfibles lo mejor e que fe queden con signo √ (Tomo I, p. 212)

La actualidad, profundidad y organización de los contenidos mereció la siguiente referencia en la edición de agosto de 1760 del *Journal Etranger* francés:

> Aunque no lleva más que el titulo de Elementos, se encuentran en ella muchas cosas tratadas mas profundamente que en los libros ordinarios de este género. Por ejemplo, vemos en el primer tomo una teoría de los logaritmos, tratada según el método de Mr. Hally y una tabla de logaritmos hiperbólicos de los números crecientes desde 1 a 10. También se encuentra en el segundo tomo la teoría general de las ecuaciones, tratada con mucha extensión y una elección bien hecha de los mejores métodos inventados por Newton, Mclaurin, etc. con un tratadazo bastante considerable de la teoría de las series [...]. Todo anuncia una fermentación que no tardara en producir en las ciencias exactas y en la filosofía natural una revolución ventajosa a sus progresos (Arnaud, 1760; p. 232-233).

Prueba del buen tratamiento de los conceptos y de la acertada elección de ejemplos y ejercicios que esta obra presenta es que destacados autores de textos matemáticos remitían a las *Liciones mathemáticas* bien para ampliar información o para resolver problemas como es el caso de Manuel Poy y Comes: “resuélvase el problema, que el P. Thomas Cerda en su tomo Iº de Matemáticas, Pág, 143 nos presenta […]” (Poy y Comes, 1819; p. 49).

Conclusiones

Son diversos los factores que permitieron a Cerda no sólo ser una destacada figura matemática, sino escribir y publicar algunos de los libros de matemáticas más modernos y ampliamente utilizados en la segunda mitad del siglo XVIII: aspectos como la formación jesuita recibida, así como su constante preocupación por perfeccionar sus conocimientos en el país o fuera de él. También influyo el contacto permanente con algunos de los matemáticos y hombres de ciencia españoles o extranjeros de su época que residían en España.

El trabajo científico de Thomas Cerda estuvo marcado por manifestaciones de simpatía y apoyo a las ideas renovadoras antiaristotélicas que postulaban los novatores, apostando con ello por la adquisición de un nuevo espíritu crítico, como lo demostró durante su paso por la Universidad de Cervera. Como resultado de su magisterio, algunos de sus discípulos siguieron el camino de la academia para contribuir al desarrollo de la sociedad española.

Es innegable que para la historia tanto de la Matemática como de la Educación Matemática española, la figura de Thomas Cerda y sus *Liciones de Mathemática* representan un paso importante en la difusión de las nuevas matemáticas que se abren camino en la Europa del siglo XVIII. Es de reconocer que no realiza aportaciones propias de importancia, pero la presentación didáctica y moderna que hizo, logró dar un impulso a los conocimientos matemáticos que se impartían y aplicaban. A esta cualidad se unen sus aplicaciones prácticas en las *lecciones de artillería*.

Este autor es uno de los muchos matemáticos españoles que, a lo largo de la historia, han aportado su obra al desarrollo científico de España. A veces son desconocidos por las nuevas generaciones y hasta por los propios educadores matemáticos; por tanto, sacar a la luz los logros, el tesón y el deseo de esos pioneros por dar brillo a la ciencia de su país, es una labor que no sólo merece la pena si no que debería ser un objetivo constante para que perviva la memoria histórica de nuestra disciplina.

NOTAS

1 El nombre de Cerda se encuentra escrito de diversas formas en la literatura consultada: Tomás Cerda, Tomás Cerdá, Thomas Cerdá y Thomas Cerda, hemos adoptado esta última porque es la que el propio autor utiliza en la dedicatoria que hace al Ayuntamiento de Barcelona de las *Liciones de mathematicas*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUILAR PIÑAL, F. (1996): *Historia literaria de España en el siglo XVIII*, Trotta, Madrid.

ARIAS DE SAAVEDRA, I. (2002): *Ciencia e ilustración en las lecturas de un matemático: la biblioteca de Benito Bails*, Editorial Universidad de Granada - Reial Académia de Bones Lletres de Barcelona, Granada

ARNAUD, F. (1760): Spagne, *Journal Etranger,* 231-234.

ASTORGANO, A. (2003): El mecenazgo literario de Campomanes y los jesuitas expulsos. In D. Mateos (Ed.), *Campomanes doscientos años despues. Congreso internacional Campomanes (1723-184)* (pp. 269-311), Instituto Feijoo de estudios del siglo XVIII, Oviedo.

BARCA SALOM, F. X. (1993): "La càtedra de Matemàtiques de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona (1766-1870). Més de cent anys de docència de les Matemàtiques. In V. Navarro Brotóns, & et al (Ed.)", *Actes de les II Trobades d'Història de la Ciència i de la Tècnica* (pp. 91-105), Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, Barcelona.

BENÍTEZ I RIERA, J. (1996): *Jesuïtes i Catalunya: fets i figures*, Publicacions de l'Abadia de Montserrat, Barcelona.

CEAN BERMÚDEZ, J. A. (1800): *Diccionario histórico de los más ilustres profesores de las bellas artes en España* (Vol. I), Real Academia de San fernando-Impenta de la viuda de Ibarra, Madrid.

ESPINOSA, G. (2002): *Ensayos completos*, Fondo Editorial Universidad EAFIT, Medellín, Colombia.

GARMA, S. (1988): "Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX. In J. M. Sánchez Ron (Ed.)", *Ciencia y sociedad en España* (pp. 93-127), Ediciones el Arquero-CSIC, Madrid.

GIMÉNEZ, E., & MARTÍNEZ, M. (1995): "Los diarios del exilio de los jesuitas de la provincia de Andalucía (1767)", *Revista de Historia Moderna*(13/14), 211-252.

GULLAMAN, T. (1989): "Una panorámica de la matemática a Catalunya durant el segle XIX", *Bulletí de la Societat Catalana de Matemátiques*(4), 47-67.

HERVÁS Y PANDURO, L. (1794): *Viage estático al mundo planetario en el que se observan el mecanismo y los principales fenómenos del cielo; se indagan sus causas físicas, y se demuestran la existencia de Dios y sus admirables atributos* (Vol. Parte segunda), En la imprenta de Aznar, Madrid.

LÓPEZ PIÑERO, J. M., GLICK, T. F., NAVARRO, V., & PORTELA, E. (1983): *Diccionario histórico de la ciencia moderna en España (Vol. I)*, Península, Barcelona.

LLARÓ Y VIDAL, J. (1821): *Elogío del I.S.D. Juan Antonio Desvalls y de Ardena.*,Antonio Brusi, impresor de Camara de S. M. , Barcelona.

MAZ, A. (2005): *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX,* Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

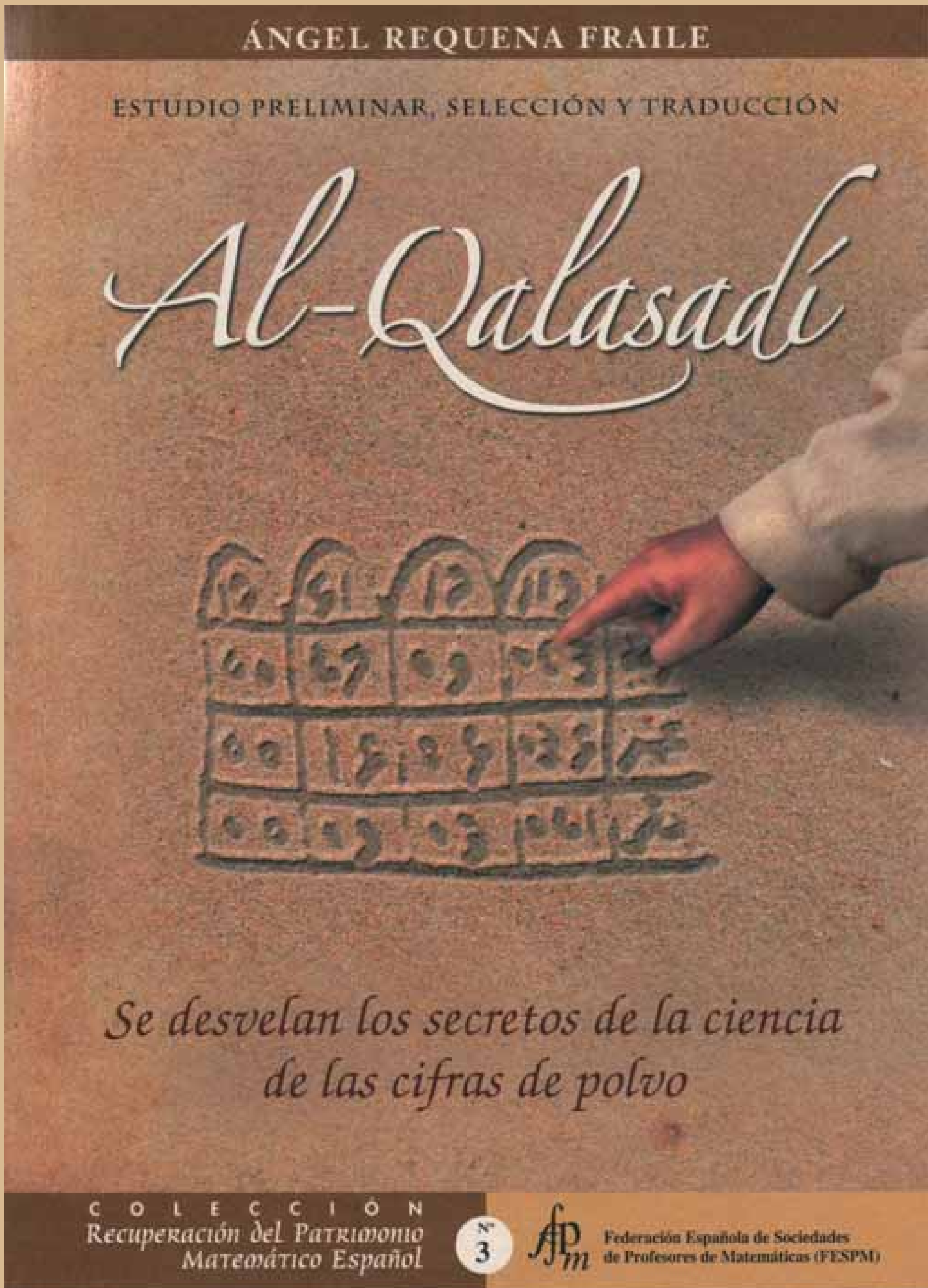
NAVARRO BROTÓNS, V. (2006): "Science and enlightenment in eighteenth-century Spain: The contribution of the jesuits before and after the expulsion. In J. O´Malley, Bailey, G.H., Staud, J. B., & Harris, S. J. (Ed.)", *The jesuits II: cultures, sciences and the arts, 1540-1773* (pp. 390-404), Universidad de Toronto, Toronto.

POY Y COMES, M. (1819): *Elementos de Aritmética numérica y literal al estilo de comercio para instruccion de la juventud. Tomo II* (Quinta edición), Oficina de Sierra y Martí, Barcelona.

PUIG, P. (2002): *Los primeros instrumentos científicos de la Real Academia de Ciencias de Barcelona a finales del siglo XVIII y principio del XIXI.*

TORRES AMAT, F. (1836): *Memorias para ayudar a formar un diccionario crítico de los escritores catalanes y dar alguna idea de la antigua y moderna literatura de Cataluña*, Imprenta de J. Verdaguer, Barcelona.

UDIAS VALINA, A., & UDIAS, A. (2003): *Searching the heavens and teh earth: the history of Jesuit observatories*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht.



Servicio de Publicaciones de la FESPM
Apartado de Correos 590
06080 Badajoz
Información y pedidos: *publicafespm@wanadoo.es*

AL-QALASADÍ
Se desvelan los secretos de la ciencia de las cifras de polvo
Ángel Requena Fraile
Federacion Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)
Badajoz, 2008
ISBN 978-84-934488-8-2
91 páginas

suma+ 60
Febrero 2009, pp. 43-54

Pruebas de conocimientos y destrezas en matemáticas

Para conocer cómo están de conocimientos matemáticos elementales los alumnos que acceden por primera vez en las diplomaturas de maestro a la materia de Matemáticas, se les han aplicado las pruebas de diágnóstico para alumnos de sexto curso de Primaria de las Comunidades Autónomas de Murcia y Madrid. La muestra la forman alumnos de las universidades de Murcia, La Laguna y Oviedo y de varias especialidades. Los resultados se analizan por ítem, por variables de corte, se efectúa un análisis descriptivo e inferencial y se comparan los resultados de las dos pruebas con los obtenidos por los alumnos de sexto curso de primaria.

In order to determine the basic mathematic knowledge of entry-level students to a Mathematics teaching degree, two diagnostic tests were carried out which had been designed for sixth year primary school pupils in Murcia and Madrid. The sample was taken from students at Murcia, La Laguna and Oviedo universities across a variety of subjects (Music, French, English, Primary Education and Physical Education). The results were analyzed by items, for different defining variables (sex, age, subject and university), and a descriptive and inferential analysis was carried out with the results of the two tests being compared with those obtained from the sixth year primary school pupils.

Introducción

El 28 de marzo de 2007, la Consejería de Educación, Ciencia e Investigación de la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia pasó a 14.700 alumnos de 6º de Primaria una "Prueba de destrezas básicas" a lo largo de 458 centros. Un resumen de los resultados, a los que hemos tenido acceso a través del periódico *La Verdad* del 21.7.2007, -ya que no se han podido conseguir los datos-, indica que un 77,2% del alumnado superó la prueba de Matemáticas con una nota superior a 5, siendo la calificación media de 6,58.

En mayo de 2007, la Comunidad Autónoma de Madrid, en concreto su Consejería de Educación pasó a los alumnos de 6º curso de Educación Primaria una "Prueba de conocimientos y destrezas indispensables (CDI)" en donde una parte, al igual que en el caso de Murcia, era referida a Lengua y otra referida a Matemáticas. Fue aplicada el 29 de mayo de 2007 a 51.645 alumnos de 1.184 colegios, obteniendo una nota media de 6,04 y en la parte de cálculo 6,67 y en la de resolución de problemas 5,42.

En trabajos anteriores (Nortes, 1993) habíamos estudiado la situación de conocimientos de alumnos de 6º EGB al haber analizado el paso de las operaciones concretas a las formales en el dominio de las matemáticas.

En el ámbito universitario, habíamos analizado (López, Martínez, Nortes y Sánchez, 1991) los conocimientos matemáticos de alumnos de la diplomatura de magisterio y la valoración de su currículo, y más recientemente en (Huedo, López, Martínez y Nortes, 2003) hemos pasado a nuestros alumnos de las diplomaturas de maestro una prueba de conocimientos matemáticos.

En los casos anteriores hemos contrastado los resultados obtenidos con los de otros estudios realizados con pruebas similares. Ahora nuestro objetivo es conocer y analizar cómo están de conocimientos matemáticos elementales nuestros alumnos de las diplomaturas de maestro, en distintas universidades, que acceden por primera vez a la asignatura de Matemáticas y su didáctica, utilizando para ello las pruebas de diagnóstico pasadas en las Comunidades de Murcia y de Madrid a los alumnos de sexto curso de Primaria.

Andrés Nortes Checa
José Antonio López Pina
Rosa Martínez Artero
Universidad de Murcia

Descripción de las pruebas

La prueba de Murcia, denominada *prueba de destrezas básicas* es una prueba de diagnóstico en sexto curso de Educación Primaria, carece de efectos académicos, tiene un carácter informativo y orientador y servirá para obtener información de las destrezas básicas del área de Matemáticas que se establecen en el currículo de Educación Primaria de la Comunidad Autónoma de Murcia, según la Orden del 22 de enero de 2007 de la Consejería de Educación y Cultura. Se estructura en dos partes, una de contenidos de Lengua y otra de contenidos de Matemáticas. La prueba de Matemáticas, recogida en el Anexo, consta de 15 ítems que miden las destrezas de cálculo, de medida y de resolución de problemas. Cada uno de los ítems se presenta con un espacio para resolver las operaciones y cuatro posibles respuestas para señalar la correcta. La prueba para 6º de Primaria tiene un tiempo de realización de 50 minutos. En las diplomaturas de maestro el tiempo de realización ha sido de 30 minutos y corregida con 1 punto por ítem. En total 15 puntos.

La *Prueba de conocimientos y destrezas indispensables (CDI)* de los alumnos de sexto curso de Primaria de la Comunidad de Madrid se estructura en dos partes, siendo la de Matemáticas la que hemos utilizado y que aparece en el Anexo. Esta prueba "trata de conocer en qué medida el actual currículo proporciona los conocimientos y destrezas que son indispensables para iniciar la Educación Secundaria Obligatoria con garantías de éxito" según se establece en la Resolución de 17 de abril de 2007 de la Viceconsejería de Educación de la Comunidad de Madrid. La prueba consta de varias preguntas de Matemáticas, unas son ejercicios sencillos y otras son problemas un poco más complejos, no haciendo uso de la calculadora. Cada pregunta va acompañada de un espacio sombreado para escribir la respuesta y una hoja adicional al final de borrador para operaciones. El tiempo de realización es de 45 minutos. En esta investigación el tiempo es de 30 minutos y ha sido corregida los primeros diez ítems sobre 1 punto y los últimos cinco problemas de dos preguntas a 1 punto por pregunta. En total 20 puntos.

Método

Participantes

Hemos utilizado una muestra no aleatoria de 459 alumnos de las universidades de Murcia, La Laguna y Oviedo, de distintas especialidades (Primaria, Educación Física, Francés, Inglés y Música), unos de primer curso y otros de segundo curso, ya que al ser planes de estudios no homogéneos, unos alumnos tiene la asignatura de Matemáticas y su didáctica por primera vez en primero y otros en segundo.

A los 459 alumnos les hemos pasado las dos pruebas, la de Murcia y la de Madrid en una sesión de una hora y hemos obtenido unos resultados que luego hemos tabulado y analizado.

Por sexo han sido 137 hombres y 322 mujeres, dándose el caso de que en una especialidad, Francés, todas han sido mujeres.

Por edad los hemos agrupado en dos bloques, 411 alumnos de 25 años o menos y 48 mayores de 25 años.

En la Universidad de Murcia han respondido 276 alumnos, en la de La Laguna 81 y en la de Oviedo 102.

Por especialidad, 203 corresponden a Primaria, 173 a Educación Física, 26 a Francés, 28 a Inglés y 29 a Educación Musical.

Los porcentajes correspondientes a estas variables de corte: Sexo, Edad, Universidad y Especialidad, son (Tabla 0):

Sexo	N.º Alumnos	Porcentaje
Hombre	137	29,8
Mujer	322	70,2
Total	459	100,0

Edad	N.º Alumnos	Porcentaje
≤ 25 años	411	89,5
> 25 años	48	10,5
Total	459	100,0

Universidad	N.º Alumnos	Porcentaje
Murcia	276	60,1
La Laguna	81	17,6
Oviedo	102	22,2
Total	459	100,0

Especialidad	N.º Alumnos	Porcentaje
Primaria	203	44,2
E. Física	173	37,7
Francés	26	5,7
Inglés	28	6,1
E. Musical	29	6,3
Total	459	100,0

Tabla 0. Porcentajes correspondientes a Sexo, Edad, Universidad y Especialidad

Resultados

Prueba de Murcia

Hemos analizado las contestaciones correctas de forma global y hemos obtenido, como no podía ser de otra manera, unos porcentajes muy altos de respuestas correctas, si bien esos porcentajes deberían haber estado en todos los casos próximos a 100 por la índole de la prueba. El porcentaje de aciertos en cada ítem de esta prueba aparece en la tabla 1.

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8
%	99,3	97,8	81,9	91,5	69,1	94,3	74,1	88,2

Ítems	9	10	11	12	13	14	15
%	80,6	91,9	64,9	99,8	77,8	81,9	24,8

Tabla 1. Porcentaje de aciertos por ítem en la prueba de Murcia

En esta tabla se aprecia que el ítem 12, que ha obtenido el porcentaje más alto (99,8%), es la *lectura de un gráfico de barras,* seguido del ítem 1, *señalar el valor posicional de una cifra* (99,3%) y del ítem 2 *reconocimiento de una fracción y su equivalente* (97,8%). En el extremo opuesto están, el ítem 5, *saber efectuar correctamente una división de un número decimal por un número entero* (69,1%), el ítem 11, *pasar de una unidad de longitud a otra* (64,9%) y el ítem 14, *calcular el área de un círculo conocido el radio*, (24,8%).

En el caso de la división, el 11,8% de alumnos la dejó en blanco, sin resolver, y el 13,3% la realizó de forma equivocada, dando un resultado distinto a las cuatro respuestas que venían incluidas. En el caso del ítem 11, *paso de una unidad de medida a otra*, el 8,5% la dejó sin contestar, el 1,5% puso una respuesta distinta a las indicadas como posibles y el 25% colocó la coma en posición no correcta, en las distintas posiciones de las respuestas que acompañan a la correcta. El 35% de los alumnos no supo realizar la división correctamente.

En el caso del círculo, ítem 15, el 20,9% señala la respuesta que aparece correspondiente a la longitud de la circunferencia, el 12,2% señala la respuesta como si el área del círculo fuera pi por el radio y el 2% como si el área del círculo fuera 2 veces pi. Preocupante es el 24,2% de alumnos, casi la cuarta parte que deja la pregunta en blanco sin contestar y el 15,9% que contesta dando una solución distinta a las cuatro posibles respuestas que acompañan el enunciado.

El 50% de los estudiantes contestó correctamente entre 11 y 14 ítems (valores de los cuartiles), estando situada la mediana en 13 ítems correctos.

Al total de la prueba, contestando correctamente los 15 ítems lo hicieron 38 alumnos, el 8,3%, mientras que no alcanzaron 8 ítems correctos, tan solo 10 alumnos. Estos alumnos, suspendieron la prueba.

Resultados por sexo

En la tabla 2 aparecen los porcentaje de aciertos de los ítems en función del sexo del participante en la prueba de Murcia.

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8
H	99,3	100	85,4	92,7	67,9	97,8	86,9	92,0
M	99,4	96,9	80,4	91,0	69,6	92,9	68,6	86,6
Total	99,3	97,8	81,9	91,5	69,1	94,3	74,1	88,2

Ítems	9	10	11	12	13	14	15
H	88,3	97,1	67,9	100	73,7	85,4	27,0
M	77,3	89,8	63,7	99,7	79,5	80,4	23,9
Total	80,6	91,9	64,9	99,8	77,8	81,9	24,8

Tabla 2. Porcentaje de aciertos de la prueba de Murcia en función del sexo

En esta tabla se aprecia que el porcentaje de respuestas correctas es en todas las preguntas, excepto en la 1, 5 y 13, superior el de hombres a mujeres, siendo la diferencia muy importante a favor de hombres la número 7, en donde es de 17,3 puntos e importante en la número 9, con 11 puntos. En el primer caso, en la aplicación del enunciado de un problema y en el segundo en la aplicación de un porcentaje en una rebaja.

La mediana de respuestas correctas en alumnos está situada en 13 ítems, mientras que en alumnas en 12 ítems. El 50% de los alumnos contesta correctamente entre 12 y 14 ítems, mientras que en el caso de las alumnas lo hace entre 11 y 14 ítems. La moda, tanto en alumnos como en alumnas está situada en 14 ítems.

Resultados por edad

La tabla 3 presenta los porcentajes de aciertos en los ítems de la prueba de Murcia en función de la edad.

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8
≤ 25	99,3	97,8	83,0	91,5	69,6	94,4	74,7	88,1
> 25	100	97,9	72,9	91,7	64,4	93,8	68,8	89,6
Total	99,3	97,8	81,9	91,5	69,1	94,3	74,1	88,2

Ítems	9	10	11	12	13	14	15
≤ 25	81,0	91,7	66,7	99,8	77,6	83,2	25,5
> 25	77,1	93,8	50,0	100	79,2	70,8	18,8
Total	80,6	91,9	64,9	99,8	77,8	81,9	24,8

Tabla 3. Porcentaje de aciertos de los ítems de la prueba de Murcia en función de la edad

Los mayores de 25 años contestan todos bien a los ítems 1 y 12, mientras que tan solo el 18,8% contesta bien al ítem 15. Hay un intervalo muy grande de respuestas acertadas.

En los más jóvenes la dispersión es menor, situándose los porcentajes de aciertos por ítem más altos que los mayores de 25 años en 7 de los 15 ítems de la prueba.

En el conjunto de la prueba la mediana de los de 25 años o menos se sitúa en 13 ítems correctos, mientras que la de los mayores de 25 años está en 12 ítems. La moda en los más jóvenes está en 14 ítems y en los más mayores en 12 ítems.

Resultados por universidad

La tabla 4 presenta los porcentajes de aciertos de los ítems de la prueba de Murcia en función de la Universidad.

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8
MU	99,6	99,3	84,8	92,8	69,6	94,2	70,7	89,9
LL	98,8	92,6	69,1	85,2	66,7	91,4	64,2	80,2
OV	99,0	98,0	84,3	93,1	69,6	97,1	91,2	90,2
Total	99,3	97,8	81,9	91,5	69,1	94,3	74,1	88,2

Ítems	9	10	11	12	13	14	15
MU	81,2	95,3	63,3	99,6	78,6	80,8	23,6
LL	71,6	84,0	55,6	100	66,7	72,8	17,3
OV	86,3	89,2	79,4	100	84,3	92,2	34,3
Total	80,6	91,9	64,9	99,8	77,8	81,9	24,8

Tabla 4. Porcentaje de aciertos de la prueba de Murcia en función de la Universidad

Los resultados más bajos se obtienen en la universidad de La Laguna, en donde en algunos ítems las diferencias son importantes, como por ejemplo en los ítems 9, 13, 14 y 15. En el ítem 15, aún siendo el porcentaje de aciertos muy bajo en las tres universidades, los alumnos de Oviedo duplican a los de La Laguna en el porcentaje de respuestas correctas, siendo dicha diferencia muy apreciable.

La explicación que puede tener es que los alumnos de La Laguna, quizás no midieran bien los tiempos ya que los peores resultados los obtienen en los últimos ítems. Los alumnos de Oviedo, por el contrario, en 9 ítems superan en porcentaje de aciertos a los de Murcia y La Laguna.

Resultados por especialidad

La tabla 5 presenta los porcentajes de aciertos de la prueba de Murcia en función de la especialidad.

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8
Prim.	99,0	96,6	80,8	91,6	73,9	92,1	68,5	85,2
E. F.	100	98,3	88,4	93,1	67,1	97,1	77,5	90,8
Franc.	100	100	80,8	96,2	53,8	88,5	76,9	100
Inglés	100	100	82,1	89,3	78,6	100	100	92,9
Musica	96,6	100	51,7	79,3	51,7	93,1	65,5	79,3
Total	99,3	97,8	81,9	91,5	69,1	94,3	74,1	88,2

Ítems	9	10	11	12	13	14	15
Prim.	71,9	89,7	63,1	100	80,3	75,9	20,2
E. F.	87,3	94,8	69,9	99,4	79,8	89,0	29,5
Franc.	92,3	92,3	57,7	100	76,9	92,3	46,2
Inglés	96,4	100	71,4	100	85,7	89,3	25,0
Musica	75,9	82,8	48,3	100	41,4	65,5	10,3
Total	80.6	91,9	64,9	99,8	77,8	81,9	24,8

Tabla 5. Porcentaje de aciertos en la prueba de Murcia en función de la especialidad

De las cinco especialidades, son los alumnos de Educación Musical los que obtienen los porcentajes más bajos, siendo muy sorprendente en el caso del ítem 15, en donde solo un 10,3% lo responde correctamente. Y sorprende el caso de la especialidad de Francés en este mismo ítem en donde mientras que el porcentaje del total de alumnos está en 24,8%, ellos casi lo duplican con un 46,2%.

Los alumnos de Primaria son los más regulares, si bien no destacan en ningún ítem; los de Educación Física destacan en 2, los de Francés en 5, los de Inglés en 6 y los de Educación Musical igualan con otras especialidades el primer puesto en 2 ítems. Los de Inglés destacan más, debido posiblemente a que la nota de corte para la entrada en la titulación es más alta que en las otras especialidades y vienen más preparados.

La mediana se sitúa en 11 ítems para Música, en 12 para Primaria, en 13 para Educación Física y Francés y en 14 para Inglés.

Análisis descriptivo e inferencial de la prueba de Murcia

En la prueba de Destrezas Básicas de la Región de Murcia, sobre una puntuación máxima de 15, la media se sitúa en 12,18 y la desviación típica en 2,01. Considerando intervalos Media1±DT, Media2±DT y Media3±DT, en cada uno de ellos tendríamos 326, 436 y 453 alumnos respectivamente, que representan el 71,02%, el 94,99% y el 98,69% del total de alumnos. Traducidos los datos a una puntuación de 0 a 10, equivale a una nota media de 8,12 y a una desviación típica de 1,34, que nos servirán para relacionarlos con otros estudios.

Comparando estos resultados de los alumnos de las diplomaturas de maestro con los obtenidos en la Región de Murcia –*La Verdad* 21.7.07- en donde la media es de 6,58, se comprueba que están por encima, cosa lógica ya que su edad viene a ser el doble y que en ese periodo de tiempo han estado cursando asignaturas de Matemáticas y evolucionando psicológicamente, ya que del periodo de las operaciones concretas en donde se encuentran la mayoría de los niños de 6º los alumnos universitarios de las diplomaturas de maestro pasaron al periodo de las operaciones formales en donde según la psicología evolutiva, les permite desenvolverse mejor en campos más abstractos.

Comparando con los resultados obtenidos (Nortes, 1993) de una muestra significativa de 400 alumnos de 6º EGB (hoy Primaria), la nota media fue de 5,6 en una escala de 0 a 10, quedan muy lejos unos de otros, si bien la prueba pasada a estos alumnos fue de 93 ítems y la de éstos últimos de 15 ítems. Allí, la prueba era muy completa y en este caso ha sido muy superficial. Allí pudimos estudiar la fiabilidad de la prueba y aquí no ha sido posible por no haber conseguido los ficheros de resultados y no haber sido publicado como un trabajo completo, sino solamente divulgados algunos de ellos a través de la prensa.

Por último, para comprobar si existieron diferencias significativas en la prueba de Murcia en función de las cuatro variables independientes utilizadas en este estudio (sexo, edad, universidad y especialidad), se realizó un ANOVA simple que reveló que ni los efectos principales ni las interacciones entre ellos resultaron significativos.

Prueba de Madrid

Esta *Prueba de Conocimientos y destrezas indispensables (CDI)*, en su apartado de matemáticas, consta también, como la de Murcia de 15 ítems, sin embargo está más estructurada ya que los diez primeros corresponden a operaciones de cálculo y ejercicios de medida, mientras que los cinco últimos ítems corresponden a problemas con dos preguntas, por lo que los desglosamos a la hora de puntuar en dos partes. Así, el ítem 11 es la primera parte de un problema y el ítem 12 la segunda parte del mismo problema, los ítems 13 y 14 son las dos partes del siguiente problema y así sucesivamente, siendo independientes las respuestas, excepto el ítem 20 que está en función de haber contestado correctamente el anterior. Cada ítem se ha puntuado con 1 punto. Los resultados correctos, por porcentajes, para cada ítem aparecen en la tabla 6.

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
%	72,1	57,1	94,3	93,7	78,4	80,4	68,2	88,9	71,2	95,4	87,4	66,0	54,0	48,1	59,7	42,9	75,6	25,3	57,5	50,1

Tabla 6. Porcentaje de aciertos en la prueba de Madrid

En los ítems de cálculo y medida hay tres que dan por encima del 90% de aciertos. Se trata del ítem 10 que *relaciona medida de tiempos*, con el 95,4%, el ítem 3, que se trata de una *suma*, con el 94,3% y el ítem 4 que es *completar un dígito de una suma*, con el 93,7%. En el extremo opuesto, la puntuación más floja es para el ítem 2 que se trata de *ordenar números*, con el 57,1% de aciertos, el ítem 7, de *buscar un factor en una multiplicación*, con el 68,2% y el ítem 9 con la realización de un sencillo ejercicio con el 71,2%.

En la parte de problemas el porcentaje más alto de aciertos se consigue en el ítem 11 con *una operación de medidas de tiempos*, con el 87,4% de aciertos, seguido del ítem 17 con el *cálculo de una puntuación*, con el 75,6% y del ítem 12, segunda parte del problema primero, con el 66%. En el extremo más negativo se encuentra el ítem 18, con tan solo el 25,3% de aciertos, el 16 con el 42,9% y el 14 con el 48,1%. En estos tres casos el porcentaje de aciertos no alcanza el 50%. ¿A qué puede ser debido esto?

Analizando con más detalle el ítem 18, la mayoría de alumnos olvidó las puntuaciones que decía el enunciado que *daba 5 puntos por respuesta correcta, 2 puntos por respuesta en blanco y 0 puntos por respuesta errónea*, llevándoles solo a considerar la puntuación correspondiente a la respuesta correcta dando la mayoría el resultado 75 puntos en lugar de los 85 que correspondían a la solución correcta. De ahí que el 60,8% contestara equivocadamente, más del doble de los que acertaron, quedando el 13,9% del total sin contestar.

El ítem que alcanzó la segunda puntuación más baja, con el 42,9% fue el 16, que preguntaba *cuánto dinero tiene Jaime en la hucha*. Previamente había que considerar unos porcentajes, lo que originó que resultaran respuestas incorrectas en un 32,7% y casi la cuarta parte de los estudiantes universitarios, el 24,4% dejaron este ítem en blanco.

El tercer ítem que no alcanzó el 50% de respuestas correctas fue el 14, en donde el alumno debía aplicar una división y sólo se llegó al 48,1%, siendo el 31,4% respuestas equivocadas y el 20,5% de alumnos lo dejaron sin contestar.

De la información recabada de la página Web http://www.iconoce.com sobre la aplicación de la prueba a los alumnos de 6º de Primaria, podemos establecer el siguiente cuadro comparativo (tabla 7):

Fallos	**6.º Primaria**	**Diplomaturas**
Ítem 1	36,6%	27,9%
Ítem 2	61,2%	42,9%
Ítem 5	33,3%	21,6%
Ítem 6	20,7%	19,6%

Tabla 7. Comparación de los porcentajes de fallos en algunos ítems entre los alumnos de 6º de Primaria y de Diplomaturas

Además, el 50% de los estudiantes diplomaturas de maestro contestó correctamente entre 11 y 17 ítems (valores de los cuartiles), estando situada la mediana en 14 ítems. Tan solo 16 estudiantes contestaron correctamente al total de la prueba, es decir un 3,5%, mientras que no alcanzaron 10 ítem correctos, no aprobaron, 72 alumnos, es decir el 15,8%

Resultados por sexo

La tabla 8 presenta los porcentajes de aciertos de la prueba de Madrid en función del sexo.

El porcentaje de respuestas correctas es en todos los ítem, excepto en el 1, 3 y 19, superior el de hombres a mujeres, sien-

Ítems	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
H	71,5	64,2	94,1	94,9	86,9	83,2	75,2	92,7	79,6	96,4	87,6	68,6	59,9	55,5	67,9	51,8	83,9	26,3	56,9	50,4
M	72,5	54,0	94,4	93,2	74,8	79,2	65,2	87,3	67,7	95,0	87,3	64,9	51,6	45,0	56,2	39,1	72,0	24,8	57,8	50,0
Total	72,1	57,1	94,3	93,7	78,4	80,4	68,2	88,9	71,2	95,4	87,4	66,0	54,0	48,1	59,7	42,9	75,6	25,3	57,5	50,1

Tabla 8. Porcentaje de aciertos de la prueba de Madrid en función del sexo

Ítems	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
≤ 25	72,4	58,6	94,1	93,7	79,8	80,3	69,6	88,6	71,8	95,9	87,8	66,2	52,6	47,2	60,3	42,6	74,9	25,1	58,6	50,4
> 25	68,8	43,8	95,8	93,8	66,7	81,3	56,3	91,7	66,7	91,7	83,3	64,6	66,7	56,3	54,2	45,8	81,3	27,1	47,9	47,9
Total	72,1	57,1	94,3	93,7	78,4	80,4	68,2	88,9	71,2	95,4	87,4	66,0	54,0	48,1	59,7	42,9	75,6	25,3	57,5	50,1

Tabla 9. Porcentaje de aciertos en función de la edad

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
MU	76,4	56,5	94,2	95,3	75,4	80,1	67,8	89,9	69,6	95,7	88,0	64,1	55,8	47,1	60,5	44,2	76,1	24,3	63,4	55,1
LL	60,0	49,4	91,4	90,1	77,8	71,6	55,6	81,5	59,3	91,4	80,2	55,6	50,6	45,7	51,9	32,1	63,0	23,5	33,3	27,2
OV	69,6	64,7	97,0	92,2	87,3	88,2	79,4	92,2	85,3	98,0	91,2	79,4	52,0	52,9	63,7	48,0	84,3	29,4	60,8	54,9
Total	72,1	57,1	94,3	93,7	78,4	80,4	68,2	88,9	71,2	95,4	87,4	66,0	54,0	48,1	59,7	42,9	75,6	25,3	57,5	50,1

Tabla 10. Porcentaje de aciertos de la prueba de Madrid en función de la Universidad

do la diferencia de diez puntos o superior en los ítem 2, 5, 7, 9, 14, 15, 16 y 17, la mitad de ellos correspondientes a problemas. La diferencia máxima es de 12 en el ítem 16. En tres de los ítems, las alumnas no llegan al 50% de aciertos y en siete ítems las alumnas no llegan al 60%.

La mediana de respuestas correctas en alumnos está situada en 15 ítems, mientras que en alumnas está en 14. El 50% de alumnos contesta correctamente entre 12 y 18 ítems, y en el caso de alumnas, entre 11 y 17. Se da la circunstancia de que la moda en alumnos está en 17 ítems y en alumnas en 11 ítems.

Resultados por edad

La tabla 9 presenta los porcentajes de aciertos en la prueba de Madrid en función de la edad.

De los 20 ítems, en 11 son superiores los más jóvenes frente a los mayores de 25 años, siendo esa diferencia de más de diez puntos en los ítems 2, 5 y 7. Además los mayores de 25 años no alcanzan el 50% de respuestas correctas en 5 ítems.

La mediana de los más jóvenes está en 14 ítems y la de los mayores de 25 años está en 13,5, estando los intervalos que acogen el 50% central de alumnos en 11-17 y en 11-18 ítems.

Resultados por universidad

La tabla 10 presenta los porcentajes de aciertos de la prueba de Madrid en función de la Universidad.

En la Universidad de Murcia en tres ítems, los 14, 16 y 18 se obtiene un porcentaje de aciertos por debajo del 50%. En la Universidad de La Laguna por debajo del 50% tiene seis ítem y la de Oviedo tan sólo dos. En las tres universidades el resultado más bajo se corresponde con el ítem 18.

Comparando ítem a ítem, Oviedo tiene los mejores resultados en 15 de ellos, Murcia en 5 y La Laguna en ninguno, siendo ésta la universidad que obtiene los más bajos resultados. Se da la circunstancia que en los ítems 19 y 20, el porcentaje de aciertos viene a ser la mitad que en las otras dos universidades y quizás sea debido a que no ajustaran bien los tiempos de la prueba y no pudieran realizarlos, ya que mientras en Murcia el porcentaje de no contestado se sitúa en 12% y 13%, respectivamente, y en Oviedo en 5,9% en los dos ítems, en La Laguna es del 37% en ambos casos.

La mediana en la Universidad de Murcia está en 14 ítems, mientras que en La Laguna en 12 y en la de Oviedo en 15. Los intervalos del 50% central de alumnos están en 11-17, 9-16 y 12-17 para las tres universidades respectivamente. El orden de las medianas es el mismo que en el caso de la Prueba de Murcia.

Resultados por especialidad

La tabla 11 presenta los porcentajes de aciertos de la prueba de Madrid en función de la Especialidad.

Los alumnos de la especialidad de maestros en Educación Primaria tienen 5 ítems con resultados inferiores al 50% de aciertos, mientras que los de E. Física tienen 2, los de Francés 5, los de Inglés 2 y los de Musical 6.

Considerando el porcentaje de aciertos por ítems resulta que la especialidad de Inglés lo tiene más alto en 8, Francés en 7, E. Física en 4 y Musical en 1, dándose la circunstancia de que todos los alumnos de Francés contestaron correctamente los ítems 3 y 4, y todos los alumnos de Inglés contestaron correctamente los ítems 8 y 10. En el resto de especialidades no se da esta circunstancia de contestar correctamente un ítem el 100%.

Por debajo del 25% de aciertos, en el ítem~~s~~ 18 están los alumnos de Primaria, Inglés y Musical y éstos últimos también en el ítem 20, dándose la circunstancia que su porcentaje de aciertos es la tercera parte del alcanzado por los de Inglés en este caso.

A la vista de los resultados, los futuros maestros de la especialidad de inglés son los que obtienen mejores calificaciones.

La mediana se sitúa en 12 ítems para Música, en 13 para Primaria, en 15 para E. Física y Francés y en 16 para Inglés, el mismo orden que en la Prueba de Murcia.

Ítems	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Prim.	69,3	53,2	94,1	93,1	75,4	76,8	60,6	85,7	65,5	96,6	82,3	60,1	50,7	45,8	49,8	36,9	71,9	23,6	56,2	48,8
E. F.	78,0	58,4	94,2	96,0	79,8	84,4	73,4	91,3	74,0	96,0	93,1	71,1	59,5	54,9	68,2	49,1	83,2	27,7	63,0	54,3
Franc.	88,5	76,9	100	100	84,6	76,9	88,5	96,2	88,5	92,3	92,3	76,9	50,0	34,6	61,5	34,6	53,8	30,8	46,2	46,2
Inglés	71,4	64,3	92,9	96,4	85,7	96,4	78,6	100	92,9	100	92,9	67,9	57,1	46,4	67,9	64,3	82,1	21,4	75,0	67,9
Música	41,4	51,7	93,1	75,9	79,3	69,0	62,1	79,3	58,6	82,8	79,3	65,5	44,8	37,9	69,0	34,5	69,0	20,7	27,6	20,7
Total	72,1	57,1	94,3	93,7	78,4	80,4	68,2	88,9	71,2	95,4	87,4	66,0	54,0	48,1	59,7	42,9	75,6	25,3	57,5	50,1

Tabla 11. Porcentajes de aciertos de la prueba de Madrid en función de la especialidad.

Análisis descriptivo e inferencial de la prueba de Madrid

En la Prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI) de la Comunidad de Madrid, sobre una puntuación máxima de 20 puntos, la media se sitúa en 13,67 y la desviación típica en 3,93. Considerando como en la Prueba de Murcia los intervalos Media1±DT, Media2±DT y, Media3±DT, en cada uno de ellos tendríamos 300, 447 y 456 alumnos, respectivamente, que representan el 65,65%, el 97,8% y el 99,8% del total. Valores muy próximos a los establecidos en una distribución normal de 68,2%, 95,5% y 99,7%, respectivamente.

El País del 12 de julio de 2007 daba un avance de los resultados de la prueba pasada a los 51.645 estudiantes de 6º de Primaria de la Comunidad de Madrid. Allí el 72,4% de los alumnos obtuvo globalmente (Matemáticas y Lengua) una nota igual o superior a 5, situándose la media aritmética en 6,04 para Matemáticas.

Traducidos los datos de los alumnos de las diplomaturas a una puntuación de 0 a 10, la media sería 6,84 y la desviación típica 1,96, que nos servirán para relacionarlos con los resultados de los estudiantes de Primaria. Nuestros alumnos de las diplomaturas de maestro tan solo obtienen 8 décimas más en la media que los alumnos de 6º de Primaria.

En la página Web de la Comunidad de Madrid también se aportan algunos resultados dignos de ser considerados. Del porcentaje de alumnos aprobados, el correspondiente a la parte de Matemáticas es del 69,4% y el 38,9% de los alumnos suspendió en problemas. En la resolución de problemas los estudiantes de 6º de Primaria obtienen una puntuación de 5,42 y en la de cálculo de 6,67.

Por último, para comprobar si existieron diferencias significativas en las prueba de Madrid en función de las cuatro variables independientes utilizadas en este estudio (sexo, edad, universidad y especialidad), se realizó un ANOVA simple que reveló que las interacciones de sexo por edad (F = 6,016, gl = 1, 457, p = 0,015, eta cuadrado = 0,014) y edad por especialidad (F = 2,679, gl = 4, 457, p = 0,031, eta cuadrado = 0,024) resultaron significativas aunque sus correspondientes tamaños del efecto fueron muy bajos.

La figura 1 presenta gráficamente la interacción entre sexo y edad, donde se aprecia que las medias de aciertos de los varones es ambos grupos de edad son aproximadamente iguales, mientras que la media de las mujeres menores de 25 años es claramente superior a la media de las mujeres mayores de 25 años.

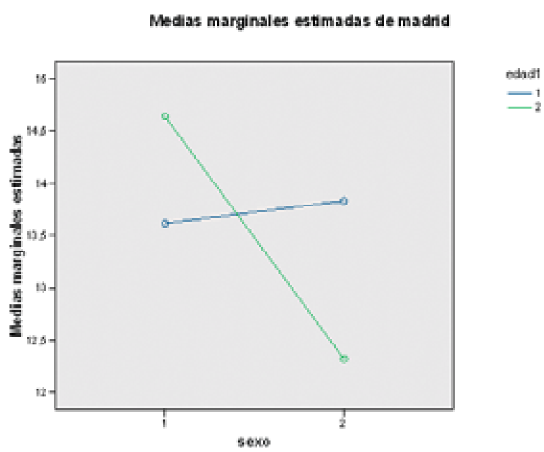


Figura 1. Sexo: 1=Hombre y 2=Mujer. Edad: 1 es 25 años y 2 es >25 años

Por otra parte, la figura 2 presenta gráficamente la interacción entre edad y especialidad, donde se aprecia que mientras que las medias de las especialidades de Primaria e Inglés son mayores en el grupo de mayores de 25 años, las medias de las especialidades de Educación Física, Francés y Música son más bajas en el grupo de personas mayores de 25 años.

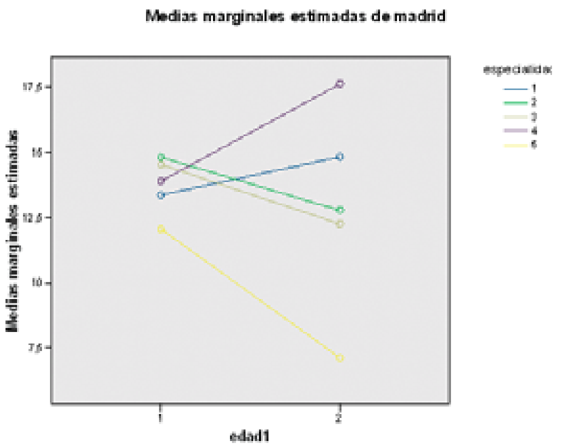


Figura 2. Especialidad: 1=Primaria, 2=E. Física, 3=Francés, 4=Inglés y 5=Música

Conclusiones y discusión

Una vez estudiadas por separado la Prueba de destrezas básicas y la Prueba de conocimientos y destrezas indispensables (CDI), vamos a analizarlas conjuntamente y efectuar una comparación de resultados. Para poder hacerlo, los estadísticos los hemos reducido a la misma escala de 0 a 10, siendo éstos los resultados:

Prueba	Murcia		Madrid	
Sexo	**Media**	**D. T.**	**Media**	**D. T.**
Hombre	8,41	1,21	7,23	1,91
Mujer	8,00	1,38	6,68	1,97
Total	8,12	1,34	6,84	1,96

Prueba	Murcia		Madrid	
Edad	**Media**	**D. T.**	**Media**	**D. T.**
≤ 25 años	8,16	1,34	6,86	1,90
> 25 años	7,79	1,29	6,66	2,46
Total	8,12	1,34	6,84	1,96

Prueba	Murcia		Madrid	
Universidad	**Media**	**D. T.**	**Media**	**D. T.**
Murcia	8,15	1,23	6,90	1,86
La Laguna	7,44	1,61	6,00	2,28
Oviedo	8,59	1,19	7,34	1,77
Total	8,12	1,34	6,84	1,96

Prueba	Murcia		Madrid	
Especialidad	**Media**	**D. T.**	**Media**	**D. T.**
Primaria	7,93	1,32	6,50	2,00
E. Física	8,41	1,22	7,24	1,74
Francés	8,36	1,07	7,10	1,86
Inglés	8,74	0,84	7,61	1,66
Música	6,94	1,86	5,81	2,53

Tabla 12.Resultados escala de 0 a 10 puntos

Observando las medias del total, se comprueba que mientras la de Murcia da un resultado de 8,12, la de Madrid da de 6,84. En todos los demás casos los resultados de la aplicación de la prueba de Murcia han sido mayores que los de la prueba de Madrid.

De todas las variables de corte es en la Prueba de Murcia y en la especialidad de Inglés donde se obtiene la media más alta (8,74) y a la vez la desviación típica más pequeña (0,84) y por el contrario la más baja en la Prueba de Madrid y en la especialidad de Música con una media de 5,81 y una desviación típica más alta, de 2,53.

Junto a estos resultados, podemos destacar los siguientes:

- El 35% de los alumnos no supo realizar una división correctamente.
- Sólo el 24,8% de los estudiantes responde correctamente calculando el área de un círculo, conocido el radio.
- El 74,7% no respondió correctamente un ítem de la prueba de Madrid.
- El total correcto de la prueba de Murcia lo hacen 38 alumnos, el 8,3%.
- El total correcto de la prueba de Madrid lo hacen 16 alumnos, el 3,5%.
- Suspenden la prueba de Madrid 72 alumnos, el 15,8%.
- A la pregunta *¿Por cuánto tienes que dividir 450 para que te de 9?*, fallaron el 20,7% de 6º de Primaria y el 19,6% de las diplomaturas.

- Por sexo, los alumnos obtuvieron mejores resultados que las alumnas.
- Por edad, los más jóvenes obtiene mejores resultados que los mayores de 25 años.
- Por universidad, los mejores resultados se dan en Oviedo.
- Por especialidad, los mejores resultados se dan en Inglés.
- No hay diferencias significativas en la prueba de Murcia en función de las variables de estudio al realizar un ANOVA simple. Ni los efectos principales ni las interacciones entre ellos resultan significativas.
- En la prueba de Madrid el efecto principal especialidad y las interacciones sexo por edad y edad por especialidad han resultado significativas, aunque los resultados de efecto han resultado muy bajos.

¿Por qué los estudiantes obtienen mejores resultados en la prueba de Murcia que en la de Madrid? A simple vista se podría argumentar que la Prueba de Murcia la realizaron los alumnos en primer lugar y a continuación la de Madrid y quizás sea debido a que no les dio tiempo a muchos alumnos a resolverla, sobretodo los últimos ítems. Pero ante eso se puede argumentar que el ítem 15 de la prueba de Murcia, que fue resuelto correctamente por el 24,8% de los alumnos, fue contestado por el 84,1% de los alumnos y que el ítem 20 de la prueba de Madrid, que fue resuelto correctamente por el 50,1%, fue contestado por el 84,3% de alumnos.

También se podría argumentar que la prueba de Madrid que venía en segundo lugar la realizaron los alumnos cuando estaban cansados, hacia la media hora de haber empezado, pero una correlación calculada entre las dos pruebas nos lo contesta. Calculada la correlación de Pearson entre los totales de ambas pruebas resultó un valor de 0,612 que a la vista de los 459 alumnos de la muestra, resulta altamente significativa ($p<0,001$).

Comparada esta correlación con la obtenida en Nortes (1993), entre las dos partes de la prueba pasada a los alumnos de 6º de Primaria, una numérica y la otra geométrica, que resultó de 0,493, es más alta, lo que evidencia la consistencia de las respuestas de los alumnos.

¿Por qué, entonces, esta diferencia en los resultados? Quizás, la evidencia y la contestación más inmediata que se puede dar es que los resultados de la prueba de Murcia son más altos porque la prueba fue más sencilla. A este respecto, podemos argumentar lo siguiente: Mientras que "suspenden" 10 alumnos con la prueba de Murcia, con la de Madrid lo hacen 72 alumnos.

¿Qué tipo de prueba es la más adecuada? ¿Cuál es el nivel exigible? Según el artículo publicado en El País y recogido por http://www.iconoce.com, en la Comunidad de Madrid, la nota media ha pasado de 6,95 en 2006 a 6,04 en 2007, debido a que "los problemas eran mucho más complejos". Pero este aumento de la exigencia se debe, en palabras de la Consejera de Educación de la Comunidad de Madrid "a la voluntad de equiparar la dificultad de la prueba a las de otros países europeos".

Nuestro estudio ha quedado limitado debido a que no han sido publicados los resultados de las pruebas en las Comunidades de Murcia y de Madrid y no haber podido analizar en profundizad estas pruebas aplicadas a los alumnos de 6º de Primaria. No obstante, esperamos, una vez que se publiquen, poder hacerlo en posteriores investigaciones, analizando las pruebas, ampliando la discusión y las conclusiones que presentamos.

Ahora que en las distintas universidades las Comisiones de Planes de Estudios están perfilando las materias del Grado de Maestro en Primaria e Infantil sería muy importante contar con resultados de investigaciones recientes que recojan el grado de conocimientos matemáticos elementales de nuestros alumnos, y esta sería nuestra modesta aportación, para tratar de reorganizar los contenidos matemáticos tendentes a una alfabetización matemática. En el módulo de Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se deberán integrar asignaturas que contribuyan a ello.

Dejamos un dato para la reflexión. En la prueba Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI) de Madrid nuestros estudiantes de las diplomaturas de maestro obtuvieron una puntuación media de 6,84, mientras que los alumnos de 6º de Primaria de la Comunidad de Madrid alcanzaron 6,04, tan solo 8 décimas por debajo. ■

Agradecimiento

Queremos agradecer a los compañeros del Área de Didáctica de las Matemáticas de las Universidades de La Laguna, de Oviedo y de Murcia, en especial a los profesores Mercedes Palarea Medina, Carmen Corral Zapico, Eduardo Zurbano Fernández, Francisco Lozano Pato y Antonio Miñano Sánchez, su colaboración en la aplicación de las pruebas a los universitarios de las titulaciones de maestro. Sin su ayuda no habría sido posible obtener los resultados que hemos presentado.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

HUEDO MEDINA, T., LÓPEZ PINA, J.A., MARTÍNEZ ARTERO, R. y NORTES CHECA, A. (2003): Conocimientos matemáticos de maestros en formación, *Suma*, n.º 44, 71-82.

LÓPEZ PINA, J.A., MARTÍNEZ ARTERO, R., NORTES CHECA, A. y SÁNCHEZ MECA, J. (1991): *Cómo valoran los alumnos de Primero de Magisterio su currículum*. Consejería de Cultura, Educación y Turismo de la Comunidad Autónoma de Murcia (Dirección General de Educación y Universidad). Murcia. (inédito)

NORTES CHECA, A. (1993): *Un modelo de evaluación diagnóstica en Matemáticas (1993)*, Universidad de Murcia, Murcia.

ORDEN del 22 de enero de 2007 de la Consejería de Educación y Cultura, por la que se regula la prueba de diagnóstico en el curso 2006-2007 en la Comunidad Autónoma de Murcia. BORM n.º 32, jueves 8 de febrero de 2007, pp. 4237-4240

RESOLUCIÓN de 17 de abril de 2007, de la Viceconsejera de Educación, por la que se dictan instrucciones relativas a la celebración de la Prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI) de los alumnos de sexto curso de Educación Primaria de la Comunidad de Madrid. BOCM n.º 98, jueves 26 de abril de 2007, pp. 48-52

Internet:

http://www.apredemas.com

http://www.iconoce.com

http://www.laverdad.es

http://www.madrid.org

Anexos

Prueba de Madrid

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN
Comunidad de Madrid

A CUMPLIMENTAR POR EL CENTRO
Clave del centro — Número del alumno
Sexo: Varón / Mujer — Nacionalidad española: Sí / No

PRUEBA DE CONOCIMIENTOS Y DESTREZAS INDISPENSABLES (CDI)

Sexto curso de Educación Primaria

Mayo de 2007

SEGUNDA PARTE: MATEMÁTICAS

1. ¿Cuál es resultado de restar 102, 432 a un millón ciento diez mil?
   RESPUESTA:
2. Ordenar de menor a mayor los siguientes números:
   $\frac{3}{4}$; 0,7; 0,07; $\frac{2}{5}$
   RESPUESTA:
3. En la palabra CONCURSO, cada vocal vale 2 puntos y cada consonante 1. ¿Cuánto vale la suma de todas las letras?
   RESPUESTA:
4. Completa el hueco para que la suma sea correcta.
   $$\begin{array}{r} 3\,\square\,5 \\ +\;2\;6\;8 \\ \hline 6\;4\;3 \end{array}$$
5. ¿Por cuanto hay que multiplicar 0,005 para que se convierta en 50?
6. ¿Por cuánto tienes que dividir 450 para que te dé 9?
7. ¿Qué número falta para que sea cierta la igualdad? $\frac{1}{2} \times \square = 6$
8. ¿Cuántos gramos hay en medio kilo?
9. ¿Cuántos litros son las tres quintas partes de mil litros?
10. Luis ha tardado en hacer el examen tres cuartos de hora, Andrés una hora y cuarto y María cincuenta y cinco minutos. ¿Quién ha sido el que ha tardado menos y quién el que ha tardado más?
11. María y Luisa van al mismo colegio. Luisa tarda en ir desde su casa al colegio diez minutos más que María desde la suya.
    A. María salió de su casa a las ocho menos cinco y llegó al colegio a las ocho y cuarto. ¿Cuántos minutos tardó María en llegar al colegio?
    B. Luisa ha llegado al colegio a las 8 y 25. ¿A qué hora ha salido Luisa de su casa?
12. Una vuelta completa a una pista de atletismo son 400 metros.
    A. ¿Cuántos kilómetros recorre un atleta que da 7 vueltas y media a la pista?
    B. ¿Cuántas vueltas debe dar a la pista una atleta para recorrer 10 kilómetros?

Jaime tiene una hucha con 200 monedas. El 40% de ellas son de un euro, el 30% de dos euros y el resto, de 50 céntimos de euro.

A ¿Cuántas monedas de 50 céntimos tiene Jaime?

B ¿Cuánto dinero tiene Jaime en la hucha?

En un test de 25 cuestiones, se puntúa 5 puntos por cada respuesta correcta, 2 puntos por cada respuesta en blanco y 0 puntos por cada respuesta errónea.

A Eva dejó todas las preguntas sin contestar. ¿Qué puntuación obtuvo?

B Pilar respondió 20 cuestiones de las que sólo 15 eran correctas. ¿Cuál fue su puntuación?

Para celebrar su cumpleaños Antonio quiere invitar a sus amigos, Luis y Ana, a merendar a una cafetería. Los tres han pedido lo mismo: tortitas con nata y un refresco. Cada refresco cuesta 1,50 € y las tortitas con nata el doble.

A ¿Cuánto tiene que pagar Antonio?

B Antonio ha dado al camarero un billete de 20 €. ¿Cuánto le tiene que devolver?

8. Lee atentamente el problema, resuélvelo y marca la respuesta correcta:

"En un hotel hay 4 pisos, en cada piso hay 4 habitaciones. En cada habitación hay alojadas 4 personas y cada una hace 4 llamadas telefónicas. ¿Cuántas llamadas hacen en total?"

A. 256
B. 12
C. 16
D. 64

OPERACIONES

9. Lee atentamente el problema, resuélvelo y marca la respuesta correcta:

"Una chica se compra un pantalón que vale 150 €. Si le hacen una rebaja del 20%, ¿cuánto pagará?"

A. 100 €
B. 140 €
C. 120 €
D. 110 €

OPERACIONES

10. Piensa, resuelve y marca la respuesta correcta:

"Para pagar un teléfono móvil que vale 92 € con el menor número de billetes y monedas tengo que entregar..."

A. 1 billete de 50 €, 2 billetes de 20 € y 2 monedas de 1 €
B. 4 billetes de 20 €, 1 billete de 10 € y 1 moneda de 2 €
C. 1 billete de 50 €, 4 billetes de 10 € y 2 monedas de 1 €
D. 1 billete de 50 €, 2 billetes de 20 € y 1 moneda de 2 €

11. Piensa, resuelve y marca la respuesta correcta:

"¿Cuántos decímetros hay en 450 centímetros?"

A. 4,50
B. 450.000
C. 0,450
D. 4.500

OPERACIONES

12. Observa el gráfico de barras y marca la respuesta correcta de la pregunta:

"¿Qué dos días hubo menos accidentes de tráfico?"

A. Lunes y jueves
B. Lunes y martes
C. Miércoles y viernes
D. Martes y viernes

Prueba de Murcia

1. Marca el valor de posición de la cifra "2" en el número 4.102.034.

A. Dos mil
B. Dos mil doscientos
C. 2.000.000
D. 20.000

2. Fijándote en el gráfico, marca la fracción correcta y su equivalente:

A. 3/6 y 1/4
B. 3/6 y 1/2
C. 3/6 y 2/3
D. 3/4 y 18/36

3. Piensa, resuelve y marca la respuesta correcta:

"Si aparcas en el cuarto sótano y subes nueve plantas, ¿a qué piso llegas?"

A. Sexto
B. Cuarto
C. Noveno
D. Quinto

4. Calcula: Haz 48 veces mayor el número 3.408

A. 165.094
B. 163.488
C. 166.094
D. 164.094

OPERACIONES

5. Realiza la división y marca la respuesta correcta: 631,55 : 85

A. 74,3
B. 7,43
C. 75,3
D. 7,53

OPERACIONES

6. Marca la respuesta correcta: 0,625 × 10.000.

A. 6250
B. 625
C. 6,25
D. 62,5

7. Lee atentamente el problema, resuélvelo y marca la respuesta correcta:

"Un avión tiene que recorrer 840 kilómetros. Cuando lleva realizados 5/6 del trayecto. ¿Cuántos kilómetros ha recorrido?"

A. 60
B. 70
C. 700
D. 600

OPERACIONES

13. Piensa, resuelve y marca la respuesta correcta:

"Las notas de mis tres primeros controles de matemáticas son: 7,5, 8,6 y 5,75. ¿Cuál es la nota media alcanzada en esta materia?"

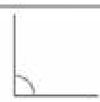
A. 72,03
B. 7,283
C. 2,185
D. 21,85

OPERACIONES

14. Marca la respuesta cuyo dibujo represente un ángulo llano.

A.

B.



C.

D.

15. Piensa, resuelve y marca la respuesta correcta:

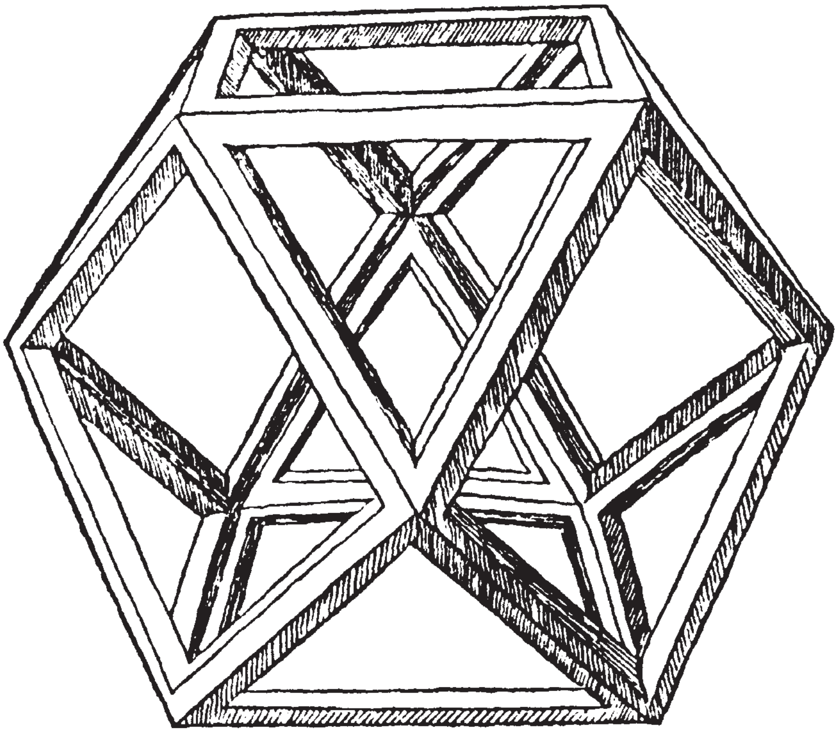
"¿Cuál es el área de un círculo que tiene 3 centímetros de radio? (π = 3,1416)"

A. 18,8496
B. 28,2744
C. 9,4248
D. 6,2832

OPERACIONES

FIN DE LA PRUEBA

SI HAS TERMINADO ANTES DEL TIEMPO CONCEDIDO, REVISA TUS CONTESTACIONES



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

poliedro

suma+ 60
Febrero 2009, pp.57-60

Jugando con decimales

Desde que hace años comenzamos con esta sección, hemos intentado variar los juegos que presentamos para que haya de todo tipo y podamos divertirnos, disfrutar y hacer disfrutar a nuestros alumnos haciendo matemáticas. Pero siempre hemos querido incluir periódicamente un juego de los que nuestro amigo Fernando Corbalán llama *juego de conocimiento*, es decir, aquellos que tratan conceptos o procedimientos propios de nuestros temarios y donde desarrollamos contenidos que están en nuestros libros de texto pero de una forma más lúdica y motivadora para nuestros alumnos.

En esa línea vamos a tratar hoy los juegos con decimales, que podemos utilizar al tratar este contenido básico en el final de la etapa de Educación Primaria y a lo largo de la Educación Secundaria Obligatoria. Al hablar de decimales suponemos que nadie se dedica hoy en día a operar con lápiz y papel productos y divisiones con decimales, por eso en casi todos los juegos que vamos a incluir, y que son una minúscula parte de todas las posibilidades que hay para trabajar este item, vamos a utilizar la calculadora.

En los juegos en los que participan más de un jugador (al final veremos un solitario) se sortea el turno o los jugadores se ponen de acuerdo para comenzar y después se van turnando en el inicio del juego.

Vamos a comenzar con dos juegos tomados prestados al Grupo Cero[1].

De fracción a decimal

Este es un juego para dos, tres o cuatro jugadores. Se necesitan fichas de distinto color para cada jugador, un dado con las fracciones:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3} \text{ y } \frac{3}{4}$$

y un tablero como el siguiente:

$0,1\overset{\frown}{6}$	0,25	$0,\overset{\frown}{3}$	0,5	0,75	$0,\overset{\frown}{6}$
$0,\overset{\frown}{3}$	$0,\overset{\frown}{6}$	0,5	0,25	$0,1\overset{\frown}{6}$	0,75
0,75	$0,\overset{\frown}{3}$	$0,1\overset{\frown}{6}$	0,75	$0,\overset{\frown}{6}$	0,25
0,25	0,75	$0,\overset{\frown}{6}$	$0,\overset{\frown}{3}$	0,5	0,5
$0,\overset{\frown}{6}$	0,5	0,25	$0,1\overset{\frown}{6}$	$0,\overset{\frown}{3}$	$0,1\overset{\frown}{6}$
0,5	$0,1\overset{\frown}{6}$	0,75	$0,\overset{\frown}{6}$	0,25	$0,\overset{\frown}{3}$

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por:
Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos@revistasuma.es

Reglas del juego

a. Cada jugador, en su turno, lanza el dado, convierte en decimal la fracción y entonces tiene dos opciones:

- Coloca una de sus fichas en una casilla que tenga ese decimal y que esté libre.
- Cambia una de sus fichas sobre el tablero hasta una casilla con el decimal resultante de su tirada.

b. Gana el primer jugador que consigue que la suma de los números de las casillas ocupadas por sus fichas sumen un número entero.

Sobre este juego base nosotros hemos probado varios cambios para aprovechar el mismo material de trabajo y que los alumnos más rápidos repitan las partidas pero con otro enfoque.

Otra forma de jugar es dar un número fijado de fichas a cada jugador, por ejemplo 8 (o 7 si hay cuatro jugadores), y jugar colocando en cada turno una ficha con las condiciones indicadas anteriormente. Una vez colocadas todas las fichas se suman todos los grupos de casillas que sumen número entero y cada jugador se anota la cantidad de números enteros conseguida. Por ejemplo, un jugador ha conseguido: 0,5 0,25 0,25 $0,1\overset{\frown}{6}$ $0,1\overset{\frown}{6}$ 0,75 0,75 $0,\overset{\frown}{6}$ $0,\overset{\frown}{6}$ $0,\overset{\frown}{3}$ por lo que sus puntos serían:

$$0{,}75 + 0{,}75 + 0{,}5 = 2$$

más $$0{,}\overset{\frown}{6} + 0{,}\overset{\frown}{6} + 0{,}\overset{\frown}{3} + 0{,}1\overset{\frown}{6} + 0{,}1\overset{\frown}{6} = 2$$

en total 4 puntos.

Gana por supuesto el jugador que ha conseguido más puntos. Para evitar desempates se puede considerar que en caso de empate de puntos, gana el jugador que ha necesitado menos fichas, es decir si otro jugador hubiese hecho 0,75 + 0,75 + 0,25 + 0,25 = 2 perdería. Por supuesto también podemos considerar que gana el que utiliza más fichas pues al fin y al cabo eso es una regla que nosotros decidimos.

Otra forma de jugar con solo dos jugadores consistiría en ir poniendo cada uno en su turno y se concluiría el juego en el momento en que uno de los jugadores consiguiera colocar cuatro de sus fichas en línea recta, sea horizontal, vertical o diagonalmente. Una vez acabado, el jugador que ha terminado se anota dos puntos y ambos jugadores suman todas las ternas de fichas que tengan en línea y se anotan la parte entera de esa suma (no se suman cuando solo tengan dos fichas en línea).

Una dificultad que se nos puede poner a este juego es la de conseguir el dado con las fracciones. Existen fabricantes de material didáctico que venden juegos de dados blancos en los que podemos escribir las fracciones o lo que queramos. También es verdad que ese material suele ser caro, por lo que nosotros preferimos hacer reciclado de cosas más acorde con los exiguos presupuestos que tenemos en los departamentos. Compramos juegos de dados de las tiendas de *Todo a 0,75 €*, después imprimimos en papel adhesivo las fracciones, se recortan, se pegan en los dados y *eh voilá!*

Aproximación

Es un juego para dos jugadores y se necesitan fichas de dos colores distintos, un dado cúbico normal, que hará las veces de denominador, otro con los valores 1, 1, 2, 2, 3, 3 (que ya sabemos como conseguirlo), que nutrirá los valores del numerador y un tablero como el siguiente.

1,7	0,3	0,34	1,6
0,77	3,1	0,47	0,73
0,64	1,57	0,39	0,8
2,8	0,51	0,43	0,23

Reglas del juego

a. Cada jugador, en su turno, lanza los dos dados y construye una fracción.
b. El jugador coloca una ficha de su color en el decimal más próximo a esa fracción entre las casillas que queden sin ocupar. Si el contrincante descubre un número más próximo sin ocupar retira la ficha del adversario, que pierde el turno, y coloca una suya en el lugar adecuado y tira él, a continuación, según su turno.
c. Cuando estén todas las casillas ocupadas, gana el que tenga más fichas sobre el tablero.

Vemos que se pueden trabajar dos conceptos, la división, para obtener el valor de la fracción, y el ordenamiento de decimales, para estudiar cuál está más cerca. Según lo que se quiera trabajar queda a criterio del profesor el dejar o no el uso de la calculadora para efectuar la división.

Una variante del juego sería que una vez lleno el tablero, el que tenga más fichas se anota tres puntos y además cada jugador se anota la parte entera de lo que sumen sus fichas. La suma de sus fichas se puede hacer sin calculadora. Conviene primar al que tiene más fichas pues puede darse el caso que la suma de las casillas del que tiene menos sea mayor que la del otro jugador, debido a la suerte al lanzar los dados.

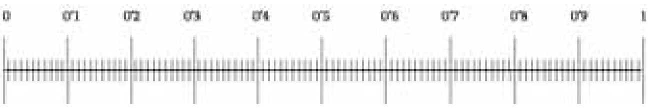
Cuando nosotros trabajamos este juego en clase solemos añadir una fila y columna al cuadro (pasa a convertirse en un 5×5) y juegan tres jugadores, ya que de esa manera la partida se hace más dinámica. En ese caso quien tiene más fichas sólo se anota un punto.

La recta decimal

El siguiente juego hace mucho tiempo que lo descubrimos y lamentamos no guardar la reseña de dónde lo hemos sacado, por lo que pedimos perdón al compañero y/o amigo al que se lo hayamos *choriceado*.

Es un juego para dos jugadores y se necesita una calculadora junto con una tabla y una regleta numérica como las que siguen:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12



Reglas del juego

a. Cada jugador, en su turno, escoge dos números de la tabla, los divide con la calculadora y marca el número decimal en la recta numérica.
b. Si en alguna tirada, el jugador obtiene un decimal mayor que uno, no hace ninguna marca y pierde su turno.
c. El primero que consigue tres marcas en línea, sin que entre ellas haya ninguna de su compañero, gana la partida.

En este juego hay que dejar bien claro que la calculadora sólo se utiliza para efectuar la división una vez seleccionados los números, es decir, no vale probar resultados hasta dar con el que interese.

Si se ve que la partida se alarga mucho y no se acaba, para que los alumnos no se desesperen y pierdan interés (alguno hay) se puede considerar en cualquier momento que la partida ha quedado en tablas y comenzar una nueva.

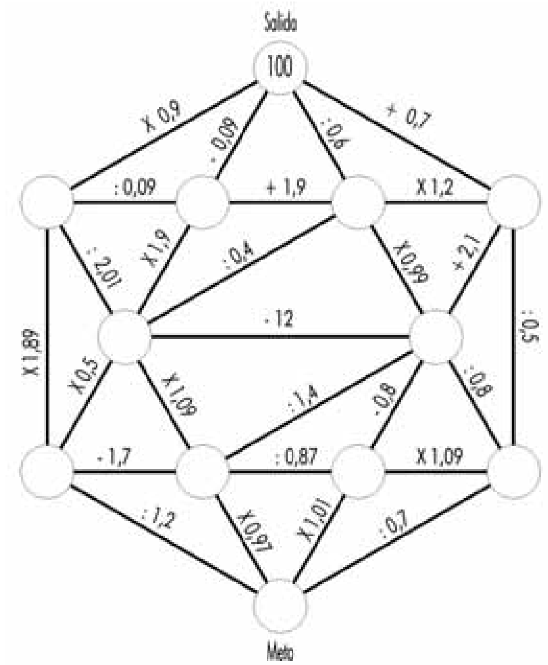
Queda a opción del profesor hacer que los alumnos vayan escribiendo en su cuaderno los resultados de las fracciones que eligen para que puedan usarlas en una nueva partida.

Una nueva versión sería realizar 10 tiradas cada jugador y posteriormente sumar cada uno todas las parejas de números entre los que no haya ninguno del contrario. Gana el jugador cuya suma es superior.

El laberinto hexagonal

Para acabar hoy, puesto que este tema da para varios artículos, vamos a presentar un solitario que a nosotros personalmente nos gusta mucho. Esta sacado de las adendas de los Estándares Curriculares del NTCM[2].

Más que un solitario es un juego para que participe toda la clase, aunque cada uno de los alumnos de forma individual, provisto de una calculadora y del tablero siguiente:



Reglas del juego

a. Cada jugador se coloca en la salida y coloca el valor 100 en su calculadora.
b. A continuación comienza a recorrer el tablero hasta llegar a la meta con las siguientes condiciones:
   – En cada segmento por el que pase debe hacer la operación fijada al número que en ese momento tenga en la calculadora.
   – No puede pasarse dos veces por el mismo segmento.
   – La dirección siempre es desde la salida a la meta o en horizontal. No se puede retroceder.
c. Gana el jugador que consigue llegar a la meta con el valor más grande.

Veamos algunos aspectos a tener en cuenta a la hora de jugar:

1. Es conveniente que el alumno vaya apuntando el camino que sigue para poder repetirlo posteriormente una vez que haya encontrado el valor ganador.

2. A veces es conveniente que después de cada operación escriba el valor resultante.

3. Si se utiliza calculadora científica es obligatorio pulsar el igual después de cada operación.

4. Una vez encontrado el camino es interesante que el alumno escriba correctamente las operaciones que ha realizado utilizando los paréntesis que necesita para cuidar que se cumpla la jerarquía de operaciones.

Este juego nos gusta particularmente porque rompe a los alumnos los esquemas mentales que tienen respecto a las operaciones numéricas. Nuestros alumnos suelen considerar que siempre que se multiplica se aumenta y que al dividir se disminuye, y este juego rompe drásticamente con esa concepción. Nos pasa muchas veces que los alumnos vienen a preguntarnos si su calculadora está estropeada cuando realizan la operación ": 0,09" y ven que su valor se multiplica por más de 10.

Una vez encontrado el camino con el que se obtiene el número mayor, que aunque pueda parecer increíble supera el valor 6.000, se pueden cambiar las condiciones de la partida para realizar distintas investigaciones:

a. Buscar el camino con el que se llega al final con el menor valor.
b. Cambiar las reglas para que gane el jugador que llegue al final a un resultado lo más cercano posible al número original (100).
c. Localizar un camino que pase por el menor número de casillas y averiguar cuál es el mayor número que se puede obtener en ese caso.
d. Encontrar un camino que pase por todas las casillas y que dé lugar al resultado más pequeño (este puede ser uno de los primeros casos ya que sólo hay dos caminos que pasen por todas las casillas).
e. Se puede eliminar la restricción de no volver hacia atrás, aunque manteniendo siempre la imposibilidad de pasar dos veces por la misma línea, pero en este caso se hace muy pesado encontrar un camino para llegar a la Meta, pues existe la posibilidad de dar muchas vueltas.

JUEGOS ■

NOTAS

1 Grupo Cero (1990): "De 12 a 16. Un proyecto de currículo de matemáticas". Editado por la Conselleria de Cultura Educació i Ciencia de la Generalitat Valenciana.

2 N.C.T.M. (1991): Addenda Series nº. 2. Edición en español de la S.A.E.M. Thales (1993).

suma+ 60
Febrero 2009, pp. 61-62

La dramatización de los números

Ya hace unos años A.K. Dewdney en su libro *200% de nada*, se hacia eco de los curiosos usos sociales de los números donde se exagera la precisión de los mismos, en casos donde no tiene sentido (1.234.567 manifestantes, 345.674 peces en el lago, 14 horas 45 minutos 34 segundos andando,…), con vistas a dar una versión "mas científica" de la información que se desea transmitir. A este fenómeno lo bautizó Dewdney como "dramadigits".

Una conocida historia de John Allen Paulos es la del vigilante de un museo de ciencias naturales que estando ante un gran esqueleto de dinosaurio fue preguntado por unos visitantes sobre la antigüedad de aquellos restos y contestó con una sorprendente precisión: "90.000.006 años". Extrañados los visitantes sobre los 6 años pidieron explicaciones al paciente guarda y éste respondió "cuando llegué aquí me dijeron que el dinosaurio tenia 90.000.000 de años y de esto ya hace 6 años". En este clip me gustaría compartir algunas historias cuyo común denominador es este extraño sentido de la precisión.

Tantos por ciento muy precisos

Dar tantos por cientos es una actividad que seduce a todo tipo de personas: los usan las empresas para anunciar subidas de precios ("los billetes de cercanías crecerán el 6,28%"), los usan las tiendas para ofrecer rebajas ("hoy el 37% de rebaja"), lo usan los bancos para captar clientes ("el 7% T.A.E."), lo usan los políticos para hacer promesas ("los sueldos van a crecer un 0,02% por encima de la inflación"), lo usan los medios de comunicación para alegrar al personal ("el 22,66% de los jóvenes se droga"),…todos somos usuarios o receptores de estos tantos por ciento, y en consecuencia, los disparates sobre este tipo de números se disparan. Veamos algunos ejemplos concretos.

El 61% de Lula

Acercándose el final del segundo mandato presidencial de Lula da Silva se realizó en Brasil una encuesta sobre como vería la población la posibilidad de que con cambios legislativos el popular presidente pudiera presentarse para un tercer mandato. El resultado fue que el 60% opinó desfavorablemente. Pero lo sorprendente del caso fue que al ser preguntado el propio presidente Lula sobre que opinaba de este 60% en contra, en un alarde de modestia declaró:

> El resultado ha sido del 60% pero si me hubiesen preguntado a mi hubiese sido del 61%.

No es creíble que Lula da Silva considere su opinión personal equivalente al 1% de la colosal población brasileña. Por tanto es más verosímil que el dominio de los tantos por cientos no sea su especialidad (lo cual dicen que le hace aun más popular entre su electorado).

Una pérdida de feligreses

Julio Algañaraz, corresponsal en el Vaticano, hizo en noviembre de 2008 la siguiente afirmación sobre el descenso de feligreses católicos en Brasil:

> Con 190 millones de habitantes, el catolicismo pierde un 1% de feligreses al año en Brasil… En veinte años, el número de fieles al Papa de Roma bajó del 91% al 71% de la población.

Claudi Alsina
Universitat Politècnica de Catalunya
elclip@revistasuma.es

Este análisis esconde todo un lio numérico. Si la población fuese siempre la misma este descenso "uniforme" del 1% sería una cosa pero con poblaciones tan crecientes a ritmo de samba lo del 1% es en realidad una tragedia para la Iglesia pues cada año representa un enorme incremento de abandonos, siendo pues el descenso no uniforme.

Capitalismo en tantos por ciento

Entre las muy variopintas descripciones del capitalismo (el capitalismo es la explotación del hombre por el hombre,...) destaca una de T.S. Dunning donde la clave son los tantos por ciento a los que hace referencia:

> El capital se vuelve audaz si la ganancia es adecuada. Con un 20% se vuelve vivo, con el 50%, positivamente temerario; con el 100% aplasta todas las leyes humanas y por encima del 300% no hay crimen al cual no se arriesgue, aunque le amenace el patíbulo.

Más allá del 100%

Una mala práctica en cálculos económicos lleva a veces a tantos por ciento superiores al 100%, que no tienen ningún sentido. Que un negocio pierda un 20% puede ser algo creíble; si se dice que ha perdido un 100% es ya al ruina total; si se ha perdido un 200% es que encima de quedarse sin nada debe una cantidad equivalente a la pérdida. En informaciones sobre valores de cotizaciones de acciones esto ocurre a menudo al dividir una pérdida de valor anual por el valor final cotizado

Sumando porcentajes

Las estadísticas S. Fontdecaba y M. Montón en (Grima, 2008) han realizado un estupendo estudio crítico sobre estadísticas en la prensa, incluyendo una perla como la siguiente. En El Periódico de 5 de enero de 2006 apareció en titulares:

> Alerta por la desprotección infantil ante los videojuegos violentos. El 65% de los menores de 10 a 17 años admiten que acceden a programas para mayores de edad…El problema es que el 50% de los niños y el 15% de las niñas entre 10 y 17 años reconocen que…

¡Glup! ¿50% + 15% = 65%? Como hay tantos niños como niñas del 50% de unos y del 15% de las otras solo es aceptable concluir que el 32,5% de jóvenes tiene un problema.

Y del 100% al crecimiento exponencial

En lugar de informar con cifras concretas a menudo en muchos noticiarios televisivos los presentadores se dejan llevar por su incontrolada pasión comunicativa y para enfatizar "una subida notable" se pasan al escandaloso "…ha crecido exponencialmente".

Sería bestial y trágico si el consumo de droga, los accidentes o los precios de la gasolina crecieran algún día exponencialmente. Ya no sería duplicar, por ejemplo, sino una potencia de dos: cuatro veces, ocho veces, dieciséis veces,… Claro que tampoco vale la tendencia contraria del "…apenas han variado los precios…". Con menos palabras y más cifras todo quedaría más claro. Pero la moda de lo exponencial esta instalada entre nosotros y no será fácil salir de ella, porque aún se puede ir más allá.

Invocando al infinito

Después de seguir el crecimiento exponencial lo que de forma natural acontece es el salto al infinito. Hace unos días el presidente José Montilla dirigió desde los medios de comunicación una importante declaración de principios que se supone iba dirigida al presidente del gobierno en relación a las últimas negociaciones:

> Mi paciencia no es infinita

frase totalmente cierta y que por tanto no constituye ningún reproche. Y si alguien la entiende en el sentido de que al no ser infinita es que es finita y por tanto se puede acabar, no queda tampoco claro las consecuencias de ello.

La moraleja de estas anécdotas es la necesidad de que en clase de matemáticas prestemos especial atención al "sentido numérico", a desarrollar un sentido común numérico que haga desarrollar un espíritu crítico con los usos de los números y sus circunstancias, contribuyendo con ello al desarrollo de la competencia de ser todos críticos y reflexivos ante nuestra propia realidad.

Para saber más

DEWDNEY A.K. (1993): *200% of Nothing: An Eye Opening Tour Through the Twists and Turns of Math Abuse and Innumeracy*, John Wiley and Sons, New York.

GRIMA P. Grima (ed.) (2008): *Fent Servir l'Estadística*, Monografies FME-UPC, Barcelona.

PAULOS J. A. (1999): *El hombre anumérico/Érase una vez un Número/ Un matemático lee el periódico/* Tusquets Editores, Barcelona.

EL CLIP ■

suma+ 60
Febrero 2009, pp. 63-71

Representación de poliedros y superficies con una aplicación TIC

A lo largo de los distintos números de Suma nos planteamos en esta sección descubrir distintas aplicaciones informáticas que sean útiles para las matemáticas. Nos hemos centrado en aplicaciones propias de sistemas operativos libres de forma que estén a disposición del docente y éste tenga la posibilidad de utilizarlas gratuitamente y modificarlas adaptándolas a sus necesidades. Con estas mismas características encontramos otro software disponible en la red y que no es específico del software libre. En este número nos proponemos abordar una de esas aplicaciones denominada *Superficies en 3D.*

La aplicación *Superficies en 3D* se encuentra en el portal de recursos del ISFTIC, antiguo CNICE ó PNTIC ya que fue una de las aplicaciones premiadas en el año 2000 dentro de los premios que se conceden a la creación de nuevas aplicaciones educativas TIC.

Los autores de la misma son José Luis Abreu León y Marta Oliveró Serrat y, como ellos mismos indican, este programa está dirigido tanto a alumnos como a profesores de matemáticas. El applet *Superficies en 3D* es un núcleo interactivo para programas educativos (nippe) que permite crear páginas Web interactivas en las que se presentan las gráficas de las funciones de dos variables y otras superficies en tres dimensiones para su estudio detallado. Se trata de un applet escrito en lenguaje Java que el profesor puede configurar y que el alumno puede utilizar para explorar lo que el autor de las páginas le proponga, o experimentar él mismo probando a generar diferentes superficies. Cada configuración de *Superficies en 3D* presenta una o varias superficies que el alumno puede girar y estudiar en todos sus aspectos.

Es decir, el potencial de este software se localiza en tres puntos:

– Por una parte, que puede ser utilizado con cualquier sistema operativo. Solamente debemos disponer de un navegador en el que visualizar las webs creadas y en el que utilizando el motor de Java, se visualice la configuración en cada momento del applet utilizado.
– La aplicación es interactiva permitiendo la manipulación por parte del alumno o del profesor para visualizar la imagen generada desde distintos puntos de vista.
– La imagen creada no es fija, sino que se puede modificar y crear nuevas imágenes según las necesidades de quien esté utilizando la aplicación.

El software *Superficies en 3D* lo localizamos en la siguiente dirección de Internet:
http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2000/superficies/index.html

Cuando accedemos a esta dirección observamos la ventana que aparece en la Imagen 1.

Mariano Real Pérez
CEP de Sevilla
matemastic@revistasuma.es

Imagen 1: Ventana de inicio de la aplicación *Superficies en 3D*

Ya en esta ventana inicial podemos observar el potencial que ofrece la herramienta. La ventana aparece dividida en tres zonas.

- La zona superior en la que se observa el nombre de la aplicación *Superficies en 3D* y el nombre de los autores.
- La zona central en la que van a ir apareciendo los distintos contenidos por los que vamos a navegar.
- La zona de la izquierda o guía en la que aparecen los distintos enlaces de la aplicación.

En la ventana central observamos una imagen compuesta en la que aparece un icosaedro sobre un paraboloide hiperbólico. Si pulsamos sobre esa imagen con el ratón y lo movemos a la vez que dejamos de pulsarlo, podemos observar cómo la imagen comienza a girar. Este giro lo podemos realizar en la dirección que mejor nos parezca.

En la Imagen 2 podemos observar la composición del icosaedro sobre el paraboloide hiperbólico que hemos indicado anteriormente y que hemos girado sobre su eje vertical arrastrado el ratón del ordenador de forma horizontal.

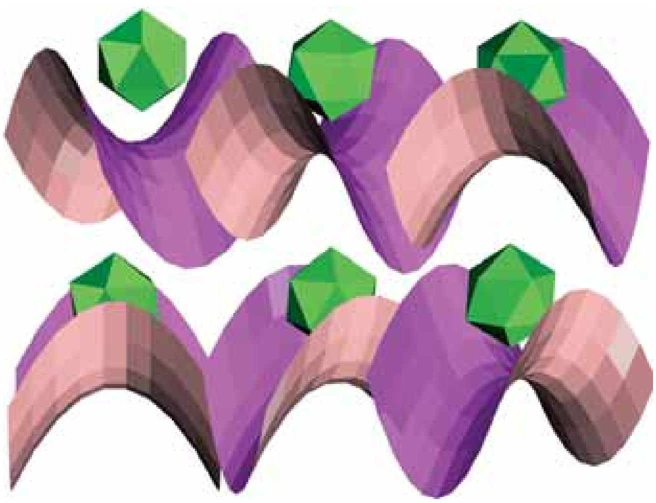


Imagen 2: Giro de una imagen

El software *Superficies en 3D* consiste básicamente en un archivo llamado Superficies.jar que debe encontrarse en la misma carpeta en la que se encuentre la página web que contenga el código para poder observar la imagen de la superficie en tres dimensiones. Este archivo se encuentra en la siguiente dirección:
http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2000/superficies/Superficies.jar

Es un archivo que contiene toda la información del applet en Java. Todo el resto de opciones que vamos a tratar son las distintas posibilidades que ofrece este archivo. Un manual de la aplicación lo podemos localizar en la dirección:
http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2000/superficies/Doc/Superficies.doc

Como observamos en la zona izquierda de la Imagen 1, se ofrece una guía en la que se nos presentan las distintas posibilidades de esta aplicación que, como hemos indicado, son las que nos ofrecen el archivo Superficies.jar. Vamos a realizar un recorrido por esa guía para poder observar las posibilidades que nos presenta.

Lo primero que se nos ofrece es una guía para el profesor y otra para los alumnos. No vamos a entrar en ellas ahora con profundidad ya que a lo largo del texto se va a presentar el funcionamiento del software. Las siguiente opciones que nos presentan son las de ejemplos de utilización del software.

1.- Poliedros

Al pulsar sobre la opción de poliedros accedemos a la ventana que se observa en la Imagen 3.

Imagen 3: Los poliedros regulares

En esta parte se han recogido los poliedros regulares representados con la aplicación *Superficies en 3D*. El tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro aparecen representados en este enlace. En la Imagen 4 podemos observar la representación que se nos muestra de los poliedros regulares.

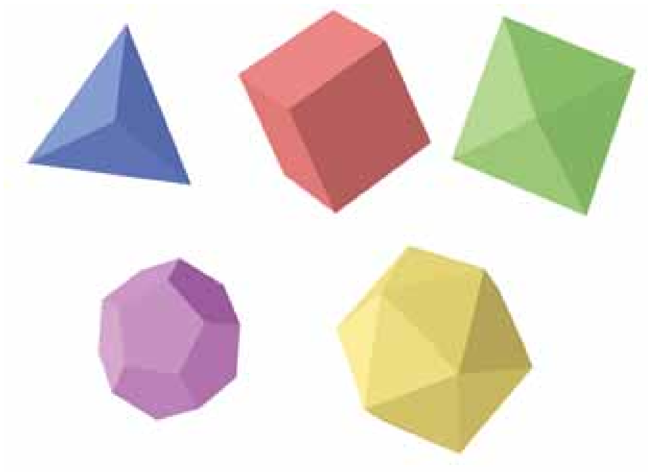


Imagen 4: Poliedros regulares con *Superficies en 3D*

Cada una de ellas podremos girarla en el sentido que deseemos, con lo que facilita que los alumnos puedan observarla desde distintos puntos de vista. El método para girar cada figura es el que hemos indicado anteriormente. Si deseamos que la figura deje de girar solamente deberemos hacer doble clic sobre la misma.

2.- Gráficas

Al pulsar sobre el enlace de gráficas accedemos a la ventana que se observa en la Imagen 5.

Imagen 5: Gráficas de *Superficies en 3D*

En esta zona aparecen ejemplos de representación de distintas superficies a partir de su ecuación. Algunas de estas superficies son:

– Un paraboloide de revolución para lo que se han utilizado las ecuaciones paramétricas
  $x=2*u-1$
  $y=2*v-1$
  $z=x^\wedge 2+y^\wedge 2$

– Un paraboloide de revolución para lo que se han utilizado las ecuaciones paramétricas en coordenadas polares:
  $x=1.5*u*\cos(2*\text{pi}*v)$
  $y=1.5*u*\text{sen}(2*\text{pi}*v)$
  $z=y^\wedge 2+x^\wedge 2$

– Un paraboloide hiperbólico para lo que se han utilizado las ecuaciones paramétricas
  $x=2*u-1$
  $y=2*v-1$
  $z=x^\wedge 2-y^\wedge 2$

– Un paraboloide hiperbólico pero con otra parametrización de x e y:
  $x=v*\cos(2*\text{pi}*u)$
  $y=v*\text{sen}(2*\text{pi}*u)$

– La superficie que se obtiene de las siguiente ecuaciones paramétricas:
  $x=3*u-1.5$
  $y=3*v-1.5$
  $z=\exp(-2*(x^\wedge 2+y^\wedge 2))$

– La superficie que se obtiene de las siguiente ecuaciones paramétricas:
  $x=2*u-1$
  $y=2*v-1$
  $z=x*y^\wedge 2$

– La superficie que se obtiene de las siguiente ecuaciones paramétricas:
  $x=4*u-2$
  $y=4*v-2$
  $z=4*\exp(-2*(x^\wedge 2+y^\wedge 2))*\text{sen}(x^\wedge 2-y^\wedge 2)$

En la Imagen 6 podemos observar las gráficas anteriormente mencionadas.

En esta representación de gráficas podemos observar que cada una de ellas tiene dos zonas, el anverso y el reverso. La aplicación *Superficies* nos ofrece la posibilidad de dibujar cada una de las zonas de un color diferente facilitando al observador, en nuestro caso a los alumnos, visualizarla lo mejor posible.

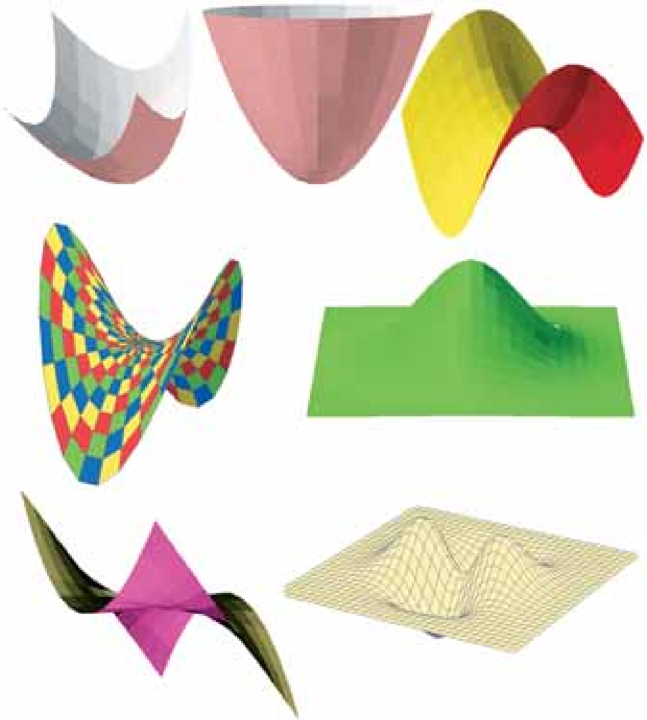


Imagen 6: Gráficas representadas con *Superficies en 3D*

El sombreado con el que *Superficies en 3D* dota a cada una de las imágenes hace que podamos observarlas con mayor precisión.

3.- Superficies de revolución

Pasamos ahora al siguiente conjunto de ejemplos en el que podemos observar el funcionamiento de este software. Corresponde ahora el turno a las superficies de revolución. Si pulsamos sobre el enlace *Revolución* accedemos a la ventana que podemos observar en la Imagen 7.

Imagen 7: Superficies de revolución

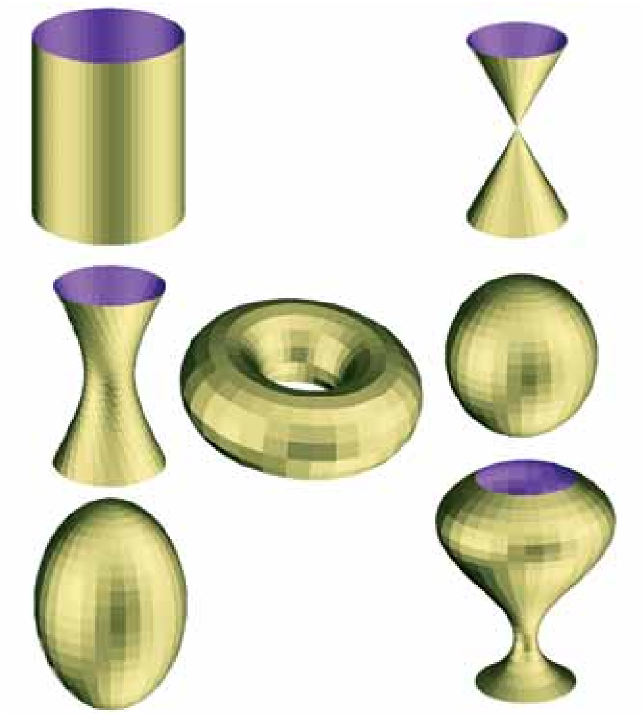


Imagen 8: Superficies de revolución

Las superficies de revolución que podemos observar en este enlace son el cilindro, el cono recto, el hiperboloide, la esfera, el elipsoide, el giro de una gráfica y un toro.

En la Imagen 8 podemos observar las imágenes representadas por la aplicación, pudiendo observar, como en el caso anterior, que tanto el anverso como el reverso de cada una de ellas aparecen representados con colores distintos, lo que facilita que se pueda observar mejor la superficie representada. En las superficies que son cerradas como la esfera, el elipsoide o el toro, solamente se puede observar una de las caras de la superficie, mientras que en el resto podemos observar las dos.

Imagen 9: Superficies paramétricas

A diferencia de lo que hicimos en el caso de las gráficas, aquí hemos representado todas las superficies en el mismo formato.

4.- Superfícies paramétricas

Si pulsamos sobre este enlace accedemos a la ventana que podemos contemplar en la Imagen 9.

Destacan entre las superficies paramétricas la banda de Moebius para la que se ha utilizado la siguiente parametrización:

$R=1$
$r=0.3$
$alfa=2*\text{pi}*u$
$V=2*v-1$
$x=(R+V*r*\text{sen}(alfa/2))*\cos(alfa)$
$y=(R+V*r*\text{sen}(alfa/2))*\text{sen}(alfa)$
$\text{z}=\text{V}*\text{r}*\cos(alfa/2)$

En la Imagen 10 podemos observar las superficies paramétricas que aparecen en este apartado.

Imagen 10: Superficies paramétricas con *Superficies en 3D*

5.- Varias

Para finalizar, la aplicación recoge un par de ejemplos en los que podemos observar que se pueden componer varias imágenes. En la Imagen 11 observamos la ventana que aparece al pulsar sobre este enlace. Las superficies que se pueden observar en este apartado son las que se encuentran en la Imagen 12.

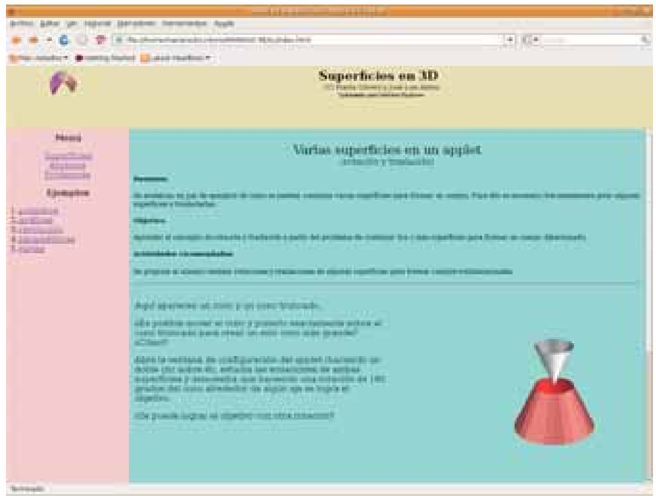


Imagen 11: Varias superficies en un mismo applet

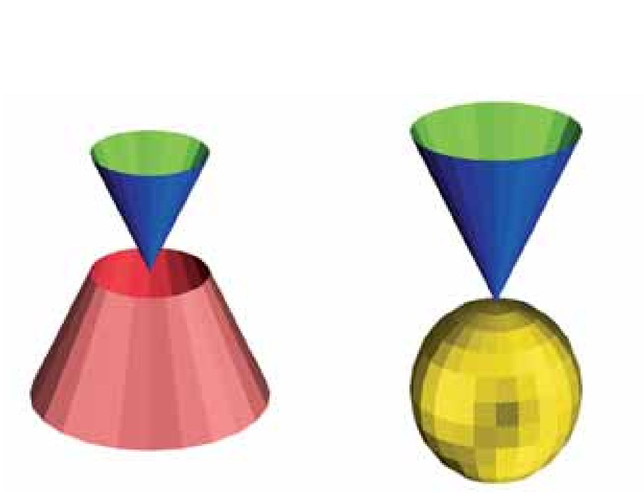


Imagen 12: Composición de superficies

6.- Creación y modificación de figuras

Ahora solamente nos queda saber cómo podemos crear nuestras propias figuras para utilizar esta aplicación en el aula. Como hemos indicado anteriormente, la aplicación *Superficies en 3D* es una herramienta que va a ayudar al docente a explicar los contenidos relacionados con las superficies a sus alumnos. Esta herramienta, tras las modificaciones adecuadas, va a generar un código, el propio del applet, que será el que debamos utilizar para insertarlo en la web en la que vayamos a incluir la figura resultante.

La zona o ventana de configuración para poder manipular y utilizar este software aparece cuando pulsamos con el botón derecho sobre cualquiera de las imágenes que hemos observado anteriormente. En ese momento aparecerá la ventana que podemos observar en la parte superior de la Imagen 13. Parte de esa ventana está indicada para ser utilizada por los alumnos y otra parte por el profesorado, aunque dependiendo del nivel de que se trate, los alumnos podrían utilizarla entera.

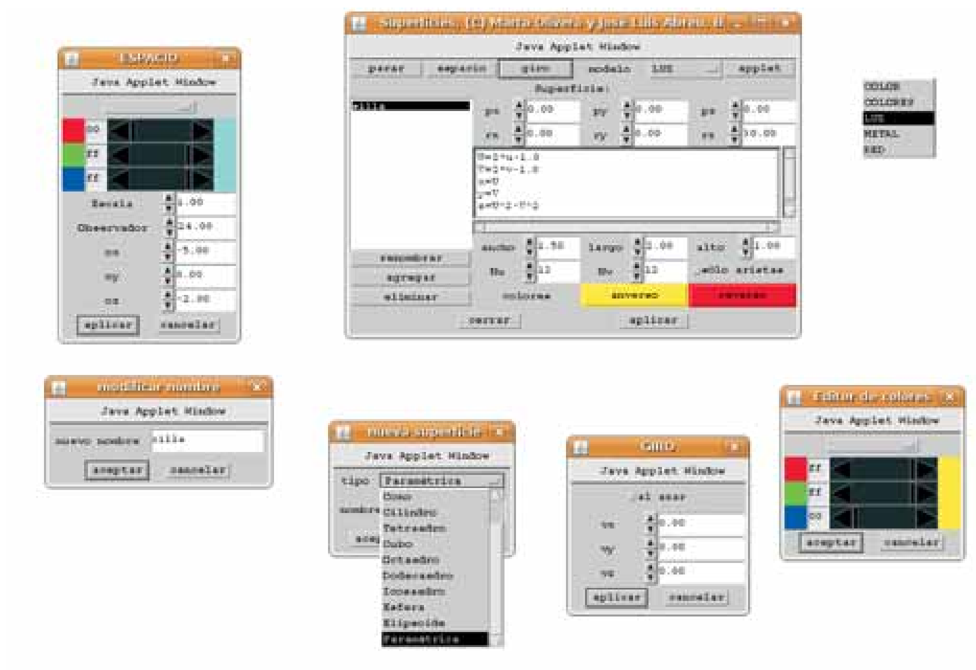


Imagen 13: Configuración de applet

En esta ventana de configuración observamos varios elementos sobre los que podemos actuar:

– El botón *Parar*: este botón sirve para parar la imagen en el caso de encontrarse en movimiento.

– El botón *Espacio*: este botón abre una pequeña ventana que podemos observar en la parte izquierda de la Imagen 13 con la que se puede controlar las características generales del espacio de visualización como el color de fondo, la escala y el punto de vista del observador.

El color se puede elegir por el nombre de los elementos que aparecen en el selector de colores (negro, magenta, azul, turquesa, verde, amarillo, naranja, rojo, rosa, grisOscuro, gris, grisClaro o blanco) o determinando el color a partir de la mezcla de colores rojo, verde y azul moviendo las barras de desplazamiento.

La escala se mide en unidades que son relativas al tamaño del applet, dado que en nuestra web vamos a indicar el tamaño del mismo. La unidad de la escala corresponde a la tercera parte del ancho del applet, lo que permite ver completo un cuerpo de ancho 2 sin problemas cuando la escala es 1,0.

La distancia al observador (medida en las mismas unidades que la escala) es la distancia desde el origen de coordenadas virtual (en el que se representan las imágenes) al ojo del observador. Si esta distancia se disminuye, el punto de vista se modifica y el objeto parece estar más cerca del observador, es decir, las partes más cercanas parecen mucho más grandes que las lejanas. Este efecto también se puede modificar sobre la propia figura, sin más que arrastrar el ratón sobre ella mientras pulsamos el botón derecho. Si lo arrastramos hacia arriba, acercaremos al observador, consiguiendo el efecto contrario si lo hacemos hacia abajo.
Las coordenadas que aparecen en la parte inferior modifican el punto de vista del observador haciendo que parezca que se está mirando la imagen desde arriba (cuando *oz* es negativo) o desde abajo (cuando *oz* es positivo). Cambiando el valor de *oy* puede hacerse que parezca que se mira desde la izquierda o desde la derecha.

– El botón *Giro*. Al pulsar este botón aparece una nueva ventana que podemos observar en la zona inferior derecha de la Imagen 13. Las variables ***vx***, ***vy*** y ***vz*** son las velocidades de giro alrededor de los ejes *x*, *y*, *z* respectivamente.

– El modelo. Cada una de la figuras las podemos representar con un modelo diferente de entre los que nos permite la aplicación. En este caso, en la Imagen 14 hemos recogido los diferentes modelos permitidos, aplicados al icosaedro. Los modelos permitidos aparecen en la zona superior derecha de la Imagen 13.

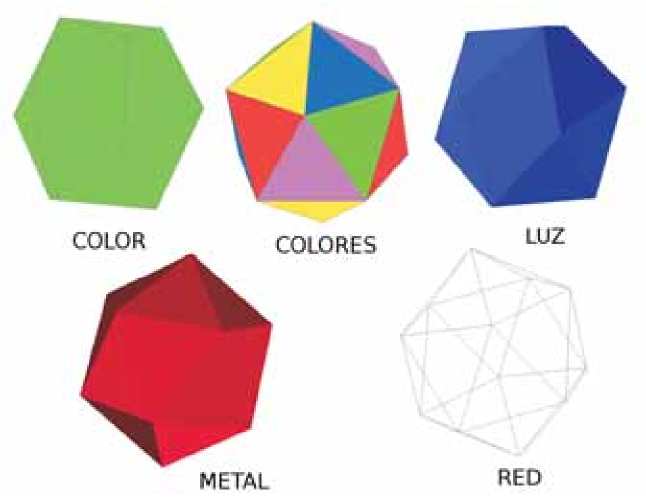


Imagen 14: Modelos aplicados al Icosaedro

– El botón del applet: al pulsar sobre este botón se abre una nueva ventana como la que observamos en la imagen 15 en la que aparece el código que debemos incluir en la web para obtener la imagen generada con *Superficies en 3D* que estemos observando en ese momento. Para insertar esa imagen en nuestra web es cuestión de copiar el código que aparece en esta ventana y pegarlo en el código html de la web que estemos construyendo y ya habríamos conseguido realizar esta tarea. Esta tarea es la que debemos realizar en último lugar, cuando ya tengamos configurados todos los aspectos de nuestra figura. Un código ejemplo lo vemos en la imagen 15.

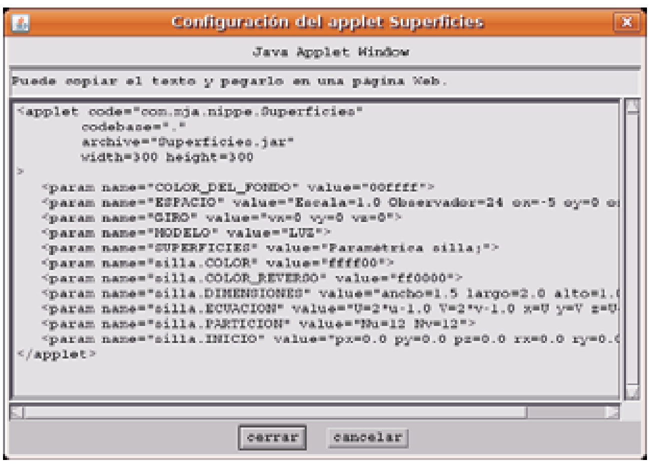


Imagen 15: Ventana de código del applet

– Posición: en la ventana de configuración podemos observar, debajo de la botonera que hemos tratado, que aparecen las coordenadas de posición de la figura que estamos representando. Estas coordenadas vienen marcadas por los valores *px*, *py* y *pz*. Los números ***px***, ***py*** y ***pz*** representan desplazamientos en las direcciones de los ejes correspondientes realizados **después** de las rotaciones ***rx***, ***ry*** y ***rz***.

– Orientación: justo debajo de los valores de posición inicial, aparecen los valores de rotación ***rx***, ***ry*** y ***rz***. Estos valores indican la rotación con la que va a aparecer la figura respecto a los ejes OX, OY y OZ.

– Ecuaciones: bajo los controles de posición y orientación encontramos un área de texto donde aparecen las ecuaciones que definen a las superficies y, en el caso de las superficies paramétricas, esta área de texto es editable y el usuario puede modificar las ecuaciones a su antojo. En el caso del polígono, el paralelepípedo y los poliedros regulares (Tetraedro, Cubo, Octaedro, Dodecaedro e Icosaedro), no aparecen ecuaciones que los definan. Por lo tanto esta zona es útil sólo cuando la superficie es de tipo *Paramétrica*.

Las ecuaciones que definen una superficie paramétrica tienen 2 constantes y 8 variables reservadas. Las constantes son **pi=3,14159...** y **e=2,7182818...** Además, se tienen una serie de variables reservadas para indicar las ecuaciones paramétricas que son:

u*, *v*, *x*, *y*, *z*, *ancho*, *largo y ***alto***

Las variables ***u*** y ***v*** son los parámetros y ambos recorren el intervalo [0,1] para generar la superficie. Las variables ***x*, *y*, *z*** son las coordenadas del vector que genera la superficie cuando ***u*** y ***v*** recorren el intervalo [0,1]. *x*, *y*, *z* deben expresarse como funciones de las dos variables *u* y *v*.

Finalmente *ancho*, *largo* y *alto* son tres variables cuyos valores podemos determinar usando los controles que aparecen bajo el área de texto de las ecuaciones. Estas variables se utilizan en las definiciones de las diversas superficies predefinidas, incluyendo los poliedros regulares, pero también pueden utilizarse como parámetros en las ecuaciones de cualquier superficie.

Las ecuaciones que representan una superficie paramétrica deben definir *x*, *y* y *z* como funciones *u* y *v*, y para ello pueden utilizar los parámetros *ancho*, *largo* y *alto*, y tantas variables auxiliares como se desee, siempre y cuando se hayan definido antes de introducir la ecuación propiamente dicha. Cada ecuación debe definirse en una línea diferente y es importante tomar en cuenta que en el momento de la evaluación, cuando las superficies se calculan, las variables se van evaluando en el orden en que fueron definidas, y al final se evalúan las coordenadas *x*, *y* y *z*.

– Dimensiones: las variables *ancho*, *largo* y *alto* representan las “dimensiones” de la superficie. Estas variables se utilizan en las definiciones de las superficies predefinidas, más o menos con el significado indicado por sus nombres. Por ejemplo en el elipsoide representan el tamaño de sus tres ejes, los poliedros regulares son los poliedros inscritos en la esfera de radio *ancho*/2, etc.

– Partición: los valores *Nu* y *Nv* que aparecen en la parte inferior de las dimensiones corresponden a los intervalos iguales en los que se va a dividir el intervalo [0,1] en el que van a tomar los valores u y v respectivamente. Nos marcará el número de valores que se van a utilizar para representar gráficamente una superficie. Estos valores pueden oscilar entre 1 y 128. Cuanto mayor sea el número de valores, con más precisión se dibujará la gráfica pero más tardará el ordenador en dibujarla. Si marcamos la casilla *sólo aristas*, nos representará las aristas de la superficie con las divisiones que hayamos marcado en los intervalos. En la imagen 16 podemos observar cómo estas divisiones influyen en una mejor representación gráfica. En este caso hemos representado la esfera con las mismas divisiones para los dos intervalos, siendo estas divisiones en la imagen 16 las siguientes: 4, 8, 10, 15, 30 y 100 respectivamente.

– Colores: Las superficies, generalmente, presentan dos partes, un anverso y un reverso. En la zona inferior de la ventana de configuración podemos elegir el color con el que deseamos que se represente cada una de estas partes. Solamente deberemos pulsar sobre el botón *anverso* o el botón *reverso* y seleccionar en la nueva ventana que se nos ofrece el color con el que deseamos que aparezca cada una de ellas, como ya lo hiciéramos anteriormente con el fondo.

– Nombres: en la parte izquierda de la ventana de configuración podemos observar que aparece una lista de las superficies que tengamos dibujadas en ese momento. Estas superficies las podemos renombrar, borrar o bien crear una nueva. Si optamos por crear una superficie nueva, nos aparecerá una ventana que observamos en la zona inferior izquierda de la imagen 13, en la que debemos seleccionar el tipo de imagen que deseamos agregar, dándole posteriormente un nombre.

– Ejemplo: para finalizar vamos a crear un ejemplo en el que se mezclen 3 imágenes en una misma representación. En nuestro caso van a ser un dodecaedro, una superficie en paramétrica y la banda de Moebius.

1.- Para empezar, pulsaremos con el botón derecho del ratón sobre una de las superficies cualesquiera ya representadas y borraremos todo las superficies que aparezcan.
2.- Representamos el dodecaedro, para ello, pulsamos sobre el botón agregar, le indicamos que es un dodecaedro, le indicamos que lo queremos en formato metal y seleccionamos el color azul. Lo desplazamos en el eje OX y lo giramos en el eje OY. En la imagen 17 podemos observar la configuración.
3.- Representamos la banda de Moebius. Para ello utilizamos la siguiente expresión en la ecuación:

$R=ancho$
$r=0.3$
$alfa=2*\mathrm{pi}*u$
$V=2*v-1$
$x=(R+V*r*\mathrm{sen}(alfa/2))*\cos(alfa)$
$y=(R+V*r*\mathrm{sen}(alfa/2))*\mathrm{sen}(alfa)$
$z=V*r*\cos(alfa/2)$

Pulsamos sobre *agregar* y le indicamos que el tipo es *paramétrica*. En la imagen 17 podemos observar el resto de la configuración que hemos elegido.
4.- Representamos la superficie que deseamos. En este caso

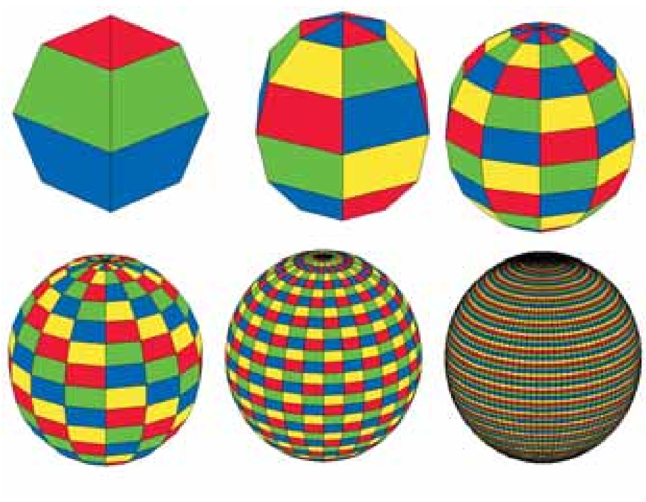


Imagen 16: Representación de una esfera con distintas particiones

Imagen 17: Configuración de cada una de las figuras del ejemplo

la que tiene por ecuaciones paramétricas

H= pi**u*
K=2*pi**v*
x=(*ancho*/2)*sen(*H*)
y=(*largo*/2)*cos(*K*)
z=(*alto*/2)*sen(*K*)*cos(*H*)

Pulsamos sobre *agregar* y le indicamos que el tipo es *paramétrica*. En la imagen 17 podemos observar el resto de la configuración que hemos elegido.

Ahora solamente nos queda pulsar sobre el botón *applet*. Con esta acción se nos abrirá una nueva ventana con el código que debemos insertar en nuestra web. En este caso el código es:

```
<applet code=”com.mja.nippe.Superficies”
        codebase=”.”
        archive=”Superficies.jar”
        width=300 height=300
>
    <param name=”COLOR_DEL_FONDO” value=”ffffff”>
    <param name=”ESPACIO” value=”Escala=1.0 Observador=24 ox=-5 oy=0 oz=-2”>
    <param name=”GIRO” value=”vx=0 vy=0 vz=0”>
    <param name=”MODELO” value=”METAL”>
    <param name=”SUPERFICIES” value=”Dodecaedro Dodecaedro;Paramétrica Moebius;Paramétrica Paramétrica;”>
    <param name=”Dodecaedro.COLOR” value=”0000ff”>
    <param name=”Dodecaedro.COLOR_REVERSO” value=”rosa”>
    <param name=”Dodecaedro.DIMENSIONES” value=”ancho=1.5 largo=2.0 alto=1.0”>
    <param name=”Dodecaedro.ECUACION” value=”Dodecaedro inscrito en la esfera de radio=ancho/2”>
    <param name=”Dodecaedro.PARTICION” value=”Nu=12 Nv=12”>
    <param name=”Dodecaedro.INICIO” value=”px=1.3 py=0.0 pz=0.0 rx=0.0 ry=50.0 rz=0.0”>
    <param name=”Moebius.COLOR” value=”ff00ff”>
    <param name=”Moebius.COLOR_REVERSO” value=”ff00ff”>
    <param name=”Moebius.DIMENSIONES” value=”ancho=0.8999999999999997 largo=2.0 alto=1.0”>
    <param name=”Moebius.ECUACION” value=”R=ancho r=0.3 teta=2*pi*u V=2*v-1 x=(R+V*r*sen(teta/2))*cos(teta) y=(R+V*r*sen(teta/2))*sen(teta) z=V*r*cos(teta/2) “>
    <param name=”Moebius.PARTICION” value=”Nu=100 Nv=100”>
    <param name=”Moebius.INICIO” value=”px=-2.800000000000001 py=0.7999999999999999 pz=0.0 rx=-10.0 ry=10.0 rz=0.0”>
    <param name=”Paramétrica.COLOR” value=”ff0000”>
    <param name=”Paramétrica.COLOR_REVERSO” value=”ff0000”>
    <param name=”Paramétrica.DIMENSIONES” value=”ancho=1.5 largo=2.0 alto=1.0”>
    <param name=”Paramétrica.ECUACION” value=”H=pi*u K=2*pi*v x=(ancho/2)*sen(H) y=(largo/2)*cos(K) z=(alto/2)*sen(K)*cos(H)“>
    <param name=”Paramétrica.PARTICION” value=”Nu=100 Nv=100”>
    <param name=”Paramétrica.INICIO” value=”px=-2.800000000000001 py=-0.3999999999999998 pz=-0.6 rx=0.0 ry=0.0 rz=0.0”>
</applet>
```

Si lo copiamos y lo pegamos en el código html de nuestra web de prueba obtendremos la figura que se puede contemplar en la imagen 18.

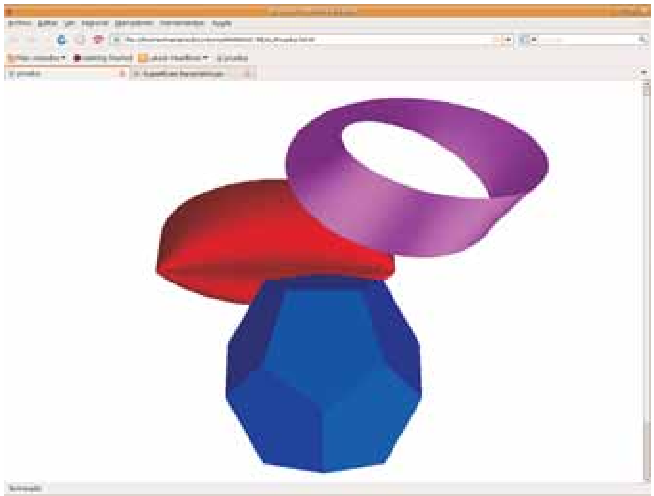
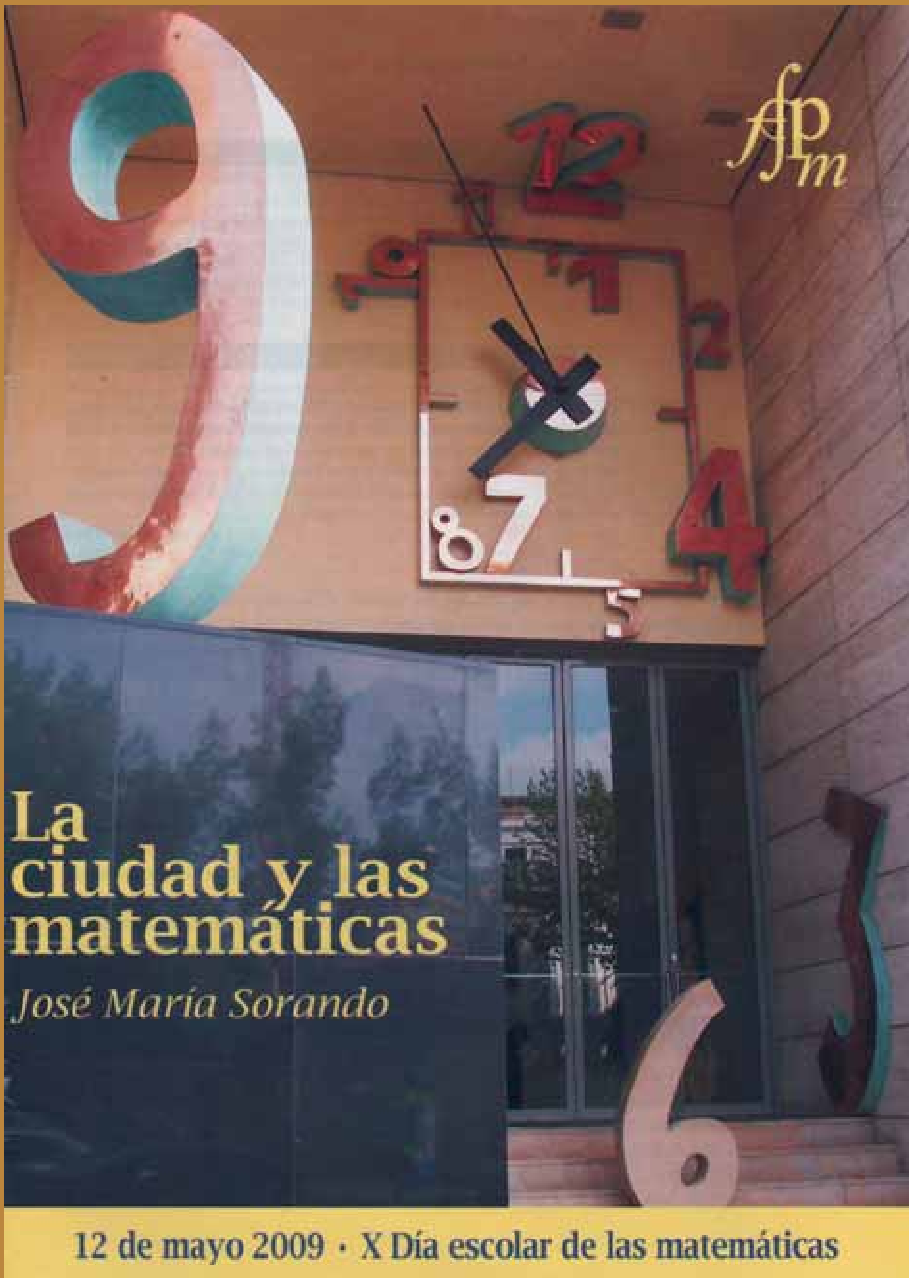


Imagen 18: Figura de ejemplo

MatemásTIC ■

Ficha educativo - técnica	
Nombre	Superficies en 3D
Sistema	Es una aplicación multiplataforma, no dependiendo del sistema operativo y para la que basta con un navegador para poderla utilizar.
Descarga	La aplicación la localizamos en el portal de Instituto Superior de Formación del Profesorado y TIC. Concretamente en la dirección: http://www.isftic.mepsyd.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2000/Superficies en 3D/index.html
Licencia	Software gratuito.
Contenido	Poliedros y superficies.
Nivel	Multinivelar: Primaria, ESO, Bachillerato y estudios superiores.
Metodología	Aplicación para utilizar con el alumnado para observar poliedros y superficies desde distintos puntos de vista, así como la composición de figuras. Aplicación para utilizar con los alumnos de dos en dos.



Servicio de Publicaciones de la FESPM

Apartado de Correos 590
06080 Badajoz
Información y pedidos: *publicafespm@wanadoo.es*

Versión ampliada en: http://fespm.es/dem2009.html Incluye 10 hojas fotocopiables de actividades para el aula de Educación Secundaria. Si utilizas estas actividades con tus alumnos, las amplías o las modificas y quieres comunicarnos tu experiencia, por favor envía un e-mail a: jmsorando@ono.com

Día Escolar de las Matemáticas
12 de mayo de 2009
La ciudad y las matemáticas

suma+ 60
Febrero 2009, pp. 73-78

Velázquez y el retrato del espacio

Diego Velázquez pintó este cuadro titulado Pablo de Valladolid en 1633. *El retratado, (1587-1648), era un actor de la corte y Velázquez lo representa en plena declamación. El gran pintor francés Édouard Manet, al visitar España en 1865, quedó maravillado por la perfección del lienzo y de él dijo:* Quizá el trozo de pintura más asombroso que se haya realizado jamás es el cuadro que se titula *Retrato de un actor célebre en tiempo de Felipe IV (Pablillos de Valladolid).* El fondo desaparece. Es aire lo que rodea al hombrecillo, completamente vestido de negro y lleno de vida.

Pablo de Valladolid , Velázquez, ca. 1633, M.N. del Prado, Madrid

Francisco Martín Casalderrey
IES Juan de la Cierva (Madrid)
fmc@revistasuma.es

Retrato de Édouard Manet,
por Emile Auguste Carolus-Duran, 1880

La primera reacción de quien mira con ojos matemáticos este cuadro es como la que sintió Manet: asombro, perplejidad. ¿Dónde está este Pablo de Valladolid situado? ¿Sobre qué flota este personaje? ¿En qué espacio está contenido?

La idea de espacio

La idea de espacio es uno de los grandes conceptos de la cultura occidental y como tal surge en Grecia. Individuar objetos por observación, abstraer a partir de ellos para concebir la *idea*, en el sentido platónico del término, es un proceso complejo pero compresible en su desarrollo. Cuando un niño aprende la lengua va aprendiendo el significado de las palabras. Capta, por ejemplo, el concepto de *mesa* a partir de las mesas que ha observado. Partiendo de una mesa concreta, pongamos una clásica mesa de cuatro patas, pronto prescinde del número de patas (las hay de una, de tres, de cuatro y de más patas, incluso sin patas, adosadas a la pared). Prescinde de la forma del sobre de la mesa, que no ha de ser necesariamente rectangular, (hay mesas redondas, cuadradas, triangulares...). Prescinde incluso de la horizontalidad del plano del sobre de la mesa, ya que un pupitre no es sino una mesa con el sobre ligeramente inclinado para facilitar la tarea de escribir.

Definir es, matemáticamente hablando, hacer una partición en el conjunto de todos los objetos, dando un criterio, un conjunto de características, de manera que nos permita ante un objeto cualquiera, usando ese criterio, saber si pertenece o no a la categoría de lo definido. Por eso es interesante enfrentar a los alumnos, por ejemplo de Secundaria, a la tarea de definir, a su dificultad. Basta para ello hacer en clase una pregunta sencilla: *¿qué es una mesa?* Algún voluntario contestará rápidamente. Basta luego, mayeuticamente, hacer que los compañeros del que ha respondido vayan corrigiendo y perfilando la definición. Es sorprendente cómo de golpe se ven implicados en el proceso de determinar qué caracteristicas son esenciales a la idea de *mesa* y cuáles no y, por tanto, pertenecen a mesas concretas, pero no a todas las mesas. Es una forma directa de enfrentarles a la abstracción, al pensamiento lógico-matemático, por el expeditivo método de *empujarles a la piscina* y decirles *a nadar.* El ejercicio deriva, casi sin la ayuda del profesor al ámbito de las ideas matemáticas. Y es que la idea misma de definición, como decíamos, es en su esencia, matemática.

La idea de espacio se convierte así en una de las categorías de mayor peso y relevancia del pensamiento occidental.
Jiménez, 2002.

Pero si el proceso de abstracción para pasar de los objetos a los conceptos es relativamente asequible, concebir ideas como la de *espacio*, forma parte de un proceso distinto. No nos estamos refiriendo a objetos sino a algo que los contiene.

En efecto, quizás la característica principal del concepto de espacio sea ésta de ser contenedor de las cosas. Por tanto, tiene sus origenes vinculados a la idea de casa, de templo, del gran contenedor de todo lo tangible, lo aprehendible con los sentidos.

> La idea de espacio se convierte así en una de las categorías de mayor peso y relevancia del pensamiento occidental. (Jiménez, 2002).

Pero mientras los conceptos vinculados a lo tangible, a lo perceptible de manera directa, necesitan de la experiencia perceptora y de la inteligencia de un modo pasivo, la idea de espacio requiere una actuación operativa, racional y, por tanto, de alguna manera matemática. Por eso no es de extrañar que su origen coincida con el de otros conceptos mate-

Tres obras inspiradas en el *Pablo de Valladolid* de Velázquez

El actor trágico: Philippe Rouvière en el papel de Hamlet, Édouard Manet, 1865–66, National Gallery of Art, Washington

Francisco Cabarrús
Goya, 1788,
Banco de España, Madrid

El pífano,
Édouard Manet, 1866
Musée d'Orsay, París

La idea de espacio se asocia al concepto de continente y también, dado el caldo de cultivo matemático en el que nace, a los de posición y de distancia de una manera indisoluble.

máticos y que haya que buscarlo posiblemente en la escuela pitagórica, en el siglo sexto antes de nuestra era.

La idea de espacio se asocia al concepto de *continente* y también, dado el caldo de cultivo matemático en el que nace, a los de *posición* y de *distancia* de una manera indisoluble. Es el espacio en su origen, por tanto, *espacio geométrico*. Zenón de Elea, un siglo más tarde que Pitágoras, volvería a hablarnos del espacio en sus famosas paradojas espacio-temporales

El siguiente paso en este camino lo da Platón en el *Timeo,* en la segunda mitad del siglo IV a. C.. Platón afirma:

> Hay ser, espacio y devenir, tres realidades diferenciadas, y esto antes de que naciera el mundo.

Aborda en primer lugar el ser y el devenir y afirma de ellas:

> Mientras la primera [el ser] va siempre acompañada del razonamiento verdadero, la segunda [el devenir] es irracional; la una no puede ser alterada por la persuasión, mientras que la otra está abierta a ella y hay que decir que aunque cualquier hombre participa de esta última, de la inteligencia sólo los dioses y un género muy pequeño de hombres. Si esto se da de esta manera, es necesario acordar que una es la especie inmutable, no generada e indestructible y que ni admite en sí nada proveniente de otro lado ni ella misma marcha hacia otro lugar, invisible y, más precisamente, no perceptible por medio de los sentidos, aquello que observa el acto de pensamiento. Y lo segundo lleva su mismo nombre y es semejante a él, perceptible por los sentidos: generado, siempre cambiante y que surge en un lugar y desaparece nuevamente, captable por la opinión unida a la percepción sensible.

Así *el ser* son las ideas, en el sentido platónico del término, inmutables, intangibles y sólo alcanzables a través del razonamiento verdadero y la inteligencia. *El devenir* es la realidad perceptible con los sentidos, cambiante, generada con un inicio y un final, perecedera, semejante al ser pero distinta como realidad de él. Entre ambas realidades está el espacio:

> Además, hay un tercer género eterno, el del espacio, que no admite destrucción, que proporciona una sede a todo lo que posee un origen, captable por un razonamiento bastardo sin la ayuda de la percepción sensible, creíble con dificultad, y, al mirarlo, soñamos y decimos que necesariamente todo ser está en un lugar y ocupa un cierto espacio, y que lo que no está en algún lugar en la tierra o en el cielo no existe.

Todas las características importantes de nuestra idea intuitiva actual de espacio están contenidas en esta definición platónica.

Es el espacio, por tanto algo a caballo entre el ser y el devenir. Y si al ser se llega sólo mediante el razonamiento verdadero, el uso estricto de la razón, a la idea de espacio llegamos sólo a través de un razonamiento bastardo. El espacio aunque goza de alguna de las características del ser –es inmutable, indestructible y no se trasforma– es contenedor de lo tangible, de lo perceptible por los sentidos, y eso lo aleja de la esencia del ser. Es el espacio el que da naturaleza a lo que existe, porque sólo existe lo que ocupa un lugar y una posición.

> *Quizás sea este ámbito, a mitad de camino entre* el ser *y* el devenir, *en el que se sitúa lo que se aprender mediante* el razonamiento bastardo, *donde está lo* que es difícil de creer, *el que Platón reserva al pensamiento matemático.*

Quizás sea este ámbito, a mitad de camino entre *el ser* y *el devenir*, en el que se sitúa lo que se aprender mediante *el razonamiento bastardo*, donde está lo *que es difícil de creer*, el que Platón reserva al pensamiento matemático.

Si deciamos que la primera idea de espacio surge de la de contenedor de nosotros mismos, la casa, o de los dioses, el templo, no es de extrañar que, cuando la idea de espacio se convierte en una idea cultural y trasciende el lenguage erudito para pasar al vocabulario común, sea la arquitectura –específicamente la arquitectura griega– la primera plasmación estética del espacio, el primer contacto entre la idea matemática de espacio y el mundo del arte.

Si el espacio es inmutable, la arquitectura es una manera de organizarlo, de trazar líneas de referencia que lo estructuren, de levantar paredes que lo acoten, que definan subespacios contenidos en él, pero a imagen y semejanza del espacio en sí. Las matemáticas actúan así, de algún modo y desde el principio, como mediadoras en el proceso de virtualización de lo que nos rodea, aportando la geometría, que en simbiosis con el arte, es la base de la arquitectura.

No sucede lo mismo con la pintura, al menos no simultáneamente. El proceso, en la pintura, es mucho más lento y trabajoso. La virtualización de la realidad, de lo tangible, sobre la superficie de un cuadro entraña una dificultad sustancialmente distinta: mientras concebimos el espacio en tres dimensiones, la superficie del soporte pictórico es plana. Se precisa de un proceso de conversión para que la manera en la que percibe el ojo, mirando el espacio, coincida con la que aprecia virtualmente al mirar el cuadro.

Es de este deseo de hacer verosimil lo que se ve en el cuadro del que nace la necesidad de encontrar formas de representación. Y, aunque los primeros intentos intuitivos se ven ya en algunos frescos de Pompeya, la técnica adecuada no se descubre hasta el Renacimiento.

La perspectiva

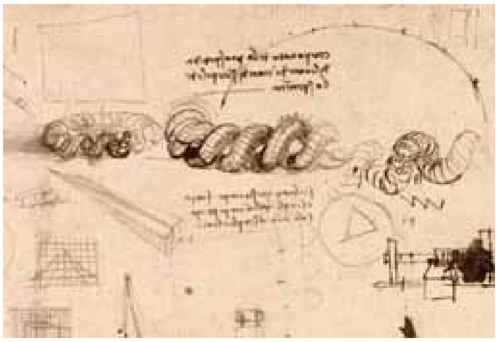
El momento para la pintura, en relación con el concepto de espacio, llegó en el Quattrocento. El problema era en esencia cómo representar un espacio tridimensional en el plano bidimensional del dibujo. Cómo lograr que lo que se dibuja en el lienzo tenga la apariencia de lo real, sea virtualmente como la misma realidad.

Los primeros intentos fueron intuitivos: hacer más pequeño lo que está lejos y mayor lo que esta más cerca del observador, pero ¿en qué proporción? Se había observado que la representación adecuada de líneas paralelas entre sí y perpendiculares al plano del dibujo eran líneas convergentes en un punto. Pero, inicialemente se pensó que las aristas del techo de una habitación y las del suelo convergían sobre puntos distintos, situados en una misma verical.

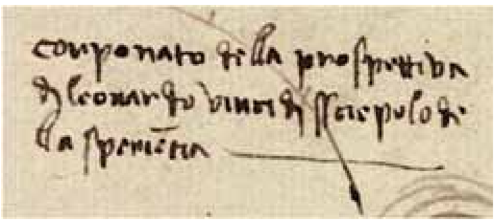
Filippo Brunelleschi (1377-1446), fue el primero en resolver el problema, las líneas convergen todas en un mismo punto, el punto de fuga, y el proceso para dibujar en perspectiva correctamente se enuncia de un modo algorítmico, matemático. Brunelleschi no escribió sobre cómo hacerlo, pero, poco tiempo más tarde, Leon Battista Alberti (1404-1472) publicó su *Della Pittura* (1435), donde por primera vez se plasma un método geométrico de representación en 2D del espacio 3D.

Una vez establecidos, los métodos matemáticos de representación en perspectiva se extendieron con mucha rapidez entre los pintores y casi desde el principio se produce un efecto paradógico: la perspectiva, nacida para pintar *la realidad*, de manera creible, pasa a tener una utilidad completamente distinta, convertir en real lo que no existe.

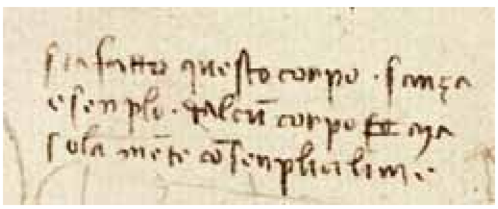
Leonardo da Vinci, autor también de un libro sobre la perspectiva titulado *Tratado de la pintura,* nos ofrece en el *Códice Atlántico* un nuevo ejemplo de su clarividencia. La imagen es ésta:



En la imagen vemos un esbozo de un toro que se envuelve en torno a otro toro; lo acompañan dos textos. Veamos éstos. Para facilitar su lectura mostramos la imagen especular de los escritos de Leonardo. El superior dice:



corpo nato della prospettiva
di Leonardo Vinci discepolo di
la sperientia



si a fatto questo corpo senza
esemplo d'alcun corpo, ma
solamente con semplici linee

Leonardo es consciente desde el principio de lo que otros muchos harán más tarde. La perspectiva, inventada para representar *la realidad*, sirve parta generar realidades virtuales, cuerpos nacidos de la perspectiva, hechos *sin ejemplo de ningún cuerpo, con simples líneas*, cuerpos no-reales que la pintura hace existir.

Con la perspectiva, por tanto, nace una nueva idea de qué es el espacio en pintura. Ya no es sólo el contenedor de los objetos reales –digamos los que pueden ser *retratados*– sino de los objetos imaginados que, pintados, se vuelven virtualmente reales.

El espacio de Descartes y de Newton

En el siglo XVII la idea matemática de espacio evoluciona. Son varios los intentos de definir mejor qué es el espacio, a partir de la idea platónica.

Descartes lo define así :

> el objeto de los geómetras, que concebía yo como un cuerpo continuo o un espacio infinitamente extenso en longitud, anchura y altura o profundidad, divisible en varias partes que pueden tener varias figuras y magnitudes y ser movidas o trasladadas en todos los sentidos, pues los geómetras suponen todo eso en su objeto.
>
> (Descartes, 1637)

Newton, por su parte, formula la idea de *espacio absoluto:*

> El espacio absoluto, tomado en su naturaleza, sin relación a nada externo, permanece siempre similar e inmóvil.
>
> (Newton, 1687)

Como vemos ambas definiciones continúan reflejando el mismo paradigma de un espacio contenedor de lo que existe, aunque con un grado mayor de abstracción, definido de una manera más precisa. Pero continúa siendo un espacio ligado a la idea de la Naturaleza, que sigue tratando de interpretar lo real en cuanto perceptible por los sentidos. Sin embargo, es ya un espacio abstracto, que tiene existencia más allá que la propia existencia de los objetos que contiene, sometido a reglas, *analizable geométricamente.*

Pablo de Valladolid

El cuadro de Velázquez que hoy miramos con ojos matemáticos y la idea de espacio enunciada por Descartes son simultáneos en el tiempo, y fundamentealmente, concordantes en la concepción. El fondo de este cuadro de Velázquez, fascina, porque no es real, en el sentido de representar algo concreto, salvo el espacio en sí, en toda su absatracción. Ortega y Gasset, reflexionando sobre el fondo de este cuadro, afirma:

> Se trata de una serie de pigmentos que no pretenden representar objeto alguno ni real ni imaginario, ni preciso ni difuso. Lo que nos ponen delante no es cosa ninguna, ni es siquiera un elemento. Aquello no es tierra, no es agua, no es aire. En la intención con que el autor dio estas pinceladas nos es, desde luego, palmario que se proponen desterrar de nuestra vista toda alusión a figura o forma cuales-

> quiera, vaciar nuestra atención de cuanto no sea el cuerpo del truhán. A este fin embadurna el lienzo con una materia homogénea e informe, en que nada atrae ni distrae, y además emplea para ello un color pardusco que no es color de nada, un color inventado *ad hoc* en el taller para servir exclusivamente una finalidad de técnica pictórica: destacar la figura de Pablillos y de ella su volumen o corporeidad (...).

Y añade:

> Reparemos ya aquí en lo poco que nos sirve calificar la pintura de Velázquez como realismo. Pues aun admitiendo por un momento que esta apelación valga para el modo de estar pintado el personaje, no vale para el cuadro, porque el cuadro no es sólo la figura, sino también el fondo, y este fondo no sólo no es realista, sino que ni siquiera es irrealista, sino franca y violentamente des-realista, ya que busca anular en torno toda remembranza de objeto.

Hasta aquí compartimos plenamente el comentario de Ortega que él expresa además de una manera magistral. Pero, como matemático, permítaseme discrepar humildemente cuando afirma para concluir su comentario:

> Velázquez ha querido aquí crear la nada en torno a Pablillos rodeándole de una invención arbitraria que es un mero experimento de taller.

La nada que rodea a Pablo de Valladolid no es una *invención arbitraria*, es el espacio en sí, en la concepción matemática de la época, y como tal no es arbitrario. No está dictado por la voluntad o el capricho de Velázquez, está sometido a normas. Es el espacio de Descartes, de Newton, plasmado genialmente en su mínima expresión, apenas un poco de color, apenas una sobra, sin aristas, continuo, infinito, inmóvil, sin relación a nada externo, con la intención única de resaltar la figura de Pablo de Valladolid.

Miramos este cuadro con ojos matemáticos y vemos detrás, en segundo plano, lo que antes sólo era factible imaginar, algo aparentemente imposible de pintar: el retrato del espacio. Por eso, *al mirarlo soñamos y decimos que* Pablo de Valladolid *necesariamente tiene su lugar y ocupa su espacio* y que, justo por esta razón, *este hombrecilllo completamente vestido de negro* está *lleno de vida*.

Epílogo a nuestra mirada

El paseo por la idea de espacio sugerido por este cuadro, que hemos iniciado en Pitágoras, no termina en Newton, naturalmente. La creación matemática y la artistica han continuado evolucionando desde el siglo XVII hasta nuestros días y el paralelismo en sus desarrollos ha permanecido en el tiempo.

Si el *Pablo de Valladolid* de Velázquez, representa el paradigma del espacio cartesiano, del modelo newtoniano, en el primer tercio del siglo XX las Vanguardias y las matemáticas contemporáneas volverían a encontrase en torno a las nuevas ideas del espacio, concebido como un conjunto de puntos y sus relaciones, entendiendo por punto cualquier género de cosas y por relaciones cualquier enlace que transforme en red a esos puntos.

En un artículo en SUMA, en su sección *En un Cuadrado*, Capi Corrales ya nos hizo reflexionar sobre el *espacio caja* en *Las Meninas* de Velázquez, y el *espacio red* en las de Picasso y, por tanto, sobre la etapa que esta reflexión nuestra no abarca, su lectura puede ser un complemento a lo que aquí hemos expuesto[1].

ARTE CON OJOS MATEMÁTICOS ■

NOTAS

1 Terminado de escribir este artículo llega a mis manos el manuscrito de un libro de Capi Corrales titulado *Cuaderno de un viaje: exploraciones del espacio 1945-2008,* que publicará proximamente la editorial Trama. El libro, magnífico, aborda también la idea de espacio desde la postguerra mundial hasta nuestros días, subrayando el paralelismo en la evolución del concepto de *espacio* en el Arte y las Matemáticas. Recomiendo su lectura a los que se hayan sentido interesados por las reflexiones de este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALBERTI, L.B. (1966): *On Painting*, Traslated with introduction and Notes by J.R. Spencer, Yale University Press

DESCARTES, R. (1637): *Discurso del método para guiar bien la razón y buscar la verdad en las ciencias.* Tecnos, Madrid, 2006

JIMÉNEZ, J. (2002): "Pensar el espacio" en *Conceptes de l'espai*, Fundación Joan Miró, Barcelona.

NEWTON, I. (1687): *Principios matemáticos de la filosofia natural*, Tecnos, Madrid, 1987

ORTEGA Y GASSET, J. (1983).: "La reviviscencia de los cuadros", en *Obras Completas*, VIII, Alianza.

PLATÓN: *Diálogos. Tomo VII: Filebo, Timeo, Critias,* Gredos, Madrid, 1997

suma+ 60
Febrero 2009, pp. 79-86

En las ciudades invisibles IX

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Cuzco con su planta radiada y multidividida (...) Ámsterdam, semicírculo que mira hacia el septentrión, con canales concéntricos...

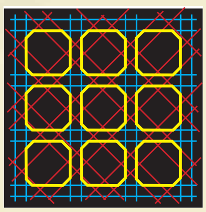
Nueva York, ...con calles como profundos canales todos rectilíneos salvo Broadway.

...mientras cada forma no haya encontrado su ciudad, nuevas ciudades seguirán naciendo. Donde las formas agotan sus variaciones y se deshacen, comienza el fin de las ciudades. En los últimos mapas del atlas se diluían retículas sin principio ni fin, ciudades con la forma de Los Ángeles, con la forma de Kyoto-Osaka, sin forma.

Cuzco, Ámsterdam: ciudades reales, visibles y circulares como Bram, en Francia, y la Connaught Place de Nueva Delhi, en India.

La retícula de calles rectilíneas, ortogonal o no, es a la vez huella y símbolo de la forma urbana. En ocasiones inspira nombres numéricos para sus calles. En Nueva York, desde el sur de Manhattan hasta el Bronx, las calles paralelas al eje E-O se ordenan y nombran según los números naturales (de la 1^{st} a la 242^{th} *street*). De igual modo, las avenidas perpendiculares que discurren N-S van de la 1ª a la 11ª, comenzando por el Este. No tan extensa es la retícula de Mandalay, en Myanmar, donde 90 de las calles N-S están numeradas de Este a Oeste, y 44 de sus perpendiculares de Sur a Norte. En la retícula de Miramar (Argentina) las calles en una dirección reciben nombres pares; las otras, impares. No es extraño que en ámbitos tan geométricos como los de esas ciudades nombre y número se confundan.

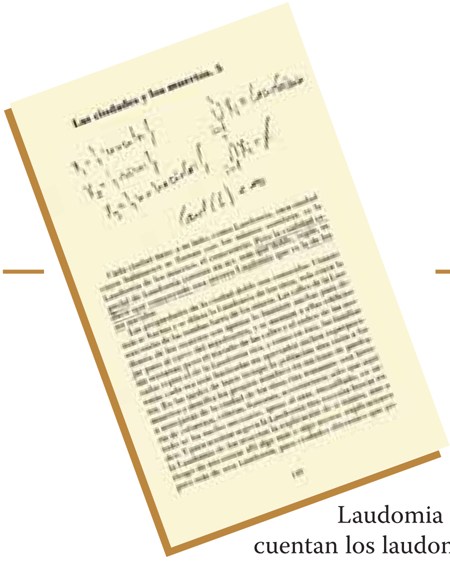
Las retículas urbanas crean casas de esquinas rectas. Sólo en el *Eixample* de Barcelona son de 135º. El autor del proyecto, Idelfons Cerdà, suavizó los giros de 90º que deberían trazar los carros en cada esquina con dos giros de 45º. Sólo una calle del Eixample barcelonés lleva por nombre su relación geométrica con el barrio entero: la *Avinguda Diagonal*.



Según Polo *nuevas ciudades seguirán naciendo* mientras la aplicación entre ciudades y formas no sea exhaustiva. En la culminación de este proceso sitúa el veneciano *el fin de las ciudades*. Pero, ¿acaso las formas posibles pueden agotarse? ¿Se corresponde dicho final con el agotamiento del catálogo de formas? El matemático cree que esa forma debe, por fuerza, aproximarse a una de las infinitas que pueblan su vasto muestrario. Pero una ciudad sin forma no es imposible. Toda deformidad podría ser sólo pasajera, un lapso del cambio en desarrollo. Las ciudades *sin forma* no carecerían de ella por estar muertas, sino por estar vivas. Estarían, como dice Calvino en otro momento, buscando su forma. Pero la forma futura de la ciudad presente no puede dictarse. Las ciudades no obedecen. Posiblemente lo que consideramos como ciudades sin forma sean ya ciudades con una forma, presente y concreta, irreconocible para ojos acostumbrados a las formas del pasado. ■

Diseño y maquetación FMC

Miquel Albertí Palmer
IES Vallés, Sabadell
ciudadesinvisibles@revistasuma.es



Laudomia

Laudomia está hecha de una partición disjunta en la que se cuentan los laudomios vivos (y), los muertos (x) y ***los no nacidos*** (z) todavía. En cada instante t la población $P(t)$ de Laudomia no se reduce a $y(t)$, sino que es la suma de tres variables: $P(t)=x(t)+y(t)+z(t)$.

Pero se diría que la población de Laudomia no es finita, pues se supone que una infinidad está por nacer. Sin embargo, por vasto que sea el espacio reservado a dicha infinidad, jamás será suficiente. La infinidad de volúmenes finitos es un volumen infinito. Ahora bien, si *es posible atribuir a los no nacidos las dimensiones que se quiera*, nada impide imaginarlos como puntos y solucionar el problema del volumen.

En efecto, los laudomios por nacer son *puntiformes*. Y como están *separados del antes y del después*, la línea de espera es discreta, discontinua *cuanto más se aguza la mirada*.

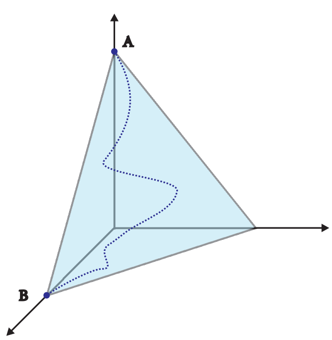
...las generaciones se sucederán hasta alcanzar cierta cifra y no seguirán adelante ...y habrá un último habitante de Laudomia por nacer ...

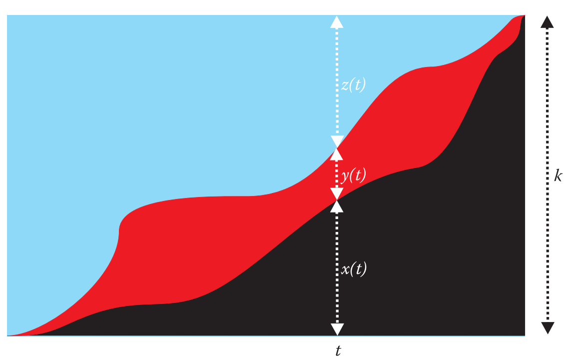
Que haya un último habitante por nacer invita a pensar la ciudad como una curva discreta en el plano $x+y+z=k=P(T)<\infty$ Esa curva empieza en $A(0, 0, k)$, donde todos están por nacer; y termina en $B(k, 0, 0)$, cuando todos han fallecido. ■

Pero la cualidad especial de Laudomia consiste en ser, más que doble, triple, es decir que comprende una tercera Laudomia que es la de los no nacidos.

Justamente Laudomia asigna una residencia más vasta a aquellos que están por nacer; es cierto que el espacio no guarda proporción con su número, que se supone infinito ...es posible atribuir a los no nacidos las dimensiones que se quiera ...

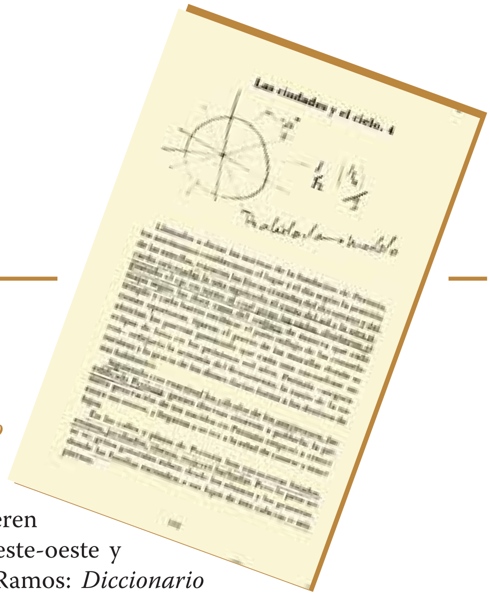
...cuanto más aguzan la mirada, menos reconocen un trazo continuo; los que van a nacer en Laudomia se presentan puntiformes como motas de polvo, separados del antes y del después.





Laudomia: *ciudad de población constante y finita*

Perinzia


Las ciudades y el cielo. 4

...trazaron las líneas cruzadas del decumano y del cardo orientadas la una siguiendo el curso del sol y la otra siguiendo el eje en torno al cual giran los cielos...

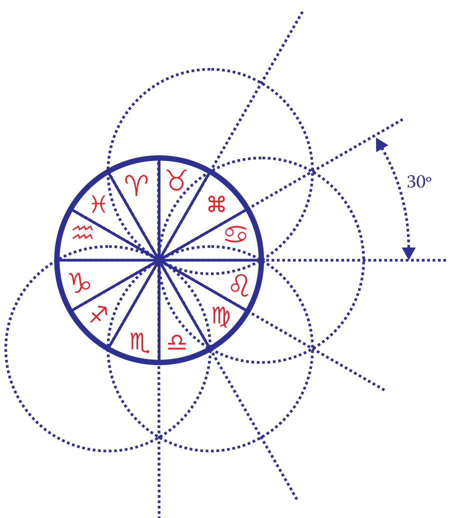
...dividieron el mapa según las doce casas del zodíaco ...Siguiendo con exactitud los cálculos de los astrónomos, fue edificada Perinzia...

...una difícil alternativa: o admitir que todos sus cálculos están equivocados y que sus cifras no consiguen describir el cielo, o revelar que el orden de los dioses es exactamente el que se refleja en la ciudad de los monstruos.

En las calles y plazas de Perinzia hoy encuentras lisiados, enanos, jorobados, obesos, mujeres barbudas ...las familias esconden a sus hijos de tres cabezas o seis piernas.

Esas *líneas cruzadas del decumano y del cardo* de la edición de Siruela de 2005 eran las *líneas cruzadas de cada una de las calles principales* en la del año 1994. Ambos casos se refieren a las vías o ejes que siguen las direcciones este-oeste y norte-sur respectivamente (Seco, Andrés y Ramos: *Diccionario del español actual*, 1999). La primera, es la dirección del curso solar (E-O); y la segunda, la del eje en torno al cual giran los cielos (N-S). Es así en New York y Mandalay, pero no en Barcelona o Miramar.

De nuevo una correspondencia 1-1 entre el cielo y la ciudad que lo representa. En esta ocasión el modelo se llama zodíaco y su diseño es un círculo dividido en 12 sectores. Fue en Perinzia donde, *siguiendo con exactitud los cálculos de los astrónomos*, dividí un círculo en 12 partes iguales con regla y compás (véase la figura). Habrá quien, impresionado por el rigor geométrico, atribuya a la figura resultante mayor credibilidad y confíe en que las cábalas confirmen su destino. Pero aparte de sus orígenes remotos, la Astrología y la Astronomía no tienen nada en común.



Las cosas no salieron como se esperaba. ¿A quién culpar de los monstruos que llenan la ciudad, a los astrónomos o al cielo? Una alternativa es que los cálculos estén equivocados. Otra es dar por bueno que *el orden de los dioses es exactamente el que se refleja en la ciudad de los monstruos*.

Pero aceptar el orden de los dioses significa aceptar los monstruos. Es decir, que los monstruos no son tales. Viendo como normales a quienes presentan aspectos anatómicos inusuales nos daremos cuenta de que el error no es responsabilidad de los astrónomos ni de los astros, sino de quienes viven ahí.

Para resolver su problema los perinzios harán bien en acudir de nuevo a los astrónomos. Al fin y al cabo, astrónomos y matemáticos comparten la tarea de comprender monstruosidades. Es verdad que se las rechaza al principio, pero con el tiempo acaban por integrarse a su conocimiento. Líneas monstruosas que en el pasado no merecían la consideración de *curva* y números monstruosos que no merecían el calificativo de *número* son ahora curvas y números tan inofensivos que no hay el menor reparo en dejar que los adolescentes se diviertan con ellos. ¡Benditos monstruos y bendita Perinzia!

Perinzia*: donde los monstruos aguardan su integración*

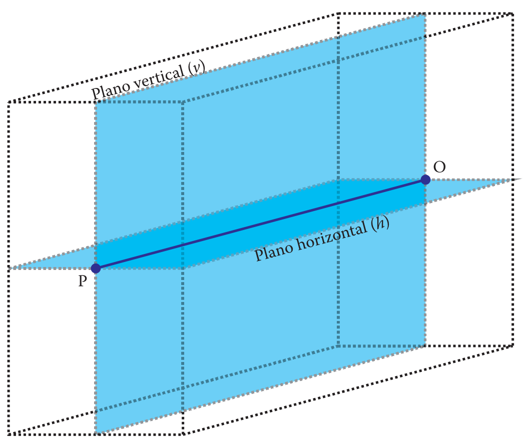
Procopia

Llegas a Procopia y te instalas en un hotel. Nada más entrar en la habitación descorres la cortina de la ventana y te quedas un rato contemplando el paisaje. No ves nada que no hayas visto antes: ventanas, fachadas, tejados, semáforos, hileras de coches precedidos de motocicletas, tenderos arreglando mercancías, mujeres empujando carritos –de unos rebosan hortalizas; de otros, bebés –, grupos de adolescentes perezosos, ... De repente, sin saber porqué, te sustraes del exterior y te fijas en algo dentro de la habitación en lo que nunca antes habías reparado. Te fijas en el marco del paisaje que contemplabas hace unos instantes. La vista se enmarca ahora entre los dos fragmentos horizontales del marco de la ventana, un pedazo de la cortina cayendo a plomo y el otro pedazo inclinado que has sujetado a la pared. El marco del paisaje es un trapecio.

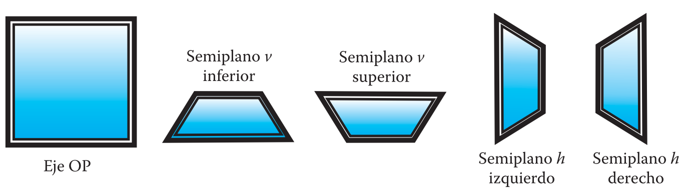
... me detengo a contemplar el paisaje que se ve corriendo la cortina de la ventana: ...un pedazo de cielo azul en forma de trapecio.

Tan pasmado estás de no haber caído antes en este detalle que en lugar de volver a concentrarte en la ciudad reflexionas sobre el trapecio que te separa de ella. Apartas las cortinas por completo y al ver que la ventana es cuadrada te preguntas desde qué puntos de la habitación se ve como un trapecio. Te pones de puntillas estirando el cuello para verla desde arriba. Te subes a la cama para contemplarla desde más alto aún, de pie y con la cabeza rozando el techo. Después te agachas en el suelo e, incluso, te tumbas en él para tener la perspectiva de una hormiga. También pegas la cara a cada una de las paredes. Tu conclusión es que el cuadrado original sólo se aprecia con su forma original, como un cuadrado, de mayor o menor tamaño, desde los puntos del eje horizontal perpendicular al centro. Fuera de dicho eje la visión transforma el cuadrado en trapecios o cuadriláteros más o menos irregulares.

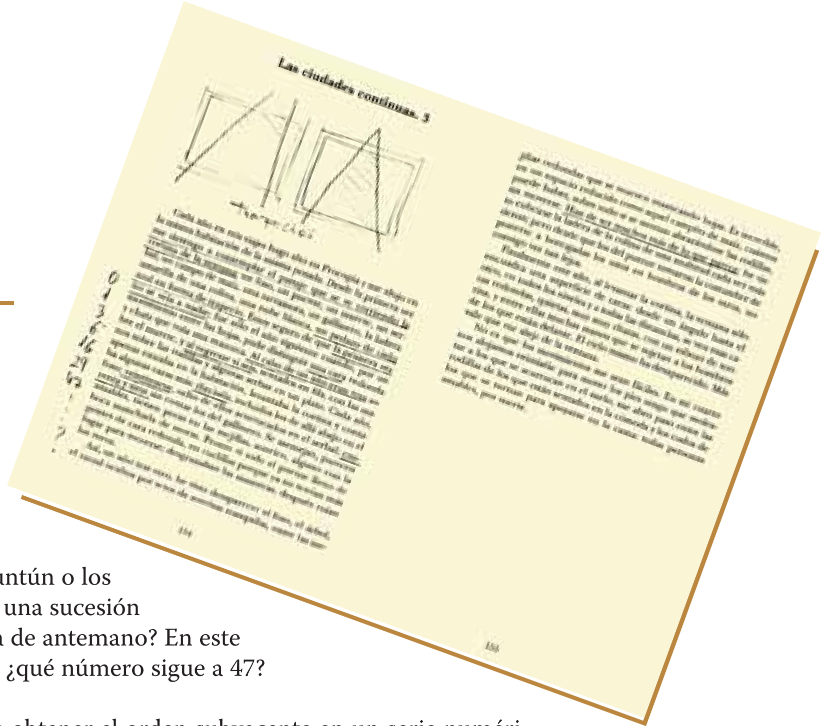
Registras mentalmente tus observaciones de ese *pedazo de cielo azul* relacionándolas con los lugares desde los que apreciaste cada una de ellas. Luego reproduces todo el habitáculo en el papel destacando ese eje horizontal centrado en el cuadrado de la ventana:



El quid de la cuestión está en los dos planos, el vertical y el horizontal, cuya intersección determina el eje de la ventana. En otro esbozo relacionas cada forma trapezoidal con el lugar de la habitación desde dónde se percibe:



Procopia



... la primera vez no se veía a nadie... el año siguiente... pude distinguir una cara ...Al cabo de una año eran tres ... al regresar vi seis ...dieciséis ...veintinueve ...cuarenta y siete ...cuántos puede haber ...

¿Son *0, 1, 3, 6, 16, 29, 47* números escritos al tuntún o los términos de una sucesión determinada de antemano? En este último caso, ¿qué número sigue a 47?

Un modo de obtener el orden subyacente en un serie numérica es analizar las diferencias entre los elementos que lo conforman, como a menudo hacen Marco y Kublai con las ciudades que no pueden ver. Si una sucesión es aritmética, las diferencias (restas) entre términos consecutivos indican precisamente cuál es su 'diferencia', su patrón de formación. Si la sucesión es geométrica, los cocientes dicen cuál es su razón o proporción. Las diferencias y cocientes consecutivos de la serie de Procopia son los de las tablas de la izquierda:

	diferencias					
0						
1	1					
3	2	1				
6	3	1	0			
16	10	7	6	6		
9	13	3	-4	-10	-16	
47	18	5	2	6	16	32

	cocientes					
0						
1	*					
3	3	*				
6	2	0,67	*			
16	2,67	1,33	2	*		
9	1,81	0,68	0,51	0,26	*	
47	1,62	0,89	1,32	2,58	10,13	*

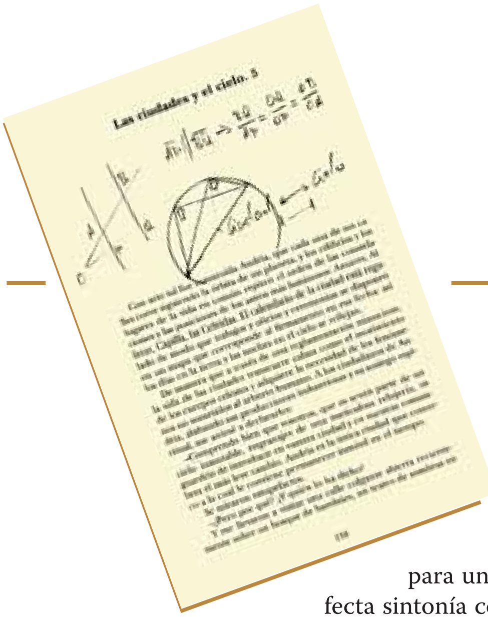
Pero ni las diferencias ni los cocientes aclaran nada. También parecen caóticas. ¿Tendrá la sucesión alguna relación con los números primos, patrones del caos remanente de la multiplicidad en los números naturales? No lo parece, pues la sucesión contiene primos y no primos. ¿Acaso estamos ante una disyuntiva similar a la de decidir qué número sigue a 5 en la serie 1, 2, 3, 4, 5?

Según Wittgenstein, la respuesta a la pregunta de qué número sigue al 5 en la serie 1, 2, 3, 4, 5 es que puede ser cualquier número. Y es verdad. El número siguiente a 1, 2, 3, 4, 5 puede ser 6, pero muy bien podría ser 8. Su presencia justificada al considerar la sucesión 1, 2, 3, 4, 5 como compuesta de la alternancia de los impares (1, 3, 5, 7, ...) con los más pares de los números, las potencias de 2 (2, 4, 8, 16, ...). Incluso podría ser cualquier otro, como, por ejemplo, π. La presencia de este irracional plenamente justificada por la razón siguiente:

$$\forall n \in N: \ a_n = \begin{cases} n, & n \neq \dot{6} \\ \pi, & n = \dot{6} \end{cases}$$

Cualquier número sigue a cualquier número mientras hallemos una excusa lógica para justificarlo. El único modo de saber cómo se creó una sucesión es preguntar a su autor qué fue lo que guió su creación. Sólo Ítalo Calvino podría decirnos cuál es el término general, si es que existe, o cuál es la lógica que relaciona los términos 0, 1, 3, 6, 16, 29, 47. Desgraciadamente, esto es imposible. Nunca sabremos si su causa está en el azar, el capricho, o en una inspiración poética extraordinaria. Olvidémonos pues de ella y demos una vuelta por la ciudad enmarcada en el trapecio. ■

Procopia*: elogio del trapecio.*

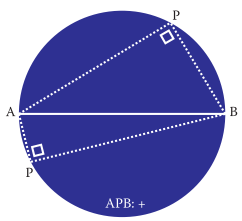


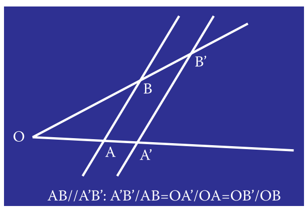
Andria

...una estatua de Tales ...

Imagino que ese tal Tales es Tales de Mileto, el gran sabio de la antigua Hellas y uno de los nombres míticos de la historia de las Matemáticas. Imagino que sí, aunque tal vez mi imaginación disimule un deseo. Pero para una ciudad como Andria, cuyo anhelo es la perfecta sintonía con el cielo, no es descabellado suponer que se trata del sabio de Mileto.

La fama de Tales se debe, sobre todo, a dos teoremas distintos que llevan su nombre. Uno afirma que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. El otro, que los segmentos paralelos interceptados por dos rectas cualesquiera son proporcionales.





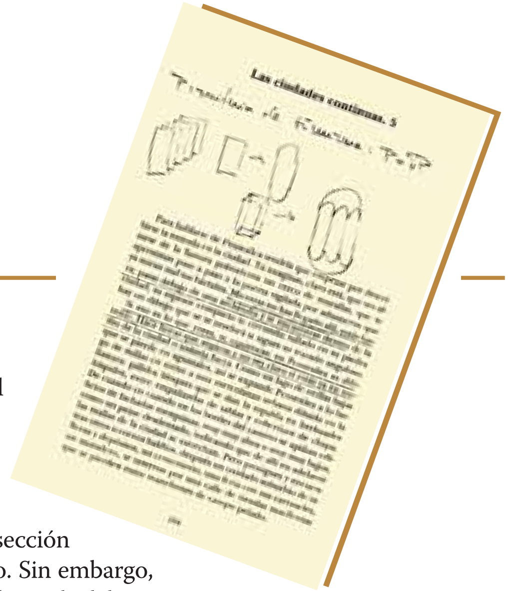
Cuando los historiadores de las Matemáticas hablan del teorema de Tales suelen refieren al primero. En cambio, en el ámbito educativo se conoce como teorema de Tales al segundo. En cualquier caso, el teorema que relaciona la semejanza de triángulos con la proporcionalidad de sus lados se corresponde con una generalización trivial de la proposición nº. 2 del libro VI de *Los Elementos* de Euclides. El teorema referente al ángulo recto inscrito en la semicircunferencia no aparece de así en Los Elementos, pero se deduce inmediatamente como corolario de la proposición nº. 20 del libro III.

Tan perfecta es la correspondencia entre nuestra ciudad y el cielo ...que cada cambio de Andria comporta alguna novedad entre las estrellas.

De nuevo nos encontramos con una correspondencia 1-1 entre el cielo y su modelo, la ciudad. Si Andria reproduce el cielo con absoluta perfección, ¿cuál de los dos es el original y cuál es la copia? Tan biyectiva es una aplicación f como su inversa f^{-1}. Sin embargo, si, tal y como se afirma, son los cambios de Andria los que provocan novedades entre las estrellas, es la ciudad la que dirige el destino del cielo convirtiéndolo en su imagen. Una afirmación que puede ser calificada como falsa e irreal, pero que es verdadera. Expone la paradoja implícita en la biyección. Dentro de ella, en una correspondencia 1-1, no hay modo de dilucidar cuál es la causa y cuál el efecto de un fenómeno. Menos aún quién o qué dicta los cambios en cualquiera de los elementos relacionados en esa correspondencia.

...la curva de una vuelta de la espiral de la Vía Láctea.

La espiral es, sin duda, la curva más citada en *Las ciudades invisibles*. Aquí Calvino se refiere a la más colosal de todas las espirales, la de nuestra galaxia.


Las ciudades continuas. 5

Pentesilea

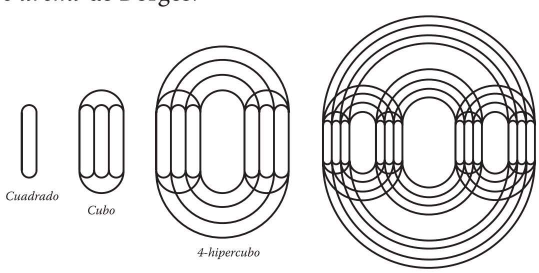
Pentesilea

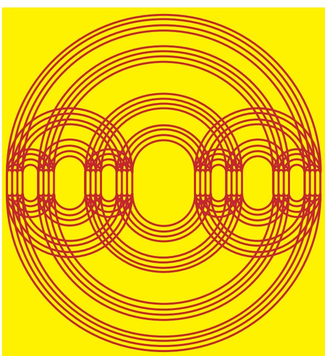
…Mientras no has llegado ahí, estás fuera; pasas debajo de una archivolta y te encuentras dentro …Si eso es lo que crees, te equivocas: en Pentesilea es diferente. Hace horas que avanzas y no ves claro si estás ya en medio de la ciudad o todavía fuera. …si Pentesilea es sólo periferia de sí misma y tiene su centro en cualquier lugar, has renunciado a entenderlo …fuera de Pentesilea, ¿existe un fuera? ¿O por más que te alejes de la ciudad no haces sino pasar de un limbo a otro y no consigues salir de ella?

¿Existe en Pentesilea una frontera separando el interior del exterior? ¿Qué cosa es ***sólo periferia de sí misma y tiene su centro en cualquier lugar***? La periferia es el perfil, la frontera entre el ser y el no ser. Matemáticamente, la frontera de un conjunto es la intersección de su adherencia con la de su complementario. Sin embargo, como la forma del complementario, el no ser, depende del espacio que alberga al conjunto, el ser, su frontera depende del espacio en el que se considera inmerso. Así, la frontera de un intervalo en la recta real la constituyen sus dos puntos extremos, mientras que la frontera del mismo intervalo en el plano es él mismo. De la misma manera la periferia de un círculo en el plano es su circunferencia; la de un círculo en el espacio, él mismo. Un segmento en el plano y un círculo en el espacio son frontera de sí mismos.

¿Qué cosas tienen su centro en cualquier lugar? Un conjunto finito de puntos, un segmento o un triángulo poseen centros bien definidos (punto medio, baricentro, ortocentro, circuncentro, incentro…). Si algo carece de centro es porque carece de referentes con relación a los que pueda determinarse. Este es el caso de los conjuntos infinitos y de otros conjuntos que, aunque limitados, carecen de referentes. La ciudad esférica de Trude verifica esas condiciones. Por una parte, es periferia de sí misma (esfera en el espacio). Por otra, su centro es ubicable en cualquier lugar, y no precisamente en el centro geométrico de la esfera que le da forma, que no le pertenece.

Según Calvino, Pentesilea es, como Trude, una ciudad continua. Pero lo que las diferencia es el paso ***de un limbo a otro***. Los limbos de Pentesilea impiden visualizar una ciudad bidimensional como Trude. Imagino Pentesilea como un libro de hojas tridimensionales. Un haz infinito (centro en cualquier lugar) y numerable (periferia de sí misma) de hojas (limbos) tridimensionales que el visitante recorre sin apercibirse de cuándo abandona uno y penetra en el siguiente (orden, numerable). El viajero atraviesa esos limbos buscando un centro que puede situar donde le plazca. Pentesilea es una ciudad-libro de dimensión $n>3$, una versión ampliada del *Libro de arena* de Borges.


Cuadrado *Cubo* *4-hipercubo* *5-hipercubo*


6-hipercubo

Quién sabe si Pentesilea no posee más dimensiones de las perceptibles para visitantes tridimensionales.

Pentesilea*: ciudad, como mínimo, tetra dimensional.*

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Tiende*, *discontinua*, *densa, cada témino por separado no tendría porqué remitir al lector al contexto matemático, pero reunidos así, en una misma frase, resulta difícil que el lector matemático no los relacione con las Matemáticas.

Si te digo que la ciudad a la cual tiende mi viaje es discontinua en el espacio y en el tiempo, a veces rala, a veces densa, no creas que haya que dejar de buscarla.

Sobre tendencias y continuidades ya se ha hablado mucho en esta sección. ¿Qué hay de la densidad? No sé si Calvino tenía en mente la idea de conjunto denso tal y como se define en Matemáticas, pero no hay duda de que los adjetivos ralo y denso del lenguaje corriente señalan aspectos topológicos de las cosas.

El concepto de densidad no se refiere a un único conjunto sino a una relación topológica entre dos: A es denso en $\mathbf{B}$ si en todo entorno de todo punto de B hay algún punto de A. En teoría, que una ciudad sea ***densa*** en una región no significa que la ocupe por completo. $\mathbf{Q}$ es denso en $\mathbf{R}$, pero no lo llena. Claro que en la realidad no hay entornos infinitesimales o no son apreciables y esta definición resulta exagerada.

En el lenguaje corriente *ralo* y *denso* son adjetivos antónimos. Si denso significa *espeso*, *tupido* o *apiñado*; *ralo* se relaciona con *disperso*, *diseminado*, *discreto*, *discontinuo*. Pero la definición matemática contraria a denso no se ajusta a la idea corriente de ralo. Los antónimos del lenguaje corriente no se corresponden con los contrarios del lenguaje lógico matemático. Por eso diremos que A es ralo en B si para todo punto de $B–A$ existe un entorno sin puntos de A. Así, $\mathbf{Z}$ es ralo en $\mathbf{Q}$ y en $\mathbf{R}$.

De todos modos, conviene tener presente que la realidad a veces es sólo aparente, pues en lontananza, lo inconexo puede parecer conexo; lo discontinuo, continuo; y lo ralo, denso (véase la imagen).

La saturación es crisol del infierno que acecha a las ingentes aglomeraciones urbanas, algunas más extensas y pobladas que países enteros. Se trata de un problema de densidad ligado al umbral crítico que no debe superar la proporción entre la población y el espacio que ocupa.

…buscar y saber quién y qué, en medio del infierno, no es infierno, y hacer que dure, y dejarle espacio.

En esa fórmula no sólo la población es variable; también varía el espacio. Y lo hace en las tres dimensiones. En cualquier caso, la cuestión no se reduce a una fórmula tan simple. La realidad es y será mucho más compleja. Ítalo Calvino concluye el libro con lo que es a la vez teorema y fórmula sobre cómo se relacionan las cuatro variables principales de la ciudad: tiempo, espacio, gente y forma. Esa última frase es el remedio contra el desconcierto: ***saber quién y qué, en medio del infierno, no es infierno y hacer que dure y dejarle espacio***.

EN LAS CIUDADES INVISIBLES ■

suma+ 60
Febrero 2009, pp. 87-94

Biblioteca

Mi presentación

Daniel Sierra Ruiz

Cuando asumí la responsabilidad de coordinar esta sección, un amigo me dijo que estaría bien que dejaran de aparecer *santones* y se refrescara el ambiente. Entiéndase por *santones* a aquellas personas que son un referente en la didáctica de las matemáticas española durante muchos años. Sin embargo, si hay una sección de *Suma* que no puede prescindir de este tipo de firmantes esa es *Mi biblioteca particular*: conocer los libros que este grupo de personas considera importante, cuando no esencial, resultará, sin duda alguna, enriquecedor para cualquier enseñante.

El firmante de este número es, dicho con todo el cariño, uno de esos *santones,* e imprescindible en mi opinión. No voy a glosar los méritos de Rafael Pérez, primeramente, porque no me daría la revista de sí, y, en segundo lugar, porque cualquier cosa que pueda decir sonará a trivial. Sólo con hablar de su implicación en proyectos editoriales justificaría su presencia aquí.

Pedirle a Rafael escribir sobre *sus* libros forma parte de un objetivo que me planteé y es realizar un viaje a través de los distintos directores de *Suma.* El trayecto no respeta el orden temporal, puesto que ya apareció Emilio, y Rafael fue el primer director. La dificultad que entraña poner en marcha una revista de estas características no hace más que acrecentar la figura del principal responsable. Uno trata de imaginar aquellos años y piensa que fueron tiempos de ilusión y en los que aparecía un horizonte inabarcable. También sorprende la capacidad de trabajo de ese grupo de profesores de matemáticas…

Evidentemente la calidad técnica de esos primeros números dista mucho de la actual, pero releer aquellos artículos, algunos excelentes, permite darse cuenta del gran interés de las propuestas que aparecían y que hoy siguen sin ser superadas. No puedo dejar de pensar en la cantidad de esfuerzos y horas que se han empleado, para, luego, tener que bregar con cambios legislativos y actitudes inmovilistas (parece que cinco años de universidad justifican veinticinco de tortura de adolescentes). De todas formas, cuando me asalta el pesimismo recuerdo que muchos de los que entonces aparecían en *Suma*, hoy siguen en plena actividad. ¡Y tan plena! Viendo en todos

Daniel Sierra Ruiz (coordinador de la sección)
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)
biblioteca@revistasuma.es

los *cocidos* en que anda metido, por ejemplo, Rafael, da la impresión de que han encontrado la fórmula para duplicar el tiempo (no veo otra explicación).

Pero, claro, se puede aparecer en gran cantidad de sitios y que tu trabajo no sea de calidad. Aquí esta cuestión está fuera de lugar, por supuesto, lo que sucede es que además de enorme capacidad de trabajo y calidad del mismo, sabe transmitir su pasión por las matemáticas. Esto ocurrió en su última charla en Zaragoza, después de la cual le buscamos un par de encerronas, una de las cuales fue conseguir que aceptara escribir esta sección. No voy a mentir: no se resistió mucho, pues parece que no sabe negarse cuando se le pide que hable de matemáticas y comparta sus saberes y experiencias, por saturado que se encuentre su tiempo. Así que para mi es un orgullo que Rafael Pérez Gómez nos hable de *su biblioteca particular.*

Mi biblioteca particular

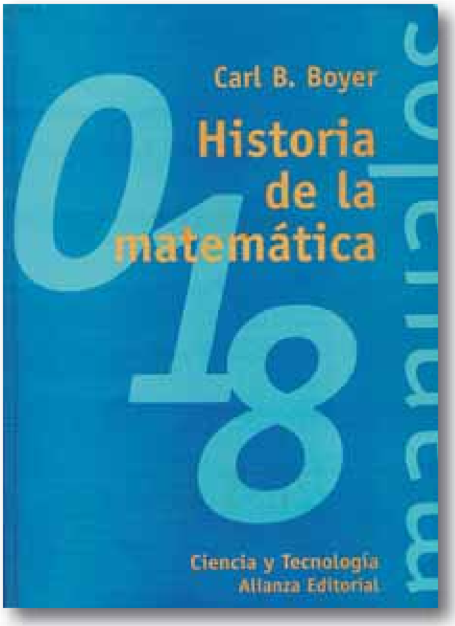
Rafael Pérez Gómez

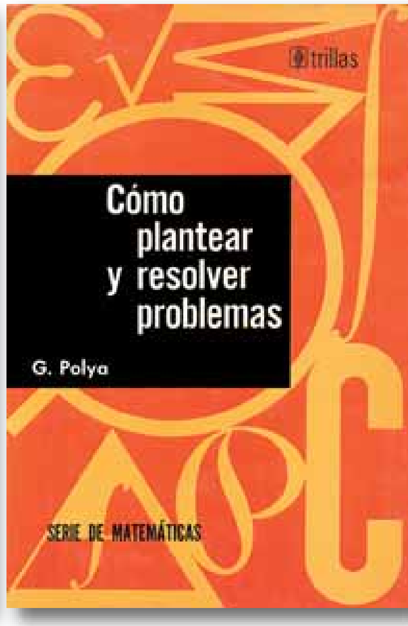
Permitidme que no responda al cuestionario que me han pasado los responsables de esta sección de mi querida *Suma*. No lo hago, entre otras razones, por no repetir reflexiones de otras personas que me han precedido hablando sobre sus bibliotecas. Por citar sólo un ejemplo, diré que basta recordar lo dicho por mi querido amigo Emilio Palacián en el número 58, y que suscribo completamente, sobre libros que han sido referencia para quienes formamos parte de las cosechas del 48, 49, 50…, más o menos. Mayo del 68 nos cogió en la Facultad, en un curso u otro. Eran años en los que faltaba de todo, la libertad especialmente. También escaseaban los buenos libros de Matemáticas publicados en castellano, abundando los malísimos. Por tanto, fue en mi época de estudiante de Matemáticas, cuando empecé a hacer mi biblioteca particular con los libros de texto que recomendaban mis profesores. Los tenía catalogados, fundamentalmente, en dos grandes grupos. El primero lo formaban los traducidos del inglés y que fueron publicados por editoriales argentinas y mejicanas; el segundo estaba formado por los de los diversos catedráticos de Madrid y que se publicaban en editoriales españolas. Había un tercero, más reducido y que para mí es muy selecto, que eran libros escritos en castellano en el extranjero. A la cabeza de estos últimos se encuentran los de Luís Santaló. Su *Geometría Proyectiva*, publicada por la Editorial Universitaria de Buenos Aires (1966), sigue entre las joyas de mi biblioteca. Con él aprendí lo esencial de cualquier geometría: las transformaciones que le son propias y los invariantes asociados. Además, recuerdo lo curioso que me resultó ver que era posible una geometría con tan sólo 7 puntos y, lógicamente, las correspondientes 7 rectas a las que obliga el principio de dualidad. Desde entonces me convertí en un *fan* de Santaló y lo que nunca podía haber imaginado es que él me citase en uno de sus últimos trabajos como uno de los muchos matemáticos españoles de la *transición* que estábamos dando solución a problemas interesantes para la comunidad matemática internacional. Tuve la oportunidad de agradecérselo, personalmente, en una de mis visitas a Buenos Aires cuando al acompañar al hotel a Miguel de Guzmán y a Claudi Alsina, tras una cena que celebraban cada año, y comentarle estos que yo también estaba hospedado allí, en ese momento pidió que me llamasen a la habitación porque quería saludarme. Nunca lo olvidaré. Abundando en mi formación geométrica, también durante aquellos años incorporé a mi biblioteca bastantes libros de H.S.M. Coxeter, a quien también tuve el placer de conocer en Québec, Canadá, porque aceptó participar en el Topic Group *Art and Math* que tuve el honor de organizar con motivo del ICMI que allí se celebrara en 1992. Entre sus libros está otro de mis preferidos, *Fundamentos de Geometría*, publicado inicialmente por Wiley (1969) y, después, traducido al castellano, por Limusa (1971). Por simple elegancia universitaria, omitiré nombrar libros del segundo grupo, los patéticos, que se ocupaban de geometría, estadística, cálculo infinitesimal y ecuaciones diferenciales. Entre las traducciones del inglés quiero citar los libros de *Álgebra* de Birchoff-Mc Lane que fueron piezas clave en mi formación inicial.

En el curso 1972-1973 comencé a dar clase en la Sección de Matemáticas de la Universidad de Granada. Como recién llegado, me tuve que hacer cargo de una asignatura que no se había dado antes. Como en aquellos años sólo había la especialidad de Didáctica de las Matemáticas, la asignatura en cuestión se llamaba Matemáticas Elementales I y se impartía en 4.º curso de la titulación. Estoy convencido de la extrañeza que puede producir esta preocupación de la Sección de Matemáticas de Granada por la Didáctica de las Matemáticas en aquellos años y, si la siente, querido lector, querida lectora, lleva toda la razón. Bajo ese paraguas se escondía, ni más ni menos, que toda una Geometría algebraica cuyo libro de texto era el famoso Fulton. Este fue mi auténtico libro de cabecera, y que me trajo de cabeza, durante varios años: *Geometría algebraica*, por William Fulton, Reverté (1971). Puedo asegurar que nunca estudié tanto como para poder impartir, con dignidad, aquella asignatura y que, también, nunca aprendí más Matemáticas como las que tuve que estudiar para resolver los ejercicios que Fulton plantea y no resuelve. Hasta 1978 anduve en estos menesteres: estudiando más que en la carrera; aprendiendo a traducir libros en inglés (con el handicap de que hasta ese momento, sólo había estudiado francés) como el de Atiyah-McDonald, *Introduction to Commutative Algebra* (1969); traduciendo otros franceses, como los de Dieudonnè (era el imperio Bourbaki); leyendo lo que mis colegas me aconsejaban como consecuencia de sus avances, ejemplo destacado fueron los libros de Jesús Mosterín, uno de Bilbao afincado en Barcelona, *Lógica de primer orden* (1970) y *Teoría axiomática de conjuntos* (1971), etc. No voy a decir mi sueldo universitario de entonces, ni de que todos estos libros tenía que mandarlos a pedir a la famosísima Librería Pons, de Zaragoza. Sólo diré que decidí aceptar la invitación de mi buen amigo Paco Ocaña y compatibilicé la universidad con las clases de COU que empecé a impartir en un colegio, el de los Salesianos de Granada.

Esta nueva obligación me hizo ver otras estanterías de la librería que frecuentaba habitualmente para adquirir las obras que iba necesitando y que formarían parte de los anaqueles de mi biblioteca. Entré de lleno en la enseñanza de la llamada *Matemática moderna*. Aunque muy joven, y estando de lleno en mi etapa de Sancho el Fuerte, mi interés por la innovación en clase me llevó a una colección, *Mathematiques modernes*, de libros franceses que conocemos como *los Pappy*, por ser este el apellido del coordinador-autor. Realmente eran tan atrevidos como maravillosamente inútiles. Desde ese momento hasta que me hice con los que publicó el Grupo Cero de Valencia, como el *Es posible* o *Matemáticas de 12 a 16. Un proyecto de curriculum de Matemáticas*, editado por Mestral (1987), pasaron tanto los años de la transición democrática como los de mi transición como profesor de Matemáticas. En 1977 me presenté a las oposiciones de Agregado de Instituto y, un año después, sin haberme incorporado a la plaza ganada, volvía a presentarme a las de Cátedra. Así fue como aterricé en el I.B. Pedro Espinosa, de Antequera, en donde hice *las prácticas* y debí provocar bastantes traumas en quienes fueron mis alumnos y alumnas a quienes desde aquí y ahora pido perdón: ¡les explicaba los números reales mediante ideales! Después me trasladé a Montefrío, Dúrcal y, por último, a Granada para volver definitivamente a la universidad en 1989. Fue más de una década preocupado por la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, con alumnos y alumnas de Bachillerato y COU, participando activamente en la Reforma de la Enseñanza, en los movimientos asociativos del profesorado de Matemáticas y viendo crecer a mis hijos. Fue en ese periodo cuando, como agua de Mayo, apreció la colección de la Editorial Síntesis *Matemáticas. Cultura y Aprendizaje*. Venía a poner en nuestras manos algo parecido a los que manejábamos en inglés y que eran los handboocks norteamericanos que publicaba la AMS. Estaba escrita por profesores y profesoras españoles y dirigida por Luis Rico, José M.ª Fortuny y Luis Puig. En estos libros hemos bebido muchos de nosotros y aprendido multitud de actividades para el aula y, sobre todo, que no basta con enseñar, que debemos ocuparnos de la otra parte, de quienes han de aprender. Si añadimos todas las traducciones que se hicieron de libros interesantísimos durante tal periodo de tiempo, se deduce que todas las semanas visitaba a mi librero *Pepe el de Alsur* para adquirir un buen número de ejemplares para mi biblioteca. Fue entonces cuando añadí a mi formación matemática la didáctica. Recuerdo que en aquellos años entraron con fuerza muchos, y muy buenos, libros traducidos del inglés. En este sentido, aprovecho para rendir un merecido homenaje a nuestro colega gallego Luís Bou, a quien se deben muchas de dichas traducciones. Pudimos adquirir magníficos libros de *Historia de las Matemáticas*, como el de C.B. Boyer, publicado por Alianza Universidad Textos (1987). También pudimos acceder

> *Puedo asegurar que nunca estudié tanto como para poder impartir, con dignidad, aquella asignatura y que, también, nunca aprendí más Matemáticas como las que tuve que estudiar para resolver los ejercicios que Fulton plantea...*





a la Matemática Recreativa con las traducciones que hiciera nuestro amigo Mariano Martínez de los títulos de la colección *Activities*, de Brian Bolt, Labor (1988), que vinieron a sacar de la soledad al de Rafael Rodríguez Vidal, *Diversiones matemáticas*, que fue publicado por Reverte (1983), porque era el único que tenía hasta aquellos momentos. ¿Quién no recuerda *Inspiraciones ¡ajá!* y *Paradojas*, de Martin Gardner, publicados por Labor (1981 y 1983, respectivamente)? ¿Y la colección de la editorial Gedisa (1986) sobre *Juegos* de todo tipo? No puedo cerrar este breve paseo por mi biblioteca sin citar al que es todo un clásico, *El hombre que calculaba*, publicado por Verón (de 1981 es la edición que poseo), del profesor de matemáticas brasileño Julio César de Mello e Souza que firmaba con el pseudónimo de Malba Tahan. Los primeros *estándares* de la NCTM, que fueron posteriormente editados en castellano por la sociedad Thales (1991), *Las matemáticas sí cuentan*, más conocido como el *informe Cockroft*, publicado en coedición por el MEC y Labor, *Cómo plantear y resolver problemas*, de Polya y editado en castellano por Trillas (1981, 9ª ed.), *Experiencia Matemática*, de Davis and Hersh y que fue editado por Labor-MEC (1989), *La estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes*, de Matila Ghyka, editorial Poseidon (1977), diversos títulos de la colección Papeles de Enseñanza, editada por el Servicio de Publicaciones del MEC y dirigida por Fernando Alonso, como el famoso *Rompiendo las cadenas de Euclides*, de Fielker…, fueron auténticos regalos para mí que me marcaron para siempre. Entre toda esta avalancha informativa se abrieron paso tres libros que tienen un denominador común: los materiales manipulativos para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. El primero es el de mis amigos Paco Hernán y Marisa Carrillo, *Recursos para el aula de Matemáticas* (1998), que forma parte de la colección antes citada que editó Síntesis y que me cupo el honor de prologar a petición de sus autores. El segundo, el de nuestra querida Emma Castellnuovo, *La matemática. Geometría* (1981), editorial Ketres. Y el tercero, escrito en catalán, *Més de 7 Materials per a l'Aprenentatge de la Matemàtica*, del grupo Almosta y publicado en la colección Dossiers de Rosa Sensat (1988). Estos fueron mis primeros contactos con los materiales que han acabado en el proyecto *Construir las Matemáticas* que dirijo desde la editorial Proyecto Sur de Ediciones y que poco a poco se está implantando institucionalmente en España.

Entre toda esta avalancha informativa se abrieron paso tres libros que tienen un denominador común: los materiales manipulativos para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas

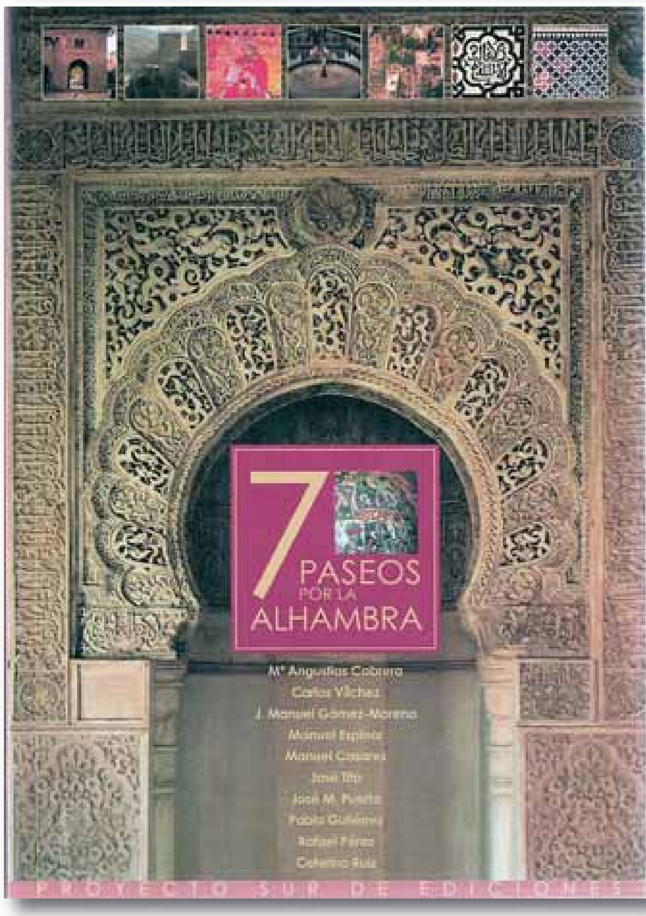
Mi vuelta a la universidad hizo que mis lecturas se centrasen en el tema de investigación que elegí: Simetría del color. Así fue como incorporé a mi biblioteca *Simetría*, todo un clásico sobre el tema, que Hermann Weyl escribiese en 1951 y cuya última edición en castellano es de McGraw Hill (1990), en el que trataba de la existencia de decoraciones geométricas en la Alhambra que podían ser clasificadas mediante los 17 grupos cristalográficos planos. Le siguieron otros muchos, pero sólo destacaré tres más. El primero es *Rosaces, frises et pavages*, de I. Bossard, Vols.: I, Étude pratique. II, Étude théorique. CEDIC (1977), con el que aprendí a dibujar las estructuras de simetría de los mosaicos periódicos planos y estudié por primera vez la demostración del teorema en el que se afirma la existencia de los 17. ¡Todo un clásico! El segundo, un capítulo sobre simetría bicolor que contiene el libro *Coloured Symmetry. M.C. Escher. Art and Science*, North-Holland (1986), escrito por H.S.M. Coxeter, que fundamentalmente me introdujo en la simetría del blanco y negro desde la obra de Escher. Como anécdota he de decir que guardo una carta del profesor Coxeter en la que me dice haberle explicado a Escher el disco de Poincaré como modelo euclideo para la geometría hiperbólica y que después usara para crear su conocido cuadro *Ángeles y demonios*. El tercero, y último, el de T.W. Wieting, *The mathematical theory of chomatic plane ornaments*, Marcel Dekker, New York (1982), con el que amplié mis conocimientos definitivamente estudiando las cadenas de subgrupos y comprobando que los 17 podían ser 46 si se utilizaban dos colores o llegar a ser varios cientos en función del número de colores a utilizar.

Para finalizar, haré una breve referencia a esas estanterías que me traen múltiples recuerdos. En ellas están los libros de mis amigos y amigas: Miguel de Guzmán, Claudi Alsina, José María Fortuny, Carme Burgués, Montserrat Torra, Fernando Corbalán, Ángel Ramírez, Carlos Usón, Antonio Pérez Sanz (quien tan espléndida labor está haciendo en Nivola), Inés Gómez Chacón, M.ª Luz Callejo, Francisco Hernán, Adela Salvador, Pilar Moreno, Eliseo Borrás, Charo Nomdedeu, Pedro Miguel González Urbaneja, Margarita Marín, Luisa Ruiz Higueras, María del Carmen Chamorro, los amigos sevillanos del Grupo Alquerque, Juan Antonio Hans, Antonio Fernández Aliseda y José Muñoz, Santiago Fernández, Luis Balbuena, Lola de la Coba, Luis Cutillas, Fidela Vázquez, Javier Rupérez, Manuel García Denís, Juan Antonio García Cruz, Juan Emilio García, Vicente Meavilla, Luis Cachafeiro…, a los que hay que añadir todos los que como responsable de proyectos editoriales de Proyecto Sur de Ediciones he tenido la satisfacción de ver nacer y que van desde el primero, *Retrato de una profesión imaginada*, de Francisco Hernán, ¡inigualable Paco Hernán!, libro de obligada lectura para todo aquel que se considere profesor o profesora de Matemáticas, hasta el último que ha sido publicado, *Siete paseos por la Alhambra*, libro del que soy su coordinador además de uno de sus autores.

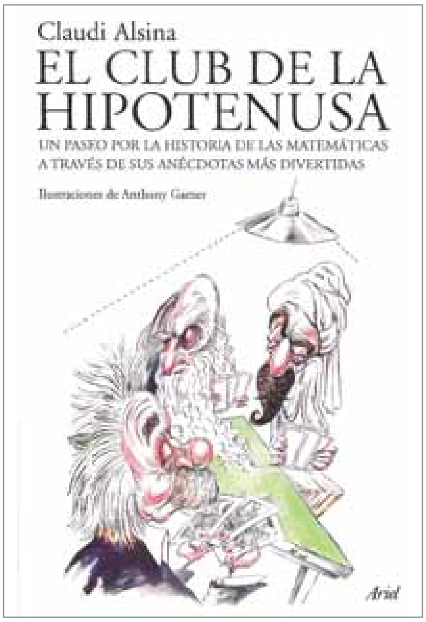
Lógicamente, las revistas ocupan otro lugar destacado. Mas este relato resulta ya demasiado largo y omitiré detalles. Sólo deseo manifestar que mis queridas Epsilon, Suma, Uno, Sigma, Números y La Gaceta están en lugar destacado.

En mi casa hay otra biblioteca paralela, más voluminosa que la de Matemáticas. La Literatura, la Poesía, la Música, la Arquitectura, la Pintura, la Escultura, la Fotografía y la Historia, fundamentalmente, son también de mi interés y de quienes me rodean. Ahora mismo estoy leyendo *Fin de siglo en Palestina*, de Miguel-Anxo Murado, Ed. Lengua de Trapo. Es un libro que exige reflexión sobre la situación de un pueblo, el palestino, que vive en una gran paradoja: la tierra sagrada y el infierno cotidiano que es Palestina. Un pueblo que no está exento de haber cometido, y seguir haciéndolo, grandes errores pero que está siendo objeto de vejaciones continuas por el poder israelí, o lo que es igual, el del dinero norteamericano, fundamentalmente.

Después de releer todo lo que antecede para escribir el punto y final, me doy cuenta de que acabo de hacer un *striptease* integral ya que, desde hace tiempo, vengo diciendo que si se quiere conocer a una persona nada mejor que echar un vistazo a su biblioteca.



Escaparate 1:
El club de la hipotenusa



El club de la hipotenusa. Un paseo por la historia de las matemáticas a través de sus anécdotas más divertidas
Claudi Alsina Catalá
Ariel, Barcelona, septiembre 2008
ISBN: 978-84-344-5385-2
192 páginas

Si en todos los libros de Claudi Alsina el humor aparece como un componente fundamental, no tanto por los temas que aborda como por el peculiar punto de vista con que lo hace y los comentarios que le provocan, en el más reciente, *El club de la hipotenusa*, constituye el núcleo central. El humor matemático, por supuesto, del que el autor dice que

> puede tener manifestaciones diversas. En lugar de explorar el mundo de los chistes, aquí hemos optado por recuperar el viejo recurso de las anécdotas.

Comienza el prólogo del libro con la frase *Uno de los secretos mejor guardados de la cultura actual es el carácter profundamente divertido de las matemáticas*, que abre unas reflexiones geniales sobre el tema. Y anuncia que

> el objetivo final de esta amable visita al club de la hipotenusa es contribuir a romper ese tabú de las matemáticas antipáticas y apostar por presentar una cara amable y humana de esta disciplina que puede ser (¡es!) sumamente humana e incluso divertida.

Ha elegido, pues, ir presentando anécdotas más o menos conocidas, agrupadas por períodos históricos, que en su conjunto proporcionan una amplia gama de visiones diferentes, más próximas y humanas, de textos y personas que han tenido importancia en el desarrollo de las matemáticas, en muchos casos ilustradas con hermosas caricaturas de A. Garner.

Recogemos algunas de esas anécdotas que nos han llamado la atención, por uno u otro motivo. Así hace cuatro mil años, en Babilonia, ya había tablillas que proponían calcular el número de años precisos para doblar un capital al 20% de interés anual: *este dato concreto lleva a pensar o en los usureros babilónicos o en una inflación galopante*. O se refiere al viaje a Belén recogido en la historia sagrada, que le lleva a comentar que *todo surgió no como un fervor numérico extraordinario, sino como un medio para controlar impuestos... y poder cobrarlos. Vaya, lo de siempre.*

Muchos años después, nos aparece Cauchy que no solo *perdía* artículos de Abel o Galois, sino que también

> recibió en su casa un artículo de alguien que pretendía

Fernando Corbalán Yuste
Coordinador del programa del Gobierno de Aragón "Matemática Vital"

> demostrar que la ecuación $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ no tenía soluciones x, y, z, t que fueran números enteros. [...] A vuelta de correo, envió al autor de aquel trabajo una nota sin palabras y sólo con números. La nota decía: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$.

O la afirmación de H. Poincaré: *Solo hay dos métodos para enseñar fracciones: cortar, aunque sea mentalmente, un pastel, o hacerlo con una manzana. Con otro método cualquiera de enseñanza, los escolares preferirán seguir sumando numeradores con numeradores o denominadores con denominadores*, de candente actualidad.

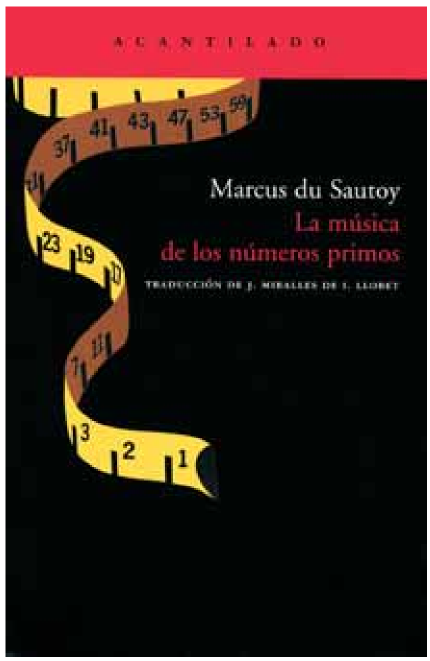
Como todavía quedan tantos colegas defensores de las matemáticas de *nivel*, poco o nada relacionadas con la realidad, Hardy les da otra razón para que por suerte esas inútiles matemáticas sean las apropiadas, porque *una ciencia se dice útil si su desarrollo tiende a acentuar las desigualdades existentes en la distribución de la riqueza, o más directamente promueve la destrucción de la vida humana.*

También hay anécdotas de personas más próximas o que le han sucedido al mismo Claudi Alsina. Así aparecen en el libro Puig Adam, Rey Pastor, Pi Calleja, Gaeta, Miguel de Guzmán, Emma Castelnuovo o Jan de Lange. Y también personajes como Chaplin, Einstein o Gaudí.

En su conjunto constituye un libro ameno, divertido y estimulante, que será de gran utilidad para profesores porque permitirá ilustrar las clases con anécdotas cercanas e inesperadas de los creadores de las matemáticas, lo que de paso contribuirá a lograr que los alumnos vean que las matemáticas no son algo caído del cielo sino desarrollado con esfuerzo (y no pocas dosis de humor) por hombres y mujeres a lo largo de la historia. Y que aunque no se contemple desde el punto de vista de su utilidad profesional, es una buena posibilidad de regocijarse con el humor y la reflexión inteligente.

Escaparate 2: La música de los números primos

La música de los números primos
Marcus du Sautoy
Acantilado, Capellades, septiembre 2007 (2.ª reimpresión)
ISBN: 978-84-96489-83-7
526 páginas



No deja de ser sorprendente el éxito que en los últimos meses han suscitado en España varias obras para el público general centradas en el mundo de las matemáticas, teniendo en cuenta que el prestigio social de esta disciplina no va habitualmente acompañado de un elevado número de seguidores. Me refiero a la novela *El curioso incidente del perro a medianoche* de Mark Haddon y las películas *La habitación de Fermat* y *Los crímenes de Oxford*. El ensayo novelado que vamos a reseñar está muy alejado de la ligereza de los anteriores, pero todos ellos no dejan de realizar una tarea tan necesaria como es la divulgación científica.

Marcus du Sautoy es un profesor de Oxford que está llevando a cabo un destacado trabajo de divulgación de las matemáticas. Su reciente serie de programas *Story of the Maths* en la BBC ha tenido un gran éxito de audiencia entre el gran público.

El eje conductor de las investigaciones en torno a los números primos nos permite realizar un interesante viaje en el tiempo visitando algunos los más importantes centros de estudio de las matemáticas y donde podremos conocer el *muy* humano comportamiento (en lo bueno y por su puesto en el lado oscuro) de grandes matemáticos. Desde la demostración de su infinitud por parte de Euclides, pasando por el salto al campo de los números complejos con la función zeta, hasta el uso de los recursos informáticos actuales para encontrar algún contraejemplo de la hipótesis de Riemann, vemos los denodados esfuerzos que muchas mentes brillantes han dedicado a una tarea en apariencia estéril e improductiva.

Si la hipótesis de Riemann fuera cierta supondría en el lenguaje musical que emplea el autor que no hay primos que suenen más fuerte que los demás, lo que equivale también a que la secuencia de los números primos está generada por el lanzamiento aleatorio de una moneda y carecería de un patrón.

El eje conductor de las investigaciones en torno a los números primos nos permite realizar un interesante viaje en el tiempo visitando algunos los más importantes centros de estudio de las matemáticas...

Testimonios de matemáticos como Hardy, justifican la fascinación que despierta la actividad matemática pura, alejada a priori de cualquier uso práctico, en términos de belleza. En el libro aparecen ejemplos de los peculiares momentos en los que el investigador matemático consigue la inspiración, la cual no se provoca a voluntad e implica un enorme trabajo previo y posterior al momento del descubrimiento (eureka).

Vamos descubriendo personalidades radicalmente distintas entre un despliegue de destacados pensadores matemáticos. En general la profunda fascinación que despierta en el investigador el estudio de la Aritmética, llamada por Gauss la reina de las Matemáticas, está asociada a personalidades cuanto menos excéntricas. Me gustaría destacar la historia novelesca del *cuaderno negro* de Riemann en el cual se encontrarían resultados de gran relieve no publicados por el perfeccionismo maniático del gran matemático.

Mientras visitamos algunos de los departamentos de matemáticas situados en los más destacados centros de investigación del planeta, nos daremos cuenta de la importancia de las relaciones interdisciplinares que se producen en estas instituciones, conectando realidades aparentemente desconectadas. Es digno de mención las inesperadas relaciones que aparecen entre la función zeta y los denominados tambores cuánticos, o la influencia de las lenguas antiguas en la generación de *nuevos lenguajes matemáticos*.

No podía dejar de aparecer la poderosa herramienta que supone la informática en cualquier rama científica. En este caso, ha permitido comprobar que los diez primeros trillones de ceros de la función zeta cumplen la hipótesis de Riemann. Aunque este hecho no supone una demostración, incluso para los más escépticos como el prestigioso matemático Don Zagier, resultaría una enorme sorpresa que la conjetura fuera falsa.

La búsqueda de primos de Mersenne representa un uso más frívolo de los recursos informáticos. El descubrimiento reciente de dos nuevos primos ha traído a la palestra este extraño deporte matemático (así lo define la revista Time). Los números hallados tienen aproximadamente 10 millones de cifras, mientras que actualmente en criptografía una clave de 4.096 bits no llega a las 2.000 cifras (siempre hablando en base decimal).

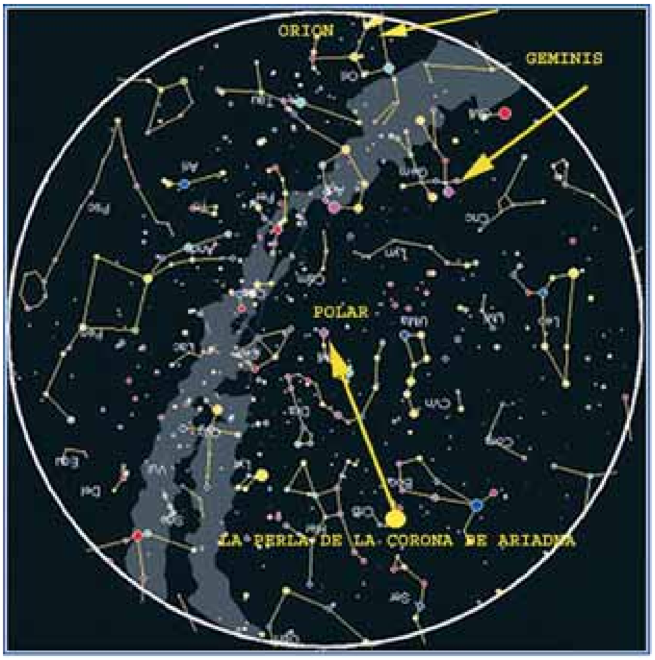
Dejo como comentario final una de las invenciones más curiosas en el ámbito de la teoría de números. La creación de la criptografía de clave pública por el trío RSA representa uno de los ejemplos más empleados para responder a la tan manida cuestión de qué uso tienen en la vida cotidiana las matemáticas. También pone de manifiesto que en cualquier momento investigaciones totalmente teóricas, pueden tener una aplicación práctica inesperada.

Pedro Latorre García
IES Pilar Lorengar (Zaragoza)

suma+ 60
Febrero 2009, pp.95-101

La corona de Ariadna

Cerca de la Lira de oro,
faro estival,
seis luceros cenitales bailan en corro.
Brillantes de la corona de Ariadna,
el más hermoso
lanza su saeta hacia el norte,
a través
de la osezna celeste.



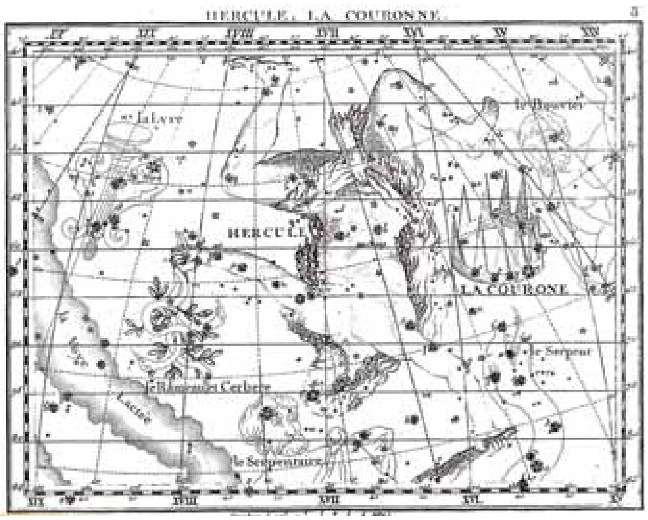
Cuando Teseo estaba más desesperado, Ariadna le entregó una respuesta, una salida, una llave, una solución, aquello que vibra, eso que vive, eso que nos proporciona las soluciones en el momento justo. Pero Teseo abandonó a Ariadna, incumpliendo la promesa que le había facilitado el éxito con el Minotauro cretense. Es tan frecuente que olvidemos las estrategias que nos ayudan a resolver nuestros problemas… Luego raptó a la hermana de Pollux y Castor, Helena de Troya; los gemelos argonautas la defendieron. Uno de ellos murió en la lucha, el otro era inmortal, pero renunció a su inmortalidad si debía vivir sin su hermano. Desde entonces están en el cielo, son las estrellas más brillantes de la constelación zodiacal de géminis, típica de las noches de invierno en nuestras latitudes, junto a Orión, cuyo cinturón, alineado con Sirio apunta al orto solar en el solsticio de invierno.

Teseo pagó con su vida su mala cabeza.

Por su parte Ariadna, tras ser abandonada por Teseo en la isla de Naxos, se enamoró de Dioniso, que le entregó una corona como regalo de bodas. Cuando ella murió, el dios arrojó la diadema al cielo, es la Corona Boreal.

La Corona de Ariadna, allá en el cénit, nos alerta para que no perdamos el hilo. Pero para recibir esa alerta no hay que perderla de vista. Se encuentra entre Hércules y el Boyero; alineada con la estrella polar y la diagonal de su carro. El brillo de la Perla de la Corona, su estrella alfa, situada a 15h 34m 41,3s de ascensión recta, +26° 42′ 53″ de declinación y a 72 años luz de la Tierra, es el indicador luminoso que nos señala el lugar exacto.

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
ariadna@revistasuma.es



Mezcla de historia, leyenda y astronomía, pues aparecen: la civilización minoica de Creta (Ariadna), el nacimiento de Atenas (Teseo), la destrucción de Troya (Helena), la civilización micénica (Pollux y Castor), cuya aventura tras el vellocino de oro recuerda en todo a Hércules, en su hazaña tras las frutas de oro y su lucha contra el dragón, a sus pies en el cielo.

No cabe duda que estas historias son y fueron buenas estrategias para recordar las posiciones de las estrellas en el firmamento. Recuerdo del que dependían informaciones esenciales como la localización, la orientación nocturna y la medida del tiempo.

Durante el día, estas tareas eran asumidas por la más importante de todas las estrellas para el ser humano: el Sol, en cuyas sombras y luces la humanidad se apoyó para organizar su tiempo y su espacio.

La cúpula del Panteón de Adriano se transforma en un reloj y un calendario, gracias a los rayos solares que se filtran por su cénit.

El Gran reloj de sol de Santa María de los Ángeles de Roma fue construido para demostrar la exactitud del Calendario Gregoriano y determinar la fecha de la Pascua,

En un extremo se encuentra la señal de Cáncer, que representar el solsticio de verano, y en el otro la de Capricornio, que representa el solsticio de invierno.

Algunas de las mayores líneas meridianas del mundo:

S. Maria del Fiore	Firenze	90 m.
S. Sophia	Costantinopli	50 m.
S. Sulpice	Parigi	26 m.
S. Petronio	Bologna	25 m.
Duomo	Milano	24 m.
Monasterio Beneditino	Catania	22 m.
S. Maria degli Angeli	Roma	20 m.
Collegio dell' Oratorio	Marsiglia	17 m.
Museo Nazionale	Napoli	14 m.

Problemas propuestos

por Daniel Gozalbo Bellés

El calendario

El calendario empieza cada año el día uno de enero, pero no siempre empieza en el mismo día de la semana ¿Cuántos modelos de calendario distintos pueden cubrir todas las posibilidades?

¿Podrías calcular, con agilidad, el día de la semana de un día cualquiera, si es una fecha posterior al viernes 15 de octubre de 1582?

Días julianos

Investiga la razón de ser del origen de los días julianos

Eclipses

¿Cuánto tardan los eclipses en volver a ocurrir en el mismo orden?
¿Cuál es la condición para que se produzca un eclipse de sol anular, visible desde un lugar de la Tierra?
¿Y total?
¿Podríamos estimar su probabilidad?

Oposiciones

¿Cuánto tiempo es necesario para que Marte o Júpiter vuelvan a estar en oposición a la Tierra?

Los días de la semana

¿Conoces el origen de los nombres y el orden de los días de la semana?

Soluciones a los problemas del número anterior

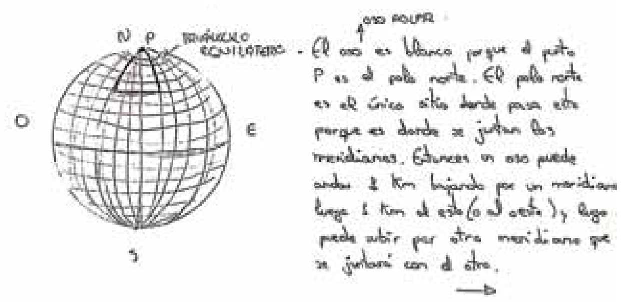
A continuación se muestran algunas soluciones de alumnos junto a comentarios de los profesores que propusieron los problemas y que los han trabajado en sus aulas.

El problema del oso

En el Suma 57 se planteó el conocido problema del oso al que no dimos respuesta en el número siguiente.

Un hombre sale de su casa, camina 10 km al sur, dobla y camina 10 km al este y después vuelve a doblar y camina otros 10 km al norte. Tras este recorrido se encuentra de nuevo en su casa, donde lo está esperando un oso ¿de qué color es el oso?

La solución que se obtiene con mayor frecuencia es la aportada por la alumna Raquel Sales:



Tras largas discusiones se aventuran otras soluciones:

i. Otra ruta que nos devuelve al punto de partida siguiendo las instrucciones es cualquier punto situado a 10 km al norte de los paralelos que midan 10 km de circunferencia, cuyo radio será: $10/2\pi = 1{,}6$ km.

Puesto que, al hacer los 10 km al este, daremos una vuelta completa y al subir hacia el norte, volveremos al punto de partida.

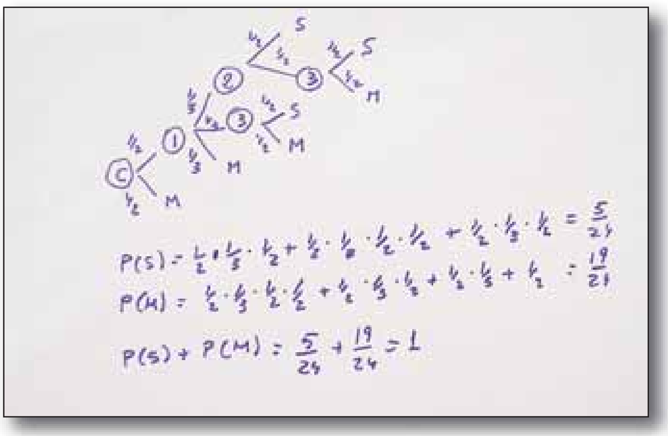
ii. Pero este paralelo no es el único que cumple las condiciones del problema, ya que podría partirse de puntos cada vez más cercanos al Polo Sur, de tal manera que la caminata hacia el este haría que diéramos dos vueltas alrededor del Polo, o tres vueltas, o cuatro, etcétera. Es decir, hay una infinidad de paralelos, donde cualquiera de sus puntos satisface las condiciones dadas.

Son los paralelos que miden $10/k$ Km, con k entero, es decir, cuyo radio es de $10/2k\pi$, en cuyo caso el cazador dará varias vueltas completas antes de comenzar el ascenso por la misma ruta que hizo el descenso.

En cualquiera de los casos de los dos últimos apartados estaremos en el Polo Sur, pero en la Antártida no hay osos. ¡Luego el oso es necesariamente blanco!

La oveja, el lobo y la col

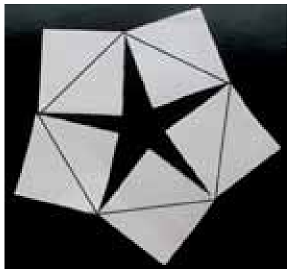
En el Suma 58, en la página 121, en el problema de la oveja, el lobo y la col, falta, tras los dos puntos, la imagen siguiente:

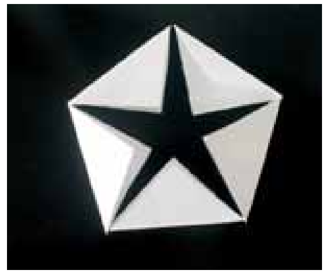


La libertad

Cinco cuadrados iguales se ubican unidos por uno de sus vértices de modo que formen en su interior un pentágono estrellado con las cinco puntas iguales.

¿Es rígido dicho pentágono o tiene la libertad de cambiar de forma?

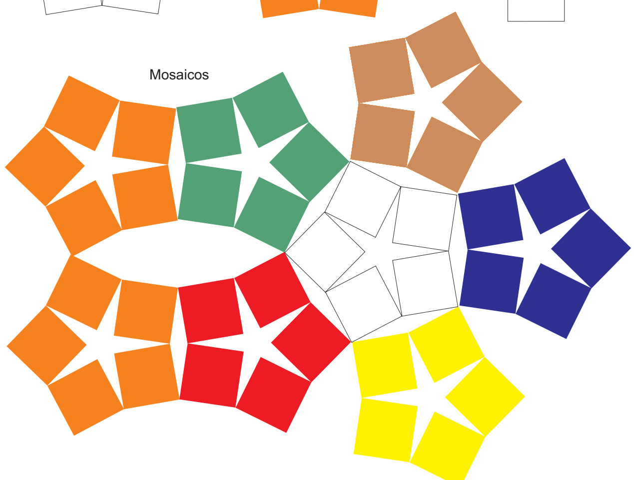




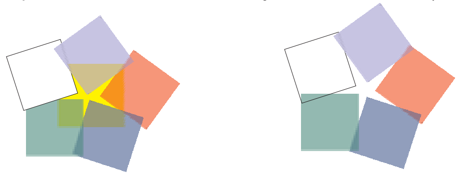
Doblar los cuadrados por sus diagonales ayuda a visualizar la solución: el hecho de exigir que las cinco puntas sean iguales equivale a construir un pentágono regular cuyo lado es igual a la diagonal de los cuadrados. Dicho pentágono es único, por lo que la solución del problema también lo es, es decir, la figura es rígida.

La sencillez de la solución provoca el deseo de romper la condición de la regularidad o a probar con otras superposiciones, otros polígonos:

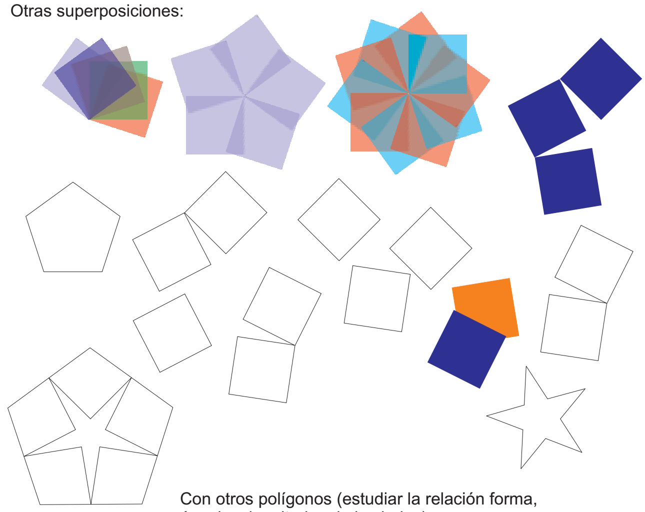
La estrella con cuadrados



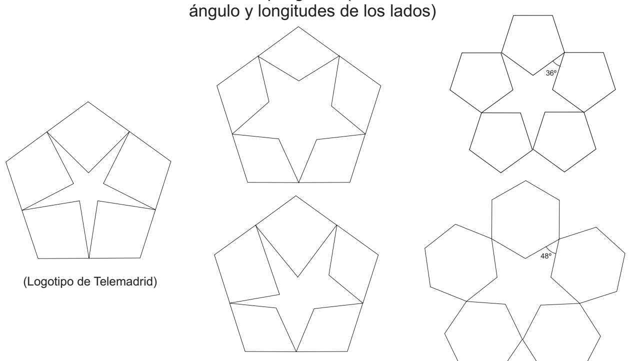
Variaciones (superposición de cuadrados, trabajar el tema de áreas):



Otras superposiciones:



Con otros polígonos (estudiar la relación forma, ángulo y longitudes de los lados)



(Logotipo de Telemadrid)

Irregularidades

Gominolas

Isabel y Maria se enfrentan en un juego para el que utilizan tres montones de gominolas.

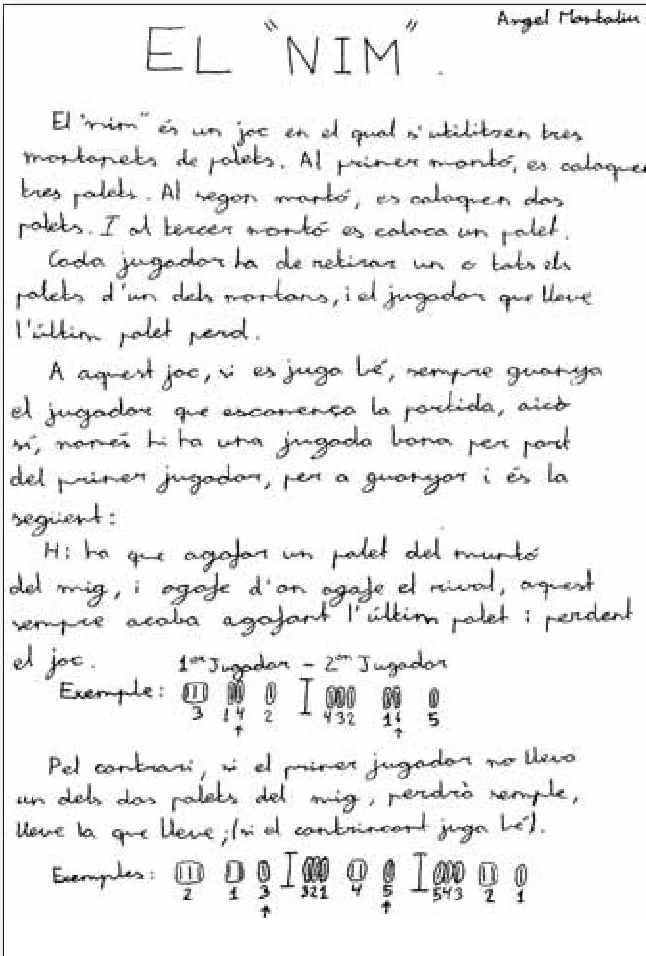
En el primer montón no hay más que una gominola; en el segundo dos; en el tercero 3.

Las reglas del juego son las siguientes:

1. *Cada jugadora ha de retirar o una sola gominola o todas las gominolas de cualquiera de los montones.*
2. *La jugadora que retira la última gominola pierde.*
3. *Le toca a Isabel iniciar la partida.*

¿De qué montón ha de retirar Isabel sus gominolas si quiere ganar la partida?

Este problema ha sido presentado en un aula de 4º de la ESO como el juego del NIM, tradicionalmente planteado con palillos. Una de las soluciones obtenidas se ilustra en el siguiente trabajo:



Angel Martalin

EL "NIM".

El "nim" és un joc en el qual s'utilitzen tres montonets de palets. Al primer montó, es caloquen tres palets. Al segon montó, es caloquen dos palets. I al tercer montó es coloca un palet.

Cada jugador ha de retirar un o tots els palets d'un dels montons, i el jugador que lleve l'últim palet perd.

A aquest joc, si es juga bé, sempre guanya el jugador que escomenço la partida, això sí, només hi ha una jugada bona per part del primer jugador, per a guanyar i és la següent:

H: ha que agafar un palet del muntó del mig, i agafe d'on agafe el rival, aquest sempre acaba agafant l'últim palet: perdent el joc.

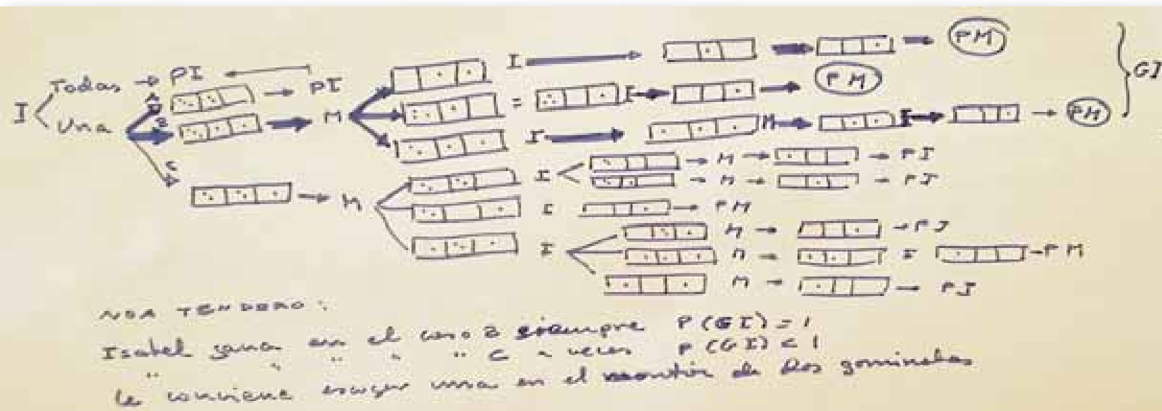
1er Jugador – 2on Jugador

Exemple: 3 1 4 2 | 4 3 2 1 6 5

Pel contrari, si el primer jugador no lleva un dels dos palets del mig, perdrà sempre, lleve la que lleve; (si el contrincant juga bé).

Exemples: 2 1 3 | 3 2 1 4 5 | 5 4 3 2 1

El alumno ha descubierto la estrategia y para justificarla aporta dos ejemplos. La justificación es completa en esta otra resolución:

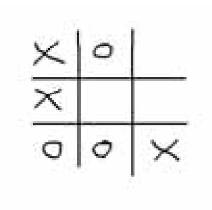


Tres en raya

Los **Tres en raya** *se juegan sobre un cuadrado grande, dividido en nueve cuadrados pequeños.*

1. *Cada uno de los jugadores que intervienen en él pone su marca (por regla general, una equis o un círculo) en una de las casillas.*
2. *El jugador que consigue colocar tres marcas formando una línea (horizontal, vertical o diagonal) gana la partida.*
3. *Las marcas se colocan alternativamente, mientras queden huecos en el tablero y no se haya conseguido el tres en raya.*
4. *Al llegar su turno los jugadores procuran colocar su marca en una línea que contenga*
   a) dos de sus propias marcas
   b) dos de su oponente a fin de impedirle ganar, dando siempre preferencia al caso a sobre el b.

En la partida sólo falta por colocar la última marca



¿Cuál de estas marcas x *o* o *ganará el juego?*

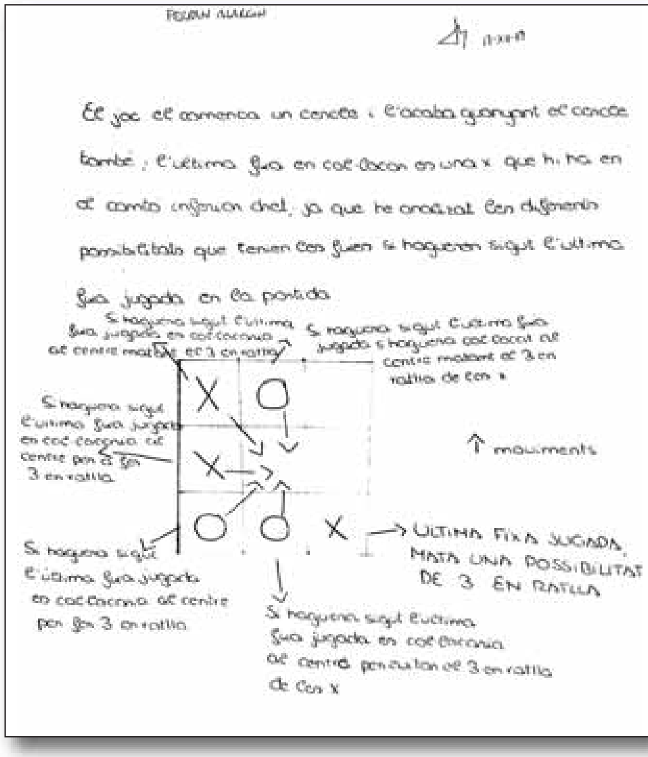
Este es un problema que popularizó Martin Gardner bajo las distintas presentaciones isomorfas conocidas como *juego del quince, cuadrado mágico de orden 3, tres en raya, nueve palabras, carreteras entre 8 ciudades,* etc.

La variante que presentamos en el número anterior presenta la novedad de pedir que se reconstruya la partida hacia atrás desde un punto determinado del juego.

La solución aportada por un alumno de 4º de la ESO es la que se muestra a continuación.

Resulta interesante observar cómo se aproximan los procedimientos que utilizan los alumnos para abordar estas dos situaciones a las soluciones que da el autor George J. Summers en *Juegos de ingenio 2,* libro del que hemos extraído las propuestas.

Una mirada detenida a las distintas posibilidades de plantear problemas, a partir de variaciones sobre un juego popular, debe pasar por los libros de Martin Gardner que siguen siendo una fuente inagotable de ideas y propuestas al respecto.



Belleza de un rectángulo

¿Cómo podríamos definir el grado de belleza de un rectángulo?

Problema propuesto por Claudi Alsina y Enrique Trillas (*Fuzzy Sets and Mathematics Education. For The Learning of Mathematics,* Montreal, 1992) y resuelto por el alumnado de Eliseo Borrás Besés, que aporta su análisis de dichas resoluciones.

Las opiniones sobre este problema son increíblemente variadas entre los alumnos. Las anécdotas son muy numerosas, enumerarlas sería muy prolijo. Es necesario dedicar un tiempo no menor de tres clases. Aquí nos limitaremos a indicar unas notas sobre las dos fases principales que aparecen en la resolución.

Definir las variables

- Basta una variable independiente $x=a/b$, la proporción entre las dos dimensiones a y b del rectángulo, para caracterizar cada rectángulo.
- Los valores de esta proporción serán positivos y tan grandes como queramos; pero si no nos importa la posición del rectángulo, podemos suponer que $a \leq b$. Así, los valores de x estarán comprendidos entre 0 y 1.

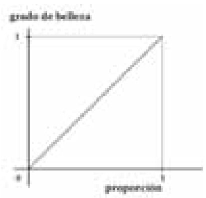
- La variable dependiente y, que debe indicar el grado de belleza del rectángulo, será una función de x que deberemos construir. Sus valores estarán comprendidos entre 0 y 1, por ejemplo.

Construir la función

a. Hay personas que pueden preferir el cuadrado como el rectángulo más bello. En este caso, es x=1 y su aspecto es el de la figura adjunta.

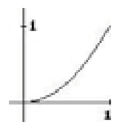
Cuanto más cercana a 1 sea x, más bello será el rectángulo. Una función que modelice este concepto borroso de belleza podría ser:

$$y = f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

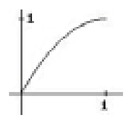


Pero hay otras muchas funciones cuyas diferencias son notables; por ejemplo:

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$



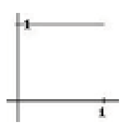
$$y = f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$



En las funciones anteriores se puede observar la variación de las pendientes antes y después del máximo, e interpretar dicha variación en términos de la variación de la belleza de los rectángulos correspondientes.

b. Si todas las proporciones nos pareciesen igualmente bellas, nuestra función sería:

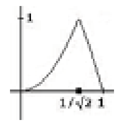
$$y = f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$



c. Si la proporción más bella opinamos que es la de las hojas DIN-A, para las que es $x = 1/\sqrt{2}$, es decir $1-2x^2=0$, el rectángulo es semejante al de la figura adjunta.

Podemos construir infinitas funciones con un máximo en dicho valor, como hemos apuntado en el caso a. Elijamos la función de modo que cuanto más cerca esté $|1-2x^2|$ de 0, más se acerque el grado de belleza a 1:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 - \left|1 - 2x^2\right|, \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$



En este caso, el grado de belleza se acerca a 1 con distinta rapidez, según se acerque la proporción a la óptima por la izquierda o por la derecha.

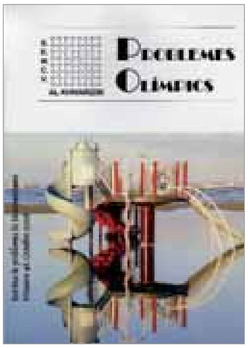
d. Pero en el arte se ha preferido como patrón de belleza el rectángulo áureo: aquel para el que es $x = 2/(1+\sqrt{5})$, o lo que es lo mismo, $1-x-x^2 = 0$, semejante al de la figura adjunta.

Como antes, podemos elegir infinitas funciones, pero aquí nos limitaremos a la que exige que cuánto más cerca esté de 0 la expresión $|1-x-x^2|$, más cerca esté el rectángulo de ser áureo:

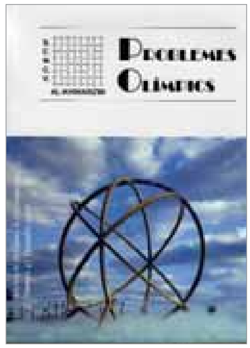
$$y = f(x) = \begin{cases} 1 - \left|1 - x - x^2\right|, \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

En resumen, la cuestión planteada es una buena ocasión para trabajar las funciones y su significado, a partir de 4º de la ESO. Obviamente, los resultados que se obtienen dependen del curso.

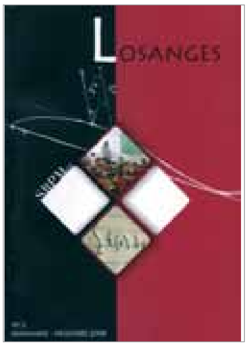
Publicaciones recibidas



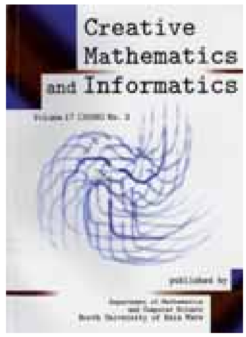
PROBLEMES OLÍMPICS
SEMCV Al Khwārizmī
N.º 46, Octubre 2008
Valencia
ISSN: 1578-1771



PROBLEMES OLÍMPICS
SEMCV Al Khwārizmī
N.º 47, Desembre 2008
Valencia
ISSN: 1578-1771



LOSANGES
SBPMef
N.º 1, Septembre-Octobre 2008
N.º 2, Novembre-Decembre 2009

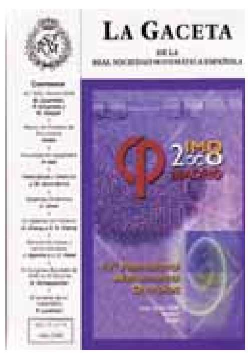


CREATIVE MATHEMATICS AND INFORMATICS
Departament of Mathematics and Computer Science. North University of Baia Mare. Romania
Vol.17, 2008
Vol.17, n.º 2, 2008
ISSN 1584-286X

PNA. REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
Universidad de Granada
Vol. 3 n.º 1, septiembre 2008
ISSN 1886-1350

PETIT X
IREM de Grenoble
N.º 78, 2008
ISSN 0759-9188

PUBICACIONES DE LA FACULTAD DE EDUCACIÓN Y HUMANIDADES DEL CAMPUS DE MELILLA
Universidad de Granada
N.º38, Noviembre 2008
ISSN: 1577-4147

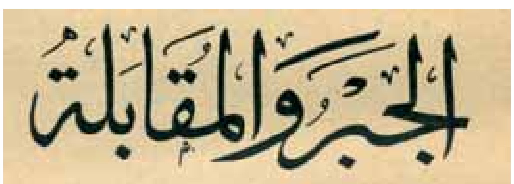


LA GACETA DE LA RSME
RSME
Vol.11, n.º 4, 2008
Madrid
ISSN 1138-8927

suma+ 60
Febrero 2009, pp. 103-108

Historias de al-Khwārizmī (3ª entrega). Orígenes del álgebra

Cabe poca duda hoy en día entre los historiadores de las matemáticas sobre el lugar central que ocupa en la historia del álgebra el libro de al-Khwārizmī *Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala* (*Libro conciso de cálculo de restauración y oposición*). No sólo porque el nombre de la disciplina provenga de la decisión de Gerardo de Cremona de no traducir al latín la palabra al-jabr que designa una de las operaciones del cálculo, como ya conté en la segunda entrega de estas historias de al-Khwārizmī, sino también porque en ese libro de al-Khwārizmī está presente lo que podemos llamar el proyecto algebraico de resolución de problemas, y los objetos, los términos técnicos y el método que constituyen una nueva disciplina, así como su aplicación a otras disciplinas preexistentes. En esta entrega de las historias de al-Khwārizmī presentaré dos historias sobre el origen del libro y la originalidad de su contenido.



al-jabr wa'l-muqābala

A todo libro famoso se le atribuye un origen mítico

El libro de al-Khwārizmī es un libro escrito por encargo. El mismo al-Khwārizmī narra en sus primeros párrafos, después de las habituales invocaciones a Dios y a su profeta, que lo escribe a petición del califa al-Ma'mūn, y que lo hace "para ayudar a aclarar lo que era impenetrable y a facilitar lo que era difícil[1]" (Rashed, 2007, p. 94), sin atribuirse la invención de todo lo que va a presentar en él.

Djebbar (2005, pp. 41-42) cuenta que fue corriente entre los historiadores y comentaristas árabes medievales el atribuir un papel crucial en el origen del interés por el álgebra a uno de los personajes fundamentales en la historia de la fundación del Islam, ^{c}Alī, el yerno y primo del profeta, que a la muerte de éste sin que hubiera establecido ningún procedimiento para su sucesión fue considerado por sus seguidores como el único que legítimamente podía sucederle. El hecho de que ^{c}Alī no

Luis Puig
Universitat de València Estudi General
historias@revistasuma.es

fuera el elegido como primer califa tras la muerte del profeta condujo a que sus seguidores no reconocieran la autoridad de ninguno de los tres primeros califas, y su asesinato, cuando finalmente fue nombrado califa, produjo la escisión chiíta del Islam, que persiste en nuestros días.

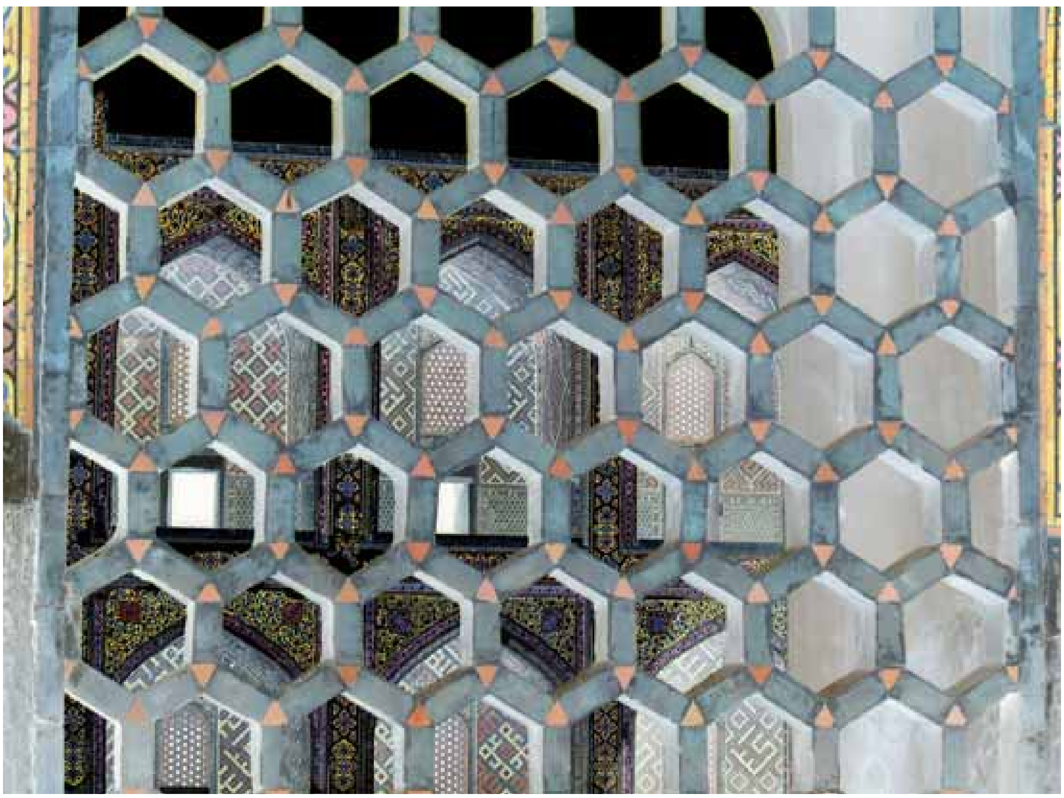
Según el origen legendario del álgebra, ᶜAlī, el yerno y primo del profeta, mártir chiíta, habría sido el primer árabe en conocer el álgebra, una ciencia traída de Persia, que él habría aprendido en cinco días. Así se narra en el comentario al libro de al-Khwārizmī escrito por al-Khuzāᶜī en el siglo XIII y conservado en un manuscrito en Estambul (Yeni Cami 803), que cita y traduce Rashed (2007, p. 4):

> Se cuenta que, bajo el califato de ᶜUmar ibn al Khattāb, unos persas trajeron la ciencia del álgebra y al-muqābala. ᶜAlī ibn Abī Tālib –que Dios esté satisfecho de él– aconsejó a ᶜUmar ibn al Khattāb –que Dios esté satisfecho de él– que les gratificara con una subvención de dinero público, para que la enseñaran. Se le concedió. Se cuenta que entonces ᶜAlī comprendió en cinco días lo que poseían de álgebra y al-muqābala. Después de lo cual, se continuó intercambiando esta ciencia oralmente, sin consignarla en un libro, hasta que el califato recayó sobre al-Ma'mūn, cuando ya desaparecía. Se informó de ello a al-Ma'mūn, que inquirió por expertos en la materia. Se encontró que sólo el Shayk Abū Bakr Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī era experto en ella. Al-Ma'mūn le pidió entonces que compusiera un libro de álgebra y al-muqābala, para resucitar lo que había desaparecido. Éste consintió en escribir ese libro para fijar en él los principios del álgebra y al-muqābala, y para que sirviera de referencia.

La rapidez de aprendizaje de ᶜAlī la envidiarían los escolares a lo largo de los siglos, pero esta leyenda no sólo proporciona un origen glorioso al álgebra, sino que establece la importancia del paso de la tradición oral, que siempre está en peligro de desvanecerse, a su fijación en un texto escrito. El gesto fundacional de al-Khwārizmī se presenta en esta leyenda como ese gesto de fijación y ordenación "para que sirva de referencia", no muy distinto de la fijación de la palabra en los textos sagrados.

A todo libro famoso se le discute la prioridad

Abandonando el terreno de lo legendario, de la historia sagrada, que convierte a al-Khwārizmī en el amanuense de lo que ᶜAlī sabía, también en el terreno de los hombres vulgares se le ha discutido a al-Khwārizmī la originalidad de su libro de álgebra.



Portada del manuscrito de la biblioteca Bodleyan de Oxford del álgebra de al-Khwārizmī

No me refiero a quienes han atribuido a al-Khwārizmī, al igual que al conjunto de la ciencia árabe medieval, el papel de meros intermediarios entre el pasado glorioso de la matemática griega clásica y la matemática que renace en el occidente cristiano después de años oscuros. El competidor al que me refiero es el libro que Aydin Sayili ha editado y traducido al turco y al inglés con el título *Logical Necessities in Mixed Equations*, escrito por un ʿAbd al-Hamīd Ibn Turk en la misma época en que al-Khwārizmī escribió el suyo (Sayili, 1962), y que ya el nieto del autor del libro, que también era matemático, que vivió a finales del siglo IX y principios del siglo X, y a quien se conoce con el nombre de Abū Barza, habría afirmado que el libro de su abuelo era anterior al de al-Khwārizmī (Djebbar, 2005, pp. 44-45).

De hecho, al-Khwārizmī no reivindica que lo que presente en su libro no lo haya tratado nadie antes que él. Más bien se limita a colocarse en una estirpe:

> Los sabios del tiempo pasado y de las naciones de antaño continuaban escribiendo libros que componían en los distintos tipos de ciencias y los diversos aspectos de la sabiduría, para que los que les sucedieran y en previsión de una recompensa, en la medida de su capacidad [...] (Rashed, 2007, p. 92).

Sabios que escribían libros para "elucidar los secretos de la ciencia y lo que encierra de obscuro", de tres posibles maneras:

> O bien es un hombre que ha llegado a <descubrir> el primero lo que no se había descubierto antes de él y lo ha legado después suyo; o un hombre que ha explicado lo que sus predecesores habían dejado inaccesible, para aclarar su método, allanar el camino y acercar el acceso; o un hombre que ha encontrado un fallo en ciertos libros, y que entonces ha reunido lo que estaba disperso, ha enderezado su porte teniendo una buena opinión de su autor, sin echarle en cara el fallo ni enorgullecerse de lo que él ha hecho. (Rashed, 2007, p. 94).

De las tareas de esos sabios, al-Khwārizmī parece que no pretenda situarse más que en la segunda, al decir que va

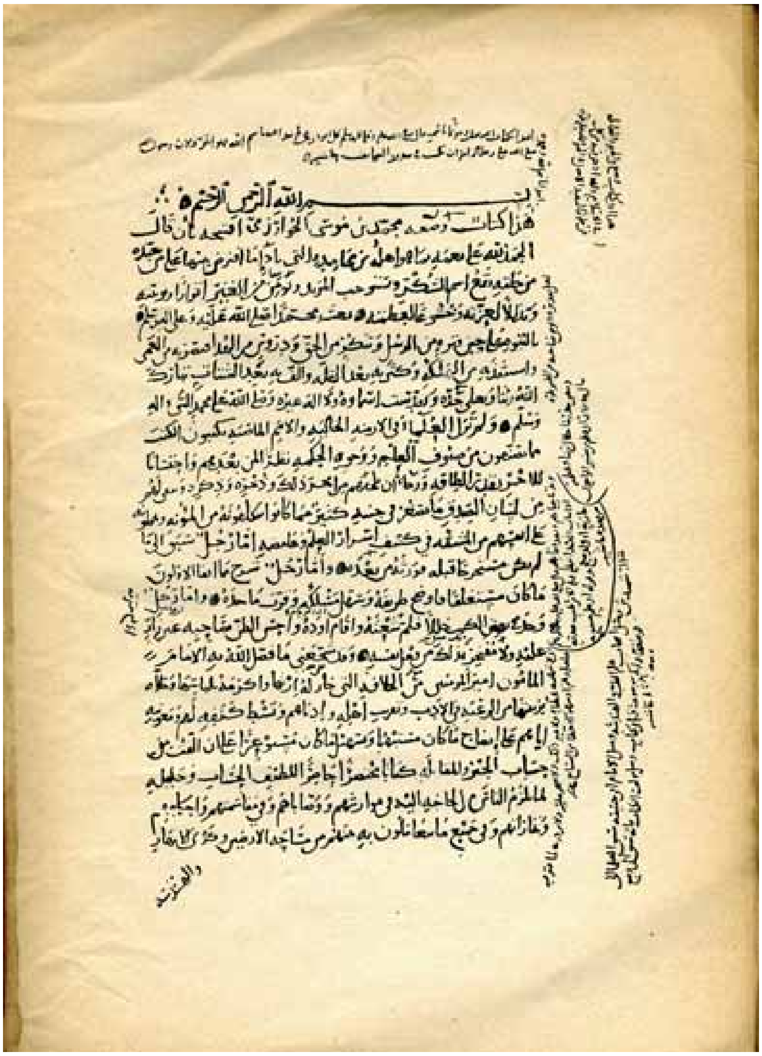
> a aclarar lo que era impenetrable y a facilitar lo que era difícil [...] componer un libro conciso en el cálculo de al-jabr y al-muqābala (Rashed, 2007, p. 94).

El orgullo familiar del nieto de Ibn Turk estuvo probablemente detrás de su reivindicación de la prioridad del libro de su abuelo sobre el libro de al-Khwārizmī, que ya en ese momento se había convertido efectivamente, la propia protesta de Abū Barza se convierte en una prueba de ello, en el libro de referencia sobre el cálculo de al-jabr y al-muqābala.

Djebbar (2005) afirma que no sólo era el libro de referencia, sino que su prioridad prevaleció ya a partir del siglo X, como lo atestigua la reivindicación que hace de ello Abū Kāmil en la introducción de su libro de álgebra[2]:

> Habiendo estudiado mucho los libros de los sabios <relativos> al cálculo y habiendo investigado sus afirmaciones y lo que hay de más precioso en lo que han escrito en sus libros, he constatado que el libro de Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, que se conoce bajo <el título de> *La restauración y la comparación*, es aquel cuyo fundamento es el más preciso y cuya demostración es la más verdadera; lo que debería incitarnos, a nosotros especialistas en cálculo, a reconocer su ciencia y su preeminencia, porque él ha precedido <a los otros> en la realización del *Libro de al-jabr y al-muqābala*, que él es su iniciador y que él ha inventado los fundamentos que contiene. (Djebbar, 2005, p. 45)

al-jabr wa'l-muqābala



Primera página del manuscrito de la biblioteca Bodleyan de Oxford del álgebra de al-Khwārizmī

Abū Kāmil va en su reivindicación mucho más lejos de lo que el propio al-Khwārizmī se atribuía, y probablemente barre para casa (aunque él fuera egipcio, como atestigua que se le conociera como al-Hāsib al-Misrī, el calculista egipcio).

Sayili, historiador turco como Ibn Turk, estira en la otra dirección, a pesar de que lo único que tiene para reivindicar la prioridad de Ibn Turk sea un texto muy breve, que ensalza:

> El texto que existe de ᶜAbd al-Hamīd Ibn Turk, que tiene unas mil cuatrocientas palabras, es probablemente un capítulo del *Álgebra* de ᶜAbd al-Hamīd. Posiblemente es sólo una parte de un capítulo, pero en ese caso constituye un apartado bien definido, completo en sí mismo, con principio y fin (Sayili, 1962, p. 99).

Con tan poco material, Sayili concede no poder demostrar cuál de los dos textos, el de Ibn Turk o el de al-Khwārizmī, está escrito antes, ni mucho menos que uno copiara del otro o se inspirara en él, pero sí que el texto de Ibn Turk es una prueba contra el que al-Khwārizmī iniciara, como dice Abū Kāmil, la ciencia del álgebra, inventando sus fundamentos.

> El texto de ᶜAbd al-Hamīd, sin embargo, puede decirse que corrobora la hipótesis contraria. El álgebra de ᶜAbd al-Hamīd y al-Khwārizmī no parece estar en absoluto cerca del estado de su génesis. No tiene los rasgos de un álgebra que aún no ha terminado de recorrer un proceso inicial de desarrollo, sino un álgebra con reglas, tradiciones y puntos de vista bien establecidos (Sayili, 1962, p. 125).

Sayili, al no poder probar la prioridad de Ibn Turk, le quita la prioridad a ambos sobre la fundación del álgebra como disciplina independiente, colocándolos en un estadio desarrollado de la disciplina tras un pasado del que lamentablemente no quedan huellas.

Al-Khwārizmī no ha pretendido inventar gran cosa, sino partir de un conocimiento preexistente, el que el califa le ha pedido que explique. Jens Høyrup en un artículo que publicó en 1986 comparaba, tanto el libro de álgebra de al-Khwārizmī como el fragmento que se conserva de Ibn Turk, con otro libro de un tal Abū Bakr, que sólo se conoce por una traducción medieval latina del siglo XII hecha por Gerardo de Cremona, que lleva el título de *Liber Mensurationum*[3]. Una parte de ese libro contiene una serie de problemas que están resueltos de dos maneras: una que sigue una pauta similar a la de los textos paleobabilónicos y otra que Abū Bakr indica que está hecha "según *al-jabr*" y que es muy similar a la que aparece en el libro de al-Khwārizmī. Esta segunda técnica correspondería a una tradición, que Høyrup califica de subcientífica, propia de los que Thābit ibn Qurrah llama "gentes de *al-jabr*" o "seguidores de *al-jabr*"[4], que según Høyrup probablemente eran algún tipo de contables.

Høyrup se inclina por que el texto de Ibn Turk sea anterior al de al-Khwārizmī, pero eso no lo hace valorarlo como un iniciador del álgebra ya que, al compararlo con el *Liber Mensurationum*, Høyrup encuentra el texto de Ibn Turk más primitivo en las demostraciones por parecerse al *Liber Mensurationum* más que el texto de al-Khwārizmī.

> En Ibn Turk encontramos [...] un paralelismo más patente con la tradición de geometría ingenua que está reflejada en el *Liber Mensurationum* que en el caso de al-Khwārizmī (Høyrup, 1986, p. 474).

El trasfondo sobre el que escriben tanto Ibn Turk como al-Khwārizmī sería, en opinión de Høyrup, tanto lo que podemos llamar el álgebra babilónica, como esas tradiciones que llama "subcientíficas" y que están representadas en el libro de Abū Bakr. Sobre ese trasfondo, al "aclarar lo que era impenetrable y [...] facilitar lo que era difícil" construye al-Khwārizmī, lo que se reconocerá a partir de él como una nueva disciplina.

Algo de la radical novedad que supone el paso del álgebra babilónica al álgebra de al-Khwārizmī examiné en mi texto *La resolución de problemas en la historia de las matemáticas* (Puig, 2006), y sobre lo que hay en general de radicalmente nuevo en el texto de al-Khwārizmī he escrito en varias ocasiones (p. e., Puig, 1998, 2008)[5]. Volveré sobre ello en la próxima entrega de estas historias.

HISTORIAS ■

Las fotografías que ilustran este artículo pertenecen a Marisa Fernández Villanueva realizadas en Uzbekistán en 2007.

NOTAS

1 Traduzco aquí de la traducción francesa de Roshdi Rashed.

2 Cito la introducción a partir de Djebbar (2005) porque no dispongo del manuscrito árabe que él cita, y en las ediciones publicadas de las versiones medievales latina (Sesiano, 1993) y hebrea con traducción al inglés (Levey, 1966) del libro de Abū Kāmil, la introducción no aparece.

3 Este libro ha sido editado por Busard (1968).

4 El texto de Thābit ibn Qurrah se titula *Proposiciones sobre la rectificación de los problemas del álgebra mediante demostraciones geométricas*, está escrito unos cincuenta años después de la aparición del de al-Khwārizmī y está editado en Luckey (1941).

5 Estos tres textos están disponibles en http://www.uv.es/puigl/textos.htm en formato pdf.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BUSARD, H. L. L. (1968): L'algèbre au Moyen Âge: Le 'Liber Mensurationum' d'Abu Bekr. *Journal des Savants*, avril-juin, pp. 65-125.

DJEBBAR, A. (2005): *L'algèbre arabe. Genèse d'un art*. Vuibert / Adapt, Paris

HØYRUP, J. (1986): Al-Khwârizmî, Ibn Turk, and the Liber Mensurationum: On the Origins of Islamic Algebra, *ERDEM 2*, 445-484.

LEVEY, M. (Ed.) (1966): *The Algebra of Abû Kâmil, in a Commentary by Mordecai Finzi.* Hebrew text and translation, and commentary, The University of Wisconsin Press, Madison, WI.

LUCKEY, P. (1941): Thâbit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen. *Sitzungsberichte des sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-physische Klasse.* Berichte 93, pp. 93-114.

PUIG, L. (1998): Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 109-131), Grupo Editorial Iberoamérica, México, DF.

PUIG, L. (2006): La resolución de problemas en la historia de las matemáticas. En Aymerich, José V. y Macario, Sergio (Eds.) *Matemáticas para el siglo XXI* (pp. 39-57) Publicacions de la Universitat Jaume I, Castellón.

PUIG, L. (2008): History of algebraic ideas and research on educational algebra. In M. Niss (Ed.) *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education. CD-version*. IMFUFA, Department of Science, Systems and Models, Roskilde University, Roskilde.

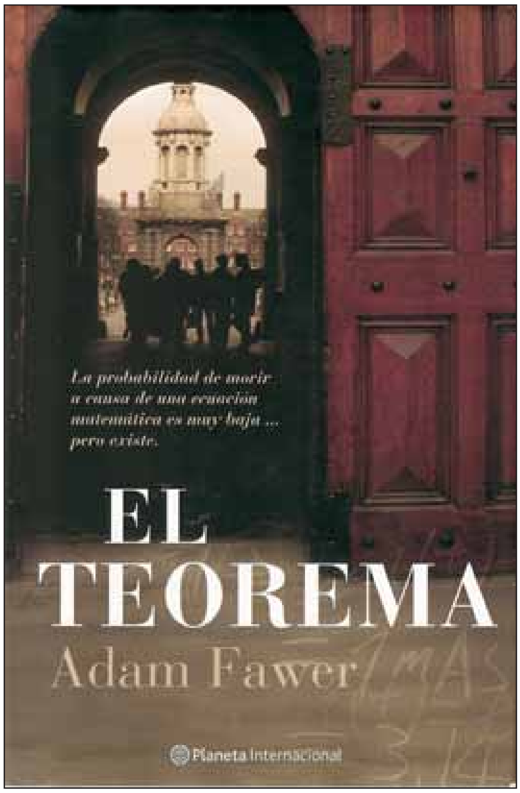
RASHED, R. (Ed.). (2007): *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre,* Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris.

SAYILI, A. (Ed.). (1962): *Abdülhamid ibn Türk'ün Katışık denklemlerde Mantıkî Zururetler adlı yazısı ve Zamanın Cebri (Logical necessities in mixed equations by ʿAbd al-Hamîd Ibn Turk and the algebra of his time),* Türk Tarih Kurumu Basımevi, Ankara.

SESIANO, J. (1993): La version latine médiévale de l'Algèbre d'Abû Kâmil. In M.FOLKERTS, AND J. P. HOGENDIJK (Eds.) *Vestigia Mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard* (pp. 315-452), Editions Rodopi B. V., Amsterdam and Atlanta, GA.

suma+ 60
Febrero 2009, pp.109-116

Matemáticas en lo improbable 1ª parte. Porque incluso a los demonios les gustan las sorpresas



El teorema
(Título original: Improbable)
Adam Fawer
Editorial Planeta, S. A., Barcelona.
Septiembre de 2005 (1ª Edición)
ISBN: 978-84-08-06096-1.
352 páginas

Publicada originalmente con el título *Improbable*, apareció en castellano en 2005 bajo el título de *El Teorema*. La obra se encuadra dentro del género del thriller psicológico y, desde nuestro punto de vista, el título de la versión en castellano no tiene ninguna relación con su contenido; sí, en cambio, el original, que describe de manera clara y sencilla el alma de toda la obra. Por lo demás, nos encontramos ante una novela de la que podemos sacar muchas ideas para trabajar las matemáticas desde su lectura.

La presentación del libro, que aparece en su contraportada, es la siguiente:

> David Caine es epiléptico, posee una espectacular capacidad para las matemáticas y el cálculo mental y pasa todas las noches jugando al póquer. A causa de sus frecuentes y terribles ataques de epilepsia ha perdido su trabajo de profesor de estadística en la universidad, ha recaído en su adicción al juego y su vida se ha convertido en un infierno.

Constantino de la Fuente Martínez
IES Cardenal López de Mendoza, Burgos
literatura@revistasuma.es

Confía en su don para calcular probabilidades y así ganar mucho dinero, lo que le permitiría empezar de nuevo, pero lo improbable no es imposible y acaba debiéndole una fortuna a un peligroso capo de la mafia rusa.

A fin de librarse de su enfermedad y recuperar el control de su vida, Caine decide arriesgarse con un medicamento en pruebas, administrado por un misterioso doctor de oscuras intenciones que lo utiliza para un experimento sobre la predicción del futuro basado en la teoría matemática conocida como *el demonio de Laplace*. Desde que inicia el tratamiento, Caine tiene visiones alucinatorias, que podrían ser tanto un signo de su recién adquirida habilidad predictiva como síntomas de episodios psicóticos, efecto secundario de la medicación.

Para escapar del enloquecido científico, Caine contará con la ayuda de su hermano gemelo, Jasper, y de la arisca agente de la CIA Nava Vaner. Los tres se verán envueltos en una trama de múltiples ramificaciones, y será la capacidad de Caine para ver el futuro lo que les permitirá resolver la compleja situación.

Una auténtica golosina para cualquier curioso sobre las regiones más oscuras de la ciencia moderna, donde lo racional se confunde con lo paranormal.

Sobre el autor, podemos comentar que

Adam Fawer se licenció en la Universidad de Pennsylvania e hizo una máster en la Stanford Graduate School of Busines. Durante su carrera profesional, Fawer trabajó en diversas compañías, incluidas Sony Music, J. P. Morgan y, en fechas más recientes en About.com, donde fue jefe de las operaciones. *El Teorema*, su primera novela, ya ha sido traducida a cinco idiomas. Fawer vive en Nueva York con su pareja, Meredith, hijo Phineas y algunos peces de colores.

La carrera de Fawer como escritor está ligada a Estephanie Williams, amiga y también escritora. Cuando, a la edad de treinta años, Williams fue diagnosticada de un cáncer terminal, los dos amigos hicieron un pacto verbal para centrarse en la escritura de sus primeras novelas. Williams escribió, cuando podía, una divertida y conmovedora historia titulada *Enter Sandman*. Fawer dejó todo, incluso su carrera como director de operaciones de About.com, para dedicarse a la elaboración

de su primera obra, *Improbable*, porque *quería crear algo realmente único, por mi mismo, sin la ayuda de nadie. Lo curioso es que a lo largo del camino descubrí que escribir una novela es la empresa más participativa que he abordado*. Al final de sus páginas, en el apartado de agradecimientos, la primera mención es para su amiga Estephanie, a la que confiesa que echa de menos. A raíz del éxito de la novela, ha recibido varios premios como mejor autor de ópera prima.

Un comentario personal

El Teorema, o con mucho más acierto *Improbable*, comienza con la lucha interior del personaje principal para hacerse con el control de una situación límite de incertidumbre: una partida de póker en la que llega a apostar el dinero que ya no tiene. Un ambiente envolvente, sofocante y angustioso, muy bien descrito por el autor, se acompaña de una tensión que converge, de manera creciente, hacia un climax en el que se hace patente el fracaso y la frustración del personaje. Pero mucho peor que todo lo anterior es, para el protagonista, el proceso de somatización de un estado mental desequilibrado, que se manifiesta a través del sentido del olfato: *el olor, el espantoso olor estaba en todas partes…*

Nos encontramos ante un buceo analítico en el cerebro humano, en el que se describen, a veces de forma un tanto pavorosa, los entresijos de algunas de las patologías más singulares de la mente humana: la epilepsia y la esquizofrenia. Desde el punto de vista de las matemáticas, abundan las reflexiones e interpretaciones personales sobre diversos aspectos históricos relacionados con el nacimiento y desarrollo de la Teoría de la Probabilidad y con los personajes que más contribuyeron a su afianzamiento y asentamiento. En cuanto al argumento, disfrutaremos de una sucesión frenética de acontecimientos en los que se mezclan los servicios secretos, las mafias, los científicos sin escrúpulos y sus experimentos… ingredientes típicos de una novela de este tipo.

Y el olor…

Y es que constantemente tenemos una machacona certeza de que están ocurriendo hechos muy improbables y, simultáneamente, dejan de producirse otros sucesos también muy poco probables. Tanto es así que, a veces, lo real y lo imaginado en la mente del protagonista quedan registrados en el texto con una sola diferencia: el tipo de letra. Así distinguiremos, en muchos pasajes, entre el pensamiento interior del personaje y el mundo exterior a él. Esta mezcla condiciona el transcurrir del tiempo en la novela, dotándole de una elasticidad sorprendente. Hay momentos en que la narración es una descripción, en directo, del paisaje argumental; en ellos el tiempo se hace interminable. Por el contrario, en otras ocasiones el tiempo pasa sin apenas darnos la posibilidad de disfrutar detalladamente de los acontecimientos, o de tomar conciencia del significado y la trascendencia de lo que ha ocurrido.

> Tú no eres real. Nada de esto es real, no puede ser. Estoy viviendo un episodio de esquizofrenia. Es la única explicación real.

Porque cuando la mente está al límite y la realidad se hace insoportable, cuando se vive un horror real y palpable, el cerebro se defiende cuestionando la realidad o refugiándose en otra realidad virtual de personajes inventados por la enfermedad y la necesidad de sobrevivir.

> Y las rimas, limas, minas, cimas, simas, …

La idea central de la novela, *el Demonio de Laplace*, se nos hace real con la intención de que nuestra mente se enfrente insistentemente a dualidades conectadas: determinismo, incertidumbre, aleatoriedad, relatividad, evolucionismo, creacionismo… Esta búsqueda de *conflicto* se concreta en pasajes en los que aparecen muchos de los temas icono del pensamiento científico de los últimos siglos: el Principio de Incertidumbre de Heisenberg, el gato de Schrödinger, la Teoría de la Relatividad de Einstein, el multiuniverso de David Deutsch, la teoría de la evolución de Darwin, etc. Sin olvidar los temas matemáticos que nos interesan: ley de los grandes números, estadística y probabilidad, juegos de dados, monedas, cartas, esperanza matemática, cálculo de probabilidades y los personajes imprescindibles: el Caballero de Meré, Pascal, Fermat, Moivre, Laplace, …

…abundan las reflexiones e interpretaciones personales sobre diversos aspectos históricos relacionados con el nacimiento y desarrollo de la Teoría de la Probabilidad y con los personajes que más contribuyeron a su afianzamiento y asentamiento

> Sí. El déjà vu es un recuerdo de un posible futuro tal como se ve en el pasado del *Durante*.

Como muchos lectores ya saben, la idea del demonio tiene su origen en la obra de Laplace *Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades*, de 1814, en la que concretamente nos dice:

> Una inteligencia que en un momento determinado conociera todas las fuerzas que animan a la naturaleza, así como la situación respectiva de los seres que la componen, si además fuera lo suficientemente amplia como para someter a análisis tales datos, podría abarcar en una sola fórmula los movimientos de los cuerpos más grandes del universo y los del átomo más ligero; nada le resultaría incierto y tanto el futuro como el pasado estarían presentes ante sus ojos. El espíritu humano ofrece, en la perfección que ha sabido dar a la astronomía, un débil esbozo de esta inteligencia. Sus descubrimientos en mecánica y geometría, junto con el de la gravitación universal, le han puesto en condiciones de abarcar en las mismas expresiones analíticas los estados pasados y futuros del sistema del mundo. Aplicando el mismo método a algunos otros objetos de su conocimiento, ha logrado reducir a leyes generales los fenómenos observados y a prever aquellos otros que deben producirse en ciertas circunstancias. Todos sus esfuerzos por buscar la verdad tienden a aproximarlo continuamente a la inteligencia que acabamos de imaginar, pero de la que siempre permanecerá infinitamente alejado. Esta tendencia, propia de la especie humana, es la que la hace superior a los animales, y sus progresos en este ámbito, lo que distingue a las naciones y los siglos y cimenta su verdadera gloria (*Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades*, pág. 25).

Como podemos observar en esta famosa cita, Laplace reconoce que, aunque la humanidad ha dado pasos de gigante en el progreso de la ciencia y el conocimiento, la inteligencia humana está infinitamente lejos de esa *inteligencia* que él mismo nos describe. Pero esto es lo que precisamente Fawer quiere negar adentrándose en el terreno de la ciencia ficción y acercándonos, de manera brillante, a una realidad en la que comienza a hacer posible… ¿lo imposible?

P.S. de Laplace

Una propuesta de trabajo en el aula

Como siempre decimos en este momento, es el profesor o profesora el que debe tomar decisiones sobre el uso más adecuado de la propuesta didáctica que hacemos a continuación. Nuestras opiniones al respecto son las siguientes:

– El nivel educativo adecuado para llevarlo a la práctica es bachillerato, tanto en la modalidad de ciencias de la naturaleza, de la salud y tecnología como en la de ciencias sociales. Dicho lo cual, no es óbice para que se pueda plantear a alumnos y alumnas de 4º de ESO seleccionados previamente por sus características personales, su nivel de maduración y sus capacidades específicas en el campo de las matemáticas; pero, en general, no nos parecen unos temas matemáticos accesibles para cualquier alumno o alumna del último curso de ESO.

– La extensión del guión, como casi todos los presentados en esta sección, es demasiada para ser trabajada en su totalidad por el alumnado. Esto lo podemos resolver dejando que elijan ellos los temas que prefieran, para profundizar sobre los mismos. La experiencia nos dice que es mejor un trabajo centrado en pocas actividades pero tratadas con profundidad, que otro que trata muchas cuestiones pero de manera superficial y sin mostrar producciones de trabajo matemático personal, o que se limitan a enumerar resultados matemáticos sin demostrar ninguno.

– Siempre queda abierta la utilización posterior de los trabajos elaborados. No debe desaprovecharse la posibilidad de encomendar, a los autores de las mejores producciones, hacer una presentación con textos e imágenes, utilizando las TIC, que se pueda utilizar como charla, conferencia o taller para una semana cultural o para el día escolar de las matemáticas en nuestro centro educativo.

– Ni que decir tiene que, dada la temática de la obra que nos ocupa, la propuesta didáctica se centra en temas relacionados y conectados con el tratamiento del azar y el control de fenómenos aleatorios, manejo de incertidumbre, etc, haciendo un recorrido por los principales personajes, temas y momentos históricos que han dejado huella en el desarrollo de esta parte del conocimiento y la cultura matemática.

– Debemos tener en cuenta, a la hora de plantear el guión de trabajo al alumnado, que el pensamiento probabilístico tiene unas peculiaridades, unos matices y unas dificultades específicas que no debemos pasar por alto. La opinión de Laplace a este respecto es muy esclarecedora:

> La teoría de las probabilidades obedece a consideraciones tan delicadas que no es raro que, partiendo de los mismos datos, dos personas lleguen a resultados distintos, sobre todo en las cuestiones más complejas (*Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades*, pág. 31).

Una vez tenidas en cuenta las cuestiones anteriores, estamos en condiciones de pasar a la acción planteando a nuestros alumnos y alumnas la experiencia alucinante de la lectura de la obra y el trabajo posterior sobre guión siguiente:

Demasiadas manos… ¡para perder!

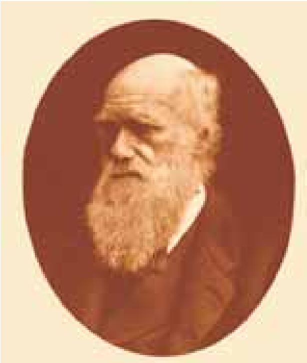
> Hay 133 millones de manos posibles que se pueden hacer con 7 cartas. De estos 133 millones de cartas, sólo 224.848 son cuatro del mismo valor. Por lo tanto, sólo hay un 0,16% de posibilidades de conseguir un cuádruple: 595 a 1.
>
> ¿Qué pasa con la escalera del color?
>
> Sólo hay 17.238 combinaciones de siete cartas que pueden formar una escalera de color de cinco cartas. Un 0,013% de probabilidades. Una en 7.761 manos (pág. 19).

Si nuestro objetivo fuera sólo leer la novela, seguramente que habríamos pasado por alto los resultados que aparecen en la cita anterior, pero, como también pretendemos estudiar algunos aspectos de las matemáticas, no los podemos dar por buenos sin más.

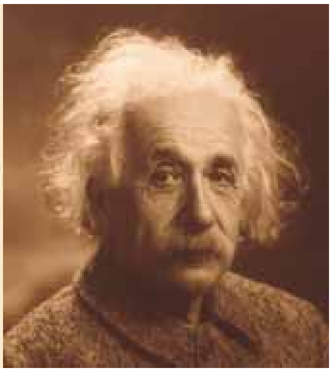
a. Veamos, ¿cuántas manos de 7 cartas se pueden hacer con un baraja de 52 cartas? Si nos molestamos en calcularlas, veremos que son 133.784.560, número que no coincide con el dato de la novela. Averigua cómo se puede obtener este resultado.

b. En cualquier caso, no debemos ser muy severos, porque el contexto en el que aparece ese resultado se presta al manejo de aproximaciones, y 133 millones no está mal, aunque… ¿estaría mejor haber dicho 134 millones? Da tu opinión razonada sobre el asunto.

   También nos dice que hay 224.848 manos (no cartas, como aparece en el libro… ¿será un error de traducción?) en los que hay cuatro cartas del mismo valor. Aquí sí que las cosas no cuadran, porque realmente hay 5.396.352 formas de obtener cuatro cartas del mismo valor al coger siete de ellas de una baraja de 52 cartas.



Darwin



Einstein

Schrödinger

Heisenberg

c. ¿De dónde sale el resultado que te ponemos? Nuestro personaje está bastante equivocado... ¿Será que no es tan buen calculador como nos quiere hacer creer el autor de la obra? Da tu opinión al respecto.

Ahora te proponemos que calcules cuántas manos de siete cartas pueden formar escalera de color de cinco cartas.

d. ¿Realmente hay 17.238 combinaciones como pone el libro?

Como puedes ver no hay mucha exactitud, que digamos, a la hora de asignar resultados calculados por nuestro personaje principal...

e. Una última cuestión: ¿cuántas manos de siete cartas contendrán 5 de ellas del mismo palo?

La Criptografía también forma parte de las matemáticas

> Fue el director de criptografía quien dio con la solución (pág. 33).
>
> ...escribió una nota al director de criptografía... (pág. 110).

Como decimos en el título, la Criptografía es una de las partes de las matemáticas que se ha desarrollado muchísimo en el último siglo: las guerras mundiales, las tarjetas de crédito, el envío seguro de información por internet y otros muchos temas de actualidad están relacionados con la Criptografía.

a. Averigua qué es la Criptografía y qué relación tiene con los temas enumerados anteriormente. ¿De dónde viene su nombre?

En el Massachussets Intitute of Techcnology, MIT para los amigos, se ha trabajado mucho en Criptografía. De él provienen las siglas RSA, que se corresponden con los apellidos de tres personas que crearon un sistema de...

b. Ahora te toca a ti. ¿Qué es el sistema RSA? ¿Quiénes lo crearon? ¿Qué relación tiene con la Criptografía?

Los personajes RSA lanzaron un desafío a la comunidad matemática del mundo...

c. ¿Qué es el número *RSA 129*? ¿Qué desafío se planteó con ese número? ¿Cuánto tiempo tardaron los matemáticos de todo el mundo en resolverlo?

d. Recopila información y explica por qué los números primos son tan importantes en la Criptografía.

Un mundo probabilístico

> Heisenberg se equivocó (pág. 93).
>
> ¿Ahora me sales con que niegas la evolución? (pág. 95).
>
> Maxwell demostró que la segunda ley [de la Termodinámica] sólo era probabilísticamente cierta, o que era verdad la mayor parte del tiempo (pág 97).

A lo largo de las páginas citadas anteriormente se van desgranando los nombres de varios científicos que contrapusieron:

Creacionismo y evolución
Determinismo e incertidumbre
Verdad absoluta y verdad probabilística

a. Reflexiona sobre estas ideas y expón lo que opinas de cada una de ellas.

b. Relee la página 94 y haz un comentario sobre lo que opinarían de las ideas anteriores los físicos newtonianos.

c. Vuelve a leer la página 114 y relaciona el Principio de Incertidumbre de Heisenberg con el gato de Schrödinger.

¿Merece la pena jugar con esperanza a la quiniela de futbol?

> La manera de calcular lo que espero ganar si pongo un dólar por un cupón [de la loto] es ésta: multiplicaría... (pág. 43).

Vuelve a leer, en el libro, la cita anterior y su continuación. Estos cálculos, en matemáticas, sirven para conocer lo que se denomina *Esperanza Matemática* de ese experimento aleatorio (en este caso el juego de la loto).

Calcula la esperanza matemática del juego que consiste en acertar los 15 resultados de la quiniela futbolística. ¿Cuánto deberías obtener como premio para que el juego fuera equitativo y mereciera la pena jugar?

El interés de una deuda ... ¡a la mafia rusa!

> Por cierto, ¿cuánto es el interés?
>
> El habitual. Cinco por ciento al día, compuesto semanalmente (pág. 77).

Posiblemente sea necesario explicar las palabras anteriores: compuesto semanalmente significa que los intereses generados por la deuda se acumulan cada semana al capital, para volver a generar nuevos intereses en el futuro. Todo esto teniendo en cuenta que cada día los intereses suponen un 5% del capital o, en el caso del protagonista, un 5% de la deuda.

> Era martes, le debía a Nikolaev once de los grandes desde hacía dos días. Dado que Nikolaev cargaba el 5% de interés por semana, ahora Caine le debía 11.157. Estaba con el agua al cuello.
>
> En el camino de regreso desde el hospital, había vaciado su cuenta de ahorros. Todo lo que tenía eran 438,12 $, menos que el interés de una semana (pág. 100).

Vamos a ayudar a Caine a repasar las condiciones de su préstamo y a calcular lo que le suponen en sus mermadas arcas.

a. Al 5% de interés semanal, ¿cuánto interés generan 11.000 $ en dos días? La cifra de deuda de 11.157 $, ¿es correcta?

b. ¿Es verdad que 438,12 $ no llegan para pagar el interés de una semana?

c. ¿Es lo mismo el 5% al día, compuesto semanalmente, que el 5% semanal? Explica razonadamente lo que te parece.

En la página 112 nuestro protagonista habla de devolver 2.000 $ semanales durante 7 semanas.

d. ¿Es más o menos lo mismo que si pagara los intereses de todo ese tiempo?

Una ayuda siempre es buena ...

> Diablos, si tú no le hubieses ayudado con el álgebra, probablemente hubiese tenido que abandonar el instituto (pág. 163).

Este es un buen momento para echar la vista atrás y reflexionar sobre algo que conoces desde hace varios años: el Álgebra.

a. ¿Qué es el Álgebra? ¿De dónde procede el nombre?

Seguro que al contestar las cuestiones anteriores habrás encontrado el nombre de un personaje medieval muy relacionado con el álgebra y con la palabra algoritmo.

b. ¿A quién nos estamos refiriendo? Recoge los principales datos biográficos del personaje y sus aportaciones en el campo de las matemáticas.

c. Explica en qué consistían, para el personaje anterior, la Almukábala y la Algebra.

El problema del cumpleaños

> La teoría de las probabilidades no es más que la vida expresada en números (pág. 103).

Como puedes ver en esa página y las siguientes, los personajes nos dan una clase práctica sobre el cálculo de probabilidades; en este caso con unos resultados sorprendentes.

Se trata de calcular la probabilidad de que varias personas cumplan años el mismo día del año. Repasando las explicaciones del libro, contesta razonadamente a las siguientes cuestiones, justificando con precisión cada uno de los pasos dados y de los resultados obtenidos:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo día?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que tu cumpleaños coincida con el de algún compañero o compañera de clase? ¿Y cuál la de que no coincida con el cumpleaños de nadie de tu clase?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que tu cumpleaños y el de otro de tu clase (que no nació el mismo día que tú) sean diferentes a los del resto de compañeros y compañeras de clase? ¿Y la de que alguno de vuestros cumpleaños coincida con el de algún otro de la clase?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que todas las personas de tu clase cumplan años en días diferentes? ¿Y la de que al menos haya dos que coincidan?

Según dicen los personajes de la novela en un pasaje cercano al de la cita, las moralejas de este problema son dos:

1. Cuando mayor es la muestra, mayor es la probabilidad de coincidir.
2. La teoría de las probabilidades nunca miente.

Reflexionando sobre estas dos conclusiones, sería muy interesante que aportaras tus ideas sobre ello:

e. ¿Te parecen adecuadas?

f. ¿Podría darse el caso de que, en un grupo de personas, la probabilidad de que haya dos, al menos, que cumplan años el mismo día sea mayor que 0,75? ¿Cuántas personas, como mínimo deberían formar parte del grupo?

A vueltas con el Determinismo

> Si lanzas una moneda al aire, tú dirás que el hecho de que salga cara o cruz es una cuestión de pura suerte o del azar, ¿correcto?
>
> Pues te equivocas. Si fueras capaz de medir todos los factores físicos que intervienen cuando lanzas una moneda: el ángulo de la mano, la distancia al suelo, [...] podrías predecir con exactitud del ciento por ciento el resultado de la tirada, porque la moneda está sujeta a las leyes de la física newtoniana, que son absolutas (pág. 210).
>
> Es muy bonito en teoría, pero es algo que no funciona en la práctica (pág. 211).

Vuelve a leer las páginas 208 a 211 de *El Teorema* y posiciónate al respecto. ¿Es posible predeterminar el resultado del lanzamiento de la moneda? Justifica con argumentos tu contestación.

El juego de la loto

> No podía explicar por qué el 6, 12, 19, 21, 36, 40, más 18 eran sus números…como enormes números de neón detrás de sus párpados (pág. 74).

Nos vamos a centrar en el juego de la loto o la lotería primitiva, y vamos a calcular algunas probabilidades que, estamos seguros, muchas personas están muy interesadas en conocer.

a. Cuál es la probabilidad de acertar los seis números de la combinación ganadora?

b. ¿Y la de acertar los 7 números que forman la combinación ganadora más el número complementario?

c. ¿Cuál debe ser la ganancia esperada o esperanza matemática de este juego?

d. Si hubiera un sorteo cada minuto y cada vez saliera una combinación nueva, ¿cuánto tiempo tardaríamos en completar todas las combinaciones posibles?

Simeon Poisson

El 27 de noviembre de 1754 moriré

> Calculó que dicha fecha sería el 27 de noviembre de 1754. Y cuando ese día llegó, tal como había predicho, De Moivre falleció (pág. 211).

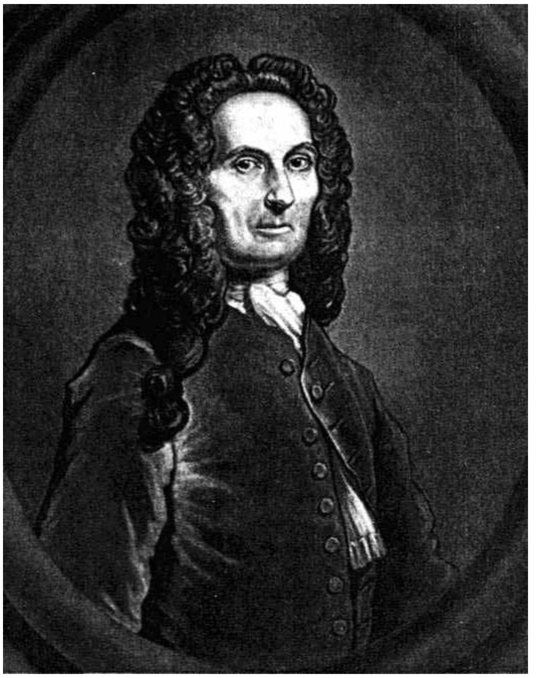
Parece realmente increíble, pero así debió ocurrir. Aunque sea imposible de predecir… ¿o no es tan imposible?

a. Elabora una pequeña biografía de Abraham De Moivre, fijándote en especial en su relación con la Estadística y la Probabilidad.

Por lo que te puede sonar el nombre de *De Moivre* es por una fórmula que aparece en las matemáticas de Bachillerato, concretamente en el tema de los números complejos, y que se denomina *fórmula de De Moivre*, que sirve para calcular la potencia de un número complejo.

b. Escribe la Fórmula de De Moivre. ¿Sabrías demostrar su validez utilizando el método de inducción completa? Como ayuda te podemos sugerir que recuerdes las fórmulas de trigonometría para calcular el coseno y el seno del ángulo suma de dos: $\cos(a+b)$ y $\operatorname{sen}(a+b)$; las vas a necesitar para la demostración.

c. Explica la paradoja de De Moivre



A. de Moivre

LITERATURA Y MATEMÁTICAS ■

Nota final: Las posibilidades didácticas de esta obra no acaban aquí, y originalmente habíamos pensado en unas cuantas actividades más. Para no alargar excesivamente la extensión del artículo y de la sección, dentro de la revista, hemos decidido presentar las actividades que quedan en un próximo número de SUMA. Atentos aquellos lectores que estén interesados en el tema.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Dejando a un lado Internet, que en muchos casos es lo más parecido a la jungla, proponemos algunos títulos interesantes para consultar y extraer información. Desde el punto de vista histórico es imprescindible el libro de Laplace y muy útil el de Mankiewicz, aunque pueden encontrarse muchas cosas en los innumerables libros de historia de las matemáticas. Desde el punto de vista didáctico los primeros libros de Miguel de Guzmán, José Colera y Adela Salvador, según va pasando el tiempo, se están convirtiendo en pequeñas joyas. Por último, desde el punto de vista científico y de divulgación, el libro de Sautoy es fascinante, aunque su tema central es la hipótesis de Riemann; para nuestro trabajo es muy útil la parte que desarrolla muchas ideas de divulgación sobre la Criptografía.

BERGASA, J. (2003): *Laplace. El matemático de los cielos*, Nivola libros y ediciones, S. L., Madrid.

LAPLACE, P. S. de (1985): *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*, Alianza Editorial, Madrid.

GUZMÁN, M. de; COLERA, J; SALVADOR, A. (1987): *Bachillerato 1. Matemáticas*, Ediciones Anaya S. A, Madrid.

GUZMÁN, M. de; COLERA, J; SALVADOR, A. (1988): *Bachillerato 3. Matemáticas*, Ediciones Anaya S. A., Madrid.

GUZMÁN, M. de; COLERA, J; SALVADOR, A. (1989): *COU. Matemáticas II Opciones C y D*, Ediciones Anaya S. A., Madrid.

MANKIEWICZ, R., (2000): *Historia de las matemáticas*, Ed. Paidós Ibérica, Barcelona.

SAUTOY, M. du. (2007): *La música de los números primos*, Ed. Acantilado, Barcelona.

suma+ 60
Febrero 2009, pp. 117-121

Evangelista Torricelli: un precursor del cálculo

Hace 400 años, el 15 de octubre de 1608, nacía Evangelista Torricelli, en la ciudad de Faenza, provincia de Ravena, al nordeste de Italia, famosa en otro tiempo por sus fábricas de porcelana y mayólica. Fue uno de esos científicos renacentistas capaz de abarcar amplias ramas del saber, si bien es conocido sobre todo como físico. Ocurre en ocasiones que un científico obtiene tales logros en alguna de sus facetas que permanecen ocultas las demás. ¿Cuál fue el trabajo matemático de Torricelli?

Evangelista era el primer hijo de los tres que tuvo el matrimonio formado por Gaspare Torricelli, obrero textil, y Caterina Angetti, humilde familia de escasos recursos económicos. Fue mérito de sus padres darse cuenta de su talento, por lo que decidieron darle una educación adecuada. Como no tenían medios para ello, se lo encomendaron a su tío Jacobo, hermano del padre, fraile Camaldulense, que le inició en el estudio de las humanidades.

En 1624, entró en un colegio de los Jesuitas, se cree que en el propio Faenza, y allí estudió Matemáticas y Filosofía durante dos años. Posteriormente, fallecido su padre, fue enviado a Roma, a finales de 1626 o quizá ya en 1627, para estudiar con el fraile Benedictino Benedetto Castelli, según el acuerdo que con este había llegado su tío Jacobo. Allí se trasladó la familia Torricelli, la madre y los dos hermanos, para estar al lado de Evangelista. Castelli era uno de los primeros discípulos de Galileo, que había sido llamado por el Papa Urbano VII para impartir clases de Matemáticas en el Colegio Universitario de Sapienza.

Santiago Gutiérrez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
hace@revistasuma.es

Torricelli se convirtió en secretario particular de Castelli, hasta 1632, cargo que le servía para pagar las enseñanzas recibidas. Pero grandes debieron ser sus progresos, ya que más tarde fue encargado por el propio Castelli para sustituirle en sus clases (de Matemáticas, Mecánica, Hidráulica y Astronomía), cuando este debía ausentarse de Roma.

En una de esas ausencias, Galileo escribió una carta a Castelli, que, al encontrarse fuera de Roma por cierto tiempo, contestó Torricelli, explicando la ausencia de Castelli, el 11 de septiembre de 1632. Pero, gran admirador de Galileo y firme defensor de sus posiciones, deseoso de establecer un contacto científico con él, aprovechó la oportunidad para informarle de sus propios trabajos matemáticos. Efectivamente, Galileo era un sabio muy reputado en los ambientes científicos, tenía información de primera mano, ya que había leído los textos clásicos de Apolonio, Arquímedes, Ptolomeo, Teodosio,..., y casi todo lo escrito por los matemáticos contemporáneos, Tycho Brahe, Kepler, Copérnico, Regiomonta-no,... Por otra parte, Torricelli había leído y estudiado a fondo el *Diálogo sobre los principales Sistemas del Mundo, ptolemaico y copernicano*, que Galileo había escrito seis meses antes. Fascinado como estaba por la astronomía, tuvo ocasión entonces de mostrarle a Galileo todo su apoyo, dada su convicción de que Copérnico estaba en lo cierto al afirmar que era la Tierra la que giraba alrededor del Sol y no al revés.

En 1633, la Inquisición prohibió la venta del *Diálogo...*y ordenó comparecer en Roma a Galileo. Tras el juicio, Torricelli se dio cuenta de que aquel era un terreno peligroso, por lo que decidió orientar sus esfuerzos hacia las Matemáticas, que planteaban menos incertidumbres.

Galileo publicó en 1638 sus *Diálogos sobre la nueva ciencia*, y Torricelli los leyó detenidamente, tanto que le inspiraron algunos desarrollos a partir de los principios mecánicos establecidos en ellos por Galileo, y que recogió en su escrito *De motu gravium*. En 1641, Torricelli pidió su opinión a Castelli sobre el contenido de este trabajo, y quedó tan impresionado que escribió a Galileo, a su casa de Arcetri, cerca de Florencia, donde este vivía, bajo la vigilancia de dos oficiales de la Inquisición, confinado por el Papa tras el juicio condenatorio a que había sido sometido. Poco después, en un viaje que hubo de realizar Castelli, de Roma a Venecia, pasó por Arcetri, el 10 de abril de 1641, y entregó a Galileo una copia del manuscrito de Torricelli, al tiempo que le solicitaba lo emplease como secretario. Pero la muerte de su madre retrasó la incorporación de Torricelli a su nuevo puesto, hasta el 10 de octubre de ese mismo año. Allí vivió con Galileo, ejerciendo de amanuense del genio que ya entonces llevaba cinco años dominado por una ceguera total. Apenas tres meses fue el tiempo que disfrutó Torricelli del contacto con Galileo, al que tanta admiración profesaba, pues el 8 de enero del siguiente año de 1642, moría Galileo, hacia las cuatro de la madrugada, sin haber perdido nunca la curiosidad por los problemas de la ciencia que habían ocupado toda su vida.

Tras la muerte de Galileo, y a instancias del gran duque Fernando II, Torricelli, en lugar de regresar a Roma, según era su deseo, se quedó definitivamente en Florencia, como filósofo y matemático del gran duque y profesor de Matemáticas de la Academia.

En 1643, descubrió Torricelli el principio del *barómetro*, que demostraba la existencia de la presión atmosférica, y por el que principalmente es recordado en la actualidad. Más tarde, el francés Pascal confirmaría este principio realizando mediciones a distintas alturas. Precisamente, en honor de Torricelli se designó por *torr* la unidad de presión atmosférica. Así mismo, demostró la existencia del vacío, hacia el cual sentían los científicos un temor reverencial, el *horror vacui* como denominaban a este temor.

El contexto de la época

El siglo XVII, preocupado por los problemas del movimiento (distancia, velocidad instantánea y aceleración) estaba dominado por el estudio de las curvas a que aquél podía reducirse: su representación, su longitud, su área acotada, la cuestión de máximos y mínimos, o el volumen acotado por la rotación de superficies. En torno a estos problemas, surgió una pléyade de matemáticos de tanto talento y tanta producción que hizo llamar a este el *siglo de los genios*, quizá solo comparable a la época griega. No es casualidad que todo ello vino precedido del conocimiento y el estudio de los clásicos. Por otro lado, las intercomunicaciones de los matemáticos eran muy frecuentes. El matemático francés Mersenne se constituyó en un centro eficaz de comunicaciones. Todos estaban conectados con él, y a través suyo, se conocían y conectaban entre sí.

Era conocido, desde luego, el método de exhaución, empleado por Arquímedes en sus cálculos de áreas y volúmenes.

Kepler y Galileo habían abordado problemas de áreas y volúmenes, esencialmente como suma de infinitos elementos infinitesimales. Incluso Galileo dedicó muchos esfuerzos al problema del continuo que implicaba el trabajo con tales métodos, pero sin llegar a resolverlo.

En 1641, obtiene Torricelli uno de sus resultados más originales y sorprendentes, demostrando que la rotación de curvas de longitud infinita puede producir sólidos de volumen finito.

Buenaventura Cavalieri, discípulo de Galileo, se interesó por los problemas del cálculo y desarrolló sus ideas con el conocido como *método de los indivisibles*, que publicó en su trabajo *Geometría Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promota* (Geometría superior mediante un método bastante desconocido, los indivisibles de los continuos).

Esta cuestión de los indivisibles tuvo muchas críticas, en lo referente tanto al problema del continuo como al cambio de dimensión, ya que consideraba las figuras planas (dimensión 2) formadas por segmentos rectilíneos (dimensión 1) y los cuerpos (dimensión 3) formados por figuras planas (dimensión 2). Todo ello sin contar con que no definía lo que entendía por indivisible. Sus resultados eran correctos, en su mayoría, si bien quedaba claro que Cavalieri no se preocupaba en absoluto del rigor matemático ni de resolver las dificultades lógicas de su método. De ello, Cavalieri era perfectamente consciente, ya que él mismo y Torricelli, discípulos ambos de Galileo, encontraron e imaginaron ejemplos en que los indivisibles llevaban a resultados absurdos.

La cuestión cambió de tono cuando, en lugar de segmentos como componentes de figuras planas, se pasó a considerar pequeños rectángulos, y, en lugar de figuras planas como componentes de los cuerpos, se pasó a considerar pequeños cilindros. Pero, para esto hay que esperar a los comienzos del siguiente siglo.

El cálculo integral en Torricelli

Torricelli aborda los problemas de cuadraturas y curvaturas con sumo cuidado, habida cuenta de las críticas sufridas por Cavalieri. No es que no emplee el método de los indivisibles, que sí lo emplea, y tampoco que resuelva todas las dificultades que este método lleva consigo, que no las resuelve, pero lo que hace, cuando obtiene un resultado por la vía de los indivisibles, es comprobarlo añadiendo nuevas demostraciones por el método de exhaución de Arquímedes.

En su trabajo *De dimensione parabolae*, Torricelli lleva a cabo veintiuna demostraciones de la cuadratura de la parábola. Pero, junto a once de ellas por el método de los indivisibles ofrece otras diez por el método de exhaución.

En 1641, obtiene Torricelli uno de sus resultados más originales y sorprendentes, demostrando que la rotación de curvas de longitud infinita puede producir sólidos de volumen finito. Para ello, tal y como indica en su trabajo *De solido hiperbólico acuto*, hace girar una rama de una hipérbola equilátera alrededor de una asíntota, que ha tomado como eje, y la corta, en un punto genérico de la curva de abscisa a, por un plano perpendicular al eje de giro. El volumen del sólido resultante, que llegó a nuestros días con el nombre de *Trompeta o Cuerno de Gabriel*, es finito e igual al volumen de un cilindro de altura a y radio $1/a$. En nuestro lenguaje actual, si es $y=1/x$ la ecuación de la hipérbola, lo expresaríamos así:

$$\pi\int_a^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\pi\frac{1}{a}$$

Se trata del primer caso en que aparece una integral impropia. Este trabajo, se publicó en 1644 como parte de su *Opera geométrica*.

Esta misma obra incluye otro trabajo titulado *De infinitis hyperbolis*, donde se encuentra el primer teorema general del cálculo, bien que en términos geométricos, y que hoy expresamos por la fórmula:

$$\int_0^a x^n\,dx=\frac{a^{n+1}}{n+1}$$

A este mismo resultado había llegado Cavalieri, pero solo para valores enteros de n. Lo que consiguió Torricelli fue la generalización para valores racionales de n. Incluso parece que Fermat hubo conseguido lo mismo que Torricelli, aunque no queda clara la prioridad, debido a que Fermat no publicó nada en vida (murió en 1665). Lo más probable, como ocurrió tantas veces con el Cálculo, es que ambos hubieran obtenido sus resultados independientemente.

Otro de los centros de interés de Torricelli fue la curva descrita por un punto de una circunferencia al rodar sobre una recta tangente a ella. Ya Galileo había trabajado sobre el problema de esta curva, incluso le había puesto el nombre de cicloide con que desde entonces la conocemos.

En 1643, envía Torricelli a Mersenne la cuadratura de la cicloide, demostrando que el área encerrada por un arco de la curva es tres veces el área del círculo que la engendra. Hoy parece claro que Roberval había demostrado este mismo resultado por el método de los indivisibles, tan querido para él, pero que no lo había publicado. Torricelli por su parte ofreció dos cuadraturas diferentes, una por el mismo método de los indivisibles de Cavalieri, y otra por el método de exhaución de Arquímedes.

El cálculo diferencial en Torricelli

Al estudiar la cicloide, Torricelli se ocupó de su cuadratura pero también trató de la determinación de la tangente en un punto de la curva, es decir, que abordó los dos grandes problemas que se hallan en la base del cálculo diferencial e integral.

Al principio, consideró la tangente, al estilo clásico, como la recta que tiene un solo punto de contacto con la curva. Por este camino no decidió gran cosa sobre el problema, llegando incluso a contradicciones.

En 1643, envía Torricelli a Mersenne la cuadratura de la cicloide, demostrando que el área encerrada por un arco de la curva es tres veces el área del círculo que la engendra

Pero es la física la que algo más tarde le sugirió la solución. Adoptó, en efecto, el punto de vista dinámico, según el cual un punto P de la curva está sometido a dos movimientos, de traslación, según la recta por la que se desliza el círculo, y de rotación alrededor del centro O del círculo. Representó la velocidad del movimiento de traslación mediante un segmento paralelo a la recta, y la velocidad de rotación por un segmento tangente en P al círculo. Al ser iguales las velocidades, lo son también ambos segmentos, y la composición de las dos velocidades nos da la tangente a la cicloide en P, esto es, la bisectriz de los dos segmentos.

Los trabajos sobre la cicloide, que luego incluiría en su *Opera Geométrica*, le provocaron serias disputas con Roberval, quien le acusó de plagio, pues Torricelli no hacía mención del hecho de que Roberval había llegado a los mismos resultados antes que él. Parece ser que este no había publicado sus resultados y es que no quería hacerlo, debido a que pensaba utilizarlos en los exámenes competitivos que se convocaban cada tres años, para ocupar la cátedra de Matemáticas del *Collège Royal*, lo cual, por cierto, le permitió a Roberval ocupar esa cátedra desde 1634 hasta su muerte en 1675, o sea, durante cuarenta años. Una vez más, parece que ambos geómetras habían conseguido el mismo resultado independientemente uno del otro, y si bien es cierto, según lo que hoy sabemos, que la prioridad del descubrimiento hay que concedérsela a Roberval, no lo es menos que la prioridad de la publicación le corresponde a Torricelli.

En sus trabajos, Torricelli llegó a vislumbrar relaciones tan importantes en el cálculo como el teorema fundamental que expresa la relación de reciprocidad entre la diferenciación y la integración

Otros trabajos

Concibió las curvas geométricas como representación de movimientos físicos reales. Así, estudió las trayectorias parabólicas que siguen los proyectiles al ser disparados, desde un punto fijo, con velocidad inicial constante, y con ángulos de elevación distintos. Descubrió que la envolvente de todas estas parábolas es otra parábola, y que el lugar geométrico de los vértices de todas las parábolas es también otra parábola.

En su *De infinitis spirabilus*, estudió las propiedades fundamentales de la espiral logarítmica (denominada por él geométrica, por oposición a la espiral aritmética de Arquímedes), naturalmente utilizando siempre métodos geométricos y mecánicos. En 1645, consiguió trazar cada uno de los arcos de la espiral, demostrar la cuadratura de la superficie encerrada por la curva, determinar la tangente en un punto de la misma y efectuar la rectificación de la curva, cosa esta última, por cierto, que es la primera vez que se consigue con curva alguna.

Trazó la gráfica de la función logarítmica $y = \log x$, calculó el área limitada por la curva y sus asíntotas, y el volumen del sólido obtenido al girar en torno a un eje.

En fin, Torricelli nos dejó abundantes trabajos que dan cuenta de la grandeza de su talento matemático.

En sus trabajos, Torricelli llegó a vislumbrar relaciones tan importantes en el cálculo como el teorema fundamental que expresa la relación de reciprocidad entre la diferenciación y la integración. Así, considera, como Galileo, la representación del movimiento uniformemente acelerado, mediante un diagrama que proporciona la velocidad (eje de ordenadas) en función del tiempo (eje de abscisas). Compara este diagrama con el que proporciona el espacio (eje de ordenadas) en función del tiempo (eje de abscisas). Considerando conjuntamente ambos diagramas deduce que las ordenadas de la curva del espacio son proporcionales a las áreas limitadas por la curva de la velocidad, mientras que las ordenadas de la curva de la velocidad son las pendientes de las tangentes a la curva del espacio.

¿No se aprecian en esta observación indicios de la relación de reciprocidad entre la diferenciación y la integración, al menos desde el punto de vista mecánico?

Torricelli fue sin duda uno de los matemáticos más prometedores del siglo XVII y precursor del cálculo que iba a venir. Si hubiera dado el paso de aritmetizar sus métodos, se habría aproximado mucho al concepto de límite y con unos años más de vida hubiera podido ser el inventor del cálculo infinitesimal.

Solo dos razones, pues, impidieron seguramente que alcanzara cotas más altas en su vida. La primera, que se movía exclusivamente en terrenos de la geometría y la mecánica. La segunda, que una pleuresía acabó con su vida en el año de 1647, en la ciudad de Florencia, con solo 39 años de edad, en plenitud de sus facultades intelectuales.

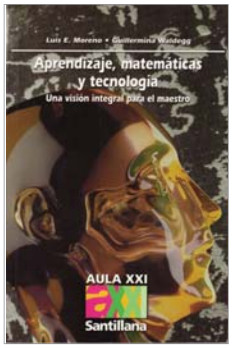
HACE

Publicaciones recibidas

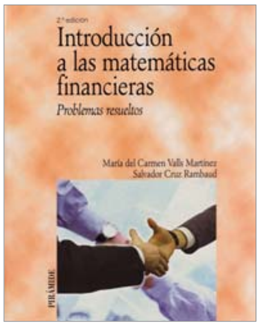
DIALÓGICA. REVISTA MULTIDISCIPLINARIA
Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escolar Lara"
UPEL Maracay
Vol. 3 n.º 1, Julio 2007
ISSN 1690-8961

D'ALEMBERT
I LUMI, L'EUROPA
LES LUMIÈRES, L'EUROPE
Bollettino di storia delle scienze matematiche
Fabrizio Serra, editore
N.º 2, Pisa, diciembre 2008
ISSN: 0392 - 4432

COMPTETENCIAS MATEMÁTICAS DESDE UNA PRESPECTIVA CURRICULAR
Luis Rico Romero y José Luis Lupiáñez
Alianza Editorial
Madrid, 2008
ISBN:978-84-206-8409-3
368 páginas



APRENDIZAJE, MATEMÁTICAS Y TECNOLOGÍA
Luis E. Moreno y Guillermina Waldegg
Editorial Santillana
México, 2004
ISBN:970-29-1198-2
114 páginas



INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS FINACIERAS. Problemas resueltos
María del Carmen Valls y Salvador Cruz
Ediciones Pirámide
Madrid, 2009
ISBN:978-84-368-2255-7
672 páginas

FENT SERVIR L'ESTADÍSTICA
Pere Grima (Editor)
Facultat de Matemàtiques i Estadística de la UPC
Barcelona, 2008
ISBN:978-84-7653-216-4
248 páginas
Versión digital en catalán y castellano en:
http://www-fme.upc.edu

suma+ 60
Febrero 2009, pp.123-129

Las matemáticas de los músicos

La música crea orden en el caos; el ritmo impone unanimidad en la divergencia, la melodía impone continuidad en lo discontinuo, y la armonía impone compatibilidad en lo incongruente.

Yehudi Menuhin (1916 – 1999), violinista y director de orquesta

A estas alturas, insistir en la estrecha relación entre MÚSICA Y MATEMÁTICAS parece innecesario. Sin embargo, una cuestión es explorar el territorio común de estas disciplinas y otra bien distinta es el uso que los músicos hacen de las matemáticas porque, como ocurre en otros campos en los que éstas se aplican, los modelos y soluciones que proporcionan las matemáticas muchas veces son vistas como una aproximación a la práctica cotidiana. Por ejemplo, los primeros elementos con los que trabaja la música, las notas musicales, se definen para cada sistema de afinación con unas frecuencias muy precisas, pero el músico sabe que una pequeña alteración de estos valores no es grave. De hecho, en ocasiones sólo se llega al consenso de toda la agrupación si parte de los músicos alteran la afinación teórica. Por otro lado, hemos presentado la partitura como una fórmula matemática, entonces, ¿por qué dos orquestas o dos directores distintos hacen versiones tan diferentes de la misma obra? ¿Quiere decir esto que el músico debe restringir el uso de las matemáticas a los aspectos teóricos?

En esta sección intentaremos mostrar, de forma breve, que en realidad lo que ocurre es que los músicos manejan procesos matemáticos más complejos que los que normalmente se presentan en los trabajos de MÚSICA Y MATEMÁTICAS y, en la mayoría de los casos, deben incluir en los propios conceptos un grado de incertidumbre capaz de reflejar la imprecisión, los criterios personales e incluso el estado de ánimo del intérprete.

Para expresar esta idea, conviene que tengamos en cuenta la diferencia entre **azar** e **incertidumbre**. Aunque son dos palabras ligadas de forma más o menos directa con la probabilidad y en el leguaje ordinario muchas veces se confunden, el significado no es el mismo. Cuando se ponen en una urna 7 bolas rojas y 3 blancas, la probabilidad de sacar una bola roja es 7/10 mientras que la de sacar una blanca es de 3/10. Dicho de otro modo, en una extracción aleatoria se puede medir la suerte de sacar una bola blanca o una roja. Supongamos ahora que desconocemos la proporción de bolas de cada color y que sólo podemos realizar una extracción. En estas circunstancias ya no podemos medir la suerte. El fenómeno ya no se debe al azar, sino a la incertidumbre. Aquí trataremos la incertidumbre a la que no se le puede aplicar la probabilidad, porque precisamente ésta es la que aparece en la música, y en muchas manifestaciones de la vida real en las que participan las decisiones de personas.

Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

Sin entrar en cuestiones psicológicas (como estado emocional de cada uno de los intérpretes) ni en las características arquitectónicas o ambientales de las salas de audición, la propia partitura contiene diversas fuentes de incertidumbre que debemos tener en cuenta:

a. La altura de las notas: cada familia de instrumentos afina, de forma natural, en sistemas de afinación distintos. Por ejemplo, un La^{b} no designa una única realidad físico-acústica.

b. La grafía del pentagrama: en la música contemporánea el compositor tiende a expresar, mediante gráficos o notación no estándar, algunos efectos que no tenían cabida en la música clásica y que dan mayor grado de libertad al intérprete.

c. El tempo: a pesar de la tendencia actual a sustituir las designaciones tradicionales de tempos por indicaciones más precisas, que expresan pulsaciones por minuto, la imprecisión es inevitable, máxime cuando a estos se añaden términos que modifican la velocidad del movimiento de forma gradual (accelerando, ritardando, etc.).

d. Los matices: los términos que indican la intensidad del sonido (de menor a mayor, pianissimo, piano, mezzopiano, mezzoforte, forte, fortissimo) son imprecisos, sobre todo si se usan términos que aumentan o disminuyen gradualmente la intensidad del sonido (crescendo, decrescendo, diminuendo).

Fragmento de Solus, composición para trompeta hecha en 1975 por Stanley Friedman (1941 –)

A pesar de esto, lo cierto es que los soportes informáticos y la tecnología basada en modelos matemáticos responden de manera muy precisa a las necesidades de los músicos. A continuación veremos cómo una de las herramientas fundamentales de la Inteligencia Artificial, la lógica borrosa (*Fuzzy Logic*), es una de las claves que permite tratar con este tipo de incertidumbre.

Introducción a la lógica borrosa

A mediados de los años 60 Lotfi A. Zadeh (Azerbaiyán, 1921, actualmente profesor emérito de la Universidad de California en Berkeley) introduce[1] la Teoría de Conjuntos Borrosos, cuyo objetivo era proporcionar las bases del razonamiento aproximado utilizando premisas imprecisas como instrumento para formular el conocimiento. La idea principal contenida en un Conjunto Borroso (*Fuzzy Set*), que se encuadra dentro de la Lógica Multivaluada, es que el pensamiento humano utiliza 'etiquetas lingüísticas' que permiten que los objetos puedan pertenecer a una clase y a otra de forma suave y flexible. En la práctica, se habla de que alguien es *alto* o *bajo* sin que por ello el interlocutor deje de tener la información necesaria.

Para entender a qué nos referimos cuando hablamos de lógica borrosa, analicemos el siguiente ejemplo de B. Kosko:

> Sostened una manzana en la mano. […] Dadle un mordisco; masticad este trozo y tragáoslo.[…] El objeto que tenéis en la mano ¿es todavía la manzana? ¿Sí o no? Pegadle otro mordisco. El nuevo objeto ¿es todavía una manzana? […] La manzana pasa de serlo a no serlo, y a ser nada. Pero ¿cuándo ha pasado la línea que separa el ser manzana de no serlo? Cuando tenéis media manzana en la mano, tenéis tanto una manzana como no la tenéis. La media manzana es una manzana borrosa, gris entre el blanco y el negro. La borrosidad es grisura.

Aunque de forma implícita, la cuestión que se plantea en el ejemplo es que disponer de mayor información no quiere decir contar con más hechos. Con más información se describen mejor los hechos, pero no se tienen imágenes más claras sobre ellos. La incertidumbre, la borrosidad, se mantiene en los propios hechos.

En un conjunto clásico (booleano) se asigna el valor 0 ó 1 a

Lotfi A. Zadeh nombrado Doctor Honoris Causa por la Universidad Politécnica de Madrid, enero de 2007 cada elemento para indicar la pertenencia o no a dicho conjunto. Esta función, denominada función característica del conjunto, puede generalizarse de forma que los valores asignados a los elementos del conjunto caigan en un rango particular, y con ello indiquen el *grado de pertenencia* de los elementos al conjunto en cuestión. Esta función se llama *función de pertenencia* y el conjunto definido por ella se llama *conjunto borroso*.

La función de pertenencia μ_A por la que un conjunto A se define, se expresa formalmente como

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$$

Un grado de pertenencia nulo se interpreta como no pertenencia, el 1 como pertenencia en el sentido booleano y los números intermedios reflejan una pertenencia incierta, que será interpretada de diversos modos según cada aplicación. Así, la manzana entera del ejemplo tendrá un grado de verdad 1 para la afirmación "ser una manzana", mientras que la manzana de la que nos hemos comido parte puede tener grado de verdad 0,4, 0,3, etc. La potencia de esta teoría se debe a que a través de la pertenencia a un conjunto se puede describir gran número de situaciones. Para distinguirlos de los conjuntos clásicos, los conjuntos borrosos suelen expresarse mediante una tilde, es decir $\tilde{A}$ es un conjunto borroso y A es un conjunto booleano.

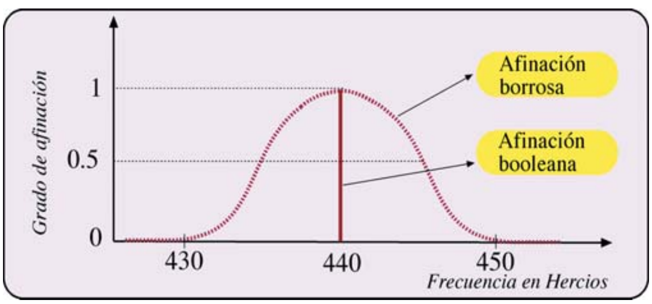
En el contexto que nos preocupa, si fijamos como nota patrón el La de 440 Hz., una nota de 442 Hz., desde el punto de vista de la lógica booleana, estaría desafinada. Sin embargo, para cualquier músico (o cualquier persona que la escuche) esta nota no tiene el mismo "grado de desafinación" que otra de 450Hz. Es decir, que el salto de afinado a desafinado el músico lo interpreta como un conjunto borroso en el que se pasa de una situación a otra de forma gradual. Lo importante es fijar cuán flexibles somos con ambos conceptos.

Pero antes de establecer los límites de flexibilidad, necesitamos introducir una idea más de lógica borrosa: los números borrosos. Si con la lógica borrosa todo es cuestión de grado, podría parecer que los números escapan de la "dejadez" de la borrosidad. Sin embargo, en realidad no es así. Pensemos en el número 0. El número cero pertenece al 100 por 100 al conjunto cero y no hay otro número que pertenezca a él. Pero, ¿qué pasa con los números cercanos al cero o que prácticamente son cero? En el mundo real, es razonable suponer que 0,001 es "casi 0" mientras que 35 no lo es. Bien, pues esto nos lleva a la idea de número borroso, que no es más que un caso particular de conjunto borroso al que le exigimos ciertas condiciones sobre la función de pertenencia.

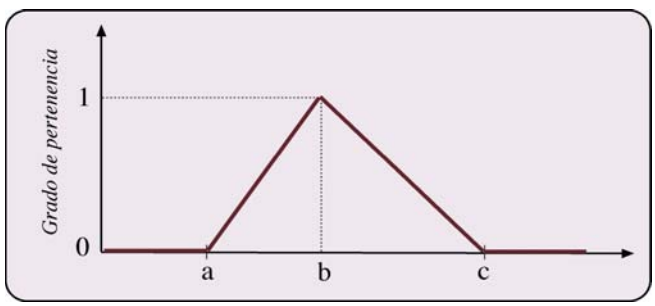
Un número borroso es un conjunto borroso cuya función de pertenencia es continua a trozos, convexa y existe algún valor para el que se alcanza el grado de pertenencia 1.

Los números borrosos que utilizaremos aquí son los más sencillos: los números borrosos triangulares. En ellos, la función de pertenencia tiene forma de triángulo, por tanto quedan perfectamente determinados por tres números reales que marcan dónde se encuentran los vértices, $\tilde{A} = (a,b,c)$.

Cualquiera que sea la magnitud que está representada, el valor *a* marca el nivel por debajo del cuál no estamos dispuestos a aceptar que pertenezca al concepto que tratamos, el valor *b* representa el valor cuya pertenencia es máxima y el valor *c* marca el máximo valor que aceptamos como perteneciente al concepto. Desde el punto de vista operativo, estos números son muy intuitivos y se pueden operar con facilidad.



Funciones de pertenencia y característica para la afinación clásica y borrosa



Función de pertenencia de un número borroso triangular

Aritmética de los números borrosos triangulares

Dados los números borrosos triangulares:

$$\tilde{A}=(a_1,b_1,c_1)\ ,\ \tilde{B}=(a_2,b_2,c_2)$$

y cualquier número real *k*, podemos operar de la forma siguiente:

$$\tilde{A}+\tilde{B}=(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)$$

$$\tilde{A}-\tilde{B}=(a_1,b_1,c_1)-(a_2,b_2,c_2)=(a_1-c_2,b_1-b_2,c_1-a_2)$$

$$k\cdot\tilde{A}=\left(\min\{k\cdot a_1,k\cdot c_1\},k\cdot b_2,\max\{k\cdot a_1,k\cdot c_1\}\right)$$

Los números borrosos triangulares, además presentan la ventaja de que al sumarlos, restarlos o multiplicarlos por un escalar, proporcionan un nuevo número borroso triangular, mientras que cuando efectuamos estas operaciones con números borrosos arbitrarios no conocemos, *a priori*, la forma del conjunto borroso resultante.

Entender las notas como conjuntos borrosos supone replantear muchos conceptos tradicionales de la Música que, normalmente, se generalizan de forma intuitiva

Las notas como conjuntos borrosos

Para el oído humano, la relación entre la magnitud de un estímulo físico y la percepción no es lineal. Se ha comprobado que en la zona central del campo de audibilidad, la sensación de altura es proporcional al logaritmo de la energía que produce la excitación (Ley de Weber-Fechner), por tanto podemos medir la diferencia de sensación acústica de la forma siguiente:

La distancia entre las notas de frecuencias f_1 y f_2 Hercios se calcula como

$$d(f_1,f_2)=1200\cdot\left|\log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right)\right| \text{ cents}$$

Los afinadores cromáticos electrónicos que utilizan los músicos, lo que hacen es medir la distancia de una nota respecto de la afinación perfecta. Estos afinadores, basados en las 12 notas del sistema temperado igual de 12 notas, dividen la octava en doce partes iguales. Cada una de estas partes tiene una amplitud de 100 cents. Si representásemos esta situación en un segmento, la nota afinada, *F*, ocuparía el punto medio y los extremos f_1, f_2 se obtendrían aumentando y disminuyendo 50 cents a la nota central, respectivamente.

Como los cents son unidades logarítmicas que hemos introducido a partir de la distancia anterior, para calcular f_1 hay que aumentar 50 cents a *F*, es decir,

$$1200\cdot\log_2\left(\frac{f_1}{F}\right)=50\Rightarrow f_1=F\cdot 2^{\frac{50}{1200}}=F\cdot 2^{\frac{1}{24}}$$

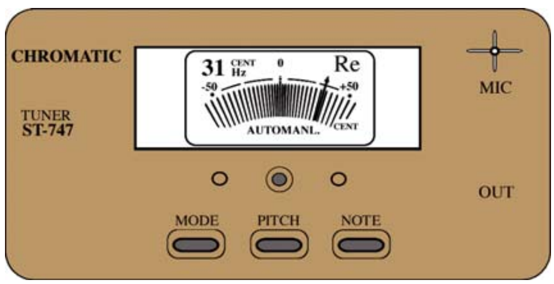
De forma similar, f_2 se obtiene disminuyendo 50 cents a *F*, es decir**,**

$$f_2=F\cdot 2^{\frac{-1}{24}}$$

Veamos en un ejemplo, cómo la desviación respecto de la nota central nos permite construir la función de pertenencia.

Ejemplo 1: Si se ha fijado como nota patrón el La_4=440 Hz, cuando el afinador detecta una nota *n,* cuya frecuencia es 299 Hz, la respuesta que proporciona el afinador es la siguiente:

Nota: Re (D), *Desviación*: 31,1702 cents



Respuesta de un afinador cromático al detectar un sonido de 299 Hz.

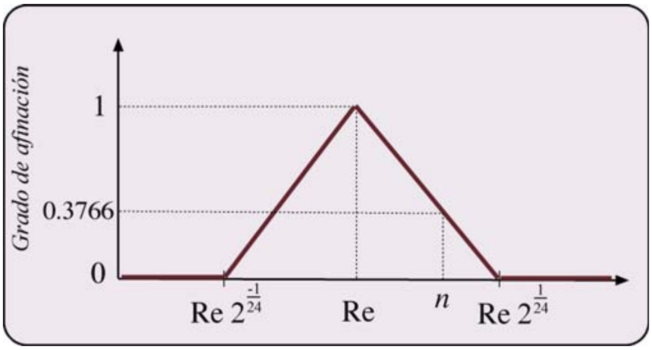
Para llegar a este resultado, el afinador localiza la nota afinada más próxima a *n* (en este caso el Re) y calcula la distancia entre *n* y el Re que resulta 31,1702 cents. Pero esta información se puede utilizar para responder a otra pregunta: ¿Cuál es el grado de verdad de la afirmación "299 Hz. es un Re"? Si la verdad absoluta tiene un grado 1, basta con calcular cuánto se desvía (en proporción) de este 1 para que tengamos la respuesta, es decir,

$$1-\frac{\text{Desviación}}{50}=1-\frac{31,1702}{50}=0,3766$$

Entonces, lo que hemos hecho es describir el Re como un número borroso triangular,

$$\tilde{Re}=\left(Re\cdot 2^{-1/24},\ Re,\ Re\cdot 2^{1/24}\right)$$

y analizar el valor que corresponde a *n* con la función de pertenencia de este número.



Función de pertenencia del Re y grado de afinación de 299 Hz.

Para generalizar esta idea y que sirva para todas las octavas, reducimos el estudio, como en los otros trabajos aparecidos en *Musymáticas*, a la octava [1, 2]. Vimos que para cualquier sistema de afinación, las notas se podían expresar como

$$2^{\beta},\ \beta\in[0,1]$$

Teniendo en cuenta la forma de medir distancias, el exponente del 2 nos da directamente la medida de la sensación que proporciona la nota.

Una nota musical borrosa se puede describir con un número borroso triangular

$$\tilde{2^{\beta}} = (2^{\beta-\delta}, 2^{\beta}, 2^{\beta+\delta})$$

donde 2^{β} *es la nota afinada (en el sentido clásico) y 1200δ es la imprecisión (en cents) que estamos dispuestos a asumir.*

Comparación de notas borrosas

Entender las notas como conjuntos borrosos supone replantear muchos conceptos tradicionales de la Música que, normalmente, se generalizan de forma intuitiva. Por ejemplo, por la forma en que han sido construidas las notas borrosas, podemos aceptar que una nota está afinada si lo está la frecuencia central del triángulo. Pero es evidente que en la Música, lo realmente importante es la relación de unas notas con otras.

Desde el punto de vista clásico, para comparar dos notas no hay más que medir la distancia (intervalo) entre ellas. En 1948, casi veinte años antes de que Zadeh introdujera los conjuntos borrosos, el musicólogo ruso N. A. Garbuzov (1880-1955) revolucionó el estudio de los intervalos musicales sugiriendo[2] el concepto de *zonas*[3] , en lugar de intervalos, en el contexto de la percepción. Se trató de un trabajo de laboratorio en el que a partir de miles de pruebas estableció bandas para los intervalos melódicos (las notas suenan una después de otra) y armónicos (las notas suenan al mismo tiempo).

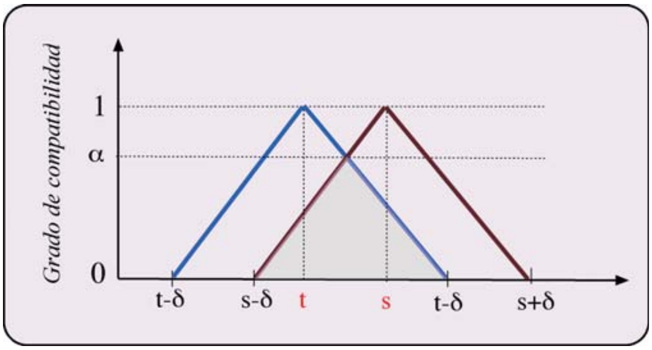
Intervalo	*Melódico*	*Armónico*
Unísono	(-12, 12)	(-30, 30)
Segunda menor	(48, 124)	(66, 130)
Segunda mayor	(160, 230)	(166, 230)
Tercera menor	(272, 330)	(266, 330)
Tercera mayor	(372, 430)	(372, 430)
Cuarta	(472, 530)	(466, 524)
Tritono	(566, 630)	(566, 630)
Quinta	(672, 730)	(672, 730)
Sexta menor	(766, 830)	(766, 830)
Sexta mayor	(866, 930)	(866, 924)
Séptima menor	(966, 1024)	(966, 1024)
Séptima mayor	(1066, 1136)	(1066, 1136)

Esto significa que, en la práctica, dos notas que distan entre –12 y 12 cents podemos suponer que son la misma nota (unísono) o si distan entre 372 y 430 cents, entre ambas hay un intervalo de tercera mayor. En un lenguaje actual, la teoría de Garbuzov podría simplificarse mucho diciendo que los intervalos se han convertido en conjuntos borrosos. Pero, ¿cómo podemos comparar dos notas sin tener que recurrir a miles de experimentos?

Si queremos comparar las notas

$$2^{\tilde{s}}=(2^{s-\delta}, 2^{s}, 2^{s+\delta})\ \text{ y }\ 2^{\tilde{t}}=(2^{t-\delta}, 2^{t}, 2^{t+\delta})$$

no hay más que pensar que serán más parecidas cuanto más parecidos sean sus triángulos; o dicho de otro modo: cuando haya mucha intersección entre los triángulos que representan las notas serán muy parecidas, y si la intersección es pequeña o vacía no lo son. Para hacer operativa esta idea, es más sencillo si nos quedamos sólo con los exponentes del 2 de cada nota (la parte que mide la sensación).



Grado de compatibilidad de dos notas borrosas

En general, el grado de compatibilidad entre dos números borrosos $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ se calcula como la posibilidad de que estos números sean iguales,

$$\mathrm{Pos}(\tilde{A}=\tilde{B})=\sup_x \min\{m_{\tilde{A}}(x), m_{\tilde{B}}(x)\}.$$

Sin embargo, como los números que representan a las notas son triangulares, el grado de compatibilidad de dos notas se puede obtener calculando el punto más alto de la intersección de los triángulos. De hecho, por un cálculo directo se comprueba (véase Liern, 2005) que este grado de compatibilidad es

$$Compat(2^{\tilde{s}}, 2^{\tilde{t}}) = 1 - \frac{|s-t|}{2d}$$

Aún así, a los músicos les resulta más cómodo calcular la compatibilidad a partir de las frecuencias de las notas directamente.

La compatibilidad entre dos notas borrosas cuya frecuencias centrales son f_1 y f_2 Hz. se calcula como

$$\mathrm{Compat}(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) = 1 - \frac{d(f_1, f_2)}{2\times\text{tolerancia en cents}}$$

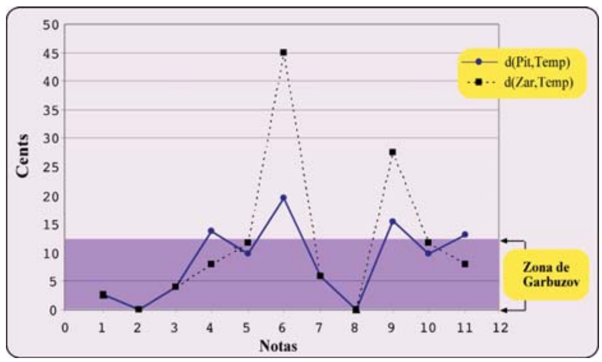
Ejemplo 2: Analicemos las compatibilidad de las notas, afinadas en los sistemas de Pitágoras, Zarlino (Justa Entonación) y Temperado, de un fragmento de Béla Bartók (1881 – 1945).

Fragmento de Música para cuerdas, percusión y celesta de Béla Bartók (1881 – 1945)

Las frecuencias de las notas del pentagrama en cada uno de los sistemas son las siguientes:

Nota	*Pitagórico*	*Justa Entonación*	*Temperado*
Mi	330	330	329,628
Mi#	352,397	343,75	349,228
Fa#	371,25	366,667	369,994
Fa##	396,447	381,944	391,995
Sol#	417,656	412,5	415,305
La	440	440	440
La#	469,863	458,333	466,164
Si	495	495	493,883

Si tomamos como patrón las notas afinadas en el sistema temperado de 12 notas, basta con observar las distancias entre cada una de las notas con su homóloga en el sistema temperado, para comprender que algunas son muy poco compatibles.



Distancia de las notas del pentagrama de Béla Bartók afinadas en los sistemas de Pitágoras y de Zarlino respecto de las mismas notas en el sistema temperado

En la tabla siguiente mostramos los resultados obtenidos al aplicar la fórmula anterior para calcular la compatibilidad de las notas del pentagrama.

Nota	*d(p, t)*	*d(z, t)*	*Compat(p, t)*	*Compat(z, t)*
Mi	2,6251	2,6251	0,8841	0,8841
La	0	0	1	1
Si	3,9216	3,9216	0,8268	0,8268
La#	13,6868	7,8184	0,3955	0,6547
Sol#	9,7769	11,7284	0,5682	0,482
Fa##	19,5491	44,9689	0,1366	0
Fa#	5,8646	5,8646	0,741	0,741
La	0	0	1	1
Mi#	15,641	27,371	0,3092	0
Sol#	9,7769	11,7284	0,5682	0,482
La#	13,6868	7,8185	0,3955	0,6547

Si para aceptar que dos notas sean compatibles (pueden sonar juntas) exigimos un mínimo de compatibilidad del 50% (α = 0,5), podemos comprobar que muchas de las notas de este fragmento no podrían ser interpretadas simultáneamente por instrumentos que afinan en estos tres sistemas de afinación, porque el grado de compatibilidad es bajo.

Un futuro alentador para los músicos

Actualmente, tanto la lógica borrosa como otras herramientas de la Inteligencia Artificial y de las Matemáticas, brindan oportunidades muy interesantes a los artistas en general y a los músicos en particular. Aquí sólo hemos presentado una pequeña muestra de cómo se abordan en nuestros días algunos de los problemas que los músicos tienen que resolver en su práctica cotidiana, pero, evidentemente, existen muchos investigadores que trabajan en estos aspectos.

Conjugar el uso de conceptos rígidos, que surgieron hace varios siglos, junto con tecnologías que cada día avanzan más rápido, hace que el músico, y por supuesto el matemático, deba dar respuesta a inconvenientes que surgen de esta combinación. Por ejemplo, la utilización tan extendida de afinadores electrónicos surgidos hace varias décadas, debería complementarse con el uso de programas informáticos, muchos de ellos de libre disposición en Internet (como Audacity®, por citar alguno), que permiten que el músico sepa hasta qué punto lo que está ejecutando es compatible con otros instrumentos. Esto, no sólo permitiría elegir otras posiciones, modificar la presión en la emisión, etc. para aumentar la consonancia del conjunto, sino que contribuiría a aumentar la calidad y la belleza de la Música que, al fin y al cabo, es de lo que se trata.

"[...] Mientras esta escritura
pretende poner orden en el caos,
yo desciendo del orden al caos para ver
si así logro entender mejor
la estructura de lo humano o mis cárceles [...]"

Fragmento de *Una excusa para amar*, poema de Lógica Borrosa (2002). Chantal Maillard

MUSYMÁTICAS ■

NOTAS

[1] En realidad, el origen podría fijarse en 1922 cuando Lukasiewicz cuestionaba la Lógica Clásica booleana (valores cierto y falso) y proponía una lógica de valores ciertos en el intervalo unidad como generalización de su lógica trivaluada. En los años 30 fueron propuestas lógicas multivaluadas para un número cualquiera de valores ciertos (igual o mayor que 2), identificados mediante números racionales en el intervalo [0, 1]. Posteriormente, en 1937, Max Black (1909 - 1989), publicó el artículo "Vagueness: An exercise in Logical Analysis" y en los años 1942 y 1950, Karl Menger (1902 - 1985), publicó en "Statistical Metrics" dos artículos sobre relaciones borrosas de indistinguibilidad.

[2] N. A. Garbuzov, en 1948, publicó el artículo *The zonal nature of the human aural perception* en el que hacía un estudio de la percepción de los intervalos musicales. A pesar de que se trata de uno de los primeros intentos por valorar de forma numérica este concepto, el trabajo pasó inadvertido por estar publicado en ruso en la Academia de Ciencias de Moscú y en una época en la que muchas investigaciones hechas en la URSS no se conocían el mundo occidental. Debió transcurrir más de un cuarto de siglo hasta que, de la mano de Ján Haluska, los trabajos de Garbuzov empezaron a considerarse elementos clave dentro de la psicoacústica.

[3] Estas zonas se conocen en la actualidad como las zonas de Garbuzov.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GOLDÁRAZ GAÍNZA, J. J. (2004): *Afinación y temperamentos históricos*, Alianza Editorial, Madrid.

HALUSKA, J. (2000): "Equal Temperament and Pythagorean Tuning: a geometrical interpretation in the plane", *Fuzzy Sets and Systems*, 114, pp. 261-269.

HALUSKA, J. (2005): *The Mathematical Theory of Tone Systems*, Marcel Dekker, Inc., Bratislava.

KOSKO, B. (1993): *Pensamiento borroso*, Grijalbo-Mondadori, Barcelona.

LIERN, V. (2005): "Fuzzy tuning systems: the mathematics of musicians", *Fuzzy Sets and Systems* 150, pp. 35-52.

Internet

BENSON, D. (2007): *Mathematics and Music*,

http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/maths-music.html

http://www.hasseborup.com/ahistoryofintonationfinal1.pdf

http://www.inf-cr.uclm.es/bisc/Fuzzy_sets_zadeh.pdf

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Francisco Martín Casalderrey**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

Secretariados:
Prensa: **María Peñas Troyano**
Revista SUMA: **Tomás Queralt Llopis/Onofre Monzó del Olmo**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Juana Mª Navas Pleguezuelos**
Actividades con alumnos: **Jordi Comellas i Blanchart**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Carme Aymerich Padilla
CEIP Rocafonda
C/Tàrrega, 41
08304 Mataró (Barcelona)

Organización Española para la Coeducación Matemática *Ada Byron*
Presidenta: M.ª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38200 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: María José González López
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Elena Ramirez Ezquerro
CPR. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

XIV JAEM
GIRONA 2009

Educación matemática: Competentes en un mundo global

XIV Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas

Girona, del 1 al 4 de julio de 2009
www.xivjaem.org

Segundo anuncio

Una vez más, y ya vamos por la XIV edición, estamos dispuestos a celebrar nuestras queridas JAEM.

En diciembre de 1980, en una reunión celebrada en Sevilla, se decidió organizar *una serie de encuentros periódicos para profesores de EGB, BUP, FP y Universidad, destinados a potenciar el intercambio de experiencias, la renovación metodológica y la reflexión sobre su quehacer*. Con este objetivo nacieron las Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, cuya primera edición tuvo lugar en Barcelona en mayo de 1981, organizadas por el ICE de la Universidad de Barcelona y el Grup Zero de Barcelona. Los años siguientes tuvieron lugar en Sevilla (1982), Zaragoza (1983), Tenerife (1984) y se produjo una interrupción hasta que en 1991 la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, que se había creado en Sevilla en 1988, propuso su reanudación con la quinta edición de Castellón y a partir de entonces se decidió celebrarlas bianualmente. Así, fueron llevándose a cabo las siguientes: Badajoz (1993), Madrid (1995), Salamanca (1997), Lugo (1999), Zaragoza (2001), Tenerife y Las Palmas (2003), Albacete (2005), Granada (2007). Posiblemente, nadie hubiera podido pensar en los inicios que 30 años después las JAEM seguirían vivas y con la consolidación e importancia que ahora tienen.

Y ahora, en la XIV edición volvemos a Cataluña donde se iniciaron las JAEM. Esta vez tendrán lugar en Girona del 1 al 4 de julio de 2009. Desde hace tiempo, el Comité de Programas, el Comité Organizador y toda la FEEMCAT están trabajando con esmero y dedicación para conseguir un evento con el máximo nivel profesional y seguro que conseguirán con su ilusión y esfuerzo que estas sean unas JAEM importantes y útiles para el profesorado y la sociedad.

Es para mí un honor, como presidente de la FESPM, el poder presentar a todo el profesorado estas Jornadas que constituyen una actividad emblemática de la Federación y que debemos utilizar como foro para la reflexión, el debate, la formación, así como lugar de encuentro e intercambio en la Educación Matemática.

La FESPM nos invita a todos a participar activamente en nuestras XIV JAEM, las de todos los profesores que pensamos que las matemáticas han de jugar un papel fundamental en la formación de las personas. Animaos a participar con el convencimiento de que la ciencia que nos acoge y con cuya enseñanza tanto disfrutamos, crecerá.

Nos veremos en Girona.

Serapio García Cuesta
Presidente de la FESPM

Fechas y lugar de celebración

Las XIV JAEM tendrán lugar del miércoles 1 al sábado 4 de julio de 2009, en la ciudad de Girona.

La mayoría de actos de las Jornadas se realizarán en el Auditori-Palau de Congressos, situado en el Parc de la Devesa de Girona. Algunas actividades y exposiciones se desarrollaran en la Escuela de Hosteleria, próxima al auditorio.

Estructura de las jornadas

Se organizan en tres grandes bloques de actividades.

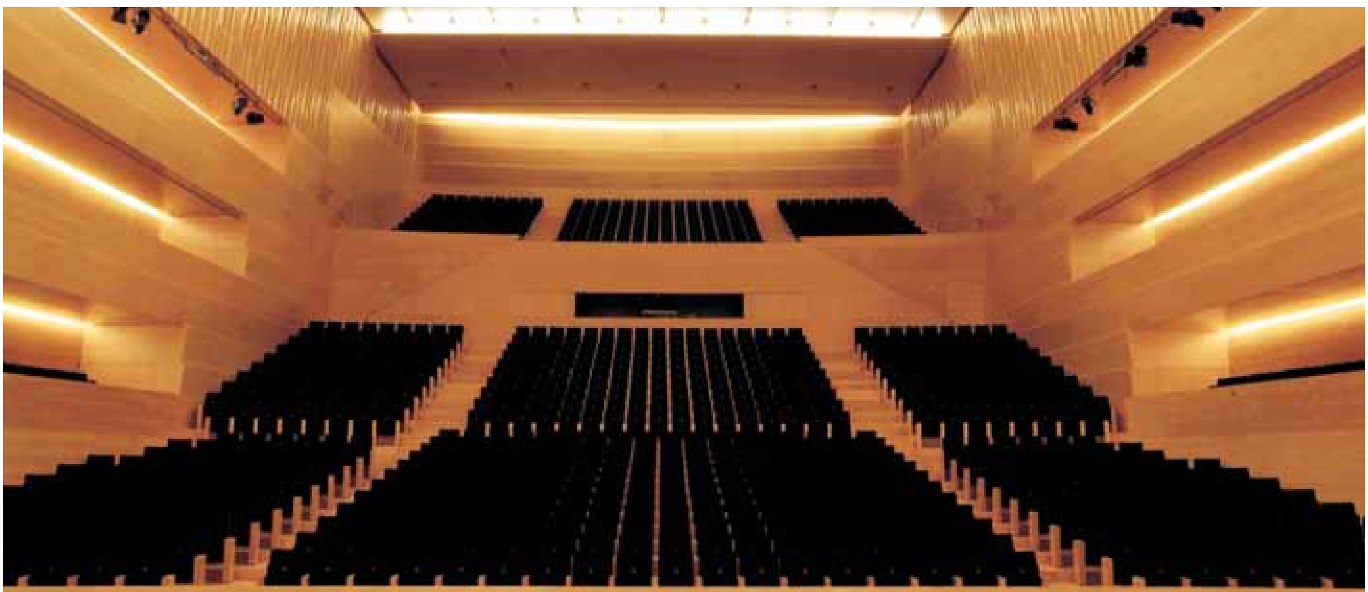
Primer bloque de actividades

En el primer bloque –el más estructurado y formal– tienen lugar:

a. Cuatro **conferencias plenarias**, a cargo de personas destacadas en el ámbito de la educación matemática de dentro y fuera de nuestro país expresamente invitadas por el Comité de Programa de las Jornadas.

b. **Ponencias** y **comunicaciones** que giran preferentemente en torno a los núcleos temáticos:

   1. Planteamiento y resolución de problemas.
   2. Pensamiento y razonamiento matemático.
   3. Simbolismo, formalización y demostración en matemáticas.
   4. Comunicar en, con, y sobre las matemáticas.
   5. Modelización y representación en matemáticas.
   6. Herramientas, materiales y otros recursos de apoyo para trabajar matemáticas.
   7. Conexiones y contextos.



Auditori-Palau de Congressos de Girona

Segundo bloque de actividades

El segundo bloque –en un formato más libre– acoge actividades y espacios de encuentro de tipología muy variada:

a. **Talleres.**

b. **Zoco matemático.**

c. **Encuentros entre iguales o comunidades.**

d. **Clips de aula**

Tercer bloque de actividades

En el tercer bloque de actividades de las XIV JAEM tienen cabida:

a. **Exposiciones** no comerciales vinculadas a la educación matemática.

Están previstas dos exposiciones: una dedicada a la presentación de materiales didácticos por parte del **Gamar** (Gabinete de Materiales de Maria Antonia Canals), y una muestra de módulos interactivos del *Museu de Matemàtiques de Catalunya* (MMACA), actualmente en fase de gestación.

b. **Exposición y venta de materiales didácticos** por parte de la FESPM, de las diferentes Sociedades Federadas y de empresas comerciales.

c. La entrega del *Premio Gonzalo Sánchez Vázquez* convocado por la FESPM.

d. Diferentes **actividades culturales**.

La información sobre todas estas actividades se irá concretando y actualizando en la página web del congreso, www.xivjaem.org.

Homologación

El ICE de la Universitat de Girona certificará la asistencia a las JAEM, lo que supondrá su reconocimiento estatal a efectos de sexenios, concursos, etc. Se homologarán 30 horas. Para obtener el certificado serà necesaria la acreditación de un mínimo de un 80% de las horas. También se ha solicitado que sea reconocida la asistencia por la universidad a efectos académicos como dos créditos de libre elección.

Avance del programa

Pendientes de recibir las aportaciones de los participantes (comunicaciones, talleres y clips de aula), avanzamos algunas de las actividades del programa.

• **Conferencias plenarias**

– Anton Aubanell Pou: *Un paseo por el origen del calendario y del sistema métrico*.
– Pablo Flores Martínez: *Competentes para reír (con las Matemáticas).*
– Michele Emmer: *El concepto de espacio: desde Escher hasta los Juegos Olímpicos de 2008*.
– Mª Teresa Valdecantos Dema: *Cómo es, para qué sirve, dónde lo colocarías*.

• **Ponencias de los núcleos temáticos** (NT)

1. Planteamiento y resolución de problemas
   – Lourdes Figueiras Ocaña: *La resolución de problemas, de los 3 a los 18 años*
   – Antonio Ramón Martín Adrián: *Maestra/o, ¿este problema es de sumar, restar, multiplicar o dividir?*

2. Pensamiento y razonamiento matemático
   – Julia Guinea Lozano: *Enseñar a pensar*
   – Marta Molina González: *Pensar matemáticamente en el trabajo con expresiones aritméticas y algebraicas*

3. Simbolismo, formalización y demostración en matemáticas
   – Raquel Mallavibarrena Martínez de Castro: *La demostración: un reto para el proceso de aprendizaje matemático*
   – Mario García-Longoria Serrano: *¿Una doble profesión?*

4. Comunicar en, con, y sobre las matemáticas
   – Josep Lluís Pol Llompart: *(8+1) reflexiones entorno a la comunicación en la clase de matemáticas*
   – José María Sorando Muzás: *Matemáticas por todos los caminos*

5. Modelización y representación en matemáticas
   – Ana García López: *Juegos, juguetes y modelos*
   – Àngel Alsina Pastells: *Primeros pasos en la modelización y representación del conocimiento matemático*

6. Herramientas, materiales y otros recursos de apoyo para trabajar matemáticas
   – Victoria Soto Cabrera: *Competencia matemática: Matemáticas para la vida. Situaciones de aprendizaje en el aula*
   – Carlos O. Suárez Alemán: *El proceso de enseñanza-aprendizaje a través de su historia y del uso de documentos antiguos en el aula*

7. Conexiones y contextos
   – Mª Encarnación Reyes Iglesias: *Conexiones de las Matemáticas con los mundos natural y artístico*
   – Raúl Ibáñez Torres: *Lo que Euler le dijo al cartógrafo*

<table>
<tr><th></th><th>Miércoles, 1</th><th>Jueves, 2</th><th>Viernes, 3</th><th>Sábado, 4</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Mañana</td><td rowspan="4"></td><td>Ponencias y comunicaciones</td><td>Ponencias y comunicaciones</td><td>Talleres y comunicaciones</td></tr>
<tr><td>Pausa-café</td><td>Pausa-café</td><td>Pausa-café</td></tr>
<tr><td>Conferencia plenaria</td><td>Conferencia plenaria</td><td rowspan="2">Talleres y comunicaciones</td></tr>
<tr><td>Presentación XV JAEM</td><td>Premio GSV</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">Comida y visita a exposiciones</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tarde</td><td>Entrega de documentación</td><td rowspan="2">Talleres, espacios de debate y comunicaciones</td><td rowspan="4">Actividad socio-cultural y cena de clausura</td><td rowspan="2">Talleres, espacios de debate y comunicaciones</td></tr>
<tr><td>Inauguración</td></tr>
<tr><td>Conferencia Plenaria</td><td>Talleres, espacios de debate y comunicaciones</td><td>Conferencia plenaria y acto de clausura</td></tr>
<tr><td>Acto de bienvenida</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Participación activa

Normas generales

Todos aquellos participantes en las XIV JAEM que deseen presentar una comunicación oral o un taller, o participar en el Zoco Matemático deberán tener en cuenta la siguiente normativa:

1. El plazo de envío o solicitud de participación finaliza el día 31 de marzo de 2009.
2. La petición de participación y el envío de la documentación correspondiente (texto de la comunicación, descripción del taller, etc.) deberá hacerse necesariamente desde la página web de las XIV JAEM (Participación > Envío de trabajos).
3. La admisión de la actividad queda supeditada a la decisión inapelable del Comité de Programa. En caso de no aceptación, no se mantendrá correspondencia con el autor sobre las causas del rechazo.
4. La admisión definitiva de la actividad queda también condicionada a que al menos uno de sus autores o peticionarios haya formalizado su inscripción en las XIV JAEM antes del 15 de mayo de 2009.
5. En caso de multiplicidad en la autoría de una comunicación o taller, o en la petición de participación en el Zoco, el certificado acreditativo correspondiente emitido por las XIV JAEM será colectivo.
6. Las actividades aceptadas se publicarán en las Actas de las XIV JAEM, siempre que el formato del texto a publicar se adapte a los requerimientos de la plantilla que se encuentra en la página web de las XIV JAEM (Participación > Envío de trabajos) y se remita antes del 31 de marzo de 2009.

Comunicaciones

Los profesores inscritos en las JAEM pueden participar activamente presentando una comunicación. Éstas consisten en intervenciones breves en las que el orador expone su punto de vista sobre aspectos relacionados con la enseñanza o el aprendizaje de las Matemáticas en cualquiera de los niveles educativos.

Normas de presentación de las comunicaciones

1. La comunicación debe encuadrarse necesariamente en alguno de los siete núcleos temáticos antes mencionados.
2. Debe ser inédita, no habiendo sido publicada con anterioridad.
3. En el momento de formalizar la petición de presentación de una comunicación debe ya adjuntarse el texto completo de la misma.
4. Así mismo, se debe indicar el material de apoyo que el orador va a necesitar para su presentación (retroproyector para transparencias o de opacos, proyector de diapositivas, video, cañón, ordenador, ordenadores en red, software, etc.). En caso que resulte complicado disponer de este material el Comité Organizador se pondrá en contacto con el orador.
5. Las comunicaciones aceptadas deberán presentarse oralmente en el transcurso de las XIV JAEM en el espacio especialmente reservado para ello. El orador dispondrá de 15 minutos para la presentación, seguidos de 10 minutos más para la discusión o coloquio con los asistentes a la sesión de presentación.

Talleres

Los talleres consisten en cursos breves de 1.5 horas de duración que tienen como objetivo dar a conocer actividades de todo tipo que comporten la manipulación interactiva de materiales o programas informáticos en torno a la enseñanza de las matemáticas.

Normas para la presentación de Talleres

1. Los interesados en presentar un Taller deberán adjuntar a su petición un documento con una descripción detallada y completa del mismo.

2. En su petición indicarán de manera explícita el material necesario para la realización del Taller. En caso que resulte complicado disponer de este material el Comité Organizador se pondrá en contacto con el responsable del mismo.

Zoco matemático

El Zoco es el espacio físico destinado a facilitar la exposición de material didáctico, recursos, programas informáticos, comunicaciones en formato de póster, etc. Como novedad, el zoco de las XIV JAEM incluirá la presentación de clips de clase, i.e., videos de corta duración que recogen la realización in situ, en las aulas, de las actividades de los docentes y sus alumnos.

Normas para la participación en el Zoco

1. Las personas o entidades interesadas en participar en el Zoco deberán adjuntar a su petición un documento, una descripción del contenido del material que se pretende exponer, bien sea un poster, un clip, etc.
2. En la petición se deberá detallar la naturaleza del material a exponer (paneles, tamaño de las piezas a exponer, tipologia del clip, etc.) así como las necesidades de infraestructura que se solicita sean facilitadas por la organización de las JAEM (mesas, plafones, ordenadores, etc.). En caso que resulte complicado disponer de este material el Comité Organizador se pondrá en contacto con el peticionario.
3. Los solicitantes se comprometen a montar y a desmontar su material a exponer en el espacio que la organización les asigne, y a estar presentes en el lugar de la exposición en los períodos de tiempo que se les indique con el fin que los congresistas interesados puedan dialogar con ellos sobre el material expuesto.
4. Para el transporte hasta la sede de las JAEM de los materiales a exponer en el Zoco, los interesados deberan ponerse en contacto con el Comité Organizador que les informará sobre la forma de hacerlo y de solicitar ayuda económica.

Espacios de debate o comunidades

Bajo la denominación genérica de espacio de debate o comunidad entendemos un foro virtual que utiliza las facilidades de Internet para propiciar que un grupo de personas interesadas conozcan, intercambien y discutan ideas, experiencias y información variada acerca de una determinada temática relacionada con la enseñanza de las Matemáticas. Cada comunidad está vinculada a una temática.
Los espacios de debate que se organizan en el marco de las XIV JAEM son los siguientes:

A. Matemáticas en inglés.
Coord.: Gemma Miñón García; Mª Claudia Lázaro del Pozo.

B. Geometría dinámica.
Coord.: Jose Antonio Mora Sánchez; Rafael Losada Liste.

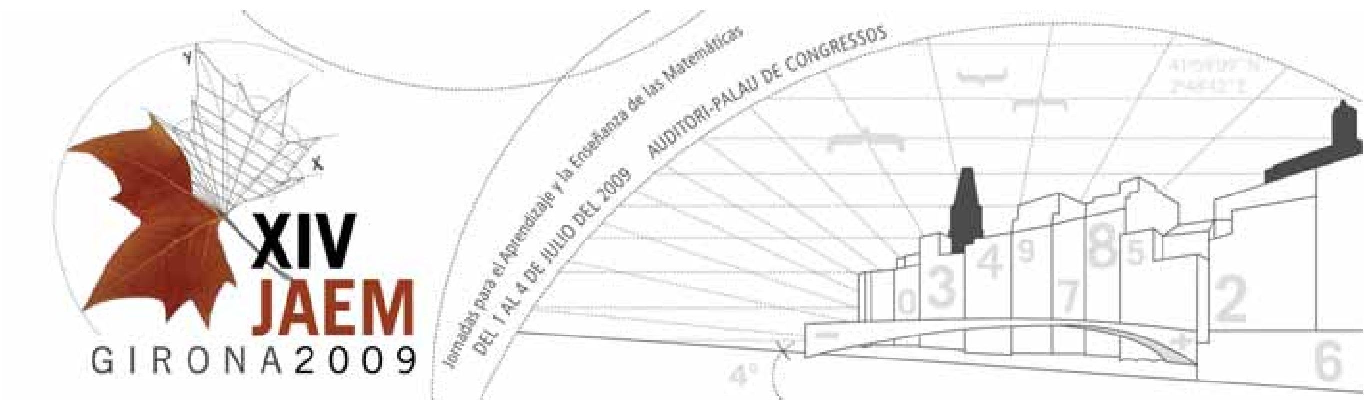
C. Formación permanente del profesorado de matemáticas.
Coord.: Tomás Queralt Llopis; Salvador Caballero Rubio.

D. Formación inicial del profesorado.
Coord.: Carmen Burgués Flamarich; Carme Aymerich Padilla.

E. Calculadoras en el aula.
Coord.: Mauricio Contreras del Rincón; Ricard Peiró Estruch.

Normas de funcionamiento y participación en los espacios de debate

1. Los cinco espacios de debate estan abiertos a la participación por via telemàtica a partir de mediados del mes de enero de 2009.
2. La inscripción inicial a una determinada comunidad es voluntaria y la persona interesada se incorpora a la misma desde la página web de las XIV JAEM. La adscripción a determinado un espacio de debate conlleva en la persona que la realiza un compromiso implícito de participar de una forma más o menos fluida y constructiva en la dinámica del mismo.



3. La organización de la dinámica interna de cada comunidad –en relación a los temas a tratar, a las preguntas a discutir,...– es responsabilidad exclusiva de los coordinadores de aquélla.
4. Durante la celebración de las XIV JAEM se habilitará para cada comunidad un espacio en la sede del congreso y un tiempo para que las personas que asistan al mismo puedan continuar de forma presencial la discusión mantenida de forma virtual durante los primeros meses del 2009.
5. Tan sólo podrán inscribirse a estas sesiones presenciales aquellas personas que, a juicio de los coordinadores de la comunidad, hayan participado de forma activa durante su fase virtual previa.
6. Aquellas comunidades que quieran que se publique en las Actas del congreso un resumen de las principales aportaciones realizadas en el foro virtual de la misma, deberán remitir el documento correspondiente antes del 30 de abril de 2009. Compete a los responsables de la comunicación la elaboración del documento ajustado al formato que figura en la página web de las XIV JAEM (Participación > Envío de trabajos)

Inscripciones

La inscripción a las XIV JAEM se realizará exclusivamente a través de la página web de las Jornadas (Participación > Inscripciones)

Tarifas y plazos

	Hasta el 15 de mayo de 2009	A partir del 15 de mayo y hasta el 15 de junio de 2009 (*)
Socios de la FESPM o de las Sociedades que han firmado convenio con la Federación	110 €	140 €
No socios	170 €	210 €

(*) Se fija en 900 el número máximo de inscritos en las XIV JAEM. Por ello, la inscripción se cerrará antes del 15 de junio en caso de llegar a esta cifra.

Anulaciones

Sólo se aceptarán anulaciones de las inscripciones realizadas antes del **15 de mayo de 2009**.

Alojamiento

Encontraréis información sobre alojamientos en Girona en la página web de las Jornadas.

Actas de las Jornadas

Tras la celebración de las XIV JAEM se publicarán las correspondientes actas que recogerán los textos de las conferencias, ponencias, comunicaciones, talleres y actividades del zoco matemático.

La publicación de los textos deberá ceñirse a las normas que se encuentran detalladas en la página web de las Jornadas.

Puntos de información y correspondencia

Dirección postal:

XIV JAEM. Girona 2009
Campus Montilivi, Edifici P-IV
17071 Girona

Correo electrónico:

info@xivjaem.org

Página web del congreso:

www.xivjaem.org

Fechas importantes

– *31 de marzo de 2009*: fecha límite para la presentación de comunicaciones, talleres y actividades del zoco matemático.
– *15 de mayo de 2009*: fecha límite para el primer período de inscripción.
– *15 de junio de 2009*: fecha límite para la inscripción a las Jornadas (condicionada a un número máximo de 900 inscripciones).

SUMA+ 60
Febrero 2009, pp. 137-142

Secretaría de Relaciones Internacionales de la FESPM

En este trabajo se presentan algunas de las actividades que se han realizado por parte de la Secretaría de Relaciones Internacionales en relación con Iberoamérica, pero sobre todo se da a conocer una de las actividades más importantes en las que anualmente viene participando la FESPM, en conexión con la Asociación de Profesores de Matemáticas de la Enseñanza Pública (APMEP) en Francia celebrada en esta ocasión en La Rochelle.

Relaciones con Iberoamérica

Desde la última publicación en el número 54 de la revista SUMA donde se daba una amplia información sobre las actividades en colaboración con la Sociedad Peruana SOPEMAT, Sociedad Venezolana de Educación Matemática y la Universidad Internacional de Andalucía, hasta el momento actual no se han producido cambios dignos de reseñar.

La FESPM está empeñada desde hace algunos años en la celebración de un encuentro entre las sociedades federadas en la FISEM cuyo tópico central debe ser, a nuestro juicio, *La Educación Matemática en el ámbito Iberoamericano-Matemáticas en la era del conocimiento*. Por razones diversas ajenas a la Secretaría de Relaciones Internacionales este encuentro no se ha podido realizar.

Consciente de los problemas urgentes de resolución de problemas educativos en los países iberoamericanos, entre los que podemos citar:

a. ¿Las reformas educativas emprendidas en Iberoamérica tienen marcados unos tiempos de ejecución que permitan asegurar la autonomía necesaria para llegar a conseguir los objetivos planteados?

b. ¿Cuáles son las fases de desarrollo emprendidas y qué papel de colaboración podría emprender nuestro país?

Conocido de todos es la importante colaboración que se viene prestando a los compañeros y compañeras de Iberoamérica del profesorado de Matemáticas perteneciente a la FESPM y otras sociedades, impartiendo cursos de formación del profe-

Sixto Romero Sánchez
Secretario de Relaciones Internacionales de la FESPM
Escuela Politécnica Superior de la Universidad de Huelva
sixto@uhu.es

sorado en todos los niveles. Como ya indicaba en mi artículo anterior la equidad matemática es el principio que nos mueve, para que dentro de la función de enseñantes pudiéramos trabajar en pro del reconocimiento de la tarea emprendida y valorar la gestión que se ha iniciado en los diferentes países hermanos de Iberoamérica.

En este sentido, la Agencia Española de Cooperación Internacional para el Desarrollo, debe ser un instrumento utilizable para acogernos, en sus diferentes modalidades, a los Programas de Cooperación Científica. Las actividades de cooperación científica e investigación entre España y los países iberoamericanos, en el marco de este Programa, deben permitirnos, en la idea esbozada ut-supra, la coordinación y coherencia de políticas de cooperación que conduzcan al desarrollo y consolidación de redes estables de cooperación docente entre el profesorado español y el profesorado de los países iberoamericanos.

Por eso insistimos mucho en la propuesta ya realizada por la FESPM de celebrar ese seminario totalmente abierto al profesorado de Matemáticas para:

a. Profundizar en los logros de los estudiantes y la formación del profesorado.
b. Apoyar a docencia y en los conocimientos de Matemáticas y Educación Matemática.
c. Dar difusión, a través de intercambios, de las interesantes experiencias docentes realizadas en Iberoamérica que, con toda seguridad, están incidiendo en la mejora y calidad de la Educación Matemática.

En definitiva, estrechar lazos y que la red formada recientemente de Sociedades de Profesores de Matemáticas Iberoamericana denominada FISEM dé los frutos necesarios como el reciente VI CIBEM (VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática: *http://cibem6.ulagos.cl/anuncio.html*) celebrado del 4 al 9 de enero de 2009 en Puerto Montt (Chile) que a través de:

a. Conferencias Centrales
b. Conferencias en Paralelo
c. Comunicaciones Breves
d. Cursillos
e. Reuniones ad-hoc

ha permitido conocer la realidad de la Educación Matemática en Iberoamérica en términos de investigación y prácticas de enseñanza.

Es interés del que suscribe esta reseña señalar la necesidad de celebrar ese encuentro internacional bajo el auspicio de la FESPM.

Relaciones con Europa

Hasta la actualidad las actividades realizadas hasta el momento actual se pueden resumir en las siguientes:

1. Federación Europea de Profesores de Matemáticas

• Inicio de la colaboración

Del primer contacto surgido en 2006 en Clermont-Ferrand (Francia) con motivo del congreso organizado por la APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l´Enseignement Public) surgió un grupo de trabajo que cristalizó en las XIII JAEM celebradas en Granada del 4 al 7 de julio de 2007. A esta reunión inicial coordinado por el Profesor Sixto Romero (Vocal de Relaciones Internacionales de la FESPM) asistieron profesores de diferentes países europeos y también se les invitó a profesores de Chile y Perú, aprovechando su participación en las jornadas. El Objetivo fundamental de esta reunión fue el relanzamiento de la Federación Europea de Profesores de Matemáticas debido, fundamentalmente, a que las actividades de la Federación ya creada fueron suspendidas sin duda a causa de las siguientes constantes: dificultades financieras (coste y cotización de las reuniones), falta de disponibilidad de representantes de las Asociaciones y Sociedades y el problema lingüístico.

De esta reunión surgió un compromiso de la elaboración de un documento que a modo de resumen consta de:

• Propuesta del proyecto de coordinación

Como iniciativa, el relanzamiento de la cooperación europea entre asociaciones de profesores de Matemáticas consistente en montar un proyecto europeo de tipo Comenius con el horizonte de crear una coordinación entre asociaciones europeas de profesores de matemáticas. El Funcionamiento de esta coordinación se hará según los siguientes principios:

a. Puesta a punto de un sitio de coordinación, con un forum asociado y una plataforma cooperativa.
b. El funcionamiento de las estructuras precedentes debe ser gratuito para las asociaciones.
c. La lengua de comunicación es el inglés.
d. Cada asociación debe designar uno o varios representantes que se expresen en inglés, para representar la asociación en la coordinación.
e. Esta coordinación favorecerá los intercambios entre asociaciones y el desarrollo de los proyectos comunes sobre temas a definir.

Para comenzar a funcionar la coordinación, un proyecto Comenius permitirá la partida y el soporte de las cargas financieras de las primeras reuniones y el desarrollo de un primer proyecto común, por ejemplo sobre las competencias en las enseñanzas de las matemáticas, la modelización,...

• **Un primer reparto del trabajo**

Un breve texto de presentación del proyecto se encargó a Richard Cabassut y propuesto a discusión. La búsqueda de partenaires se organizó así:

a. Portugal, Hungría, Polonia y Chekia: Sixto Romero.
b. Dinamarca, Alemania, Inglaterra, Bégica: Richard Cabassut
c. Italia: Carla Tedeshi.

• **Proyecto de la Federación Europea**

Proyecto de texto para la CEAPM (Coordinación Europea de Asociaciones de Profesores de Matemáticas)

Este texto es la traducción del documento en lengua inglesa entregado a las asociaciones interesadas.

> El Parlamento Europeo ha identificado la competencia matemática, la competencia numérica, aprender a aprender y el espíritu de iniciativa y de empresa como cuatro de las ocho competencias claves para la educación y la formación a lo largo de toda la vida, y ha señalado la importancia de las infraestructuras apropiadas para la educación y la formación continua de los enseñantes y formadores. Las asociaciones nacionales de profesores de matemáticas participan nacionalmente de estas infraestructuras intentando desarrollar estas competencias en la enseñanza de las matemáticas. La creación de la CEAPM permitirá:
>
> - Contribuir al desarrollo de una enseñanza y de una formación de calidad así como a la promoción de un nivel alto de rendimiento del alumnado, de la innovación y de la dimensión europea de los sistemas y prácticas en vigor.
>
> - Alentar la realización de un espacio europeo de educación y de formación a lo largo de toda la vida.
>
> - Defender y sostener el desarrollo de los medios ofertados por las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC).
>
> - Promover la cooperación en materia de seguridad de la calidad de la educación y de la formación.
>
> - Contribuir a la calidad estimulando una utilización óptima de resultados, de actos y procedimientos innovadores así como el intercambio de buenas prácticas.
>
> Una de las primeras tareas de esta coordinación podía ser:
>
> a. La organización de la coordinación (representantes de asociaciones, modelo de trabajo).
>
> b. La puesta en marcha de medios de intercambios a distancia (sitios en INTERNET, forum, plataforma colaborativa).
>
> c. La definición de un proyecto COMENIUS multilateral de intercambios, por ejemplo en el tema del desarrollo de las competencias en la enseñanza.

• **Referencias a la elaboración del proyecto CEAPM**

– Proyectos Comenius

http://ec.europa.eu/education/programmes/llp/comenius/activities/comenius2_en.html

http://ec.europa.eu/education/programmes/llp/comenius/activities/comenius3_en.html

– Recomendaciones del parlamento europeo sobre educación

http://www.europarl.europa.eu/sides/getDoc.do?pubRef=-//EP//TEXT+TA+P6-TA-2006-0365+0+DOC+XML+V0//FR

2. Asistencia al congreso de la APMEP

Viene siendo habitual en el arco de un convenio de colaboración entre la APMEP y la FESPM, invitar a nuestra federación a la participación activa en la reunión anual de la APMEP. En este trabajo, presento un resumen de lo acontecido en el congreso celebrado en esta ocasión en La Rochelle (Francia) del 25 al 27 de octubre de 2008.

Con unos 100.000 habitantes, La Rochelle es una tranquila ciudad situada en la costa oeste de Francia, al norte de la

Fig.1. Puerto de La Rochelle

Gironde, que se valora como uno de los centros más atractivos entre las costas de Bretaña y el golfo de Gascuña. Destaca la torre de San Nicolás, de 42 metros de altura y construida sobre pilares de roble. Las torres de San Nicolás y de la Cadena guardan la estrecha entrada al puerto viejo. La torre de San Nicolás, de la segunda mitad del siglo XIV, reemplazó a otra anterior. Tiene tres salas octogonales superpuestas y un pequeño laberinto de escaleras y pasajes que termina en la parte superior, donde estaban los vigías. Enfrente está la torre de la Cadena, creada en el siglo XIV y gravemente dañada en conflictos posteriores, aunque restaurada en el XIX y XX. El puerto ya no está repleto de mercaderes, corsarios o burgueses. Hoy el tráfico se ha desplazado más hacia el Atlántico. Pero conserva un marcado ambiente turístico. En torno al mismo, (cour des Dames y quai Duperré) se abren establecimientos de souvenirs y cafés, y por allí pasea una colorista caterva de turistas.

Para cualquier lector interesado en mayor información toda la documentación está disponible en la Secretaría de Relaciones Internacionales de la FESPM y las páginas web:
http://irem2.univ-poitiers.fr/jn2008/ y
http://www.guiarte.com/larochelle/

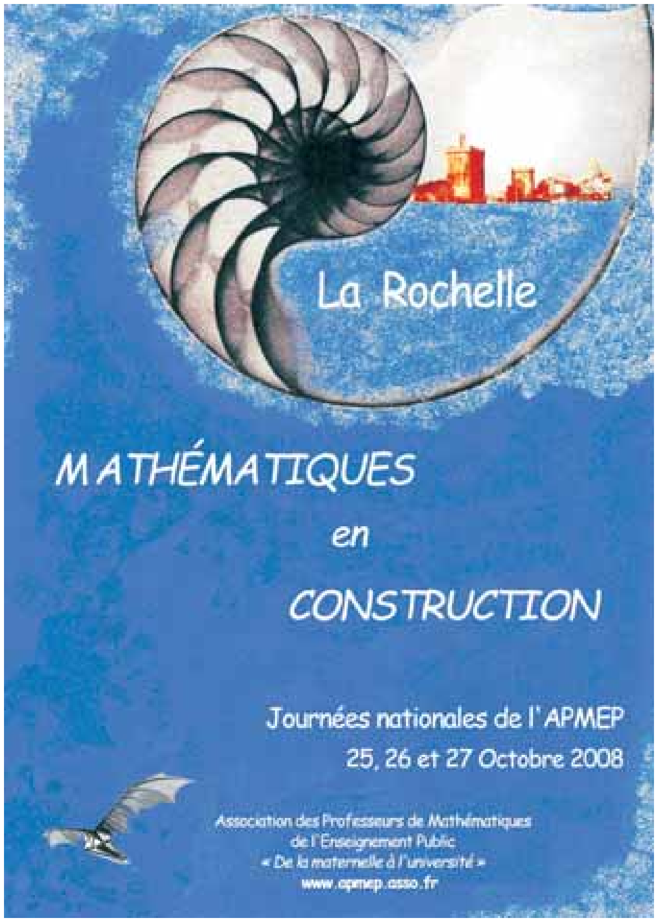


Fig.3. Cartel anunciador de las Jornadas de la APMEP-2008

A este congreso, cuyo cartel (Fig.3) refleja de manera acertada la ciudad de La Rochelle, asistieron cerca de 900 profesores de Matemáticas de los diferentes niveles educativos de la enseñanza pública francesa, aparte de los representantes de un importante número de países europeos y del Magreb.

Los tres días de jornadas significaron un enorme trabajo por la densidad de actividades ofertadas por la magnífica organización local, en esta ocasión, de lo que denominan los franceses: *la régionale de Poitou-Charentes*.

Fig. 2. Recepción de participantes

El trabajo se estructuró en:

a. Conferencias plenarias
b. Conferencias en paralelo (semiplenarias)
c. Talleres
d. Reuniones de las representaciones regionales y nacionales
e. Reunión con los invitados de Europa y Magreb
f. Otras actividades

Conferencias Plenarias

La sesión de inauguración fue impartida por el Prof. **Jean-Pierre Bourguignon**, Ingeniero de L´École Polytechnique y Doctor en Ciencias Matemáticas. Geómetra diferencial de formación, se ha interesado por aspectos de teorías físicas. También es director de investigación del Centre Nationale de Recherche Scientifique (CNRS). El título de su espléndida conferencia: *Las matemática: siempre en construcción en una unidad dinámic*a, recoge fundamentalmente la idea de que la modificación interna de la arquitectura interna de las Matemáticas es una de las razones donde esta disciplina manifiesta su vitalidad.

La conferencia de clausura corrió a cargo del Prof. Dr. **Bernard Vitrac**. Es director de investigación en el CNRS, UMR 8567, Centre Louis Gernet, Paris. Sus temas de investigación se centran sobre la historia de las Matemáticas griegas antiguas y la historia de la transmisión del texto de los Elementos de Euclídes. (Para el lector interesado la página web, *http://hal.archives-ouvertes.fr/* recoge parte de su trabajo en un cierto número de artículos publicados o en curso de publicación).

Fig. 4. Acto de apertura

Conferencias Semi-Plenarias en paralelo

Henri Lombardi, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Franche-Comté. Se considera poco adepto al formalismo bourbakista dominante en Francia y ha comenzado a hacer investigación después de la lectura del libro de Bishop. Sus temas de investigación son el álgebra real, las Matemáticas constructivas y la teoría de la complejidad algorítmica. El título de su conferencia, *Matemáticas constructivas*, recoge como principio el desarrollo del examen superficial histórico y explicar la renovación actual del punto de vista constructivo. Más información puede ser consultada en la web *http://www.disi.unige.it/map/* donde muestra su incorporación como fundador del grupo MAP (Matemáticas-Algortimos-Pruebas)

Eric Andres, es profesor de Informática en el laboratorio XLIM-SIC de la Universidad de Poitiers y jefe del equipo informático gráfico del laboratorio. El tema principal de su investigación ha sido, en los últimos años, la puesta a punto de modelos analíticos para describir los objetos en el espacio discreto. En su conferencia, *La geometría de los pixeles* muestra como construir los objetos en el espacio de pixeles y como la relación con la geometría clásica se puede hacer.

André Pressiat, es doctor en Didáctica de las Matemáticas del IUFM Centre Val de Loire. Forma parte del equipo DIDIREM de la Universidad París 7. Impartió la conferencia: *El rol de las magnitudes en la construcción de las Matemáticas.* En ella se pone énfasis en cómo las magnitudes tienen un lugar y han jugado un papel importante en la historia de las Matemáticas, desde la época griega a nuestros días.

Frédéric Métin, es profesor en el liceo Gustave Eiffel en Dijon. Sus principales trabajos se basan en la Epistemología e Historia de las Matemáticas, razón por la que forma parte de la Comisión inter-IREM «Epistémologie et Histoire des Mathématiques». La conferencia impartida se tituló: *Vauban y sus maestros: la construcción geométrica de la seguridad*.

Aparte de estas conferencias en paralelo del primer día, se impartieron en días sucesivos las siguientes conferencias:

– **Guy Wallet**, Profesor de la Universidad de La Rochelle: *La construcción de los objetos matemáticos.*
– **Marie-José Pestel** y **Michel Criton**, Presidenta del Comité Internacional de Juegos matemáticos y miembro del comité de redacción de la revista TANGENTE; y Presidente de la Federación Francesa de Juegos Matemáticos, respectivamente: *2500 años de enigmas matemáticos.*
– **Fabrice Vanderbrouck**, profesor de la Universidad de Poitiers y Universidad Diderot–Paris 7: *Las TIC y actividad matemática de los alumnos.*

– **Philippe Pallu de la Barriére**, Doctor del tercer ciclo de Matemáticas Puras de la Universidad París 7: *Matemático e Ingeniero Naval: practicas comparadas y aporte de las Matemáticas.*

Talleres

En sesiones paralelas se realizaron treinta seis talleres con una oferta interesante en diferentes temáticas en sesiones de mañana y tarde. Para ampliar información ver la página: *http://irem2.univ-poitiers.fr/jn2008/ateliers/Ateliers_Info2.php*.

Otras actividades

La densidad de las actividades organizadas, además de la ya reseñadas en párrafos precedentes, hay que citar:

a. Reuniones de representantes de las diferentes regiones de Francia.
b. Reuniones de debates.
c. Reunión con los invitados extranjeros.
d. Gran cantidad de expositores de Francia y Bélgica con la participación de las más importantes editoriales y casas comerciales en Educación Matemática.

Me gustaría destacar en este capítulo el amplio arco de exposiciones matemáticas. En relación estrecha con la temática de las Jornadas: *Matemáticas en construcción*, las exposiciones propuestas por la organización, pretendían conducir al participante en un mundo donde las matemáticas se construyen en interacción:

– El puzzle: una ciencia, un arte y un juego.
– 2000 años de enigmas matemáticos.
– Objetos matemáticos.
– Matemáticas en-JEANS-y VAUBAN.

Fig. 5. Escribas de Nippur

– Juegos, números y formas.
– Decodificadores
– En la escuela de escribas de Nippur

Y por último, indicar que la reunión concertada con la Junta Directiva de la APMEP y los representantes extranjeros se centró, fundamentalmente, en el seguimiento de las actividades por parte de la CEAPM. En este sentido, mi intervención fue en la línea de las acciones realizadas a nivel internacional con el compromiso adquirido en el año anterior. Tengo que decir, que todavía no se ha avanzado mucho pero sí es importante, y decir a modo de conclusión que hasta que la CEAPM tome la suficiente fuerza como para comenzar con un proyecto Comenius, hubo una oferta por parte de la APMEP de ceder un hueco en su página web, y colgar en la Red todo tipo de inquietudes, ideas, propuestas, jornadas, debates, congresos,... que pudiesen nacer en el seno de cualquiera de las asociaciones que pretendan estar en la CEAPM. Para cualquier interesado, contactar con el responsable de relaciones exteriores de la FESPM, al objeto de canalizar toda la información que se desee enviar a los componentes de la CEAPM.

Fig. 6. Reunión APMEP e invitados extranjeros

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 498, E-46900 Torrent (Valencia), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original impreso ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres contando los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; correo electrónico; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia de los archivo de texto que contenga el artículo y del que contega la hoja con los datos y los resumenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
    TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
    En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
    En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	60 €	22 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 498
46900-Torrent (Valencia)
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ________

☐ N.os sueltos ________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2077-0347-11-1101452547)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja:

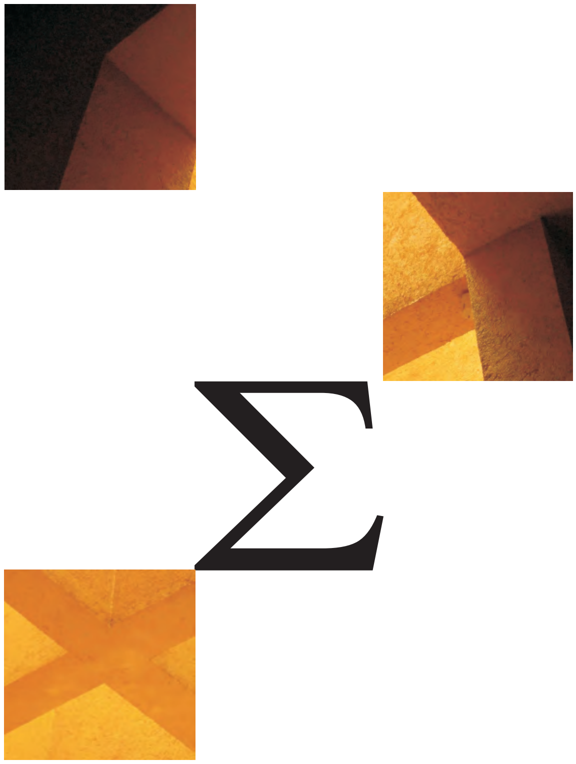
Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas



ISSN 1130-488X

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.