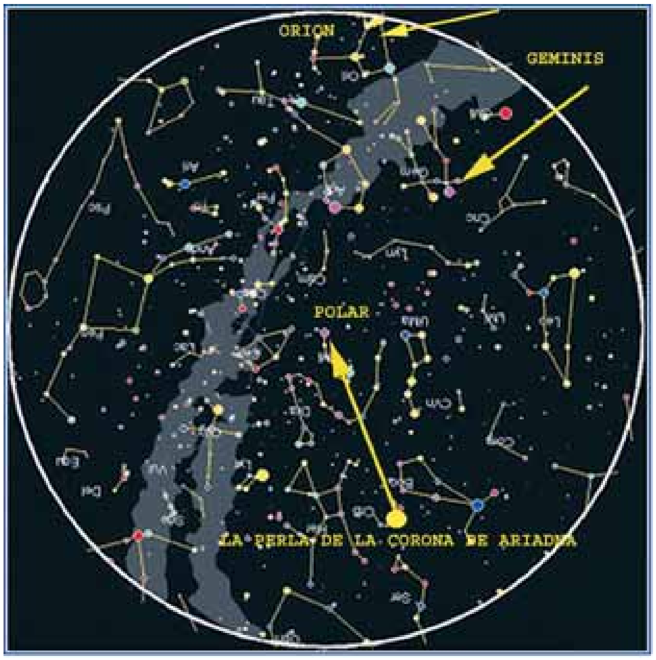
suma+ 60
Febrero 2009, pp.95-101

La corona de Ariadna

Cerca de la Lira de oro,
faro estival,
seis luceros cenitales bailan en corro.
Brillantes de la corona de Ariadna,
el más hermoso
lanza su saeta hacia el norte,
a través
de la osezna celeste.



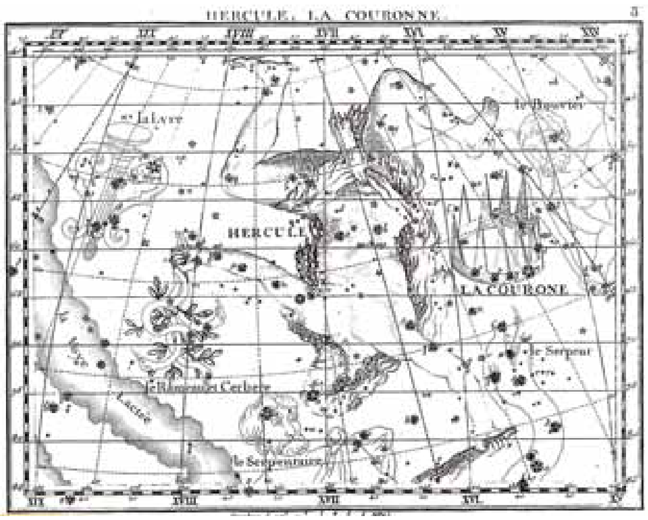
Cuando Teseo estaba más desesperado, Ariadna le entregó una respuesta, una salida, una llave, una solución, aquello que vibra, eso que vive, eso que nos proporciona las soluciones en el momento justo. Pero Teseo abandonó a Ariadna, incumpliendo la promesa que le había facilitado el éxito con el Minotauro cretense. Es tan frecuente que olvidemos las estrategias que nos ayudan a resolver nuestros problemas… Luego raptó a la hermana de Pollux y Castor, Helena de Troya; los gemelos argonautas la defendieron. Uno de ellos murió en la lucha, el otro era inmortal, pero renunció a su inmortalidad si debía vivir sin su hermano. Desde entonces están en el cielo, son las estrellas más brillantes de la constelación zodiacal de géminis, típica de las noches de invierno en nuestras latitudes, junto a Orión, cuyo cinturón, alineado con Sirio apunta al orto solar en el solsticio de invierno.

Teseo pagó con su vida su mala cabeza.

Por su parte Ariadna, tras ser abandonada por Teseo en la isla de Naxos, se enamoró de Dioniso, que le entregó una corona como regalo de bodas. Cuando ella murió, el dios arrojó la diadema al cielo, es la Corona Boreal.

La Corona de Ariadna, allá en el cénit, nos alerta para que no perdamos el hilo. Pero para recibir esa alerta no hay que perderla de vista. Se encuentra entre Hércules y el Boyero; alineada con la estrella polar y la diagonal de su carro. El brillo de la Perla de la Corona, su estrella alfa, situada a 15h 34m 41,3s de ascensión recta, +26° 42′ 53″ de declinación y a 72 años luz de la Tierra, es el indicador luminoso que nos señala el lugar exacto.

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
ariadna@revistasuma.es



Mezcla de historia, leyenda y astronomía, pues aparecen: la civilización minoica de Creta (Ariadna), el nacimiento de Atenas (Teseo), la destrucción de Troya (Helena), la civilización micénica (Pollux y Castor), cuya aventura tras el vellocino de oro recuerda en todo a Hércules, en su hazaña tras las frutas de oro y su lucha contra el dragón, a sus pies en el cielo.

No cabe duda que estas historias son y fueron buenas estrategias para recordar las posiciones de las estrellas en el firmamento. Recuerdo del que dependían informaciones esenciales como la localización, la orientación nocturna y la medida del tiempo.

Durante el día, estas tareas eran asumidas por la más importante de todas las estrellas para el ser humano: el Sol, en cuyas sombras y luces la humanidad se apoyó para organizar su tiempo y su espacio.

La cúpula del Panteón de Adriano se transforma en un reloj y un calendario, gracias a los rayos solares que se filtran por su cénit.

El Gran reloj de sol de Santa María de los Ángeles de Roma fue construido para demostrar la exactitud del Calendario Gregoriano y determinar la fecha de la Pascua,

En un extremo se encuentra la señal de Cáncer, que representar el solsticio de verano, y en el otro la de Capricornio, que representa el solsticio de invierno.

Algunas de las mayores líneas meridianas del mundo:

S. Maria del Fiore	Firenze	90 m.
S. Sophia	Costantinopli	50 m.
S. Sulpice	Parigi	26 m.
S. Petronio	Bologna	25 m.
Duomo	Milano	24 m.
Monasterio Beneditino	Catania	22 m.
S. Maria degli Angeli	Roma	20 m.
Collegio dell' Oratorio	Marsiglia	17 m.
Museo Nazionale	Napoli	14 m.

Problemas propuestos

por Daniel Gozalbo Bellés

El calendario

El calendario empieza cada año el día uno de enero, pero no siempre empieza en el mismo día de la semana ¿Cuántos modelos de calendario distintos pueden cubrir todas las posibilidades?

¿Podrías calcular, con agilidad, el día de la semana de un día cualquiera, si es una fecha posterior al viernes 15 de octubre de 1582?

Días julianos

Investiga la razón de ser del origen de los días julianos

Eclipses

¿Cuánto tardan los eclipses en volver a ocurrir en el mismo orden?
¿Cuál es la condición para que se produzca un eclipse de sol anular, visible desde un lugar de la Tierra?
¿Y total?
¿Podríamos estimar su probabilidad?

Oposiciones

¿Cuánto tiempo es necesario para que Marte o Júpiter vuelvan a estar en oposición a la Tierra?

Los días de la semana

¿Conoces el origen de los nombres y el orden de los días de la semana?

Soluciones a los problemas del número anterior

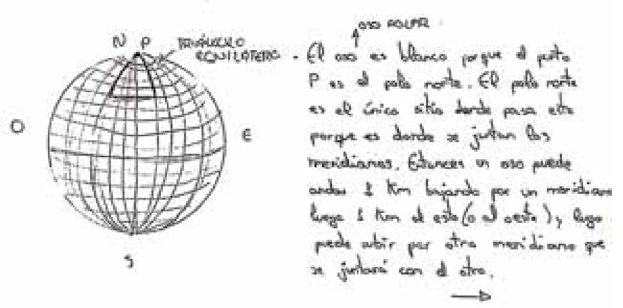
A continuación se muestran algunas soluciones de alumnos junto a comentarios de los profesores que propusieron los problemas y que los han trabajado en sus aulas.

El problema del oso

En el Suma 57 se planteó el conocido problema del oso al que no dimos respuesta en el número siguiente.

> *Un hombre sale de su casa, camina 10 km al sur, dobla y camina 10 km al este y después vuelve a doblar y camina otros 10 km al norte. Tras este recorrido se encuentra de nuevo en su casa, donde lo está esperando un oso ¿de qué color es el oso?*

La solución que se obtiene con mayor frecuencia es la aportada por la alumna Raquel Sales:



Tras largas discusiones se aventuran otras soluciones:

i. Otra ruta que nos devuelve al punto de partida siguiendo las instrucciones es cualquier punto situado a 10 km al norte de los paralelos que midan 10 km de circunferencia, cuyo radio será: $10/2\pi = 1,6$ km.

   Puesto que, al hacer los 10 km al este, daremos una vuelta completa y al subir hacia el norte, volveremos al punto de partida.

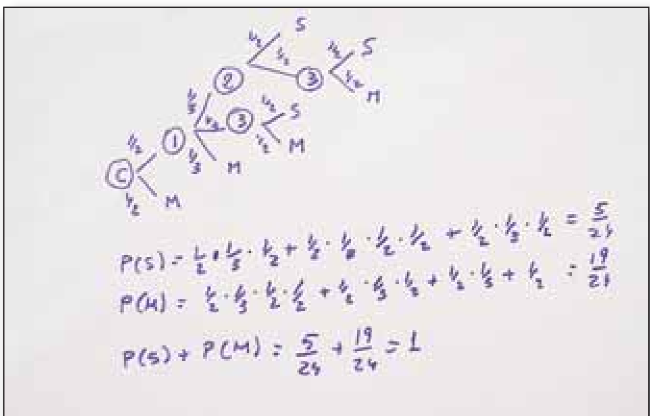
ii. Pero este paralelo no es el único que cumple las condiciones del problema, ya que podría partirse de puntos cada vez más cercanos al Polo Sur, de tal manera que la caminata hacia el este haría que diéramos dos vueltas alrededor del Polo, o tres vueltas, o cuatro, etcétera. Es decir, hay una infinidad de paralelos, donde cualquiera de sus puntos satisface las condiciones dadas.

   Son los paralelos que miden $10/k$ Km, con k entero, es decir, cuyo radio es de $10/2k\pi$, en cuyo caso el cazador dará varias vueltas completas antes de comenzar el ascenso por la misma ruta que hizo el descenso.

En cualquiera de los casos de los dos últimos apartados estaremos en el Polo Sur, pero en la Antártida no hay osos. ¡Luego el oso es necesariamente blanco!

La oveja, el lobo y la col

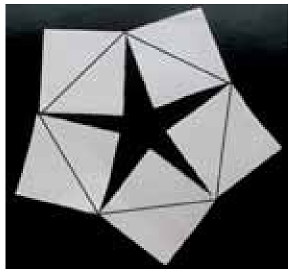
En el Suma 58, en la página 121, en el problema de la oveja, el lobo y la col, falta, tras los dos puntos, la imagen siguiente:

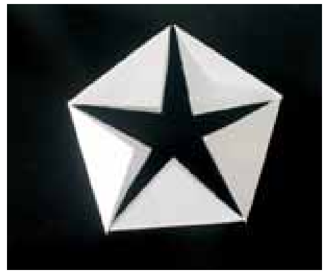


La libertad

Cinco cuadrados iguales se ubican unidos por uno de sus vértices de modo que formen en su interior un pentágono estrellado con las cinco puntas iguales.

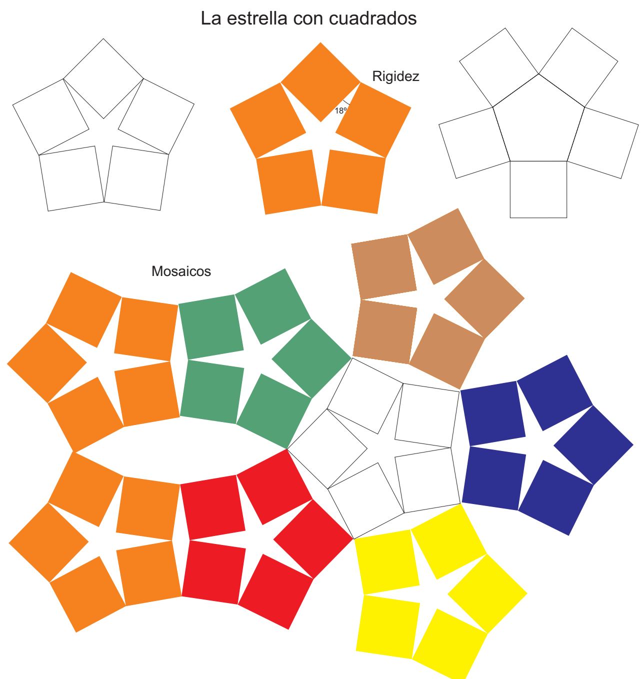
¿Es rígido dicho pentágono o tiene la libertad de cambiar de forma?



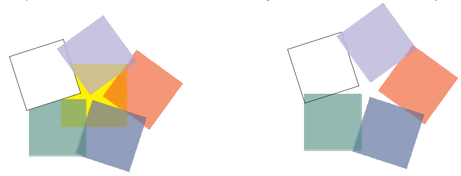


Doblar los cuadrados por sus diagonales ayuda a visualizar la solución: el hecho de exigir que las cinco puntas sean iguales equivale a construir un pentágono regular cuyo lado es igual a la diagonal de los cuadrados. Dicho pentágono es único, por lo que la solución del problema también lo es, es decir, la figura es rígida.

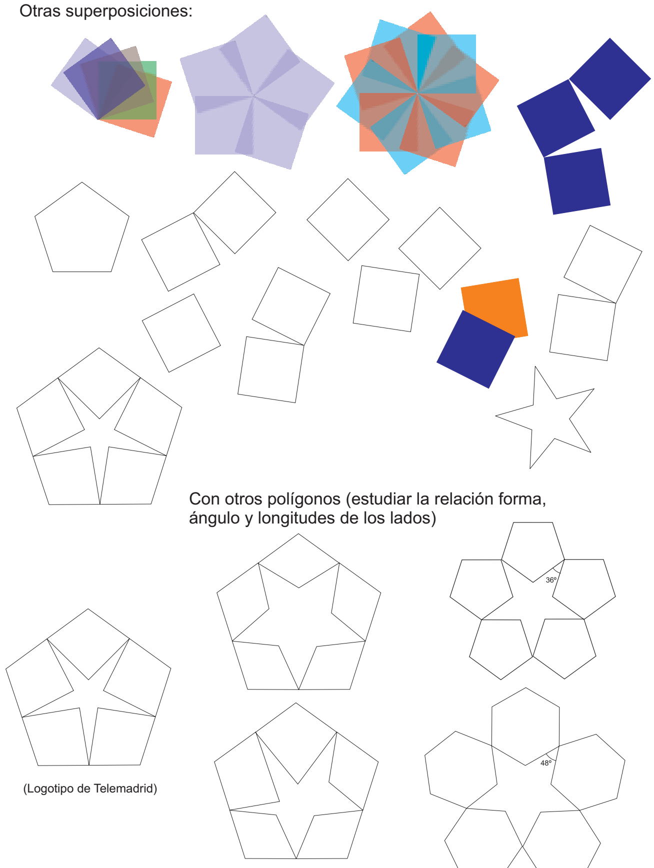
La sencillez de la solución provoca el deseo de romper la condición de la regularidad o a probar con otras superposiciones, otros polígonos:



Variaciones (superposición de cuadrados, trabajar el tema de áreas):



Otras superposiciones:



Con otros polígonos (estudiar la relación forma, ángulo y longitudes de los lados)

(Logotipo de Telemadrid)

Irregularidades

Gominolas

Isabel y Maria se enfrentan en un juego para el que utilizan tres montones de gominolas.

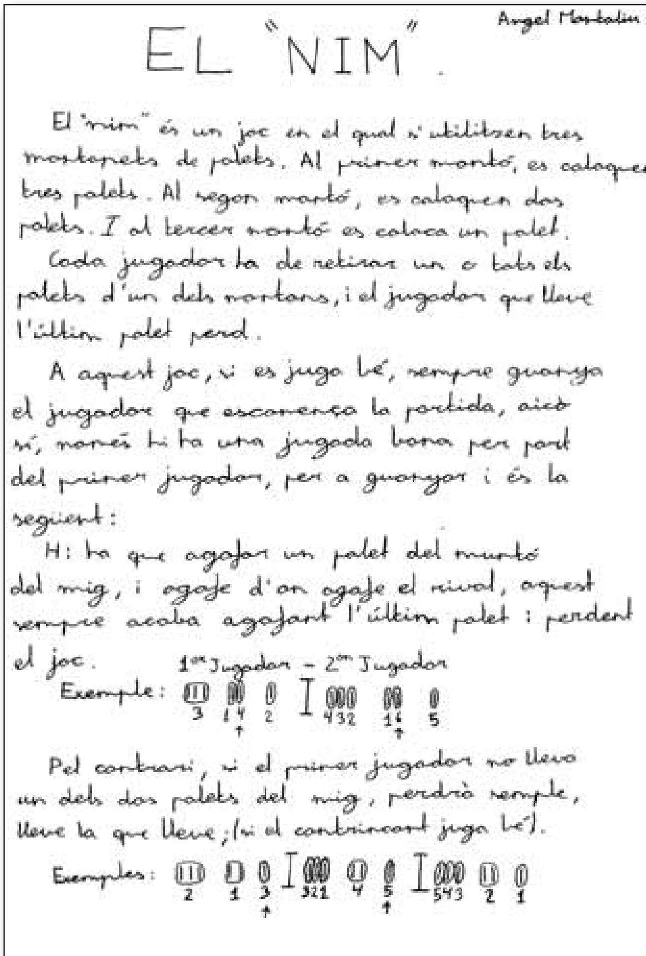
En el primer montón no hay más que una gominola; en el segundo dos; en el tercero 3.

Las reglas del juego son las siguientes:

1. *Cada jugadora ha de retirar o una sola gominola o todas las gominolas de cualquiera de los montones.*
2. *La jugadora que retira la última gominola pierde.*
3. *Le toca a Isabel iniciar la partida.*

¿De qué montón ha de retirar Isabel sus gominolas si quiere ganar la partida?

Este problema ha sido presentado en un aula de 4º de la ESO como el juego del NIM, tradicionalmente planteado con palillos. Una de las soluciones obtenidas se ilustra en el siguiente trabajo:



Angel Martalin

EL "NIM".

El "nim" és un joc en el qual s'utilitzen tres montonets de palets. Al primer montó, es coloquen tres palets. Al segon montó, es coloquen dos palets. I al tercer montó es coloca un palet.

Cada jugador ha de retirar un o tots els palets d'un dels montons, i el jugador que lleve l'últim palet perd.

A aquest joc, si es juga bé, sempre guanya el jugador que escomença la partida, això sí, només hi ha una jugada bona per part del primer jugador, per a guanyar i és la següent:

H: ha que agafar un palet del muntó del mig, i agafe d'on agafe el rival, aquest sempre acaba agafant l'últim palet i perdent el joc.

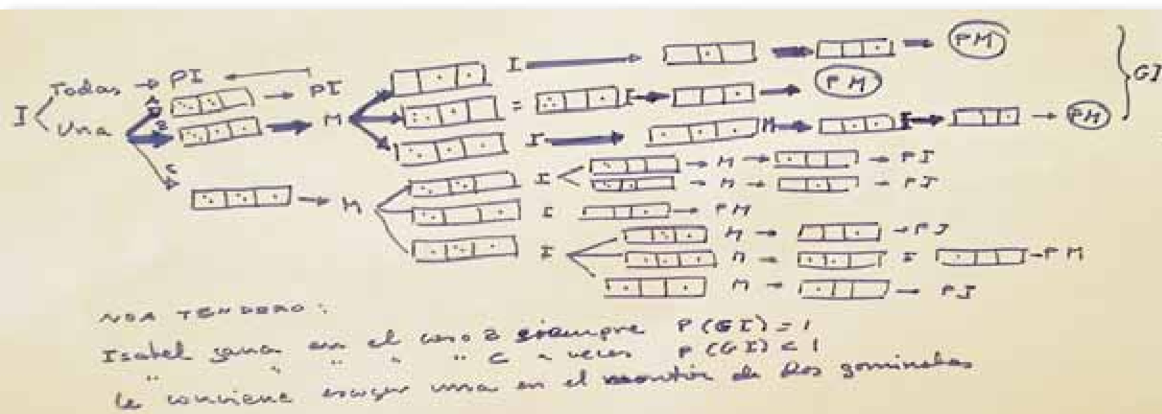
1er Jugador – 2on Jugador

Exemple: 3 1 4 2 I 4 3 2 1 6 5

Pel contrari, si el primer jugador no lleva un dels dos palets del mig, perdrà sempre, lleve la que lleve; (si el contrincant juga bé).

Exemples: 2 1 3 I 3 2 1 4 5 I 5 4 3 2 1

El alumno ha descubierto la estrategia y para justificarla aporta dos ejemplos. La justificación es completa en esta otra resolución:



Tres en raya

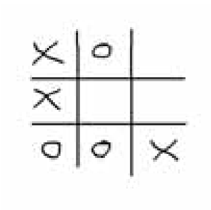
Los **Tres en raya** *se juegan sobre un cuadrado grande, dividido en nueve cuadrados pequeños.*

1. *Cada uno de los jugadores que intervienen en él pone su marca (por regla general, una equis o un círculo) en una de las casillas.*
2. *El jugador que consigue colocar tres marcas formando una línea (horizontal, vertical o diagonal) gana la partida.*
3. *Las marcas se colocan alternativamente, mientras queden huecos en el tablero y no se haya conseguido el tres en raya.*
4. *Al llegar su turno los jugadores procuran colocar su marca en una línea que contenga*

   a) dos de sus propias marcas

   b) dos de su oponente a fin de impedirle ganar, dando siempre preferencia al caso a sobre el b.

En la partida sólo falta por colocar la última marca



¿Cuál de estas marcas x *o* o *ganará el juego?*

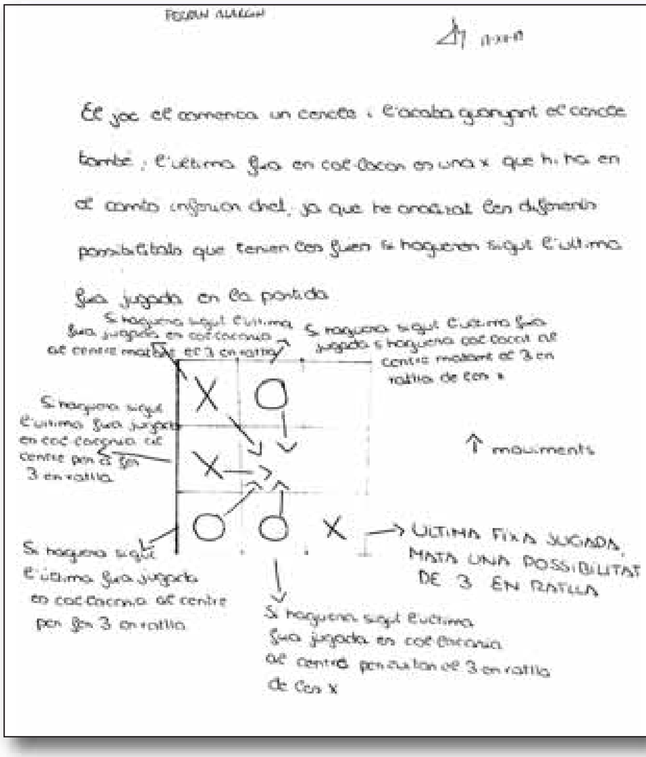
Este es un problema que popularizó Martin Gardner bajo las distintas presentaciones isomorfas conocidas como *juego del quince*, *cuadrado mágico de orden 3*, *tres en raya*, *nueve palabras*, *carreteras entre 8 ciudades*, etc.

La variante que presentamos en el número anterior presenta la novedad de pedir que se reconstruya la partida hacia atrás desde un punto determinado del juego.

La solución aportada por un alumno de 4º de la ESO es la que se muestra a continuación.

Resulta interesante observar cómo se aproximan los procedimientos que utilizan los alumnos para abordar estas dos situaciones a las soluciones que da el autor George J. Summers en *Juegos de ingenio 2*, libro del que hemos extraído las propuestas.

Una mirada detenida a las distintas posibilidades de plantear problemas, a partir de variaciones sobre un juego popular, debe pasar por los libros de Martin Gardner que siguen siendo una fuente inagotable de ideas y propuestas al respecto.



Belleza de un rectángulo

¿Cómo podríamos definir el grado de belleza de un rectángulo?

Problema propuesto por Claudi Alsina y Enrique Trillas (*Fuzzy Sets and Mathematics Education. For The Learning of Mathematics,* Montreal, 1992) y resuelto por el alumnado de Eliseo Borrás Besés, que aporta su análisis de dichas resoluciones.

Las opiniones sobre este problema son increíblemente variadas entre los alumnos. Las anécdotas son muy numerosas, enumerarlas sería muy prolijo. Es necesario dedicar un tiempo no menor de tres clases. Aquí nos limitaremos a indicar unas notas sobre las dos fases principales que aparecen en la resolución.

Definir las variables

- Basta una variable independiente $x=a/b$, la proporción entre las dos dimensiones a y b del rectángulo, para caracterizar cada rectángulo.

- Los valores de esta proporción serán positivos y tan grandes como queramos; pero si no nos importa la posición del rectángulo, podemos suponer que $a \leq$ b. Así, los valores de x estarán comprendidos entre 0 y 1.

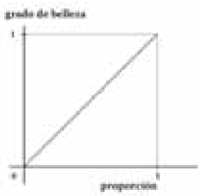
- La variable dependiente *y*, que debe indicar el grado de belleza del rectángulo, será una función de *x* que deberemos construir. Sus valores estarán comprendidos entre 0 y 1, por ejemplo.

Construir la función

a. Hay personas que pueden preferir el cuadrado como el rectángulo más bello. En este caso, es x=1 y su aspecto es el de la figura adjunta.

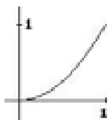
Cuanto más cercana a 1 sea x, más bello será el rectángulo. Una función que modelice este concepto borroso de belleza podría ser:

$$y = f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

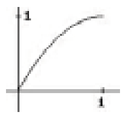


Pero hay otras muchas funciones cuyas diferencias son notables; por ejemplo:

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$



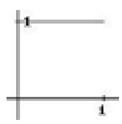
$$y = f(x) = \begin{cases} 2x - x^2, \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$



En las funciones anteriores se puede observar la variación de las pendientes antes y después del máximo, e interpretar dicha variación en términos de la variación de la belleza de los rectángulos correspondientes.

b. Si todas las proporciones nos pareciesen igualmente bellas, nuestra función sería:

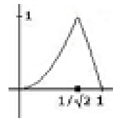
$$y = f(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$



c. Si la proporción más bella opinamos que es la de las hojas DIN-A, para las que es $x = 1/\sqrt{2}$, es decir $1-2x^2=0$, el rectángulo es semejante al de la figura adjunta.

Podemos construir infinitas funciones con un máximo en dicho valor, como hemos apuntado en el caso a. Elijamos la función de modo que cuanto más cerca esté $|1-2x^2|$ de 0, más se acerque el grado de belleza a 1:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 - \left|1 - 2x^2\right|, \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$



En este caso, el grado de belleza se acerca a 1 con distinta rapidez, según se acerque la proporción a la óptima por la izquierda o por la derecha.

d. Pero en el arte se ha preferido como patrón de belleza el rectángulo áureo: aquel para el que es $x = 2/(1+\sqrt{5})$, o lo que es lo mismo, $1-x-x^2 = 0$, semejante al de la figura adjunta.

Como antes, podemos elegir infinitas funciones, pero aquí nos limitaremos a la que exige que cuánto más cerca esté de 0 la expresión $|1-x-x^2|$, más cerca esté el rectángulo de ser áureo:

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 - \left|1 - x - x^2\right|, \text{ si } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

En resumen, la cuestión planteada es una buena ocasión para trabajar las funciones y su significado, a partir de 4º de la ESO. Obviamente, los resultados que se obtienen dependen del curso.