suma+ 60
Febrero 2009, pp. 79-86

En las ciudades invisibles IX

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Cuzco con su planta radiada y multidividida (...) Ámsterdam, semicírculo que mira hacia el septentrión, con canales concéntricos...

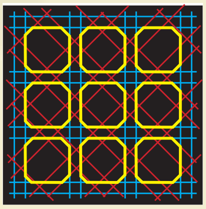
Nueva York, ...con calles como profundos canales todos rectilíneos salvo Broadway.

...mientras cada forma no haya encontrado su ciudad, nuevas ciudades seguirán naciendo. Donde las formas agotan sus variaciones y se deshacen, comienza el fin de las ciudades. En los últimos mapas del atlas se diluían retículas sin principio ni fin, ciudades con la forma de Los Ángeles, con la forma de Kyoto-Osaka, sin forma.

Cuzco, Ámsterdam: ciudades reales, visibles y circulares como Bram, en Francia, y la Connaught Place de Nueva Delhi, en India.

La retícula de calles rectilíneas, ortogonal o no, es a la vez huella y símbolo de la forma urbana. En ocasiones inspira nombres numéricos para sus calles. En Nueva York, desde el sur de Manhattan hasta el Bronx, las calles paralelas al eje E-O se ordenan y nombran según los números naturales (de la 1st a la 242th *street*). De igual modo, las avenidas perpendiculares que discurren N-S van de la 1ª a la 11ª, comenzando por el Este. No tan extensa es la retícula de Mandalay, en Myanmar, donde 90 de las calles N-S están numeradas de Este a Oeste, y 44 de sus perpendiculares de Sur a Norte. En la retícula de Miramar (Argentina) las calles en una dirección reciben nombres pares; las otras, impares. No es extraño que en ámbitos tan geométricos como los de esas ciudades nombre y número se confundan.

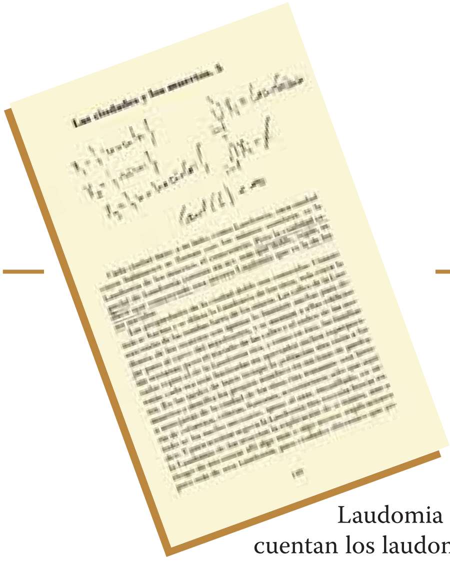
Las retículas urbanas crean casas de esquinas rectas. Sólo en el *Eixample* de Barcelona son de 135º. El autor del proyecto, Idelfons Cerdà, suavizó los giros de 90º que deberían trazar los carros en cada esquina con dos giros de 45º. Sólo una calle del Eixample barcelonés lleva por nombre su relación geométrica con el barrio entero: la *Avinguda Diagonal*.



Según Polo *nuevas ciudades seguirán naciendo* mientras la aplicación entre ciudades y formas no sea exhaustiva. En la culminación de este proceso sitúa el veneciano *el fin de las ciudades*. Pero, ¿acaso las formas posibles pueden agotarse? ¿Se corresponde dicho final con el agotamiento del catálogo de formas? El matemático cree que esa forma debe, por fuerza, aproximarse a una de las infinitas que pueblan su vasto muestrario. Pero una ciudad sin forma no es imposible. Toda deformidad podría ser sólo pasajera, un lapso del cambio en desarrollo. Las ciudades *sin forma* no carecerían de ella por estar muertas, sino por estar vivas. Estarían, como dice Calvino en otro momento, buscando su forma. Pero la forma futura de la ciudad presente no puede dictarse. Las ciudades no obedecen. Posiblemente lo que consideramos como ciudades sin forma sean ya ciudades con una forma, presente y concreta, irreconocible para ojos acostumbrados a las formas del pasado. ■

Diseño y maquetación FMC

Miquel Albertí Palmer
IES Vallés, Sabadell
ciudadesinvisibles@revistasuma.es



Laudomia

Laudomia está hecha de una partición disjunta en la que se cuentan los laudomios vivos (y), los muertos (x) y ***los no nacidos*** (z) todavía. En cada instante t la población $P(t)$ de Laudomia no se reduce a $y(t)$, sino que es la suma de tres variables: $P(t)=x(t)+y(t)+z(t)$.

Pero se diría que la población de Laudomia no es finita, pues se supone que una infinidad está por nacer. Sin embargo, por vasto que sea el espacio reservado a dicha infinidad, jamás será suficiente. La infinidad de volúmenes finitos es un volumen infinito. Ahora bien, si *es posible atribuir a los no nacidos las dimensiones que se quiera*, nada impide imaginarlos como puntos y solucionar el problema del volumen.

En efecto, los laudomios por nacer son *puntiformes*. Y como están *separados del antes y del después*, la línea de espera es discreta, discontinua *cuanto más se aguza la mirada*.

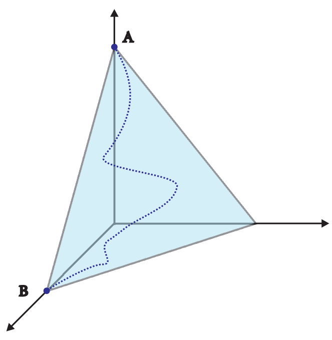
...las generaciones se sucederán hasta alcanzar cierta cifra y no seguirán adelante ...y habrá un último habitante de Laudomia por nacer ...

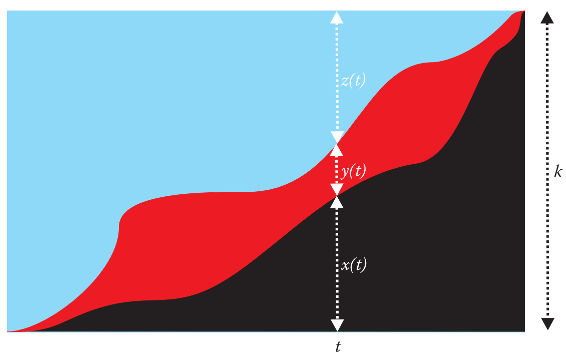
Que haya un último habitante por nacer invita a pensar la ciudad como una curva discreta en el plano $x+y+z=k=P(T)<\infty$ Esa curva empieza en $A(0, 0, k)$, donde todos están por nacer; y termina en $B(k, 0, 0)$, cuando todos han fallecido. ■

Pero la cualidad especial de Laudomia consiste en ser, más que doble, triple, es decir que comprende una tercera Laudomia que es la de los no nacidos.

Justamente Laudomia asigna una residencia más vasta a aquellos que están por nacer; es cierto que el espacio no guarda proporción con su número, que se supone infinito ...es posible atribuir a los no nacidos las dimensiones que se quiera ...

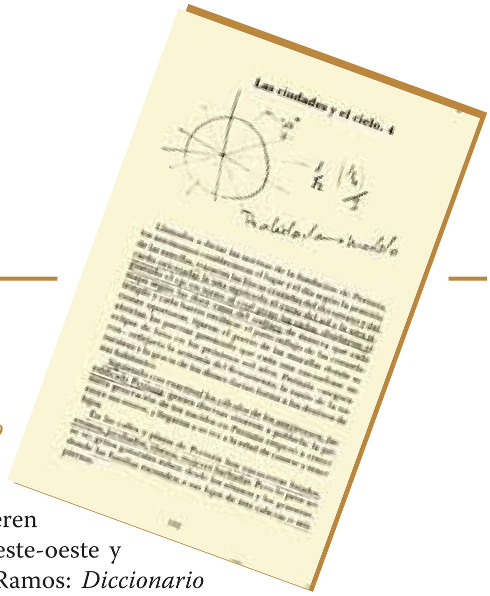
...cuanto más aguzan la mirada, menos reconocen un trazo continuo; los que van a nacer en Laudomia se presentan puntiformes como motas de polvo, separados del antes y del después.





Laudomia*: ciudad de población constante y finita*

Perinzia


Las ciudades y el cielo. 4

...trazaron las líneas cruzadas del decumano y del cardo orientadas la una siguiendo el curso del sol y la otra siguiendo el eje en torno al cual giran los cielos...

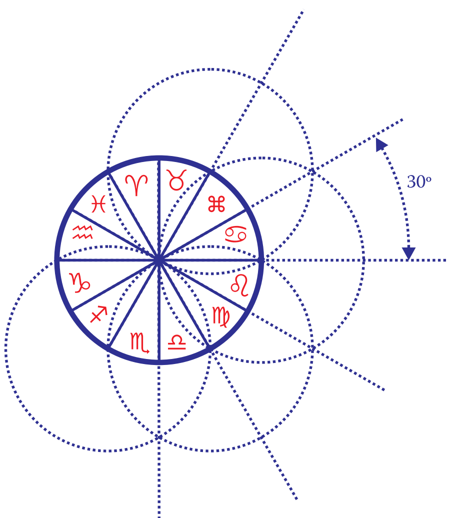
...dividieron el mapa según las doce casas del zodíaco ...Siguiendo con exactitud los cálculos de los astrónomos, fue edificada Perinzia...

...una difícil alternativa: o admitir que todos sus cálculos están equivocados y que sus cifras no consiguen describir el cielo, o revelar que el orden de los dioses es exactamente el que se refleja en la ciudad de los monstruos.

En las calles y plazas de Perinzia hoy encuentras lisiados, enanos, jorobados, obesos, mujeres barbudas ...las familias esconden a sus hijos de tres cabezas o seis piernas.

Esas *líneas cruzadas del decumano y del cardo* de la edición de Siruela de 2005 eran las *líneas cruzadas de cada una de las calles principales* en la del año 1994. Ambos casos se refieren a las vías o ejes que siguen las direcciones este-oeste y norte-sur respectivamente (Seco, Andrés y Ramos: *Diccionario del español actual*, 1999). La primera, es la dirección del curso solar (E-O); y la segunda, la del eje en torno al cual giran los cielos (N-S). Es así en New York y Mandalay, pero no en Barcelona o Miramar.

De nuevo una correspondencia 1-1 entre el cielo y la ciudad que lo representa. En esta ocasión el modelo se llama zodíaco y su diseño es un círculo dividido en 12 sectores. Fue en Perinzia donde, *siguiendo con exactitud los cálculos de los astrónomos*, dividí un círculo en 12 partes iguales con regla y compás (véase la figura). Habrá quien, impresionado por el rigor geométrico, atribuya a la figura resultante mayor credibilidad y confíe en que las cábalas confirmen su destino. Pero aparte de sus orígenes remotos, la Astrología y la Astronomía no tienen nada en común.



Las cosas no salieron como se esperaba. ¿A quién culpar de los monstruos que llenan la ciudad, a los astrónomos o al cielo? Una alternativa es que los cálculos estén equivocados. Otra es dar por bueno que *el orden de los dioses es exactamente el que se refleja en la ciudad de los monstruos*.

Pero aceptar el orden de los dioses significa aceptar los monstruos. Es decir, que los monstruos no son tales. Viendo como normales a quienes presentan aspectos anatómicos inusuales nos daremos cuenta de que el error no es responsabilidad de los astrónomos ni de los astros, sino de quienes viven ahí.

Para resolver su problema los perinzios harán bien en acudir de nuevo a los astrónomos. Al fin y al cabo, astrónomos y matemáticos comparten la tarea de comprender monstruosidades. Es verdad que se las rechaza al principio, pero con el tiempo acaban por integrarse a su conocimiento. Líneas monstruosas que en el pasado no merecían la consideración de *curva* y números monstruosos que no merecían el calificativo de *número* son ahora curvas y números tan inofensivos que no hay el menor reparo en dejar que los adolescentes se diviertan con ellos. ¡Benditos monstruos y bendita Perinzia!

Perinzia*: donde los monstruos aguardan su integración*

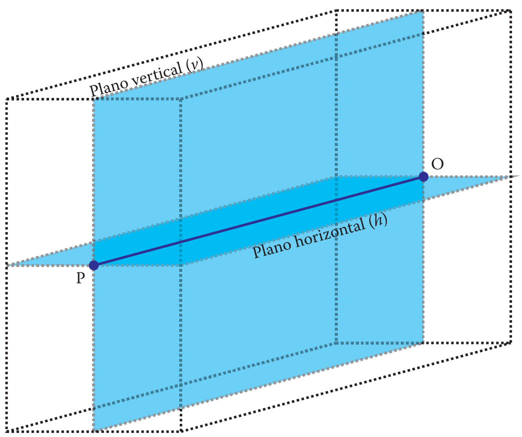
Procopia

Llegas a Procopia y te instalas en un hotel. Nada más entrar en la habitación descorres la cortina de la ventana y te quedas un rato contemplando el paisaje. No ves nada que no hayas visto antes: ventanas, fachadas, tejados, semáforos, hileras de coches precedidos de motocicletas, tenderos arreglando mercancías, mujeres empujando carritos –de unos rebosan hortalizas; de otros, bebés –, grupos de adolescentes perezosos, ... De repente, sin saber porqué, te sustraes del exterior y te fijas en algo dentro de la habitación en lo que nunca antes habías reparado. Te fijas en el marco del paisaje que contemplabas hace unos instantes. La vista se enmarca ahora entre los dos fragmentos horizontales del marco de la ventana, un pedazo de la cortina cayendo a plomo y el otro pedazo inclinado que has sujetado a la pared. El marco del paisaje es un trapecio.

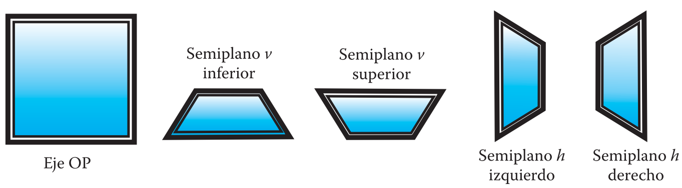
... me detengo a contemplar el paisaje que se ve corriendo la cortina de la ventana: ...un pedazo de cielo azul en forma de trapecio.

Tan pasmado estás de no haber caído antes en este detalle que en lugar de volver a concentrarte en la ciudad reflexionas sobre el trapecio que te separa de ella. Apartas las cortinas por completo y al ver que la ventana es cuadrada te preguntas desde qué puntos de la habitación se ve como un trapecio. Te pones de puntillas estirando el cuello para verla desde arriba. Te subes a la cama para contemplarla desde más alto aún, de pie y con la cabeza rozando el techo. Después te agachas en el suelo e, incluso, te tumbas en él para tener la perspectiva de una hormiga. También pegas la cara a cada una de las paredes. Tu conclusión es que el cuadrado original sólo se aprecia con su forma original, como un cuadrado, de mayor o menor tamaño, desde los puntos del eje horizontal perpendicular al centro. Fuera de dicho eje la visión transforma el cuadrado en trapecios o cuadriláteros más o menos irregulares.

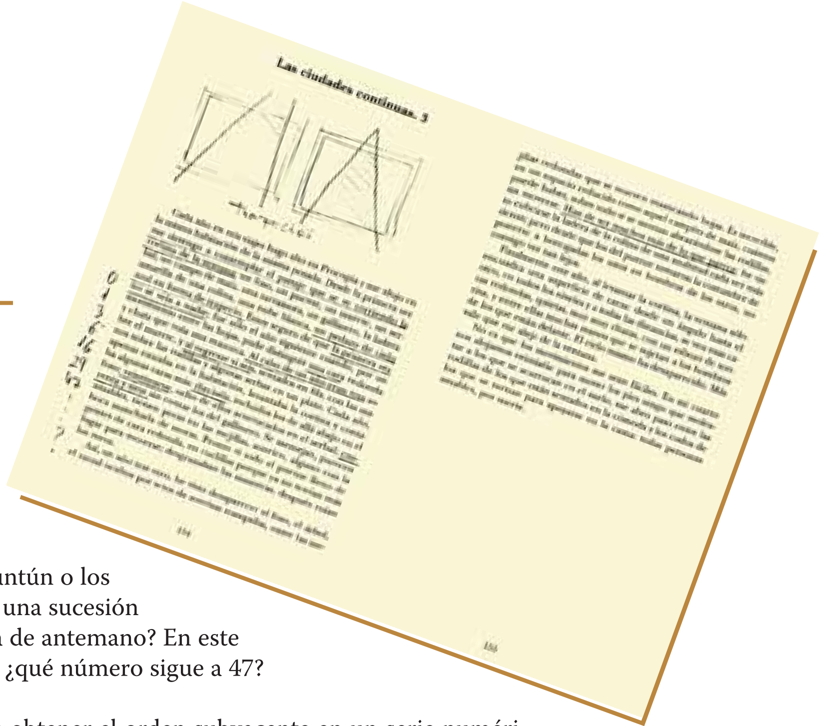
Registras mentalmente tus observaciones de ese *pedazo de cielo azul* relacionándolas con los lugares desde los que apreciaste cada una de ellas. Luego reproduces todo el habitáculo en el papel destacando ese eje horizontal centrado en el cuadrado de la ventana:



El quid de la cuestión está en los dos planos, el vertical y el horizontal, cuya intersección determina el eje de la ventana. En otro esbozo relacionas cada forma trapezoidal con el lugar de la habitación desde dónde se percibe:



Procopia


Las ciudades continuas. 5

... la primera vez no se veía a nadie... el año siguiente... pude distinguir una cara ...Al cabo de una año eran tres ... al regresar vi seis ...dieciséis ...veintinueve ...cuarenta y siete ...cuántos puede haber ...

¿Son *0, 1, 3, 6, 16, 29, 47* números escritos al tuntún o los términos de una sucesión determinada de antemano? En este último caso, ¿qué número sigue a 47?

Un modo de obtener el orden subyacente en un serie numérica es analizar las diferencias entre los elementos que lo conforman, como a menudo hacen Marco y Kublai con las ciudades que no pueden ver. Si una sucesión es aritmética, las diferencias (restas) entre términos consecutivos indican precisamente cuál es su 'diferencia', su patrón de formación. Si la sucesión es geométrica, los cocientes dicen cuál es su razón o proporción. Las diferencias y cocientes consecutivos de la serie de Procopia son los de las tablas de la izquierda:

	diferencias					
0						
1	1					
3	2	1				
6	3	1	0			
16	10	7	6	6		
9	13	3	-4	-10	-16	
47	18	5	2	6	16	32

	cocientes					
0						
1	*					
3	3	*				
6	2	0,67	*			
16	2,67	1,33	2	*		
9	1,81	0,68	0,51	0,26	*	
47	1,62	0,89	1,32	2,58	10,13	*

Pero ni las diferencias ni los cocientes aclaran nada. También parecen caóticas. ¿Tendrá la sucesión alguna relación con los números primos, patrones del caos remanente de la multiplicidad en los números naturales? No lo parece, pues la sucesión contiene primos y no primos. ¿Acaso estamos ante una disyuntiva similar a la de decidir qué número sigue a 5 en la serie 1, 2, 3, 4, 5?

Según Wittgenstein, la respuesta a la pregunta de qué número sigue al 5 en la serie 1, 2, 3, 4, 5 es que puede ser cualquier número. Y es verdad. El número siguiente a 1, 2, 3, 4, 5 puede ser 6, pero muy bien podría ser 8. Su presencia justificada al considerar la sucesión 1, 2, 3, 4, 5 como compuesta de la alternancia de los impares (1, 3, 5, 7, ...) con los más pares de los números, las potencias de 2 (2, 4, 8, 16, ...). Incluso podría ser cualquier otro, como, por ejemplo, π. La presencia de este irracional plenamente justificada por la razón siguiente:

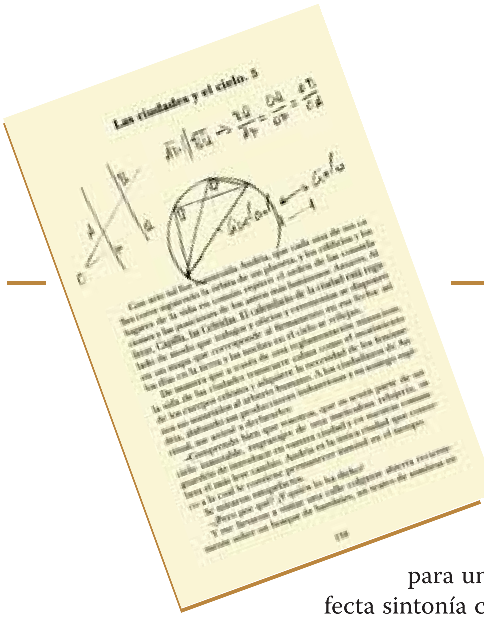
$$\forall n \in N:\ a_n = \begin{cases} n\,,\ n \neq \dot{6} \\ \pi\,,\ n = \dot{6} \end{cases}$$

Cualquier número sigue a cualquier número mientras hallemos una excusa lógica para justificarlo. El único modo de saber cómo se creó una sucesión es preguntar a su autor qué fue lo que guió su creación. Sólo Ítalo Calvino podría decirnos cuál es el término general, si es que existe, o cuál es la lógica que relaciona los términos 0, 1, 3, 6, 16, 29, 47. Desgraciadamente, esto es imposible. Nunca sabremos si su causa está en el azar, el capricho, o en una inspiración poética extraordinaria. Olvidémonos pues de ella y demos una vuelta por la ciudad enmarcada en el trapecio. ■

Procopia: *elogio del trapecio.*

Andria

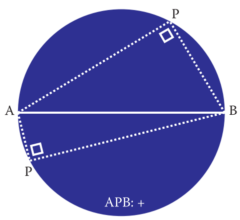
Andria

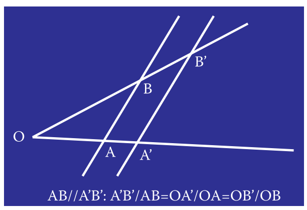


...una estatua de Tales ...

Imagino que ese tal Tales es Tales de Mileto, el gran sabio de la antigua Hellas y uno de los nombres míticos de la historia de las Matemáticas. Imagino que sí, aunque tal vez mi imaginación disimule un deseo. Pero para una ciudad como Andria, cuyo anhelo es la perfecta sintonía con el cielo, no es descabellado suponer que se trata del sabio de Mileto.

La fama de Tales se debe, sobre todo, a dos teoremas distintos que llevan su nombre. Uno afirma que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. El otro, que los segmentos paralelos interceptados por dos rectas cualesquiera son proporcionales.





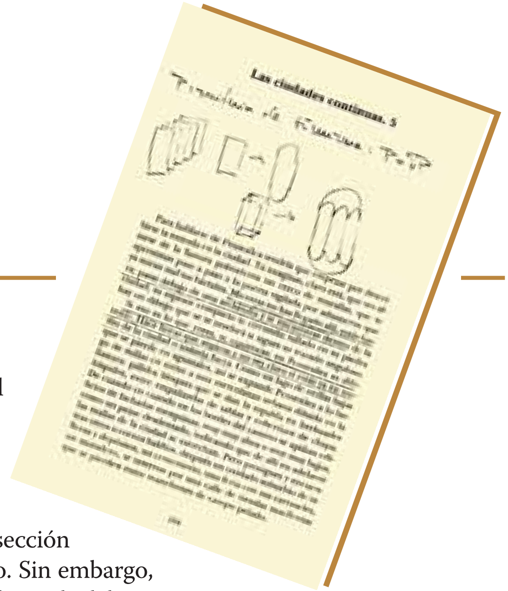
Cuando los historiadores de las Matemáticas hablan del teorema de Tales suelen refieren al primero. En cambio, en el ámbito educativo se conoce como teorema de Tales al segundo. En cualquier caso, el teorema que relaciona la semejanza de triángulos con la proporcionalidad de sus lados se corresponde con una generalización trivial de la proposición nº. 2 del libro VI de *Los Elementos* de Euclides. El teorema referente al ángulo recto inscrito en la semicircunferencia no aparece de así en Los Elementos, pero se deduce inmediatamente como corolario de la proposición nº. 20 del libro III.

Tan perfecta es la correspondencia entre nuestra ciudad y el cielo ...que cada cambio de Andria comporta alguna novedad entre las estrellas.

De nuevo nos encontramos con una correspondencia 1-1 entre el cielo y su modelo, la ciudad. Si Andria reproduce el cielo con absoluta perfección, ¿cuál de los dos es el original y cuál es la copia? Tan biyectiva es una aplicación f como su inversa f^{-1}. Sin embargo, si, tal y como se afirma, son los cambios de Andria los que provocan novedades entre las estrellas, es la ciudad la que dirige el destino del cielo convirtiéndolo en su imagen. Una afirmación que puede ser calificada como falsa e irreal, pero que es verdadera. Expone la paradoja implícita en la biyección. Dentro de ella, en una correspondencia 1-1, no hay modo de dilucidar cuál es la causa y cuál el efecto de un fenómeno. Menos aún quién o qué dicta los cambios en cualquiera de los elementos relacionados en esa correspondencia.

...la curva de una vuelta de la espiral de la Vía Láctea.

La espiral es, sin duda, la curva más citada en *Las ciudades invisibles*. Aquí Calvino se refiere a la más colosal de todas las espirales, la de nuestra galaxia. ■



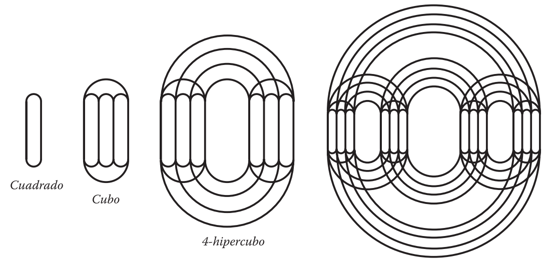
Pentesilea

...Mientras no has llegado ahí, estás fuera; pasas debajo de una archivolta y te encuentras dentro ...Si eso es lo que crees, te equivocas: en Pentesilea es diferente. Hace horas que avanzas y no ves claro si estás ya en medio de la ciudad o todavía fuera. ...si Pentesilea es sólo periferia de sí misma y tiene su centro en cualquier lugar, has renunciado a entenderlo ...fuera de Pentesilea, ¿existe un fuera? ¿O por más que te alejes de la ciudad no haces sino pasar de un limbo a otro y no consigues salir de ella?

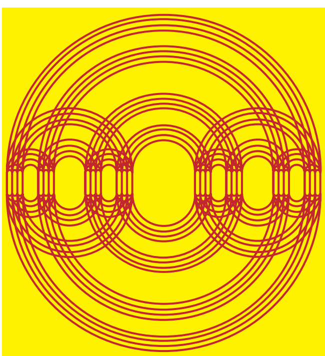
¿Existe en Pentesilea una frontera separando el interior del exterior? ¿Qué cosa es ***sólo periferia de sí misma y tiene su centro en cualquier lugar***? La periferia es el perfil, la frontera entre el ser y el no ser. Matemáticamente, la frontera de un conjunto es la intersección de su adherencia con la de su complementario. Sin embargo, como la forma del complementario, el no ser, depende del espacio que alberga al conjunto, el ser, su frontera depende del espacio en el que se considera inmerso. Así, la frontera de un intervalo en la recta real la constituyen sus dos puntos extremos, mientras que la frontera del mismo intervalo en el plano es él mismo. De la misma manera la periferia de un círculo en el plano es su circunferencia; la de un círculo en el espacio, él mismo. Un segmento en el plano y un círculo en el espacio son frontera de sí mismos.

¿Qué cosas tienen su centro en cualquier lugar? Un conjunto finito de puntos, un segmento o un triángulo poseen centros bien definidos (punto medio, baricentro, ortocentro, circuncentro, incentro...). Si algo carece de centro es porque carece de referentes con relación a los que pueda determinarse. Este es el caso de los conjuntos infinitos y de otros conjuntos que, aunque limitados, carecen de referentes. La ciudad esférica de Trude verifica esas condiciones. Por una parte, es periferia de sí misma (esfera en el espacio). Por otra, su centro es ubicable en cualquier lugar, y no precisamente en el centro geométrico de la esfera que le da forma, que no le pertenece.

Según Calvino, Pentesilea es, como Trude, una ciudad continua. Pero lo que las diferencia es el paso ***de un limbo a otro***. Los limbos de Pentesilea impiden visualizar una ciudad bidimensional como Trude. Imagino Pentesilea como un libro de hojas tridimensionales. Un haz infinito (centro en cualquier lugar) y numerable (periferia de sí misma) de hojas (limbos) tridimensionales que el visitante recorre sin apercibirse de cuándo abandona uno y penetra en el siguiente (orden, numerable). El viajero atraviesa esos limbos buscando un centro que puede situar donde le plazca. Pentesilea es una ciudad-libro de dimensión $n>3$, una versión ampliada del *Libro de arena* de Borges.



Quién sabe si Pentesilea no posee más dimensiones de las perceptibles para visitantes tridimensionales.


6-hipercubo

Pentesilea*: ciudad, como mínimo, tetra dimensional.*

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

> *Si te digo que la ciudad a la cual tiende mi viaje es discontinua en el espacio y en el tiempo, a veces rala, a veces densa, no creas que haya que dejar de buscarla.*

Tiende*, *discontinua*, *densa, cada témino por separado no tendría porqué remitir al lector al contexto matemático, pero reunidos así, en una misma frase, resulta difícil que el lector matemático no los relacione con las Matemáticas.

Sobre tendencias y continuidades ya se ha hablado mucho en esta sección. ¿Qué hay de la densidad? No sé si Calvino tenía en mente la idea de conjunto denso tal y como se define en Matemáticas, pero no hay duda de que los adjetivos ralo y denso del lenguaje corriente señalan aspectos topológicos de las cosas.

El concepto de densidad no se refiere a un único conjunto sino a una relación topológica entre dos: A es denso en $\mathbf{B}$ si en todo entorno de todo punto de B hay algún punto de A. En teoría, que una ciudad sea ***densa*** en una región no significa que la ocupe por completo. $\mathbf{Q}$ es denso en $\mathbf{R}$, pero no lo llena. Claro que en la realidad no hay entornos infinitesimales o no son apreciables y esta definición resulta exagerada.

En el lenguaje corriente *ralo* y *denso* son adjetivos antónimos. Si denso significa *espeso*, *tupido* o *apiñado*; *ralo* se relaciona con *disperso*, *diseminado*, *discreto*, *discontinuo*. Pero la definición matemática contraria a denso no se ajusta a la idea corriente de ralo. Los antónimos del lenguaje corriente no se corresponden con los contrarios del lenguaje lógico matemático. Por eso diremos que A es ralo en B si para todo punto de $B–A$ existe un entorno sin puntos de A. Así, $\mathbf{Z}$ es ralo en $\mathbf{Q}$ y en $\mathbf{R}$.

De todos modos, conviene tener presente que la realidad a veces es sólo aparente, pues en lontananza, lo inconexo puede parecer conexo; lo discontinuo, continuo; y lo ralo, denso (véase la imagen).

> *...buscar y saber quién y qué, en medio del infierno, no es infierno, y hacer que dure, y dejarle espacio.*

La saturación es crisol del infierno que acecha a las ingentes aglomeraciones urbanas, algunas más extensas y pobladas que países enteros. Se trata de un problema de densidad ligado al umbral crítico que no debe superar la proporción entre la población y el espacio que ocupa.

En esa fórmula no sólo la población es variable; también varía el espacio. Y lo hace en las tres dimensiones. En cualquier caso, la cuestión no se reduce a una fórmula tan simple. La realidad es y será mucho más compleja. Ítalo Calvino concluye el libro con lo que es a la vez teorema y fórmula sobre cómo se relacionan las cuatro variables principales de la ciudad: tiempo, espacio, gente y forma. Esa última frase es el remedio contra el desconcierto: ***saber quién y qué, en medio del infierno, no es infierno y hacer que dure y dejarle espacio***.

EN LAS CIUDADES INVISIBLES ■