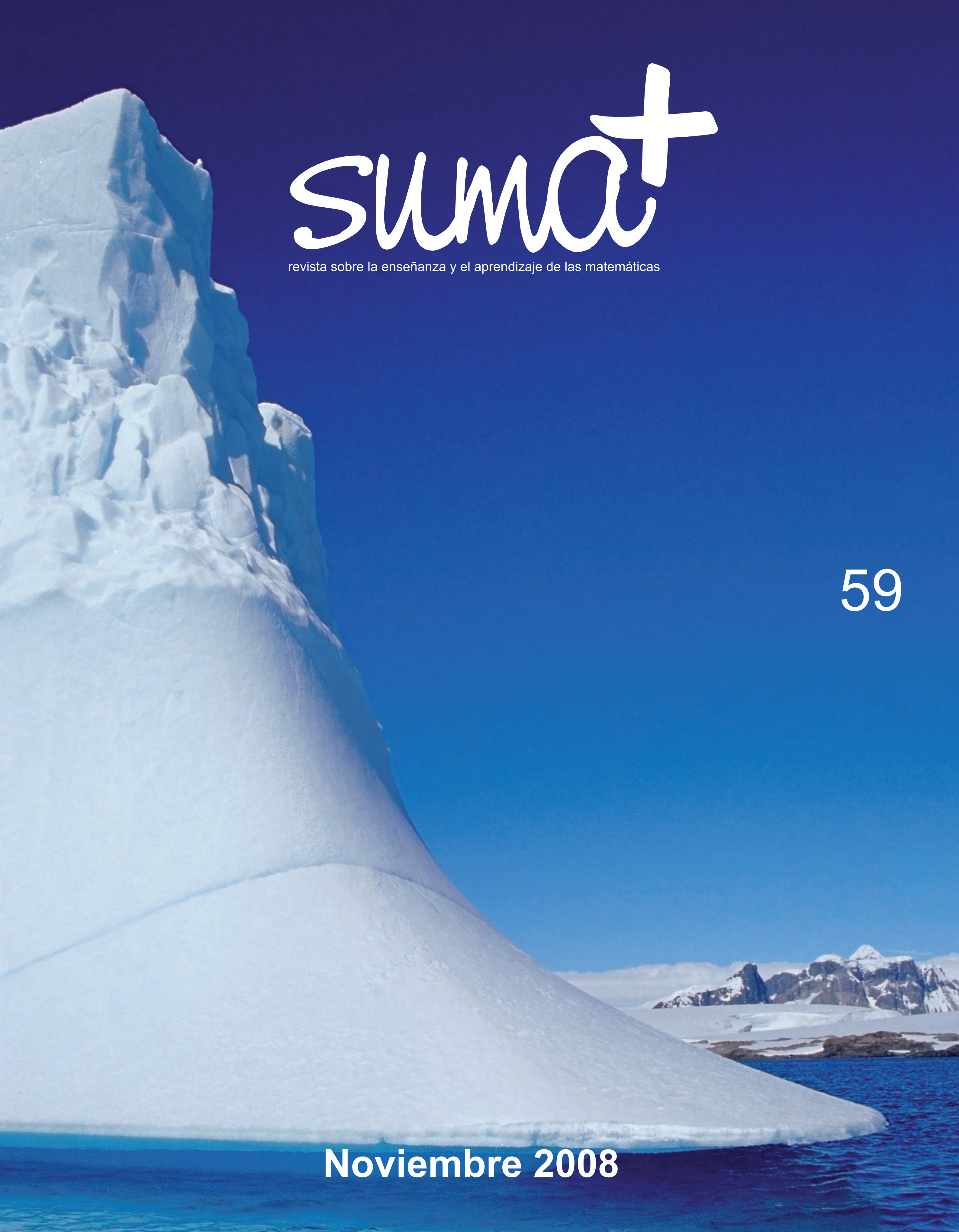


suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

59

Noviembre 2008

suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

Índice

Edita
FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)
Web
Antonio Alamillo Sánchez
www.revistasuma.es

Diseño de la portada: *O. Monzó*
Fotografía de la portada:
Hielo antártico, *Mayte Piera*
Maquetación
T. Queralt y O. Monzó
Revista Suma
Apartado 498
E-46900-Torrent (España)
Fax:+*(34) 912 911 879*
Tirada: *6700 ejemplares*
Depósito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

59 ***Noviembre 2008***

actividades de la FESPM

SUMA es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral, cuyo objetivo es tratar sobre aquellos aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje, destinada al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en Torrent (Valencia) - ESPAÑA

suma+ 59
Noviembre 2008

Que veinte años no es nada

La revista SUMA acaba de cumplir el pasado mes de octubre veinte años de su primera aparición, y aunque en el contexto de una clásica melodía embriagada de nostalgia o de un capítulo de la historia universal este tiempo es insignificante, para nosotros ha sido relevante. No he podido resistir la tentación de revisar aquel primer ejemplar, que daba carta de naturaleza a una incipiente **Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas***, gracias al empuje de un equipo de entusiastas y bajo la dirección de Rafael Pérez Gómez en Granada, que asumió el reto e inició la tarea de su edición.*

A la vista de aquel primer ejemplar, puedo apreciar que grandes cambios se han producido en SUMA, tanto en la forma como en el fondo. Gracias a los avances tecnológicos que nos facilitan la tarea de edición, vamos obteniendo unos resultados cada vez mejores. Los programas informáticos de maquetación y edición gráfica, así como la incorporación del color, proporcionan un resultado muy alejado de la imagen inicial de nuestra revista. Nuestro mayor reconocimiento a los que empezaron a trabajar para que la revista llegara a lo que ahora tenemos en nuestras manos, así como a los que después la continuaron. Tras Rafael Pérez, Sixto Romero en Huelva, Julio Sancho y Emilio Palacián en Zaragoza, y Francisco Martín e Inmaculada Fuentes en Madrid, han puesto su trabajo y esfuerzo al servicio de todos para que SUMA sea útil e interesante para el profesorado de matemáticas.

También en el fondo SUMA ha ido evolucionando, adquiendo en el tiempo la forma en la que actualmente se distribuye en las secciones de **artículos**, **poliedro** *y* **actividades de la Federación**. *Pero no ha perdido su voluntad de ser: ...*una revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, órgano de expresión de la Federación de Sociedades que la edita, útil para la clase, plural y participativa, dedicada a todos los niveles educativos y que recoja ideas, sugerencias, informaciones, innovaciones,... agrupadas en las distintas secciones*, tal y como se apuntaba en el editorial del número 1.*

Sin embargo, hay ciertas cosas que observo no han cambiado: el entusiasmo por nuestro trabajo, la voluntad de mejorar en el proceso de enseñanza y aprendizaje en el que participamos con nuestros alumnos, el interés por conocer todos los aspectos que nos pueden ayudar a ser mejores profesionales, y como no, mejores personas. Esperemos que este espíritu se mantenga e incluso se incremente con las nuevas generaciones de profesores y profesoras de Matemáticas.

Quiero aprovechar para elogiar la labor abnegada, silenciosa las más de las veces, equilibrada y brillante de todos los que han contribuido con su aportación, a construir SUMA a lo largo de estos veinte años, y agradecer en nombre de todos su colaboración para conseguir que la revista SUMA disponga actualmente de un prestigio reconocido a nivel internacional.

Estos veinte años serán dentro de otros veinte aquellos primeros años de supervivencia, afianzamiento y lucha por la conquista del respeto y el reconocimiento del profesorado de matemáticas como un grupo profesional que puede aportar a la Sociedad su experiencia y conocimiento.

A todos, ¡muchas felicidades!. ■

Manuscrito de Pedro Puig Adam

artículos

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 7-16

Los números mórficos en secundaria

El número de oro y el número plástico pertenecen a la clase de los números mórficos. En este artículo revisamos algunos aspectos históricos, presentamos algunas de sus propiedades y proponemos actividades sobre ellos, que permitirán trabajar transversalmente Álgebra y Geometría. Usando el lenguaje funcional como modelo de representación, los alumnos podrán conjeturar, de forma intuitiva, un resultado fundamental: Solo existen dos números mórficos, el número de oro y el número plástico.

The golden mean and the plastic number belong to the class of morphic numbers. In this paper we recall some historical aspects and we show some properties of them and we present some activities, which will allow us to work transversely Algebra and Geometry. By means of use of the functional language as a representational model, our students will can to conjecture the most fundamental result: There exist only two morphic numbers, namely the golden mean and the plastic number.

Una de las manifestaciones más fructíferas de la actividad matemática es la *generalización*. Cuando generalizamos construimos matemáticas, pues definimos y relacionamos conceptos, descubrimos propiedades, confirmamos intuiciones,… y tanto en el "resultado final", como en el "camino recorrido", encontraremos siempre belleza y armonía. Un claro ejemplo de bella generalización es la familia de los *números metálicos*, (Spinadel, 1998). Esta familia está formada por el conjunto de las soluciones positivas de las ecuaciones de la forma :

$$x^2-mx-n=0,\ m=1, 2, 3, \ldots, n=1, 2, 3, \ldots$$

Una subfamilia relevante de ella se obtiene al considerar n=1 y m= 1, 2, 3,... . Todos sus elementos comparten propiedades que son generalización de las que cumple el *número de oro* ϕ (Spinadel, 1999; Redondo, 2006; Spinadel y Redondo, 2007) y representan la extensión natural del concepto de *proporción áurea* en el plano. Pero la *divina proporción*, puede extenderse al espacio de tres dimensiones, también de forma natural, en *número plástico* ψ (Van der Laan, 1960; Alsina y García-Roig 2001; Alsina, 2007), y éste, junto con el *número de oro*, pertenece a la familia de los *números mórficos*, que aparece al considerar la posibilidad de seguir extendiendo aún más las propiedades que comparten. Este artículo está dedicado en esencia a ese proceso de generalización. La idea que organiza la primera parte es la extensión de la "noción plana" de la *proporción áurea* ϕ al espacio de tres dimensiones, en conexión con el problema de la búsqueda de un "sólido armonioso". En la segunda intentaremos ir mas lejos...

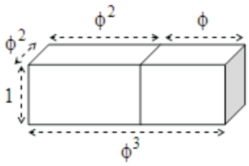
Como sabemos que el estudio de la belleza y armonía en las formas geométricas fue abordado en la antigüedad por los griegos, será inevitable empezar con un poco de historia (Ghyka, 1978, 1979). En el plano el elemento ortogonal de superficie es el rectángulo $a \times b$, Platón y sus contemporáneos encontraron en las propiedades matemáticas y estéticas de la *proporción áurea* ϕ motivos suficientes para considerar el rectángulo áureo, de razón b:a igual a ϕ, con $b>a$ como el elemento de armonía en el plano.

Este artículo fue publicado en el número 57 de SUMA.
Dado que los errores tipográficos encontrados pueden dificultar su lectura y comprensión, una vez corregidas las erratas hemos optado por volver a publicarlo en aras del rigor científico.

Antonia Redondo Buitrago
IES Bachiller Sabuco, Albacete
Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas
Asociación Internacional de Matemática y Diseño, M&D

El mismo Platón consideró el concepto de proporción en los sólidos. En el espacio, el elemento ortogonal de volumen es el paralelepípedo recto rectángulo $a\times b\times c$. Los griegos daban nombres especiales a las diferentes formas de volumen, le llamaban *altar* cuando $a<b<c$, *ladrillo* si $a=b>c$, *viga* en el caso $a=b<c$, y por supuesto, *cubo* cuando $a=b=c$. Nosotros no usaremos esta nomenclatura, siguiendo el ejemplo de C. Alsina[1] nos permitiremos la libertad de llamarles a todas *cajas*.

Para poder hablar de proporción en el espacio, es necesario determinar con precisión la forma de la *caja* y observamos enseguida que aunque el volumen $a\times b\times c$ está determinado por los tres rectángulos, $a\times b$, $a\times c$, $b\times c$, en general diferentes, la caracterización de dos de ellos determina las proporciones del tercero. Por tanto la proporción en el espacio se establecerá con las razones de dos rectángulos, ya que la tercera proporción se deduce de las dos anteriores. Este hecho sugiere que para que un sólido $a\times b\times c$ fuera *armonioso* sería suficiente con que dos de los rectángulos, $a\times b$, $a\times c$, $b\times c$, lo fueran. Esto sucede en los llamados *volúmenes egipcios* emparentados con el *número de oro*: $1\times1\times\phi$, $1\times\phi\times\phi$, $1\times\phi\times\phi^2$ y $1\times\phi^2\times\phi^3$. El segundo aparece a menudo en las construcciones del antiguo Egipto con las aproximaciones 5:3 y 8:5 para la proporción áurea[2]. El tercero, con notables propiedades geométricas, se conoce como el *sólido de oro* de Samuel Colman (Colman, 1920). El cuarto, Figura 1, tiene la propiedad de que se puede dividir en un sólido $\phi^2\times\phi^2\times1$ y un *sólido de oro*.



$$\phi^2=\phi+1\Rightarrow\phi^3=\phi^2+\phi$$

Figura 1

Ciertamente, todos estos sólidos pueden considerarse *armoniosos*, pero no puede decirse que representen una verdadera generalización, pues ninguna de las propiedades geométricas intrínsecas que caracterizan al *rectángulo de oro*, se cumplen en ellos. Tuvieron que pasar muchos siglos hasta que dicha generalización fuera descubierta o reconocida, y llegaría en relación con el estudio de determinadas sucesiones recurrentes y de la mano de los trabajos del arquitecto holandés Hans Van der Laan (1904-1991).

Los conceptos y resultados que vamos a considerar tienen una corta historia que revisaremos brevemente en esta propuesta, donde el hilo conductor será el estudio de los *números mórficos* y sus propiedades fundamentales, y el objetivo la presentación de originales actividades "ecológicas" en el entorno del Bachillerato. El estudio se ubicaría de forma natural en el marco de la formulación de conjeturas y de la generalización y podría ser un recurso didáctico más a tener en cuenta para trabajar de forma transversal contenidos de Álgebra y Geometría, considerando de forma globalizada conceptos y procedimientos tan diversos como la noción de número irracional, la resolución de ecuaciones, la proporción y la semejanza, la convergencia de sucesiones de números reales… y nos daría ocasión de ir introduciendo poco a poco a nuestros alumnos en el razonamiento por recurrencia y la demostración por el método de inducción.

En muchas ocasiones trabajaremos en el espacio de tres dimensiones y por tanto los cálculos y procedimientos serán algo más complejos que cuando nos restringíamos al rectángulo de oro en el plano, pero en modo alguno en ningún caso serán más complicados. De forma intencionada las actividades *aparecen* en el texto del artículo, en el momento en que el contexto lo sugiere, numeradas según la secuencia en que deben ser propuestas, diseñadas para que cualquier alumno de Bachillerato pueda realizarlas con autonomía sin dificultad. Al final proponemos un problema sobre la geometría del cuadrado que involucra a todos los números considerados. Este "regreso al plano" proporciona un punto de partida alternativo, que podría ser un primer acercamiento algebraico para la E.S.O.

Antes de empezar convendrá que recordemos algunos resultados sobre los *números metálicos*. Una colección de actividades para Secundaria sobre estos números fueron presentadas en el nº 50 de esta revista (Redondo y Haro, 2005).

El *número metálico* σ_m es un número mayor que 1 que se define como la solución positiva de la ecuación:

$$x^2-mx-1=0,\ m=1,2,3,\ldots \qquad (1)$$

El primero de ellos σ_1 es, en efecto, el *número de oro* ϕ. El segundo σ_2 es conocido como *número de plata* θ, y el tercero que corresponde al caso $m=3$, es el *número de bronce.* Los restantes no tienen nombre propio, simplemente se nombran σ_m.

La ecuación (1) puede expresarse equivalentemente de la forma $x=m+1/x$ por tanto reemplazando iterativamente el valor de x en el segundo término de la igualdad, obtenemos la expansión en fracción continua simple del número metálico σ_m considerado:

$$x^2-mx-1=0 \quad\Rightarrow\quad \sigma_m=\frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2}=m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cdots}}=[m;m,m,\ldots]$$

Una de las propiedades que caracteriza a los *números metálicos* σ_m, es que son límite de las razones de términos consecutivos de la sucesión recurrente:

$$a_1=a_2=1 \qquad a_n=ma_{n-1}+a_{n-2},\ n=3, 4, 5, \ldots \qquad (2)$$

Esto se debe a que la sucesión de razones verifica la igualdad

$$a_{n+1}/a_n=(ma_n+a_{n-1})/a_n=m+(a_n/a_{n-1})^{-1}$$

y por ser de Cauchy converge a un cierto número L y de esta manera se debe cumplir:

$$L=m+L^{-1} \Leftrightarrow L^2-mL^{-1}=0 \Rightarrow L=\sigma_m$$

En este razonamiento solo es relevante la relación de recurrencia, el valor de las condiciones iniciales no influye para nada en el resultado obtenido. Podríamos considerar diferentes valores para a_1 y a_2 y obtendríamos diferentes sucesiones, pero el límite de sus razones sería siempre el mismo. Por ejemplo, en el caso m=1, considerando $a_1= a_2= 1$ la relación de recurrencia origina la clásica sucesión de los *números de Fibonacci*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Pero si elegimos a_1=1 y a_2=3 obtenemos la sucesión de los *números de Lucas*: 1, 3, 4. 7, 11, 18, ... que también origina el *número de oro*. En el caso m=2, las condiciones iniciales a_1=1 y a_2=1 generan la sucesión de los *números de Pell*:

1, 2, 5, 12, 29, 70, ...

De la ecuación (1) se deducen dos consecuencias inmediatas. La primera es que los *números metálicos* σ_m generan la progresión geométrica de razón σ_m

$$\ldots, (\sigma_m)^{-3}, (\sigma_m)^{-2}, (\sigma_m)^{-1}, 1, \sigma_m, (\sigma_m)^2, (\sigma_m)^3, \ldots$$

que cumple también la relación de recurrencia (2).

La segunda es que el *gnomon*[3] de un *rectángulo metálico* $a \times b$, $b:a = \sigma_m$ es el rectángulo $a \times ma$ formado por la unión de m cuadrados de lado a, Figura 2:

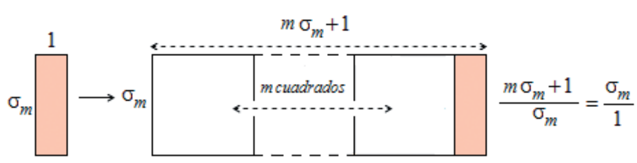


Figura 2

En consecuencia, el crecimiento *pseudo-gnomónico por m cuadrados* derivado de la relación de recurrencia (2) origina una sucesión de rectángulos cuyas razones tienden rápidamente a σ_m. La Figura 3 muestra el proceso que genera el *rectángulo de plata*.

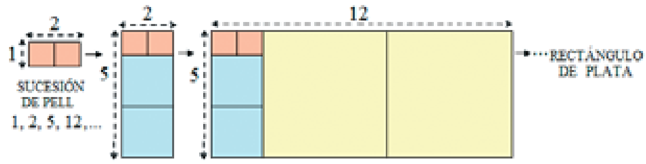


Figura 3

La siguiente actividad será el comienzo de nuestra búsqueda del paralelepípedo que sea una generalización satisfactoria de los *rectángulos metálicos* σ_m.

Actividad 1

Objetivos: Reconocer sucesiones de números naturales definidas por recurrencia y conjeturar relaciones de recurrencia. Construir la *sucesión de Padovan*.
Conocimientos previos: Concepto de sucesión. Término general de una sucesión.
Materiales: Trama de puntos.

En la Figura 4 el triángulo inicial es equilátero y de lado 1. Le añadimos otro igual en la parte de abajo. Luego otro igual hacia la izquierda, siguiendo el sentido de las agujas del reloj.

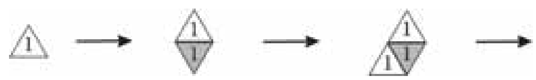


Figura 4

Seguimos girando y añadimos un triángulo equilátero de lado 2, y luego otro igual en la parte superior. Después otro de lado 3, de la forma que se ve en la Figura 5.

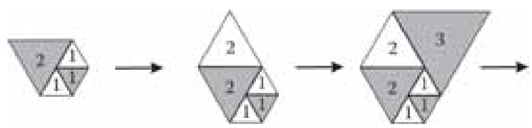


Figura 5

Girando siempre en el sentido de las agujas del reloj, añadimos un triángulo blanco de lado 4 que coincida con los de los dos sombreados de lado 1 y 3, Figura 6. Luego uno sombreado de lado 5 que coincida con los de los dos blancos de lado 1 y 4, y así sucesivamente…

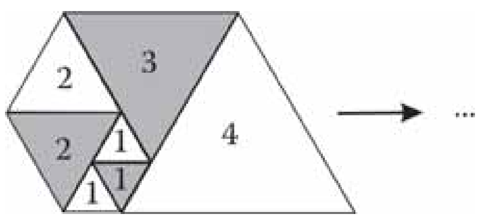


Figura 6

Continúa con el proceso y dibuja más triángulos de esta *espiral de triángulos.*

a) Escribe ahora las longitudes de los lados de los triángulos en el orden en que los has obtenido ¿qué relación existe entre los lados de los triángulos? Exprésala algebraicamente.

b) Si continuaras indefinidamente obtendrías una sucesión. ¿Sabrías hallar su término general?

La sucesión de los lados de los triángulos es 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16,…, la *sucesión de Padovan*. Es una sucesión definida por tres condiciones iniciales, a_1, a_2, a_3 y una relación de recurrencia que permite obtener los términos a_4, a_5, a_6, ...

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1 \qquad a_n = a_{n-3} + a_{n-2} \quad n = 4, 5, 6, \ldots \qquad (3)$$

La utilización de una trama triangular como material facilita reconocer la relación de recurrencia que la define (Figura 7) y otras como:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-5} \quad n = 6, 7, 8, \ldots \qquad (4)$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-5} + a_{n-6} \quad n = 7, 8, 9, \ldots$$

$$a_n = a_{n-4} + a_{n-5} + a_{n-6} + a_{n-7} + a_{n-8} \quad n = 9, 10, 11, \ldots$$

que podrían demostrarse por inducción. La relación (4) desempeñará, como veremos más adelante, un papel fundamental.

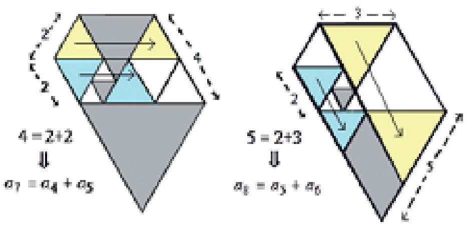


Figura 7

Al igual que los números de Fibonacci, los números de Padovan también aparecen al sumar “líneas” del triángulo de Pascal, Figura 8.

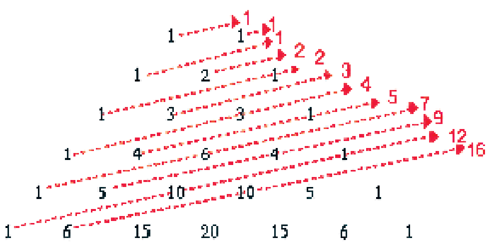


Figura 8

Sabemos que los *números metálicos* son límite de razones de términos consecutivos de ciertas sucesiones recurrentes. Parece lógico preguntarse qué ocurre con la sucesión de las razones de la sucesión de Padovan. La siguiente actividad contesta a esta pregunta y será una ocasión para resolver ecuaciones polinómicas por diferentes métodos.

Actividad 2

Objetivos: Encontrar el *número plástico*, reconociendo que es un número irracional y obtener una aproximación racional de él por diferentes procedimientos.
Conocimientos previos: Relación entre la *sucesión de Fibonacci* y el *número de oro.* Límite de una sucesión. Resolución de ecuaciones polinómicas. Representación gráfica de funciones.
Materiales: Calculadora gráfica y ordenador (programa Derive).

En la Actividad 1 has encontrado una sucesión que se define de forma parecida a la *sucesión de Fibonacci*. Era la *sucesión Padovan*: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, …

a) Utiliza la calculadora para construir la sucesión de las primeras razones de dos términos consecutivos de ella y estudia su convergencia.

b) Razona ahora de forma general teniendo en cuenta que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{a_n} = \frac{a_{n-1}/a_{n-2} + 1}{a_n/a_{n-2}} = \frac{a_{n-1}/a_{n-2} + 1}{\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$$

La calculadora ayuda a conjeturar que la sucesión a_2/a_1, a_3/a_2, a_4/a_3, ... es convergente. Una demostración rigurosa no sobraría, pero quizás no sea necesaria, pues nuestros objetivos son otros. Si admitimos que la sucesión es convergente a un cierto número L, evidentemente tiene que cumplir:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = L \Rightarrow L = \frac{L+1}{L^2} \Leftrightarrow L^3 - L - 1 = 0$$

Una primera aproximación al valor del límite pedido se puede hallar fácilmente utilizando una tabla que también servirá para descubrir la igualdad de los tres límites de la izquierda:

n	a_{n+1}/a_n	a_n/a_{n-1}	a_{n-1}/a_{n-2}
1	1/1		
2	1/1	1/1	
3	2/1	1/1	1/1
4	2/2	2/1	1/1
5	3/2	2/2	2/1
⋮	⋮	⋮	⋮

El límite L es por tanto solución de la ecuación x^3 - x -1 =0. El polinomio que aparece en el miembro de la izquierda es irreducible en el cuerpo de los números racionales. Pero como es de grado impar sabemos que por lo menos tiene una raíz real, que será única, pues la gráfica de la función $y=x^3 - x -1$ sólo corta en un punto al eje de abcisas, Figura 9. Esa solución es ψ, el *número plástico*[4] de Hans van der Laan.

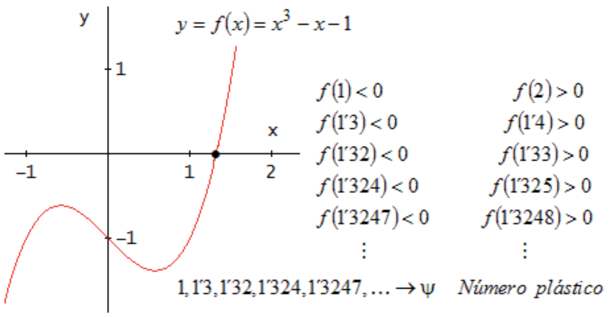


Figura 9

Van der Laan empieza sus estudios de arquitectura en 1923 y los abandona en 1927 para ingresar en la orden benedictina. En 1938 proyecta y construye una nueva ala de la abadía de Oosterhout y retoma su actividad como arquitecto, aunque realiza muy pocas obras, casi todas ellas de carácter religioso (tres conventos, un monasterio, una capilla y una casa privada). Sus estudios sobre las proporciones en las iglesias del Románico, le conducen al descubrimiento de que muchas de ellas aparecen relacionadas con la sucesión de Padovan y desarrolla un sistema de proporciones basado en el número plástico que utiliza en sus construcciones.

La sucesión de Padovan recibe este nombre por el arquitecto inglés Richard Padovan (1935-), responsable en gran medida de la difusión de su obra, al traducir en 1983 al inglés su tratados de arquitectura, "Architectonic space" en 1983 y "Modern Primitive" en 1994 (Padovan, 2002). Ian Stewart contribuyó también a su divulgación y popularidad, dedicándole en 1996 una de sus columnas de Mathematical Recreations de Scientific American, a la sucesión de Padovan (Stewart, 1996).

El *número plástico* es un número irracional, cuyo valor exacto se puede hallar aplicando la fórmula clásica de Cardano para la ecuación cúbica $x^3 + px = q$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

tomando $p= -1$ y $q = 1$

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1'3247179572447460\ldots$$

Es una buena ocasión para invitar a los alumnos a que busquen información en los libros de Historia para encontrar la fórmula, la apliquen y comparen la solución que proporciona, con las aproximaciones que han obtenido utilizando el modelo funcional.

Observemos las analogías entre el *número plástico* y los *números metálicos* σ_m. Son evidentes. En efecto, todos ellos son números irracionales mayores que uno, soluciones de ecuaciones que son generalización de la que satisface el número φ. Por supuesto, todos admiten expansión en fracción continua simple, pero aquí encontramos una diferencia esencial. Las fracciones continuas simples de los números σ_m son muy sencillas y sus coeficientes son verdaderamente fáciles de recordar pues son todos iguales al correspondiente m, es decir, son periódicas puras de periodo m. Sin embargo con la fracción continua simple del *número plástico* la cosa cambia, pues no es periódica[5] y no parece que exista ninguna forma de predecir sus coeficientes. Como muestra, estos son los primeros 80 coeficientes:

1, 3, 12, 1, 1, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 141, 80, 2, 5, 1, 2 , 8, 2, 1, 1, 3, 1, 8, 2, 1, 1, 14, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 10, 4, 40, 1, 1, 2, 4, 9, 1, 1, 3, 3, 3, 2, 1, 17, 7, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 3, 5, 1, 2, 6, 2, 2, 1, 1, 1, 4, 1, 3, 1, 2, 6, 5, 6, 49, 3, 7.

Pero podemos obtener dos expresiones infinitas diferentes para aproximar ψ:

$$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \Rightarrow \psi = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \cdots}}}$$

$$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 + x \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1 + x} \Rightarrow \psi = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \cdots}}$$

Continuando con las analogías, de la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ se deduce que el número ψ define una progresión geométrica de razón ψ: ..., ψ^{-3}, ψ^{-2}, ψ^{-1}, 1, ψ, ψ^2, ψ^3, ...,que también cumple la relación de recurrencia correspondiente, (3).

Más analogías. En la tercera actividad, al generalizar al espacio el *crecimiento pseudo-gnomónico* asociado a los números metálicos σ_m (ver Figura 3) nos encontraremos con el número plástico y conseguiremos el deseado *"sólido armonioso"*, ¡la caja plástica! (Alsina, 2007). Utilizaremos para ello un modelo geométrico que proporcionará una interpretación geométrica de la sucesión de Padovan y de la sucesión que se origina al considerar las razones de los términos consecutivos.

Actividad 3

Objetivos: Obtener una sucesión de cajas que "*tiende*" a una caja de dimensiones $1 \times \psi \times \psi^2$. Establecer el concepto de *caja plástica*.
Conocimientos previos*:* Sucesión de Padovan, número plástico y la relación entre ellos.
Materiales*:* Policubos. Imaginación espacial.

A partir de un cubo 1×1×1 construimos una sucesión de cajas por el procedimiento que muestra la Figura 10. Añade algunas cajas más a la sucesión.

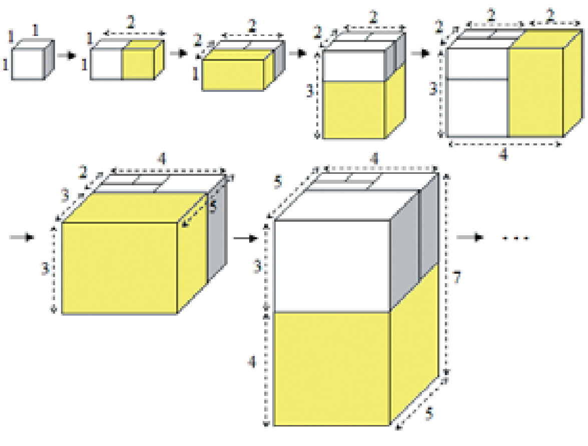


Figura 10

a) Describe con precisión el procedimiento seguido en cada una de las iteraciones.

b) Observa como varían las dimensiones *a, b, c de* las cajas que vamos obteniendo y como influye en la *"forma de la caja"* (la primera es un cubo, la segunda es "muy alargada", la tercera es "muy ancha",...). Describe esta variación. Te ayudará utilizar una tabla como esta:

caja inicial	caja añadida	caja final
1×1×1	1×1×1	1×1×2
1×1×2	¿?	¿?
¿?	⋮	⋮

Figura 11

c) Si el proceso pudiera repetirse indefinidamente, ¿qué dimensiones tendría la caja final?

La utilización del material facilita la representación mental en las primeras iteraciones, pero estamos trabajando en el espacio y el número necesario de piezas necesarias para construir la figura que se añade crece con gran rapidez y esto "afortunadamente" obligará al alumno a utilizar como recurso representaciones gráficas en el plano que pondrán a prueba su imaginación espacial. Describir la variación de la forma de la caja conduce a reconocer que la idea de "alargada", "ancha",...solo puede precisarse comparando las razones *b/a* y *c/b*.

Lo primero que observamos es que las cajas se añaden siguiendo la secuencia: *"a la derecha"*, *"por delante"*, *"por abajo"*, *"a la derecha"*, *"por delante"*, "... Empezamos con un cubo. Añadimos otro cubo a la derecha y obtenemos una caja 1×1×2. A éste le añadimos por delante otra 1×1×2 y obtenemos una caja 1×2×2. Y así sucesivamente...

El enunciado sugiere describir las cajas ordenando sus dimensiones en orden creciente, es decir de la forma $a \times b \times c$ con, $a \leq b \leq c$ independientemente de su disposición. Es imprescindible admitir este convenio si queremos descubrir el patrón seguido en las sucesivas transformaciones. Esta actividad es un claro ejemplo de la relevancia en Matemáticas de la elección de una notación y codificación apropiada (Figura 12).

caja inicial	caja añadida	caja final	*b/a*	*c/b*
1×1×1	1×1×1	1×1×2	1/1	2/1
1×1×2	1×1×2	1×2×2	2/1	2/2
1×2×2	2×2×2	2×2×3	2/2	3/2
2×2×3	2×2×3	2×3×4	3/2	4/3
2×3×4	3×3×4	3×4×5	4/3	5/4
3×4×5	4×4×5	4×5×7	5/4	7/5
¿?	¿?	¿?	⋮	⋮

Figura 12

La tabla ayuda a reconocer lo que sucede y descubrir la ley de recurrencia: "*Con excepción de las 4 primeras, todas las cajas iniciales son a×b×c con a<b<c, siendo por tanto todas las caras rectángulos. En cada paso adosamos a una de las caras de mayor área, es decir a una de las dos b×c, una caja de dimensiones b×b×c. El resultado obtenido es una caja final b×c×(a+b), que se convierte en la caja inicial de la fila siguiente*".

Observamos ahora la columna de las figuras finales... Efectivamente, si eliminamos el primer término de la sucesión de Padovan obtenemos precisamente la sucesión de las dimensiones menores. Si eliminamos los dos primeros, obtenemos la de las dimensiones intermedias. Y si eliminamos los tres primeros, la de las dimensiones mayores. Por tanto, las cajas finales *a×b×c* siempre tienen sus dimensiones iguales a tres términos consecutivos de la sucesión de Padovan, de esta forma, al hacer tender a infinito el número de iteraciones, los cocientes *b/a* y *c/b* convergen al *número plástico*. Podríamos decir que las cajas que vamos obteniendo son cada vez *"más parecidas"* a una caja determinada por dos "*rectángulos plásticos*", Figura 13, lo que se conoce como "*caja plástica*".

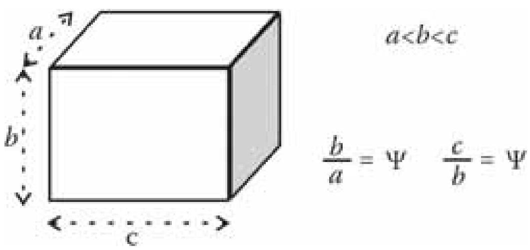


Figura 13

¿Cumple la "*caja plástica*" las condiciones de la generalización que estamos buscando? La relación algebraica $\phi^2=\phi+1 \Leftrightarrow \phi/(\phi+1)=1/\phi$ se traduce geométricamente en la construcción de la Figura 14, donde los puntos A, B y C están alineados y solamente puede generalizarse al espacio con la que muestra la Figura 15, si en ella los tres puntos señalados también están alineados. Esto ocurre.

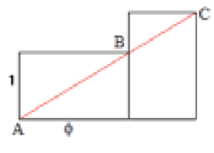


Figura 14

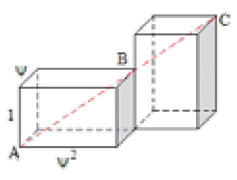


Figura 15

La comprobación es especialmente sencilla, si consideramos un sistema de referencia adecuado, como el de la Figura 16, en donde el eje de abcisas seria la perpendicular por A al plano del papel.

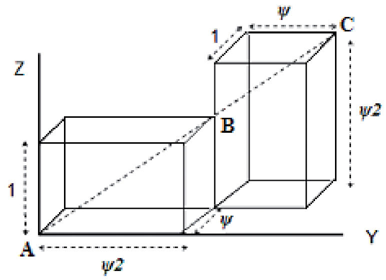


Figura 16

En este caso $A(0, 0, 0)$, $B(\psi, \psi^2, 1)$ y $C(\psi+1, \psi^2+\psi, \psi^2)$ y expresamos la noción de proporcionalidad en términos de vectores, por tanto bastará comprobar que los vectores:

$$\left[\overrightarrow{AB}\right]=\left(\psi,\psi^2,1\right) \text{ y } \left[\overrightarrow{BC}\right]=\left(1,\psi,\psi^2-1\right)$$

tienen la misma dirección. En efecto:

$$\psi^3-\psi-1=0 \Leftrightarrow \psi=\frac{1}{\psi^2-1} \Leftrightarrow \frac{\psi}{1}=\frac{\psi^2}{\psi}=\frac{1}{\psi^2-1}$$

¿Hay algún otro "parecido" entre el *número de oro* y el *número plástico*? La respuesta es, sí. La presencia y protagonismo de la *proporción áurea* en Arquitectura y Diseño se debe especialmente a que se puede definir un sistema de medidas basado en el número de oro. Un *sistema de medidas* es una sucesión de segmentos con longitud en progresión geométrica de razón p con la condición de que al "*sumar*" o "*restar*" dos medidas consecutivas del sistema, se obtiene otra medida del sistema. Eligiendo $p = \phi$ se cumplen las dos condiciones, Figura 17, pues $\phi+1 = \phi^2 \Leftrightarrow \phi-1 = \phi^{-1}$.

Figura 17

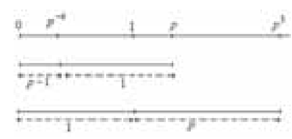


Figura 18

Pero tomando $p=\psi$, Figura 18, conseguimos también un sistema de medidas. De la igualdad $\psi+1=\psi^3$ se deduce que cumple la "*condición suma*" y la "*condición resta*" también por verificarse $\psi-1=\psi^4$, pero a diferencia del caso anterior, ahora las dos igualdades no son equivalentes, la segunda es una consecuencia de la relación de recurrencia (4). En efecto:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-5} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 = \frac{a_{n-5}}{a_{n-1}} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 = \frac{1}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \frac{a_{n-3}}{a_{n-4}} \cdot \frac{a_{n-4}}{a_{n-5}}}.$$

y los cinco cocientes que aparecen en la igualdad convergen a ψ, por tanto ψ-1 =ψ^4 .

Tenemos de esta forma dos números mayores que 1, ϕ y ψ, que son solución de la ecuación x+1= x^r, r=2, 3, y que son también solución de la ecuación x-1 =x^{-s} para algún valor entero positivo de s. Intentemos dar un paso más en el proceso de generalización considerando también los valores r=4, 5, 6, ... Las soluciones que obtengamos podrán definir también un sistema de medidas y formarán la familia de los *números mórficos* (AArts, J. Fokkink, R. J. y Kruijtzer, G, 2001):

Definición:

Un número mórfico es un número real p>1 que es solución del sistema:

$$\begin{cases} x+1 = x^r \\ x-1 = x^{-s} \end{cases}$$ *, para algún valor natural de r y s.*

La ecuación polinómica x+1= x^r, no tiene solución para r=1, pero para r = 2, 3, 4, ... tiene siempre una única solución positiva, irracional, mayor que 1, por tanto para encontrar más *números mórficos* sólo hay que hallar el parámetro s que determine una ecuación de la forma x-1= x^{-s}, que comparta esa solución. En este caso no podremos apoyarnos en modelos geométricos, pero si podemos recurrir al lenguaje funcional…

Actividad 4

Objetivos: Obtener elementos de la familia de los *números mórficos.*
Conocimientos previos: Concepto de *número mórfico*. Aproximación de soluciones irracionales de una ecuación polinómica. Resolución gráfica de sistemas.
Materiales: Calculadora gráfica y ordenador (programa Derive).

Los *números mórficos* son números irracionales mayores que 1 que son solución del sistema formado por dos ecuaciones, una de la forma x+1 =x^r y otra como x-1 = x^{-s} donde r y s son dos números enteros positivos. Al considerar r=2 y s=1 tenemos el *número de oro*. Para r=3 y s=4 tenemos el *número plástico*.

a) ¿Sabrías encontrar el *número mórfico* asociado al valor r=4 ¿Y al r=5 ?

b) Investiga otras posibilidades para el valor r ¿Cuántos *números mórficos* encuentras?

Empezamos por r = 4. Gracias a la calculadora gráfica, podemos hallar rápidamente y sin dificultad la solución aproximada de la ecuación x^4-x-1= 0. Es 1'220744084…. Ahora el problema es inverso, hay que reconocer, cual de las ecuaciones x-1=x^{-1}, x-1=x^{-2}, x-1=x^{-3}, x-1=x^{-4}, x-1=x^{-5},… tiene esa misma solución. Tampoco es tarea difícil, si representamos en un mismo sistema de coordenadas las funciones:

$$f(x)= x^4-x-1,\ g_s(x)=x-1-x^{-s},\ s= 2, 3, 5, 6, ...$$

Todas las gráficas pasan por el punto (1, -1). No necesitamos evidentemente representar g_1 ni g_4 pues sus soluciones ya sabemos que son ϕ y ψ.

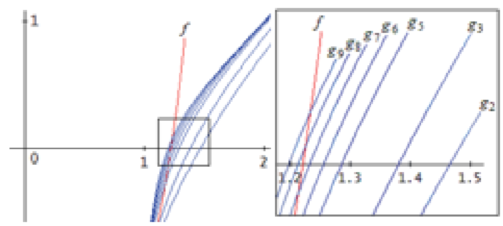


Figura 19

La representación gráfica, Figura 19, muestra que las soluciones de las ecuaciones x-1=x^{-s} son mayores que 1'220744084…. y la correspondiente a s=8 es ya menor. No necesitamos seguir buscando pues la sucesión de funciones g_s corta al eje de abcisas en puntos que originan una sucesión estrictamente decreciente y las otras soluciones serían también menores. Luego no existe ningún número mórfico asociado a r=4. Tampoco lo encontraremos para r=5, ni para valores superiores. Es inútil seguir buscando, Jan Aarts, Robbert Fokkink y Godfried Kruijtzer demostraron en 2001 que solo hay dos, el *número de oro* y el *número plástico*. Por tanto son los únicos números que generan un sistema de medidas ideal.

Entonces, ¿los números metálicos no son una buena generalización del *número de oro*? Sí, lo son en el plano, si somos menos exigentes en la noción de sistema de medidas. Los requisitos exigidos tienen su razón de ser en garantizar la armonía de las composiciones realizadas con las medidas de la escala y esto puede darse cuando por yuxtaposición (suma) o superposición (resta) de los segmentos obtengamos otro de la sucesión. Por tanto también podrían diseñarse composiciones armoniosas si acumulamos o superponemos "varias veces" un segmento a otro consecutivo. Se relajarían las condiciones exigidas admitiendo que "*al sumar o restar a un elemento de la sucesión m veces el anterior se obtenga otro de la sucesión*" y eso sucede cuando consideramos como base los *números metálicos* σ_m. Obviamente la "*condición suma*" se sigue de la relación de recurrencia asociada: "*el elemento del lugar n de la progresión geométrica es suma de m veces el término del lugar n-1 y el del lugar n-2*". Y la "*condición resta*" también pues "*al restar a un elemento de la sucesión, m veces el anterior se obtiene otro de la sucesión (justo el anterior al que está restando)*":

$$x^2 - mx - 1 = 0 \Leftrightarrow x - m = x^{-1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - mx = 1,\ x^3 - mx^2 = x,\ \dots \\ 1 - mx^{-1} = x^{-2},\ x^{-1} - mx^{-2} = x^{-3},\ \dots \end{cases}$$

No deja de ser curioso que los cercanos *parientes planos* del *número de oro* sean tan numerosos y su *familia espacial* sea tan reducida…

El *número plástico* aparece esencialmente vinculado a la tercera dimensión, pero también lo encontramos en situaciones geométricas planas. Como ejemplo, este problema que podría también proponerse en la opción B del cuarto curso de la ESO.

Problema: *Tenemos que descomponer un cuadrado de lado 1 cm. de acuerdo con las siguientes reglas:*

(i) Hacemos un corte paralelo a uno de los lados para obtener dos rectángulos con un lado común. (ii) En uno de los dos rectángulos hacemos un corte perpendicular al anterior de manera que obtengamos un rectángulo y un cuadrado con un lado común.

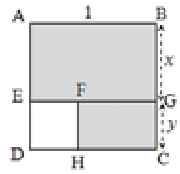
a) ¿De qué forma se puede hacer, si queremos que los rectángulos obtenidos sean semejantes? ¿Cuáles serían las dimensiones de las partes que se obtienen?

b) Modificamos la regla (i) haciendo 2 cortes paralelos al lado para obtener dos rectángulos iguales adosados y la norma (ii) haciendo 2 cortes perpendiculares para dividirlo en un cuadrado y dos rectángulos. ¿Cómo lo haríamos para que los rectángulos sigan siendo semejantes? ¿Cuales son ahora las dimensiones de las figuras obtenidas?

c) Generaliza el apartado b) admitiendo n cortes en (i) y en (ii).

d) Mantenemos la regla (i) inicial y modificamos la (ii) para obtener dos rectángulos estrictos ¿De qué forma conseguimos que los tres rectángulos obtenidos sean semejantes? ¿Qué dimensiones tendrían los rectángulos?

En el apartado *a)*, salvo giros y simetrías, solo podemos descomponer el cuadrado de una forma, Figura 20.



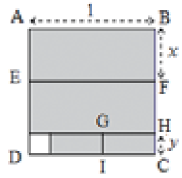
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GC}} \Leftrightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{\alpha} = \alpha,\ (\textit{siendo } \frac{x}{y} = \alpha)$$

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{x}{y} = \phi \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{FG}} = \frac{\overline{BG}}{\overline{GC}} = \alpha = \phi$$

Figura 20

El primer corte solo puede realizarse de manera que$(x+y)/x=x/y=\phi$. Como $x+y=1$, tenemos que $x=\phi^{-1}= \phi-1$y por tanto $y=2-\phi$. Los rectángulos son $1\times(\phi-1)$, $(\phi-1)\times(2-\phi)$ y $(2-\phi)\times(2-\phi)$: *"Un cuadrado puede descomponerse en dos rectángulos áureos y un cuadrado"*.

En el caso del segundo apartado, la situación del cuadrado blanco es irrelevante. Lo supondremos a la izquierda, y salvo giros o simetrías, la descomposición es la Figura 21.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{HC}} \Leftrightarrow \frac{2x+y}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{2\alpha+1}{\alpha} = \alpha,\ (\textit{siendo } \frac{x}{y} = \alpha)$$

$$\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{x}{y} = \sigma_2 \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{HC}} = \alpha = \sigma_2 = \theta$$

Figura 21

Los dos primeros cortes deben realizarse tales que $(2x+y)/x=x/y=\theta$. Encontramos en este caso el *número de plata*. Ahora $2x+y=1$, $x=\theta^{-1}= \theta-2$, $y=5-2\theta$ y los rectángulos son $1\times(\theta-2)$, $(\theta-2)\times(5-2\theta)$ y $(5-2\theta)\times(5-2\theta)$. Como el cuadrado podría estar en el centro o a la derecha, tenemos 3 formas equivalentes de hacerlo.

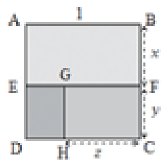
En cualquier caso: "*Un cuadrado puede descomponerse en 4 rectángulos de plata y un cuadrado*".

La generalización al caso de n cortes es inmediata y aparecen los números metálicos σ_m.

$$\frac{nx+y}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{n\alpha+1}{\alpha} = \alpha \quad (\textit{siendo } \frac{x}{y} = \alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 - n\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \sigma_n$$

y obtenemos los valores $x=(\sigma_n)^{-1}=\sigma_n-n$, $y=(n^2+1)-n\sigma_n$: "*Un cuadrado se puede descomponer en 2n rectángulos metálicos* σ_m *y un cuadrado*".

Finalmente si seguimos las reglas del apartado *d)* solo podemos descomponer el cuadrado como se ve en la Figura 22.



$$\frac{x+y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{y}{x+y-z} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha+1}{\alpha}=\beta \\ \beta=\frac{1}{\alpha+1-\beta} \end{cases} \quad (\text{siendo } \frac{x}{y}=\alpha,\ \frac{z}{y}=\beta)$$

Figura 22

Despejando β en la primera ecuación del sistema y sustituyendo en la segunda, tenemos

$$\alpha^3-\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha=\psi \Rightarrow \beta=\psi^2 \Rightarrow x=\psi^{-2},\ y=\psi^{-3},\ z=\psi^{-1}.$$

Los tres rectángulos semejantes son:

$$1\times\psi^{-2},\ \psi^{-1}\times\psi^{-3},\ \psi^{-3}\times(1-\psi^{-1})$$

"*Un cuadrado se puede descomponer en tres rectángulos semejantes, los tres con lados en razón ψ^2*".

Como era de esperar, no podremos aumentar el número de cortes y seguir teniendo rectángulos semejantes…

Este problema representa una forma sencilla y elegante de presentar de forma unificada las dos generalizaciones significativas de la proporción áurea, los números metálicos σ_m, y los números mórficos. ■

NOTAS

[1] *Un viatge a l'espai*. http://www.upc.edu/ea-smi/personal/claudi/materials.html. (Página personal de Claudi Alsina).

[2] En el papiro de Ramsés IV, se describe la *Cámara de Oro* que contenía la tumba del rey, asignándole las dimensiones 16 codos de largo, 16 codos de ancho y 10 codos de alto.

[3] Figura cuya yuxtaposición a una figura dada produce una figura resultante semejante a la figura inicial.

[4] El ingeniero francés Gérard Cordonnier en 1928 llama a este número "*nombre radiant*". Fue el primero que consideró un sistema de proporciones asociado a la solución de la ecuación $x^3=x+1$, pero sus aportaciones no tuvieron repercusión, tal vez por su afición al esoterismo y las apariciones religiosas…

[5] La fracción continua del *número plástico* no puede ser periódica. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) probó que un número es irracional cuadrático si y solo si su descomposición en fracciones continuas es periódica (no necesariamente periódica pura).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AARTS, J. , FOKKINK, R. J. and KRUIJTZER, G.(2001): "Morphic Numbers", *Nieuw Archief voor Wiskunder*. 5-2, Maart, 56-58.

ALSINA, C (2007): "El número de oro es plano ¡Pásalo!", *Suma*, nº 54, 75-78.

ALSINA, C y GARCÍA-ROIG, J.L. (2001): "On plastic numbers" *Journal of Mathematics & Design*, Vol. 1, No 1, 13-19.

COLMAN, S y COAN, C.A.(1920): *Proporcional Form*, G.P. Putnam's Sons, London-New Cork.

GHYKA, M. C. (1978): *El Número de Oro*, Editorial Poseidón, Barcelona.

GHYKA, M. C. (1979): *Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes*, Editorial Poseidón, Barcelona.

LAAN, H. van der (1960): *Le Nombre Plastique; quinze Leçons sur l'Ordonnance architectonique*, Brill, Leiden.

PADOVAN, R (2002): "Dom Hans Van Der Laan and the Plastic Number", en *Nexus IV: Architecture and Mathematics*, Kim Williams Books. Florence.

http://www.nexusjournal.com/conferences/N2002-Padovan.html

REDONDO, A. (2006): "Algunos resultados sobre Números Metálicos", *Journal of Mathematics & Design*, Vol. 6, No 1, 29-44.

REDONDO, A. Y HARO, M. J. (2005): "Fracciones continuas, números metálicos y sucesiones generalizadas de Fibonacci", *Suma*, nº 50, 53-63.

SPINADEL, V. (1998): *From the Golden Mean to Chaos*, Nueva Librería, Buenos Aires.

SPINADEL, V. (1999): "The family of metallic means", Visual Mathematics, 1, No. 3

http//members.tripod.com/vismath1/spinadel/

SPINADEL, V. y REDONDO, A (2007): "Nuevas propiedades de la familia de Números Metálicos". Conferencia plenaria. 5th Mathematics & Design Internacional Conference, Actas CD ROM ISBN 978-85-7114-175-4, Blumenau.

STEWART, I. (1996): "Mathematical Recreations: Tales of a neglected number", *Scientific American*, 274, 92-93. (En *Investigación y Ciencia*, 239, Agosto 1996).

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 17-21

Matemáticas en la música

Los pitagóricos crearon una división del currículo en quadrivium (aritmética, música, geometría y astronomía) y trivium (gramática, retórica y dialéctica), esta clasificación se mantuvo durante siglos y la música permaneció como un subconjunto de las matemáticas durante la Edad Media.

The Pytagoreans established a division of the curriculum into quadrivium (arythmetic, music, geometry and astronomy) and trivium (grammar, rhetoric and dialectics). This classification was kept for centuries and music remained as a subgroup of mathematics during the Middle Ages.

Introducción

Las matemáticas están reconocidas como una ciencia, además con un valor especial pues el resto de las ciencias necesitan de ésta como base. No es tan explícito que las matemáticas sirvan como ayuda en las bellas artes, pero allí están, colaborando a que las artes sean de verdad bellas y a la vez enriqueciéndose de su presencia en la pintura, escultura, música…

La belleza y disfrute que se puede conseguir con la demostración de un teorema, la resolución de un problema, la creación de una conjetura…no tiene por qué ser menor (ni mayor) que la que obtenemos al admirar un cuadro de Miró o al escuchar una sinfonía de Beethoven.

Por tanto, si las matemáticas son el motor que hace que las ciencias funcionen y avancen pero también son imprescindibles para que las artes sean de verdad bellas, ¿por qué encasillar a las matemáticas dentro de las ciencias? Como mínimo sería igual de justo encontrarlas en la lista de las artes, o incluso con mayor fundamento aquí si reconocemos su belleza y no nos encerramos en su sentido práctico.

Centrándonos en la música, veremos alguna de las relaciones que ésta tiene con las matemáticas, cómo la música difícilmente existiría sin una base matemática que la apoye y cómo en realidad una obra musical, si es hermosa y compensada, podría ser considerada un trabajo matemático bien resuelto. Los pitagóricos ya crearon una división del currículo en quadrivium (aritmética, música, geometría y astronomía) y trivium (gramática, retórica y dialéctica), la música permaneció como un subconjunto de las matemáticas durante la Edad Media.

Einstein tocando el violín

Albert Einstein:

> Las mentes matemáticas secas como el polvo sueñan en blanco y negro, el músico clásico capaz prefiere soñar en colores, como lo hacen los grandes científicos que prefieren la música clásica.

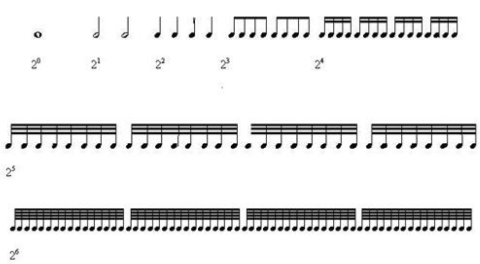
Angel Pastor Martín
IES Valle del Alberche, Navaluenga (Ávila)

Ritmo y números

Una composición musical está dividida en compases, todos ellos con una duración idéntica, cada frase musical se compone de un numero determinado de compases, por lo general 4 u 8 y salvo excepciones, todas las frases de una misma obra tienen el mismo número de compases.

Al comienzo de una pieza musical, tras la clave y la armadura, aparece una fracción que nos indica el ritmo a seguir en ella, aunque el denominador no tiene por qué interpretarse como un valor numérico, sino que es un signo que representa a una figura musical, el 2 se corresponde con una blanca, el 4 con una negra, etc. El numerador sí tiene valor numérico, nos indica el número de figuras expresadas en el denominador que va a durar cada compás, es decir, la obra está perfectamente medida y estructurada en frases y cada frase en compases.

El valor de las figuras que nos indican la duración de cada sonido sigue una progresión geométrica de razón 2, de la siguiente manera:

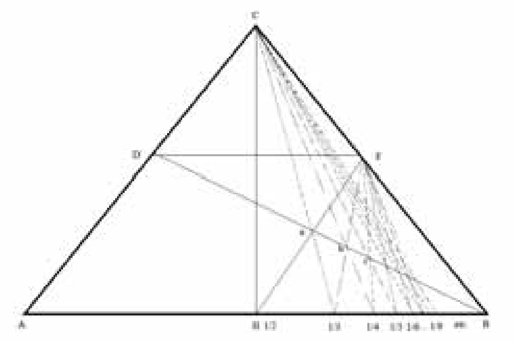


Escala Musical y Pitágoras

Pitágoras estudió la relación que existe entre un sonido y la longitud de la cuerda que lo produce con ayuda del monocordio, que es un instrumento de cuerda con una sola cuerda, (En cualquier instrumento de cuerda, a medida que ésta se acorta, se va produciendo un sonido más agudo).

Monocordio

A partir del sonido base que se producía con la cuerda en toda su extensión, ésta se acorta en distintas proporciones. Al sonido producido al acortar la cuerda a 2/3 de su longitud original lo llamó diapente (intervalo de 5ª). Al sonido producido al acortar la cuerda 3/4 de su longitud original lo llamó diatesarón (intervalo de 4ª) y al acortarla a la mitad lo llamó diapasón (intervalo de 8ª).



Método geométrico definido por Pitágoras para obtener los intervalos de un instrumento.

Con estas nuevas referencias se siguen construyendo sonidos hasta conseguir la escala llamada pitagórica, obteniendo la siguiente relación entre las notas.

Nota	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Fracción de cuerda	1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2

Esta relación entre las notas de la escala siguió en vigor prácticamente hasta el barroco, donde fue sustituida por el sistema temperado, que no es más ni menos veraz, pero que tiene una indiscutible ventaja para la ejecución de la música por parte de los músicos. La principal diferencia entre estas dos escalas es que en la temperada el sonido de, por ejemplo, DO sostenido (DO#) es igual que el sonido de RE bemol (REb), mientras que en la escala pitagórica estos sonidos son muy parecidos pero no idénticos. Esta diferenciación se puede conseguir con dificultad en instrumentos de cuerda sin trastes o de viento, pero es imposible de realizar en instrumentos de cuerda con trastes o instrumentos de teclado.

Armonía y divisibilidad

Un sonido puede considerarse grave o agudo, es lo que llamamos altura del sonido, esta altura depende únicamente de la frecuencia de las vibraciones del cuerpo emisor. La altura de los sonidos se miden en hercios (Hz), que es el número de oscilaciones, ciclos o vibraciones por segundo de un sonido (ciclo/ segundo). Cuanto mayor sea esta magnitud, más agudo será el sonido resultante. Para la interpretación de una melodía no es tan importante la frecuencia absoluta de cada una de las notas como la relación que existe entre ellas.

La gama de frecuencias que puede percibir el oído humano comprende desde los 15 hasta los 20.000 Hz, aunque en música los sonidos más agudos suelen alcanzar los 5.000 Hz. Los sonidos por debajo de los 15 Hz se llaman infrasonidos, y por encima de 20.000 Hz ultrasonidos.

La referencia que nos sirve para medir el valor absoluto de los tonos son los 440 Hz que es la frecuencia que tiene un diapasón normal y se utiliza para afinar la nota LA situada en el segundo espacio del pentagrama si leemos en clave de SOL. Esta referencia no siempre ha sido la misma y ha evolucionado desde valores más bajos de frecuencia. Aún en la actualidad, el criterio de los 440 no está completamente unificado pues hay orquestas que afinan a 438, 440, 442 o 444 Hz (hay oídos humanos capaces de distinguir un cambio en la frecuencia de vibración de un 0´03% de la frecuencia original en el rango medio, entre 500 y 8.000 Hz).

La gama de tonos que se utilizan hoy día se generalizó a partir de 1630, cuando el matemático francés Mersenne formuló con precisión las reglas para afinar en su obra "Armonía Universal". Se trata de la escala uniformemente temperada, con 12 semitonos iguales en cada octava y donde entre semitonos consecutivos se mantiene una relación constante de $\sqrt[12]{2}$ en su frecuencia y entre tonos consecutivos se tendrá como consecuencia una relación de $\sqrt[6]{2}$.

La relación que hay entonces entre dos notas a una distancia de 8ª es $(\sqrt[12]{2})^{12} = 2$ (el doble de frecuencia la más aguda).

Cabe preguntarse por qué la distancia entre dos tonos es distinta: al ser proporcional, la diferencia entre dos tonos contiguos va aumentando según subimos a notas más agudas. La escala musical es una escala logarítmica que va en progresión geométrica de razón $\sqrt[12]{2}$ y es en los valores de los logaritmos donde mantiene las distancias absolutas. Si la frecuencia de LA es 440 Hz, podemos calcular la frecuencia de SI como $440\times(\sqrt[12]{2})^2 = 493´88$ y la frecuencia de SOL: $440\times(\sqrt[12]{2})^{-2} = 392$.

	SOL	LA	SI
Frecuencia	392	440	493'88
Log_2 de la frecuencia	8'61	8'78	8'95

Diferencia de las frecuencias:

440 – 392 = 48
493´88 – 440 = 53´88

Diferencia del logaritmo de las frecuencias:

8´78 – 8´61 = 0´17
8´95 – 8´78 = 0´17

Si escuchamos simultáneamente dos notas musicales, el resultado será un sonido más o menos agradable. Los sonidos que se consideran más "agradables" de oír conjuntamente son los que están a una distancia de 8ª, 5ª justa y 4ª justa, las frecuencias relativas de dos notas a estas distancias son 2/1, 3/2 y 4/3 respectivamente y las frecuencias absolutas de estos sonidos tienen muchos de sus divisores comunes (todos en el caso de la 8ª y dos terceras partes de ellos en el caso de 4as y 5as). Los intervalos de 3ª y 6ª, tanto mayor como menor, todavía se consideran "agradables"; la frecuencia relativa de sus notas está en razón 5/4 y 6/5 respectivamente para las 3as y en razón de 5/3 y 8/5 respectivamente para las 6as, y sus frecuencias absolutas tienen como divisores comunes en torno a la mitad de sus divisores.

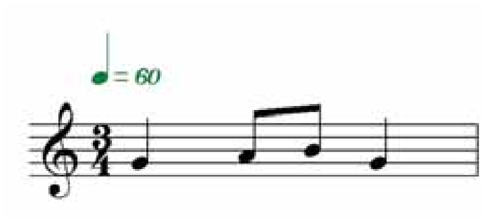
El resto de los intervalos (2as y 7as, o cualquier otro intervalo, si es aumentado o disminuido), se considera disonante y puede resultar como mínimo extraño de escuchar para quien no esté habituado a ello. Las frecuencias absolutas de dos notas disonantes son números *casi* primos entre si.

Cuando escuchamos una obra musical, se suelen escuchar simultáneamente varias notas, estas notas deben estar cuidadosamente elegidas para conseguir un sonido agradable. "Cualquier sucesión melódica o harmónica que no produzca una sensación tonal forma un conjunto incoherente de notas que el buen gusto rechazará siempre" (Arin y Fontanilla 1981). Cuando un estudiante comienza los estudios de armonía, antes de hacer los primeros ejercicios a cuatro voces se encuentra con una serie de definiciones sobre acordes consonantes y disonantes, movimientos directos, inversos y oblicuos, etc. A continuación aparecen una serie de proposiciones o normas de obligado cumplimiento para que el ejercicio se pueda considerar bien resuelto, como son: "se prohíben dos octavas seguidas si se producen entre dos mismas voces", "igualmente quedan prohibidas dos quintas seguidas si se producen de la misma forma", "se prohíbe también llegar a una octava o a una quinta por movimiento directo"... (Arin y Fontanilla, 1981)

La armonía es entonces un conjunto de normas y reglas que deben respetarse para conseguir un sonido coherente basado en acordes consonantes, y esto no se consigue tanto escuchando la música como contando los intervalos que se forman en cada acorde y los saltos que va produciendo la melodía.

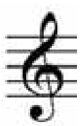
Notación musical y funciones

La notación musical se compone de una serie de signos con los que se fija gráficamente el sonido. Cada uno de los signos escritos en un pentagrama tiene dos variables que nos indican duración y sonido. La duración viene indicada por la figura musical (redonda, blanca, negra, etc.) y el sonido por la colocación en el pentagrama de esta figura (do, re, mi, etc.). Si una partitura musical depende de dos magnitudes, éstas se pueden expresar en unos ejes cartesianos donde pondríamos el tiempo (en segundos) en el eje de abcisas y el sonido (en hercios) en el eje de ordenadas.



En el compás anterior existen los siguientes datos:

Indica que la duración de 60 negras es un minuto (una negra por segundo).

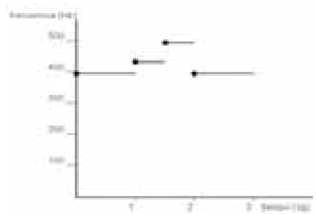


Es la clave, que siempre debe estar al comienzo de todos los pentagramas, en este caso clave de SOL, que indica que en la 2ª línea se coloca la nota SOL y a partir de ésta las demás, una en cada espacio y una en cada línea, tanto ascendente como descendentemente.

El numerador 3 indica que cada compás tiene 3 partes, el denominador nos indica qué figura vale una parte, en este caso el 4 dice que es la negra la figura que vale una parte.

Las negras indican que van a durar un segundo cada una y al estar situadas en la segunda línea nos dice que ambas son la nota SOL. Las corcheas indican que cada una de ellas dura medio segundo, y al estar situadas en el segundo espacio y la tercera línea nos dice que las notas que deben sonar son LA y SI.

Este compás se podría escribir de la siguiente manera:

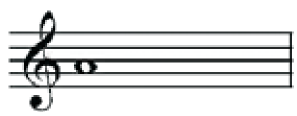


Frecuencia de Sol = 396 Hz; La = 440 Hz; Si = 495 Hz

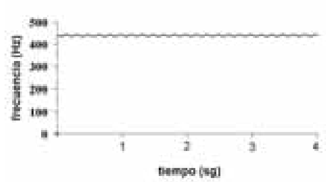
Una partitura musical se puede entonces escribir como una función definida a trozos en la que cada trozo representa a una figura distinta de la partitura, la función resultante es continua por la derecha y discontinua de salto finito por la izquierda coincidiendo con el momento de cambio de nota en la partitura. Cada trozo de la función es constante y su valor es la frecuencia de la nota que tiene que sonar en ese momento.

No siempre tiene por qué ser constante cada intervalo continuo de la función, pues existen algunos recursos musicales que expresados en la función harían que ésta creciera o decreciera, como son por ejemplo el vibrato o el glisando.

El vibrato es un recurso que enriquece la música haciendo que una nota no suene lineal sino que su sonido oscila levemente en torno a la altura exacta de la nota. La nota LA (con una frecuencia de 440 Hz) ante un vibrato, sonaría regularmente más o menos entre 435 y 445 Hz. Esto se puede representar de la siguiente manera.

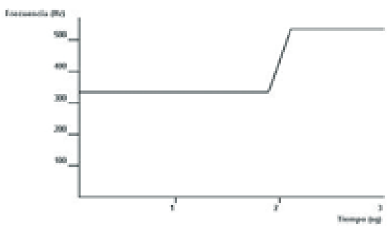


La nota LA (440 Hz) si estamos en la misma pieza del ejemplo anterior se representaría con la función:



Un glissando, (resbalando en italiano, que es el idioma en el que se expresan los términos musicales) en los instrumentos de cuerda, consiste en deslizar el dedo sobre la cuerda desde una nota inicial a otra final, en notación musical se suele emplear una línea oblicua ondulada que va desde la nota inicial a la final.

En forma de función sería:



Se ha visto que, de forma teórica, la escritura musical podría ponerse en forma de función, pero en la práctica resulta mucho mas simple la notación musical, creada expresamente para transcribir la música a un lenguaje escrito.

Composición y juegos

W. A. Mozart, a los 21 años, compuso un vals de 16 compases al que tituló "Juego de dados musical" (K 294), que consistía en escribir valses con la ayuda de dos dados. En cada lanzamiento de dados se suma el valor de éstos y tenemos 11 resultados posibles (de 2 a 12). Mozart compuso entonces once compases diferentes para cada una de las 16 posiciones, es decir, 11×16 = 176 compases en total. Tras los 16 lanzamientos se escogen los 16 compases elegidos en el sorteo y sale un vals. Un buen problema de combinatoria es calcular cuántos valses distintos se pueden formar y razonar por qué no tienen todos la misma probabilidad de aparecer. En total son 11^{16} o lo que es lo mismo (redondeando) 45.000 billones. Aunque lógicamente no se han podido escuchar más que una mínima parte de ellos, confiando plenamente en la genialidad de Mozart, es seguro que todos pueden pasar por ser una pieza musical al nivel de su autor.

John Cage también utiliza dados para alguna de sus obras y, siguiendo con el azar, pero ya con materiales más acordes a lo que es el siglo XX, el propio John Cage, Iannis Xenakis y cualquiera de los compositores de música estocástica utilizan el ordenador con algoritmos programados para crear sus composiciones.
J. S. Bach escribió el canon del cangrejo, una partitura a dos voces en la que el acompañamiento repite a la voz principal con exactitud, pero en sentido inverso, mantiene una simetría tal que si se tocara de forma invertida el único cambio sería que una de las voces tomaría la melodía de la otra y viceversa.

Un juego parecido al anterior lo crea J. Haydn en la sonata para piano en Do: el 2º movimiento es igual al primero, pero interpretado al revés.

P. Hindemith escribe en 1942 "Ludus tonales" (Juego tonal), una serie de preludios y fugas con intenciones didácticas sobre el clave bien temperado de J. S. Bach y en su posludio una música que también puede tocarse leyendo al derecho o al revés. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

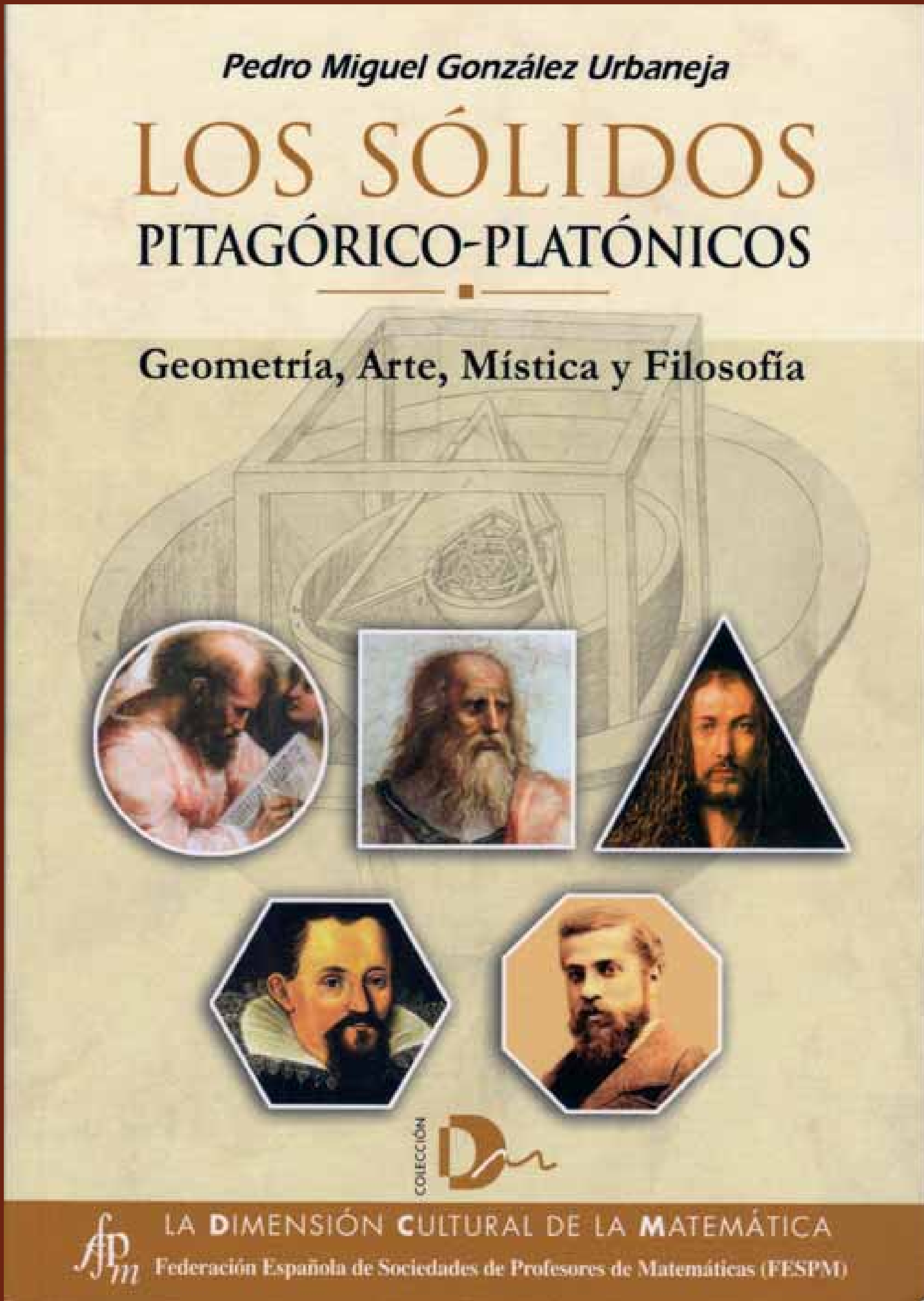
ARÍN, V. y FONTANILLA, P. (1981): *Estudios de Harmonía*. Alberdi, Madrid.

CARDÚS, C. (1996): *Estructura y sonoridad de los instrumentos de arco: el arco y el violín pieza por pieza*. Real Musical- Carisch España. Madrid

HALFFTER, C. y PARADA, L.I. (2004): *El placer de la música*. Síntesis. Madrid

Internet:

http://www.musicaperuana.com/espanol/mm.htm
http://www.larouchepub.com/spanish/lhl_articles/2006/0714_ataque_india.htm
http://acapriccio.iespana.es/historia.html
http://es.wikipedia.org/wiki/Monocordio
http://www.epsilones.com/paginas/t-musica.html



Servicio de Publicaciones de la FESPM
Apartado de Correos 590
06080 Badajoz
Información y pedidos: *publicafespm@wanadoo.es*

LOS SÓLIDOS PITAGÓRICO-PLATÓNICOS
Geometría, Arte, Mística y Filosofía
Pedro Miguel González Urbaneja
Federacion Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)
Badajoz, 2008
ISBN 978-84-934488-7-5
180 páginas

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 23-30

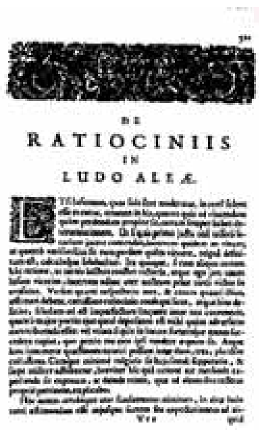
El problema de la ruina del jugador

El último de los problemas propuesto a los lectores en el Tratado de Huygens, publicado por primera vez en 1657, es hoy día conocido como El problema de la ruina del jugador. *Dicho problema consiste en calcular la probabilidad de que un jugador arruine al contrario en un juego a un número indeterminado de partidas, cuando los dos jugadores inician el juego con un cierto número de monedas cada uno. A priori, su enunciado asusta cuando se enfrenta por primera vez, pero puede ser un buen recurso didáctico para profesores que enseñan cálculo de probabilidades a estudiantes de un determinado nivel, dada la resolución elegante y cómoda que se dispone, sin necesidad de un gran aparato matemático. La autoría del problema, tradicionalmente asignada a Huygens, la resolución de éste, la de De Moivre de 1712, así como una resolución más actual y cercana al estudiante del mismo, forman parte del contenido de este artículo.*

At the end of his famous treatise on probability, De ratiociniis in ludo aleae, *Huygens(1657) posed five problems for his readers to solve. The fifth of theses has become known as the "gambler's ruin" problem. This problem consist in a game played as a series of independents Bernoulli trials with players A and B betting a value of 1 at each trial. Play ends when the capital of one of the players has been exhausted, i.e., the player has been ruined. The present article examines Huygens' own worked solution, De Moivre's solution and a current one. This problem could be interesting to students in the probability calculation because the solution is easy and doesn't need to much mathematics.*

Introducción

Al final del tratado de Huygens, *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, cuya versión en latín fue publicada por primera vez en 1657, encontramos cinco ejercicios propuestos por el autor y no resueltos, aunque en tres de ellos se da la solución. El último de estos ejercicios pasó a la historia del cálculo de probabilidades como "El problema de la ruina del jugador". Se trata de un juego entre dos jugadores a un número indeterminado de partidas, donde en cada partida se juegan una moneda (quién la pierde le paga al otro una moneda) y que sólo concluye cuando uno de los dos jugadores ha perdido todo su dinero. Tenemos, pues, un juego que podría tener duración infinita. El problema plantea el cálculo de la probabilidad de que un jugador arruine al contrario sabiendo la cantidad de monedas con las que parte cada uno (en un principio Huygens establecía el mismo número de monedas para ambos) y conociendo las probabilidades de ganar en cada partida de cada uno de los jugadores, probabilidades que no tienen por qué ser iguales, aunque si constantes a lo largo de todo el juego. Se supone, además, que las partidas son sucesos independientes entre sí, o sea, el resultado de una partida no influye en los resultados posteriores, cosa que ocurre en un juego de puro azar, donde el jugador no va aprendiendo con el desarrollo del juego.


DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

En *De ratiociniis* Huygens da la solución del problema, proponiendo la resolución al lector. Dado que es aquí, en ese tratado, donde aparece enunciado por primera vez, la tradición ha situado en Huygens la autoría del mismo. Sin embargo, se trata de un problema que Pascal propuso a Fermat, creyéndolo "más difícil que todos los demás", en el contexto de la correspondencia que ambos autores franceses mantuvieron de forma directa en 1654, y de manera indirecta entre 1655 y 1656 (para más detalle de esta correspondencia, ver Basulto y Camúñez, 2007). El problema se hace aún más conocido gracias a la edición comentada de James Bernoulli de *De ratiociniis* que constituye la Parte I de su *Ars conjectandi* (Bernoulli, 1713). Bernoulli tuvo alguna dificultad en su intento de justificar la solución, opinando entonces como Pascal sobre la dificultad del problema (hay una traducción al inglés del texto de Bernoulli realizada por Edith Dudley Sylla, 2006).

Jesús Basulto Santos
José Antonio Camúñez Ruiz
Mª Dolores Pérez Hidalgo
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Sevilla.

Cristiaan Huygens

Jacob Bernoulli

El hecho de que el nombre de Pascal no esté asociado con este problema tiene una fácil explicación: Huygens no menciona su fuente (y, probablemente, Bernoulli no la conoce) la cual sólo fue revelada con la publicación de la correspondencia de Huygens en 1888, en el primer tomo de sus Obras Completas, publicación llevada a cabo por la Sociedad Holandesa de las Ciencias. Como esto ocurrió después de que Todhunter escribiese su *History of the Mathematical Theory of Probability* (Todhunter, 1865), éste no recoge tampoco el origen, y este libro ha sido la mayor fuente secundaria de información sobre la historia inicial de la probabilidad desde entonces. No se conoce si el problema tiene alguna historia previa a Pascal, aunque parece un problema perfectamente natural entre jugadores que buscan nuevos juegos más excitantes. Tuvo una especial importancia en el desarrollo de la teoría de la probabilidad porque permitió a los matemáticos, en el inicio del siglo XVIII, investigar sobre otro tópico de este nuevo cálculo: la duración del juego. "El último de los cinco problemas que Huygens dejó para resolver" escribe Todhunter, "es el más notable de todos. Es el primer ejemplo sobre la *duración del juego*, un asunto que posteriormente sirvió para mostrar la elevada capacidad de De Moivre, Lagrange y Laplace".

Hoy, como se ha dicho, tenemos la suerte de conocer la correspondencia previa a la edición del tratado de Huygens, la que mantuvo con los sabios franceses y que justifica lo comentado sobre la autoría del problema. A continuación mostramos dos fragmentos traducidos al castellano de dos cartas que son relevantes de lo que estamos diciendo. El primer fragmento corresponde a una carta que Pierre de Carcavy (amigo de Pascal y Fermat, que usó esa amistad para hacer de intermediario entre ambos) envió a Huygens el 28 de septiembre de 1656, un año antes de la publicación del tratado de este último. Podríamos decir que aquí aparece una primera versión del enunciado del problema. Es el siguiente:

> He aquí otra proposición que él[1] ha hecho al señor de Fermat y que juzga sin comparación más difícil que todas las demás.
>
> Dos jugadores juegan con esta condición de que la chance del primero sea 11, y la del segundo 14, un tercero lanza los tres dados para ellos dos, y cuando sale 11 el 1º marca un punto y cuando sale 14, el segundo marca uno de su parte. Juegan a 12 puntos, pero con la condición de que si aquel que lanza los dados consigue 11, y así el primero marca un punto, si ocurre que los dados hacen 14 en el lanzamiento posterior, el segundo no marca un punto, sino que resta uno del primero, y así recíprocamente, de manera que si los dados llevan seis veces 11, con lo que el primero ha marcado seis puntos, si después los dados sacan tres veces seguidas 14, el segundo no marcará nada sino que restará tres puntos del primero, si después también ocurre que los dados hacen seis veces seguidas 14, no le quedará nada al primero, y el segundo tendrá tres puntos, y si aparece aún ocho veces seguidas 14, sin aparecer 11 entre medio, el segundo tendrá 11 puntos y el primero nada, y si ocurre cuatro veces seguidas 11, el segundo no tendrá más que siete puntos, y el otro nada, y si ocurre 5 veces seguidas 14 él habrá ganado.
>
> La cuestión pareció tan difícil al señor Pascal que dudó si el señor de Fermat lo llevaría a cabo, pero él me envió en el acto esta solución. Aquél que tiene la chance de 11 contra el que tiene la chance de 14 puede apostar 1156 contra 1, pero no 1157 contra 1. Y que así la verdadera razón del reparto estaría entre ambas, pero como el señor Pascal ha sabido que el señor de Fermat ha resuelto muy bien lo que le había sido propuesto, me ha dado los verdaderos números para enviárselos, y para testimoniarle de su parte que él no habría propuesto una cosa que no hubiese resuelto antes. Helos aquí.
>
> 150094635296999122.
>
> 129746337890625.
>
> Pero lo que encontraréis más considerable es que el citado señor de Fermat tiene la demostración, como también el señor Pascal de su parte, aunque hay apariencia de que se están sirviendo de métodos diferentes.

La *demostración* de la que habla Carcavy, de Pascal y de Fermat, nunca fue conocida. Edwards (1983) sugiere cómo podrían haber resuelto ambos teniendo en cuenta los métodos que usaron para resolver otros problemas del mismo contexto.

El segundo fragmento corresponde a la carta respuesta de Huygens, que le envió a Carcavy el 12 de octubre de 1656. En ella, Huygens, además de introducir una segunda versión del enunciado del problema, deja entrever cómo lo resuelve pero no se muestra demasiado explícito. Parece que su preocupación en la misma es mostrar a su interlocutor que él también sabe resolverlo. El fragmento es el siguiente:

> La proposición que él[2] hace al señor de Fermat me pareció en primer lugar bastante embarazosa, pero he visto pronto que no es más que una cuestión de esto, a saber, que cuando uno de los jugadores marca un punto cuando ocurre 11 con tres dados y el otro lo marca cuando ocurre 14, y de estos dos gana el que primero haya marcado 12 puntos de ventaja sobre el otro, es necesario determinar la ventaja de cada uno de ellos. Siendo el problema muy bonito en mi opinión, y viendo que el señor Pascal lo había juzgado tan difícil que hasta dudó que el señor de Fermat lo pudiese conseguir, no he podido impedirme yo también la búsqueda de la solución, aunque vos me hayáis enviado aquellas que los dos han efectuado. Me he servido siempre del mismo teorema que está arriba, y por medio de éste y del álgebra he encontrado la regla general para esta solución, que es muy simple como vos veréis. Estando dadas tales chances que se quiera de 2 o tres o varios dados, y algún número de puntos que finalizan el juego, es necesario ver en primer lugar cuántos azares hay para cada una de las chances u otros dos números en la misma razón. Siendo multiplicados los números de estos azares cada uno por si mismo tantas veces como puntos haya que finalizan el juego, los productos tendrán entre ellos la proporción requerida de las ventajas. Por ejemplo, en el caso que el señor Pascal propone hay 27 azares para la chance de 11, y 15 azares que dan 14. Ahora bien, como 27 es a 15 como 9 es a 5, es necesario multiplicar el 9 y el 5 cada uno 12 veces por si mismo, porque se juega a 12 puntos; los productos son 282429536481 y 244140625, que yo digo, expresan la verdadera proporción de las ventajas. También ellos tienen entre si la misma razón que aquellos del señor Pascal que eran 150094635296999121 y 129746337890625, y son los más pequeños que se pueden encontrar. Si la chance de uno fuese 10, y la del otro 13, y si ellos jugasen a 10 puntos, las ventajas serían por esta regla como 3486784401 a 282475249, y si las chances fuesen 13 y 17, jugando a 12 puntos, la ventaja del uno a la del otro será precisamente como 13841287201 a 1. Lo que parecerá a primera vista bastante extraño.
>
> El método con el que yo encuentro la regla me enseña también al mismo tiempo a hacer la demostración que resultará, no obstante, muy larga

Establecidos los antecedentes, creemos interesante a nivel didáctico, de aprendizaje, de formación complementaria y, por tanto, íntegra, que un alumno de último año de bachillerato o de primer curso universitario conozca la génesis de este problema y la resolución que le dio el primer autor que lo publicó. Una de las primeras consecuencias que un alumno aprende cuando se inicia en cálculo de probabilidades es el Teorema de la Probabilidad Total. Pues bien, un uso adecuado y reiterado de ese teorema, junto con un buen manejo de la suma de progresiones geométricas, conduce a una resolución eficaz y contundente, además de sencilla, de un problema de nombre atrayente pero de resolución a priori compleja. Esa es nuestra apuesta, que ya hemos experimentado en alumnos de primer año universitario: enseñar cálculo de probabilidades usando problemas “reales” con aparente dificultad pero con resoluciones asequibles si se manejan adecuadamente los instrumentales aportados. Por último, si tras la resolución clásica mostramos la solución ágil y original que le dio uno de los autores que más aportaron al desarrollo temprano del cálculo de probabilidades, Abraham de Moivre, nadie con un mínimo de sensibilidad matemática dejará de sorprenderse. Este es el objetivo que nos proponemos y los siguientes epígrafes lo van desarrollando en ese mismo orden.

Enunciado y resolución de Huygens

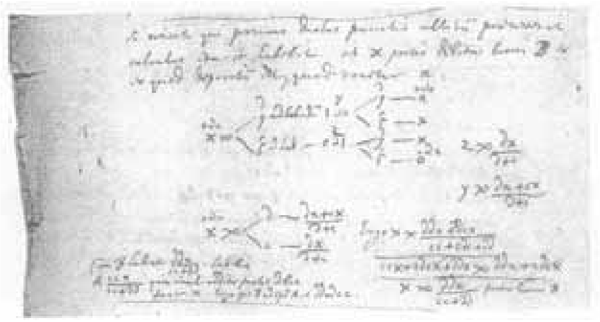
El enunciado que este autor le dio para aparecer al final de su Tratado (publicado por primera vez, como se ha dicho, en 1657) es el siguiente:

> Habiendo tomado cada uno 12 fichas, A y B juegan con 3 dados con esta condición de que a cada tirada de 11 puntos, A debe dar una ficha a B, y que B debe dar una ficha a A en cada tirada de 14 puntos, y que ganará aquel que sea el primero en poseer todas las fichas. Se encuentra en este caso que la chance de A es a la de B como 244140625 es 282429536481.

La resolución detallada aparece en unas hojas sueltas escritas por Huygens en 1676 y que la edición de sus Obras Completas la incluye como Apéndice VI en el tomo XIV de las mismas, tomo publicado en 1920. Queremos señalar que estas hojas sueltas son presentadas como las primeras en la historia que incluyen árboles de probabilidad para la comprensión y demostración de los resultados (Shafer, 1996).

Según se desprende de la lectura anterior de los fragmentos epistolarios, cuando Huygens lee el enunciado propuesto por Pascal, con la redacción de Carcavy, inmediatamente lo enfoca pensando que los puntos de los jugadores se acumulan en la vía ordinaria, pero el ganador será el primero que lleve doce puntos de ventaja (en 1656), y cuando él lo plantea en su *De ratiociniis* (en 1657) lo da en términos de que cada jugador arranca con doce puntos, y una ganancia de un jugador supone la transferencia de un punto de su oponente a él mismo, y el ganador total es el que arruina al otro de todos sus puntos. Las tres formas de este problema de Pascal son desde luego, equivalentes, pero es en la última forma como el problema es conocido como el de la “Ruina del jugador”.

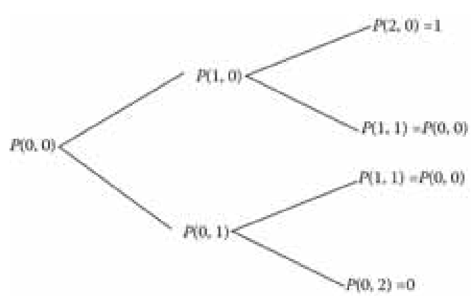
Describimos a continuación la resolución de este autor, adaptándola a un lenguaje más actual. Podemos decir que en la formulación de Pascal, los jugadores arrancan con el tanteo (0,0), donde el primer 0 representa los puntos que tiene el primer jugador al inicio del juego y el segundo 0 de la pareja lo mismo para el segundo jugador. El ganador es aquel que primero consigue 12 puntos (teniendo el otro 0 puntos). Pues bien, ésta es también la forma que Huygens usa en su resolución de 1676.



Copia de un fragmento original del manuscrito de Huygens donde resuelve el problema de la ruina del jugador y donde aparece por primera vez en la historia los árboles de decisión

Dado que se lanzan tres dados y el jugador A necesita 11 puntos, el número de resultados favorables al mismo es 15 de los $6^3 = 216$ resultados posibles, mientras que el número de resultados favorables al jugador B, que necesita sumar 14 puntos, es 27. En total hay 15 + 27 resultados que favorecen a uno u otro jugador. El resto, hasta los 216 posibles no favorecen a ninguno de los dos. Por eso, este autor considera $p = 15/42 = 5/14$ como una medida de la chance del jugador A en cada partida o lanzamiento de los tres dados, y $q = 27/42 = 9/14$ la medida equivalente para el jugador B. Es claro que $p + q = 1$. Supongamos que $P(a,b)$ es la probabilidad que tiene A de ganar el juego (de arruinar a B) cuando este jugador tiene a puntos y B tiene b puntos. El problema es encontrar $P(0,0)$. Huygens habla en términos de chances, que identifica con esperanzas del jugador en cada situación. Si el total apostado es la unidad, entonces la esperanza de un jugador en cada situación coincide con su probabilidad de ganar.

El autor comienza analizando el caso simple en el que el juego se acaba cuando uno de los jugadores llega a 2 puntos. Da una lista de todos los posibles resultados y sus probabilidades en un diagrama de tipo árbol. El diagrama que presenta, con una visualización actual, es el siguiente:



Vemos que Huygens supone que $P(1,1) = P(0,0)$, lo cual es lógico, dado que ambos casos, en (0,0) y (1,1), el primer jugador necesita realizar el mismo esfuerzo para conseguir arruinar al segundo.

Del esquema podemos deducir las siguientes igualdades, usando el Teorema de la Probabilidad Total:

$P(0,0) = p\cdot P(1,0) + q\cdot P(0,1) =$
$= p(\, p\cdot P(2,0) + q\cdot P(1,1)) + q(\, p\cdot P(1,1) + q\cdot P(0,2))=$
$=p(p+q\cdot P(0,0)) + q(p\cdot P(0,0) + q\cdot 0) = p^2 + 2pq\cdot P(0,0)$

Teniendo en cuenta que $p + q = 1$, podemos obtener $P(0,0)$, resultando:

$$P(0,0)=\frac{p^2}{p^2+q^2}$$

Por tanto, la esperanza del primero es a la del segundo como p^2 es a q^2.

Después, Huygens estudia el caso en el que el ganador ha de conseguir cuatro puntos de ventaja. Ingeniosamente, resuelve considerando sólo uno de cada dos posibles estados del juego, a saber los puntos (4,0), (2,0), (0,0), (0,2) y (0,4), y señala que el árbol de sucesos será similar al primero, salvo que todas las chances son cuadradas. La justificación para omitir los puntos intermedios es, evidentemente, que para pasar de (0,0) a (0,4), por ejemplo, es necesario pasar por (0,2). Huygens no ofrece explicación, más allá de un diagrama, aunque el planteamiento origina tres ecuaciones con la solución:

$$P(0,0)=\frac{p^4}{p^4+q^4}$$

Entonces, las chances de los dos jugadores están en la relación $p^4 : q^4$.

Finalmente, señala que si es necesaria una ventaja de 8 puntos, aplicando nuevamente el argumento anterior:

$$P(0,0)=\frac{p^8}{p^8+q^8}$$, y así.

Si se requiere una ventaja de 3 puntos para ganar, él hace el paso de (0,0) a (1,0) con probabilidad p y después a (3,0) con probabilidad p^2, y de manera similar para las demás ramas del diagrama, lo que le lleva a las ecuaciones:

$$P(1,0)=\frac{p^2P(3,0)+q^2P(1,2)}{p^2+q^2}=\frac{p^2+q^2P(0,1)}{p^2+q^2}$$

$$P(0,1)=\frac{p^2P(2,1)+q^2P(0,3)}{p^2+q^2}=\frac{p^2P(1,0)}{p^2+q^2}$$

$$P(0,0) = p\cdot P(1,0) + q\cdot P(0,1)$$

con la solución:

$$P(0,0)=\frac{p^3}{p^3+q^3}$$

De aquí él generaliza para:

$$\frac{p^6}{p^6+q^6}$$

Los casos considerados hasta aquí requieren la solución de tres ecuaciones. Si es necesaria una ventaja de 5 puntos para ganar, el número de ecuaciones llega a ser considerablemente mayor, y Huygens señala que una solución puede ser obtenida como para *n= 3* pero que tomaría un tiempo mucho mayor. Finalmente, afirma que, en general, la ratio de las esperanzas de A a B es $p^n : q^n$, aunque *no vemos como concluir en general que las esperanzas de A y B están en la razón de las potencias* lo que justifica la solución aportada en su tratado de $5^{12} : 9^{12}$.

Una resolución actual

Uno de los grandes retos del jugador es el de hacer saltar a la banca, o sea, conseguir que la banca se quede sin fondos. Por tanto, nos permitimos plantear el problema como un juego entre un jugador y la banca y nos familiarizamos con los dos conceptos siguientes:

> "Ruina del jugador", cuando el mismo ha perdido todo su dinero, quedando en manos de la banca.
>
> "Hacer saltar a la banca", cuando ésta ha perdido todos sus fondos, pasando a manos del jugador.

Supongamos que el jugador comienza el juego con n monedas, mientras que la banca dispone de m, donde n y m no tienen que ser iguales, necesariamente. Suponemos que $n+m=K$. Por tanto, K es el número total de monedas que hay en juego. En cada partida se juega una moneda. Como antes, suponemos independencia de las partidas y probabilidad constante en cada partida de ganar el jugador o la banca. Nos planteamos, de nuevo, la probabilidad que tiene el jugador de hacer saltar a la banca.

Sea p la probabilidad que tiene el jugador de ganar en cada partida, sea q la probabilidad de la banca. Para simplificar el problema, $p+q=1$, o sea, en cada partida o bien gana el jugador, o bien la banca, no pudiendo darse un resultado que no favorezca ni a uno ni a otro.

Sea w_i la probabilidad de que el jugador haga saltar a la banca cuando él dispone de i monedas. Por tanto, 1- w_i es la probabilidad de que la banca arruine al jugador cuando éste tiene i monedas. Podemos escribir:

$w_0=0$, pues el jugador ya ha perdido todas sus monedas, no puede seguir jugando y, por tanto, no tiene ninguna posibilidad de hacer saltar a la banca.

$w_1=p\cdot w_2$, pues si al jugador le queda una moneda, la única posibilidad de seguir en el juego es ganando la siguiente partida. Por tanto, la probabilidad de hacer salta a la banca disponiendo de una sola moneda es igual a la probabilidad de ganar la siguiente partida (juntando entonces 2 monedas) por la probabilidad de hacer saltar la banca cuando se dispone de 2 monedas.

$w_2=p\cdot w_3+q\cdot w_1$, pues, la probabilidad de que haga saltar la banca con dos monedas es igual a la probabilidad de que gane la siguiente partida (juntando entonces 3 monedas) por la probabilidad de que haga saltar la banca con 3 monedas mas la probabilidad de perder la siguiente partida (quedando entonces con una sola moneda) por la probabilidad de hacer saltar la banca con una moneda. Vemos, pues, que el conocido Teorema de la Probabilidad total nos sirve perfectamente para ir construyendo las igualdades que definen una recurrencia en función del número de monedas que tiene el jugador.

$w_k=1$, pues el jugador ya tiene todas las monedas, ha hecho saltar a la banca.

Podemos generalizar y resumir escribiendo:

$w_0=0$, $w_K=1$,
$w_i=p\cdot w_{i+1}+q\cdot w_{i-1}$, $i=1, 2, ..., K-1$

Este conjunto de igualdades, conocido como ecuación en diferencias, admite una resolución algebraica sencilla que pasamos a desarrollar.

Siempre es posible escribir $w_i=(p+q)\cdot w_i=p\cdot w_i + q\cdot w_i$. Igualando los segundos miembros de esta igualdad y la anterior, tenemos $p\cdot w_i + q\cdot w_i=p\cdot w_{i+1} + q\cdot w_{i-1}$, o sea, $p\cdot w_{i+1} - p\cdot w_i=q\cdot w_i - q\cdot w_{i-1}$. De aquí, obtenemos:

$$w_{i+1}-w_i=\frac{q}{p}\left(w_i-w_{i-1}\right)$$

Presentamos esta última igualdad para distintos valores de i:

$$\text{Para } i=1,\ w_2-w_1=\frac{q}{p}\left(w_1-w_0\right)=\frac{q}{p}w_1, \text{ pues } w_0=0.$$

$$\text{Para } i=2,\ w_3-w_2=\frac{q}{p}\left(w_2-w_1\right)=\left(\frac{q}{p}\right)^2 w_1.$$

$$\text{Para } i=3,\ w_4-w_3=\frac{q}{p}\left(w_3-w_2\right)=\left(\frac{q}{p}\right)^3 w_1.$$

....

$$\text{Para } i-1,\ w_i - w_{i-1} = \frac{q}{p}\left(w_{i-1} - w_{i-2}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1} w_1$$

$$\text{Para } i,\ w_{i+1} - w_i = \frac{q}{p}\left(w_i - w_{i-1}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{i} w_1$$

....

$$\text{Para } i = K-1,\ 1 - w_{K-1} = \frac{q}{p}\left(w_{K-1} - w_{K-2}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1} w_1, \text{ pues } w_K = 1.$$

Si sumamos miembro a miembro las igualdades anteriores obtenidas para los distintos valores de i, observamos que en el primer miembro se van cancelando todos los términos menos dos, mientras que en el segundo miembro podemos sacar factor común w_1. Tenemos entonces:

$$1 - w_1 = w_1\left[\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1}\right]$$

Por tanto:

$$1 = w_1\left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1}\right]$$

que nos permite obtener el valor de :

$$w_1 = \frac{1}{1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1}}$$

Si la suma anterior hubiese llegado hasta la igualdad i-ésima, tendríamos:

$$w_i - w_1 = w_1\left[\frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]$$

o sea:

$$w_i = w_1\left[1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\right]$$

y sustituyendo el valor de w_1 obtenido arriba, tenemos:

$$w_i = \frac{1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}}{1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p}\right)^{K-1}}$$

Teniendo en cuenta que el numerador y denominador están constituidos por sumas limitadas de progresiones geométricas con la misma razón y el mismo primer término, la expresión anterior se reduce a:

$$w_i = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^K}$$

Y esta sería la solución del problema. En el caso particular presentado por Huygens, donde p=5/14, q=9/14, i=12 y K=24, dicha solución se traduce a:

$$w_{12} = \frac{1 - \left(\frac{\frac{9}{14}}{\frac{5}{14}}\right)^{12}}{1 - \left(\frac{\frac{9}{14}}{\frac{5}{14}}\right)^{24}} = \frac{1 - \left(\frac{9}{5}\right)^{12}}{1 - \left(\frac{9}{5}\right)^{24}} = \frac{\frac{5^{12} - 9^{12}}{5^{12}}}{\frac{5^{24} - 9^{24}}{5^{24}}} = \frac{5^{12}}{5^{12} + 9^{12}}$$

Por tanto, la probabilidad del segundo jugador (de la banca en este caso) de ganar es:

$$1 - w_{12} = \frac{9^{12}}{5^{12} + 9^{12}}$$

y la razones de las suertes de ambos están en proporción $5^{12} : 9^{12}$.

A partir de la expresión general para w_i nos atrevemos a analizar algunos casos particulares que creemos de interés.

- Si p=q, entonces la probabilidad del jugador de hacer saltar a la banca se simplifica muchísimo:

$$w_i = \frac{i}{K}$$

El resultado se obtiene sustituyendo en la expresión de w_i dada como cociente de dos sumas limitadas de progresiones geométricas, pues, al sustituir en la última expresión nos queda indeterminada. Este resultado nos indica que, en igualdad de condiciones en cada lanzamiento, la probabilidad de hacer saltar la banca es el cociente entre lo que dispone el jugador y el dinero total en juego.

- Si q>p, si considerásemos i suficientemente grande, o sea, el jugador con una fuerte suma de dinero, de forma que:

$$\left(\frac{q}{p}\right)^i \gg 1$$

podremos aproximar w_i de la siguiente forma:

$$w_i = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^K} \simeq \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^i}{\left(\frac{q}{p}\right)^K} = \left(\frac{p}{q}\right)^{K-i}$$

Tenemos que dicha probabilidad es el cociente de probabilidades en cada partida elevado al dinero con el que cuenta la banca.

• Si $p<q$, y si K, o sea la cantidad total de dinero en juego, es suficientemente grande como para:

$$\left(\frac{q}{p}\right)^K \simeq 0$$

entonces:

$$w_i \simeq 1-\left(\frac{q}{p}\right)^i$$

con lo que si el jugador dispone de una cantidad i de dinero resulta casi seguro que hará saltar a la banca. La probabilidad de que el jugador se arruine sería:

$$\left(\frac{q}{p}\right)^i$$

La resolución de Abraham de Moivre (1711)

En su trabajo *De Mensura Sortis*, publicado en 1711 en la *Phil. Trans.*, encontramos la resolución de Abraham de Moivre del problema que nos ocupa. Dicha resolución fue reproducida en las distintas ediciones de su famoso tratado *The Doctrine of Chances* (1718, 1738 y 1756). La demostración aportada por este investigador destaca por ser muy perspicaz y mucho más corta que las presentadas anteriormente. Merece la pena detenerse y saborear esta forma tan ingeniosa de resolver el problema.

Volvemos al caso de dos jugadores A y B, con probabilidades p y q, respectivamente, de ganar en cada partida o lanzamiento. En lugar de monedas, De Moivre supone que los jugadores cuentan cada uno de ellos con un cierto número de fichas y cada una de un valor distinto. Así, supongamos que al inicio del juego el jugador A dispone de a fichas y el jugador B cuenta con b fichas, de forma que el total de fichas en juego es $a+b$. El juego concluye cuando uno de los jugadores se queda sin fichas. Ambos jugadores han dispuesto las fichas en dos montones ordenados con las siguientes valoraciones para las mismas: En el caso del jugador A, la ficha que ocupa la base del montón vale q/p, la que está por encima de ésta vale $(q/p)^2$, la siguiente que está por encima de la segunda vale $(q/p)^3$, y así sucesivamente, hasta la última ficha de su montón de partida, la que está por encima de todas, cuyo valor es $(q/p)^3$. La valoración de las fichas del jugador B lleva un orden contrario. Así, la que ocupa la posición de más arriba, la que está por encima de todas en este segundo montón, vale $(q/p)^{a+1}$. La que sigue, la que está debajo de esta primera, tiene de valor $(q/p)^{a+2}$. La siguiente más abajo, $(q/p)^{a+3}$. Así, sucesivamente, vamos valorando hacia abajo en este segundo montón, de forma que la última, la de la base del mismo, tiene el valor $(q/p)^{a+b}$.

Abraham De Moivre

Se supone que en cada partida la ficha que ocupa la posición más alta en el montón del que la pierde es transferida al montón del que la gana ocupando entonces la posición más alta de dicho montón. O sea, en cada partida es apostada siempre la ficha más alta de cada montón. Entonces, en términos de valoración, en cada partida, la apuesta del jugador B es siempre (q/p) veces la del jugador A. Con este ingenioso razonamiento, De Moivre, garantiza esperanza nula para cada jugador en cada partida. Por ejemplo, en la situación inicial del juego, la esperanza del jugador A de ganar la primera partida sería:

$$p\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1} - q\left(\frac{q}{p}\right)^a = 0$$

o sea:

$$p\cdot\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1} = q\left(\frac{q}{p}\right)^a$$

lo mismo que para B, con lo que garantiza una partida justa. La última igualdad nos dice que el producto de la probabilidad del primer jugador en cada partida multiplicada por el valor de la ficha conseguida es igual al producto que corresponde al otro jugador.

Entonces, si P_a es la probabilidad que tiene el jugador A de ganar todas las fichas de B, cuando el primero cuenta con *a* fichas, o sea, al inicio del juego, y si P_b es la equivalente para el jugador B, De Moivre razona que si la esperanza cero se mantiene a todo lo largo del juego se ha de cumplir que multiplicado por el valor total de todas las fichas ganadas por A (si A arruinase a B) ha de ser igual a por el valor de las fichas ganadas por B (si B arruinase a A). O sea:

$$P_a\left\{\left(\frac{q}{p}\right)^{a+1}+\left(\frac{q}{p}\right)^{a+2}+\ldots\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}\right\}=P_b\left\{\left(\frac{q}{p}\right)+\left(\frac{q}{p}\right)^{2}+\ldots\left(\frac{q}{p}\right)^{a}\right\}$$

Si sumamos las dos progresiones geométricas limitadas de ambos miembros y tenemos en cuenta que $P_a+P_b=1$, podemos despejar P_a y obtenemos:

$$P_a=\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}$$

Conseguimos así, de nuevo, la solución del problema, o sea, la probabilidad de que el jugador A arruine al contrario. ■

NOTAS

1 Se refiere a Blaise Pascal.

2 Se refiere a Blaise Pascal.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASULTO SANTOS, J., CAMÚÑEZ RUIZ, J. A. (2007): *La geometría del azar. La correspondencia entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal*, Nivola, Madrid.

BERNOULLI, JACQUES (1713): *Ars conjectandi,* Basilea. Se ha usado la traducción al inglés, *The Art of Conjecturing,* de Edith Dudley Sylla, 2006, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

DAVID, F. N. (1962): *Games, Gods and Gambling*, Charles Griffin & Co. Ltd., London.

DE MOIVRE, A (1712): "De mensura sortis". *Phil. Trans. R. Soc. London*, 27, 213-264.

EDWARDS, A. W. F. (1983): "Pascal's Problem: The "Gambler's" Ruin". *International Statistical Review,* 51, 73-79.

FRANKLIN, J. (2001): *The Science of Conjeture. Evidence and Probability before Pascal*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

HACKING, I (1975): *The emergence of probability*, Cambridge University Press.

HALD, A. (1990): *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, John Wiley & Sons, New York.

HUYGENS, C. (1888-1950): *Oeuvres Complètes*, 22 volúmenes, Société Hollandaise des Sciences. Nijhoff, La Haye. Los volúmenes usados aquí son: Vol. I, *Correspondance 1638-56,* publicado en 1888, Vol. XIV, *Calcul des Probabilités; Travaux de mathématiques pures 16655-66*, publicado en 1920.

KORTEWEG, D. J. (1920): "Apercy de la Genèse de l'Ouvrage De Ratiociniis in Ludo Aleae et des Recherches subséquentes de Huygens sur les Questions de Probabilité", *Oeuvres de Huygens*, Vol. 14, 3-48.

PACKEL, E. (1995): *Las matemáticas de los juegos de apuestas*, Traducción de M. A. Hernández Medina, Colección La Tortuga de Aquiles, Nº 5, Euler, Madrid.

SHAFER, G. (1996): *The Art of Causal Cnjecture*, The MIT Press, Cambridge, Massachussets, London.

THATCHER, A. R. (1957): "A note on early solutions of the problem of the duration of play. *Biometrika*, 44, 515-518.

TODHUNTER, I. (1865): *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*, Macmillan, London. Reprinted by Chelsea, New York, 1949.

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 31-42

Taller matemático de costura

El origen del Taller Matemático de Costura *fue los trabajos que solía hacer de pequeño en el colegio con cartón e hilo, así que decidí ponerme a hacer algo parecido con mis propios alumnos. Hemos combinado* Matemáticas *y el* Arte de coser *para llegar a ver cómo con la combinación de segmentos rectilíneos se obtiene la envolvente de ciertas figuras matemáticas como cónicas, epicicloides e hipocicloides. Las composiciones han sido hechas sobre madera con agujeros o puntas e hilos. Se ha diseñado una página web interactiva con Geogebra en la que se puede elegir diversos patrones y ver como se construyen paso a paso.*

The origin of this mathematical sewing workshop are the works I used to do at school, so I decided to start working on this with my own students. We have combined maths *with* the art of sewing beatiful mathematical patterns. *Our aim is to show how through the combination of straight segments of thread we can get the envelope of certain mathematical figures, such as conics, epicycloids and hypocycloids. Most of the compositions have been made on a wooden board with holes and thread. A web application has been created with GeoGebra where you can choose any of the 21 designs and see how to carry it out step by step.*

Introducción

Las pasadas Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas celebradas en Albacete (JAEM 2005), además de servir para contactar con muchos compañeros a los que solo se ve en eventos de este tipo y asistir a actividades formativas como conferencias, ponencias, talleres etc., me permitieron sacar diversas ideas para trabajar con los alumnos en esos momentos en que las actividades lectivas y la familia nos dejan.

Tanto el stand de la editorial británica Tarquin Publications como el zoco “Paraboloides” me hicieron recordar aquellos trabajos de pretecnología que hacía de pequeño en los Padres Escolapios de Logroño. ¡Quién me iba a decir que los trabajos hechos sobre tablerillo con puntas e hilo nos proporcionaban las gráficas de parábolas, elipses, cardioides, etc.!

Con el paso del tiempo la idea se fue difuminando hasta que la convocatoria de Divulgaciencia’07 realizada por la Fundación CajaRioja para conmemorar el Año de la Ciencia, ha subvencionado el proyecto y permitido poner en marcha un Taller en el que hemos desarrollado todas las composiciones que veremos más adelante.

El trabajo ha sido realizado por un equipo formado por cuatro alumnos de segundo de E.S.O. actuando un servidor como coordinador. Por un lado hemos utilizado tablas, puntas e hilo para hacer la parte manual; por otra, papel y boli para comprobar al estilo de la vieja escuela las fórmulas; y, en tercer lugar, el ordenador, que todo lo sabe y es más seguro y rápido que nosotros, para realizar las composiciones.

En la Exposición itinerante Divulgaciencia’07, que ha recorrido toda La Rioja desde el mes de noviembre de 2007 a abril de 2008, se han presentado las composiciones planteadas sobre madera, cartón u otros soportes con la ayuda de puntas e hilos de colores, un dossier con todo el material elaborado y un equipo informático con la aplicación diseñada al efecto.

Para llegar a este punto hemos pasado por diversos pasos intermedios como es conocer las diversas figuras mediante su definición como lugares geométricos y ver dónde se encuentran a nuestro alrededor. Así mismo, se ha hecho el desarrollo matemático que demuestra cómo las composiciones realizadas son la envolvente de las rectas tangentes a determinadas figuras.

Javier Garraleta Espinosa
IES Inventor Cosme García, Logroño
David Acha Herrera, Cristina Barrio Saralegui, Alodia Rodríguez Nájera y Guillermo Sáez Quintanilla
IES Esteban M. Villegas, Nájera

Como es posible que dé pereza ponerse manos a la obra para hacer las composiciones, se ha diseñado también una aplicación web que permite, mediante el uso del software libre Geogebra, construir cada figura. La aplicación se puede ver en http://perso.wanadoo.es/jgalarreta/index.htm y es necesario tener instalado el motor de Java.

Está claro que las matemáticas a primera vista no son tan espectaculares como otras ciencias experimentales pero, en este caso, han resultado agradables a la vista como se ha podido comprobar en la Exposición Divulgaciencia'07 donde el trabajo ha sido merecedor de uno de los premios de la convocatoria que daba derecho a visitar la agencia espacial europea en Noordwich (Holanda).

Cabe mostrar en este momento el cariño y afecto a nuestro compañero Carlos Usón, alma máter de Divulgaciencia junto a Carmen Arnedo, ya que sufrió un accidente en el viaje a Holanda al salir de París hacia Ámsterdam.

A continuación mostramos el contenido del taller aderezado con unas fotos de las distintas composiciones.

Cónicas

La circunferencia, elipse, parábola e hipérbola son curvas con las que estamos familiarizados. El descubrimiento de estas curvas llamadas cónicas es atribuido a Menecmo (350 a.C.) y su estudio detallado a Apolonio (262-190 a.C.). El nombre de cónicas es debido a que se obtienen como intersección de un doble cono con un plano.

La Parábola

¿Qué es una parábola y dónde puedo encontrarla?

El diccionario nos da como primera acepción de parábola, que es la narración de un suceso fingido, de que se deduce, por comparación o semejanza, una verdad importante o una enseñanza moral.

No parece que esto tenga mucho que ver con lo que queremos hacer, así que buscamos una segunda acepción: "Lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de una recta, llamada directriz, y de un punto fijo, llamado foco. Resulta de cortar un cono circular recto por un plano paralelo a una generatriz del mismo".

Gran variedad de cosas a nuestro alrededor muestran figuras en forma de parábola:

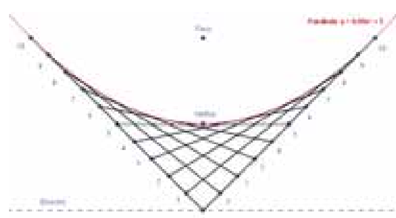
-El agua que brota de una fuente.
-La trayectoria de un balón de baloncesto en un lanzamiento a canasta.
-Una antena parabólica.

¿Cómo se hace la parábola?

Lejos de construir la parábola como nos describe la definición, vamos a hacerla utilizando únicamente, como en el resto de composiciones realizadas, una tabla del tamaño que consideremos oportuno, unas cuantas puntas e hilo de colores.

Dibujamos sobre la superficie de la tabla un ángulo que tenga por lados dos segmentos de, por ejemplo, diez centímetros de lado. Cada uno de los segmentos lo dividimos en diez partes iguales y clavamos una punta en cada una de las marcas, que sobresalga entre 5 y 10 milímetros. También se puede optar por hacer un agujero en cada uno de los puntos marcados en lugar de clavar una punta.

Tras sujetar mediante un nudo el hilo en el primer punto de uno de los segmentos, lo pasamos hasta el último del otro segmento, es decir, 0 con 10, a continuación pasamos el hilo al lado contiguo y unimos con el segundo del otro extremo (9 con 1), y así sucesivamente (2 con 8, 7 con 3, etc.); hasta completar todos los puntos de ambos lados del ángulo.



Habiendo tenido cuidado en que el hilo haya quedado tenso en todos los fragmentos realizados, concluimos sujetando el hilo mediante un nudo en la última de las puntas por las que ha pasado y cortando el hilo sobrante.

El perfil que deja la figura es la envolvente de las rectas tangentes a una parábola.

Visto el proceso, es obvio que cuantos más puntos se coloquen en cada uno de los lados del ángulo, la parábola queda perfilada con mayor precisión.

Con Geogebra definimos un deslizador $a \in [0,10]$ con incremento de 0.2 y un segmento al que se le activa la traza:

Segmento[(*a*, *a*),(-(10-*a*),10-*a*)]

Al actuar lentamente sobre el deslizador se va formando la misma figura que generamos en la tabla.

¿Por qué nos sale una parábola?

El desarrollo matemático requiere de ciertas destrezas en funciones, álgebra y geometría. Veamos:

Si tomamos como puntos que corresponde unir en los lados del ángulo $A(a, a)$ y $A'(a-10, 10-a)$ con $a \in [0,10]$, la recta que pasa por ambos tiene la expresión:

$$AA' \equiv \frac{x-a}{-10} = \frac{y-a}{10-2a}$$

que, quitando denominadores, nos deja:

$$AA' \equiv (5-a)x + 5y - 10a + a^2 = 0$$

Repitiendo el proceso con otro par de puntos $B(b, b)$ y $B'(b-10, 10-b)$ también con $b \in [0,10]$, nos da:

$$BB' \equiv (5-b)x + 5y - 10b + b^2 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos rectas anteriores encontramos el punto C de corte entre ambas rectas, obteniendo:

$$C\left(a+b-10,\ 10-a-b+\frac{ab}{5}\right)$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto C de corte cuando A y B están muy cercanos entre si, así como A' y B'. Por tanto llegamos a la situación límite $B \to A$ y, por tanto $b \to a$. En tal caso:

$$C\left(2a-10,\ 10-2a+\frac{a^2}{5}\right)$$

Eliminando a encontramos la relación entre x e y:

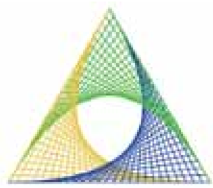
$$y = \frac{x^2+100}{20} = 0{,}05x^2 + 5$$

que es una parábola de foco el punto $F(0, 10)$, directriz la recta $d \equiv y=0$ y vértice $V(0, 5)$.

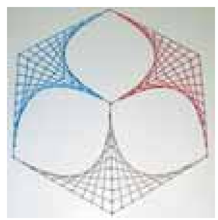
Composición de varias parábolas

A partir de este momento se nos abre un abanico tremendo de posibilidades.

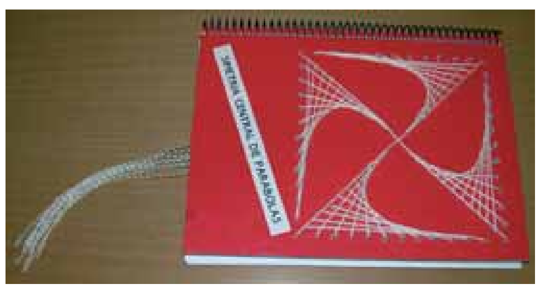
Podemos optar por hacer parábolas con los lados contiguos de cualquier polígono regular (triángulos, cuadrados, hexágonos, octógonos, etc.) cambiando de color de hilo cuando se quiera.



Se puede jugar utilizando como lados del ángulo los lados de un hexágono coincidiendo cada dos en un vértice o conseguir una figura estrellada rotando la parábola varias veces sobre un punto central hasta completar los 360º.



La simetría axial o central también nos proporciona otras nuevas posibilidades.



La circunferencia

¿Qué es una circunferencia y dónde puedo encontrarla?

> Lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de un punto fijo llamado centro. Resulta de cortar un cono circular recto por un plano paralelo a la base del mismo.

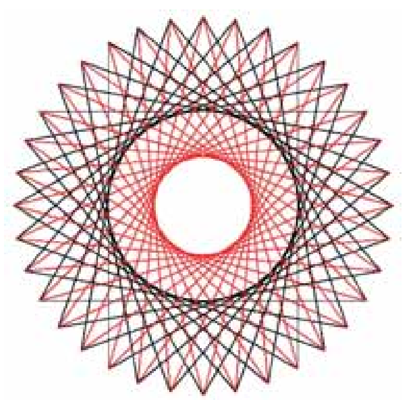
Prácticamente podemos encontrar circunferencias en cualquier dirección en la que busquemos, empezando por los botones de la camisa, el reloj que llevamos en la muñeca o uno de los mayores inventos de la historia, la rueda.

Una sola circunferencia combinando colores

Marcamos en una circunferencia puntos equidistantes que dividan la misma en 36 partes iguales y clavamos las correspondientes puntas.

Con un hilo de un determinado color unimos los puntos, por ejemplo, de once en once hasta pasar por todos ellos. Cambiamos el color y elegimos los puntos de trece en trece pasando también por todos. Vemos cómo se forman en el interior del círculo inicial dos nuevas circunferencias.

Es importante la elección del “once” y el “trece” a la hora de unir los puntos pues ambos números son primos con 36 y, de esta manera, sin cortar el hilo, podremos pasar por todos los puntos de una sola pasada.



Con Geogebra definimos un deslizador $a \in [0, 360]$ con incremento 10 y el segmento, con traza:

Segmento[(4+6cos(2*3.14a/360),6sin(2*3.14a/360)),
(4+6cos(2*3.14a/360+220*3.14/360),6sin(2*3.14a/360+220*3.14/360))]

¿Por qué nos sale una circunferencia?

Si tomamos como puntos que corresponde unir en la circunferencia de centro el origen y radio la unidad $A(cos\ a, sen\ a)$ y $A'(cos(a+110^o), sen(a+110^o))$ con $a \in [0^o, 360^o]$, la recta que pasa por ambos tiene la expresión:

$$AA' \equiv \frac{x - cosa}{cos(a+110^o) - cosa} = \frac{y - sena}{sen(a+110^o) - sena}$$

Utilizando diversas relaciones entre razones trigonométricas obtenemos la expresión:

$AA' \equiv xcos(a + 55^o) + ysen(a + 55^o) - cos55^o=0.$

Repitiendo el proceso con otro par de puntos B y B' de la circunferencia tenemos:

$BB' \equiv xcos(b + 55^o) + ysen(b + 55^o) - cos55^o=0.$

Resolviendo el sistema formado por las dos rectas anteriores obtenemos que las coordenadas del punto C de corte entre ambas rectas cumple que:

$$\frac{y}{x} = tan\frac{a+b+110^o}{2}$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto C de corte cuando A y B están muy cercanos entre si, así como A' y B'. Por tanto llegamos a la situación límite $B \to A$ y, por tanto $b \to a$. En tal caso:

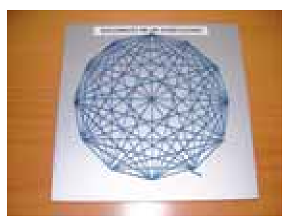
$$\frac{y}{x} = tan(a+55^o)$$

que, sustituyendo en la expresión de la recta:
$AA' \equiv xcos(a + 55^o) + xtan(a + 55^o)sen(a + 55^o) - cos55^o=0 \Rightarrow$
$x = cos55^o cos(a + 55^o)$.
Así, $y = cos55^o sen(a + 55^o)$ con lo que $x^2 + y^2 = cos^2 55^o$, que es una circunferencia de mismo centro que la original y radio $cos55^o$.

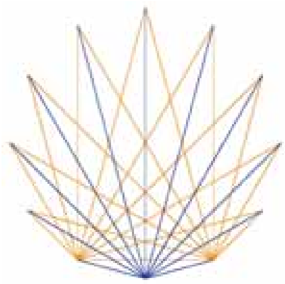
Diagonales de un polígono regular

Dibujemos sobre nuestra tabla los vértices de un polígono regular de, digamos, doce lados y hagamos en dichos puntos unos agujeros en lugar de clavar puntas. Al unir con el hilo cada vértice con todos los demás podremos observar todos los lados del polígono así como sus diagonales.

Sobre cada vértice coinciden once segmentos, número impar, así que es imposible conseguir completar la figura pasando una sola vez por cada uno de los lados o diagonales.



Si solo hacemos el proceso para alguno de los vértices y cambiamos de color en cada uno de ellos quedan figuras similares a un cactus.



Circunferencias concéntricas

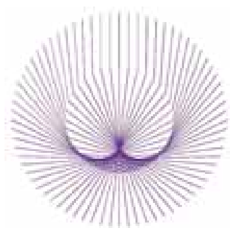
Preparemos los agujeros en dos circunferencias concéntricas de manera que la exterior tenga el doble de puntos de la interior, por ejemplo 72 y 36 respectivamente.

Unimos con el hilo el punto más alto de la circunferencia exterior con el más alto de la interior que se encuentra en el mismo radio. Pasamos por la parte posterior de la tabla el hilo al agujero contiguo al inicial en el sentido de las agujas del reloj uniéndolo con el segundo de la circunferencia interior en el mismo sentido.

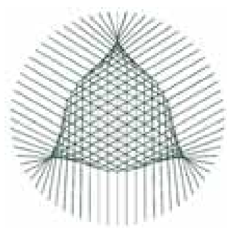
Si seguimos el proceso punto por punto hasta completar la circunferencia exterior nos fijamos que hemos pasado dos veces por todos los puntos de la circunferencia interior.
Otra variante es cambiar el sentido; mientras que en la circunferencia exterior seguimos el de las agujas del reloj, en la interior nos movemos en el sentido contrario.

Con Geogebra definimos un deslizador a ∈ [1,72] con incremento 1 y los segmentos, con traza:

Segmento[(-1+6sin(a2*3.14/72),6cos(a2*3.14/72)),
(-1+3sin(a2*3.14/36),3cos(a2*3.14/36))]
Segmento[(12+6sin(a2*3.14/72),6cos(a2*3.14/72)),
(12+3sin(-a2*3.14/36),3cos(-a2*3.14/36))]



Mismo sentido



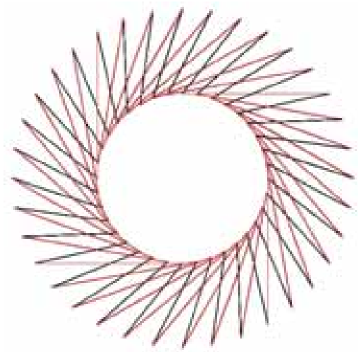
Sentido contrario

Girasol

Preparamos el mismo número de agujeros equidistantes sobre cada una de las dos circunferencias concéntricas.

Unimos con el hilo de un determinado color cada uno de los puntos de la circunferencia exterior con otro que se encuentre un par de puestos más alejado en la circunferencia interior en el sentido contrario a las agujas del reloj. Repetimos el proceso hasta haber cubierto todos los puntos de ambas circunferencias.

Repetimos el proceso con otro color de hilo pero uniendo cada punto con otro que se encuentre cinco puntos más alejado.

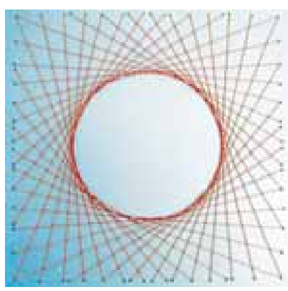


Con Geogebra definimos un deslizador a ∈ [1,36] con incremento 1 y los segmentos, con traza:

Segmento[(4+8cos(a2*3.14/36),8sin(a2*3.14/36)),
(4+4cos((a+2)2*3.14/36),4sin((a+2)2*3.14/36))]
Segmento[(4+8cos(a2*3.14/36),8sin(a2*3.14/36)),
(4+4cos((a+6)2*3.14/36),4sin((a+6)2*3.14/36))]

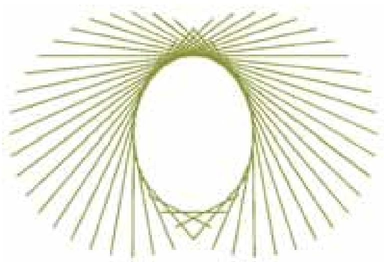
La cuadratura del círculo

La resolución de este problema trató de abordarse, sin éxito, repetidas veces desde la antigüedad. Pero, tras haberse demostrado que es imposible hallar, con sólo regla y compás, un cuadrado que posea un área que sea igual a la de un círculo dado, nosotros ¡lo hemos conseguido!, eso sí, con un poco de trampa.

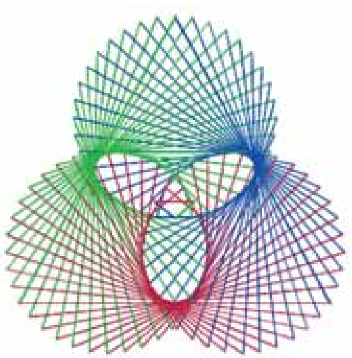


Otras posibilidades

Otras tablas podemos preparar con:
Dos circunferencias del mismo radio uniendo de forma ordenada un punto de una de ellas con uno de la otra.



Tres circunferencias formando triángulos con un vértice en cada una de ellas.



La elipse

¿Qué es una elipse y dónde puedo encontrar elipses?

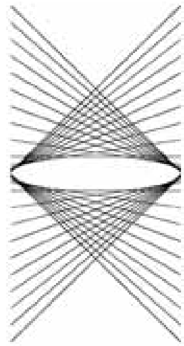
> Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos llamados focos es constante. Resulta de cortar un cono circular recto por un plano que encuentra a todas las generatrices del mismo lado del vértice.

La trayectoria que sigue la Tierra alrededor del sol es elíptica, de manera que el Sol se encuentra en uno de sus focos. Por otra parte, a veces el diseño también se acuerda de la geometría afrontando formas elípticas.

¿Cómo se hace la elipse?

Veamos una de las posibilidades para elaborar una elipse a partir de dos rectas paralelas.

Dibujamos en nuestra tabla dos rectas verticales paralelas separadas unos diez centímetros la una de la otra. A su vez se divide la tabla por la mitad con una recta horizontal. Está línea corta a las dos primeras en dos puntos que consideraremos como 0.



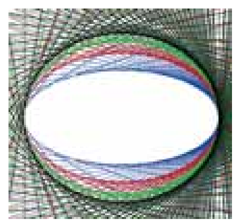
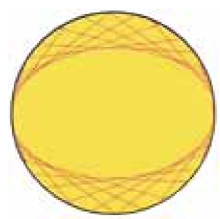
A partir del 0 simulamos una regla que nos indique en centímetros la medida por encima y por debajo de cada recta vertical y hacemos agujeros en los puntos 5, 4, 3, 2, 1, ½, ⅓, ¼ y un quinto.

Ahora unimos cada punto de una de las paralelas con su inverso en la otra paralela. Es decir, 1 con 1, 2 con ½, 3 con ⅓, 4 con ¼, y 5 con un quinto.

El perfil que deja la intersección de dos líneas consecutivas es la envolvente de las rectas tangentes a una elipse.

Cambiando la distancia entre las rectas paralelas así como la unidad de medida utilizada en las mismas se obtienen elipses de distintas excentricidades.

Se puede generar también elipses de distinta excentricidad mediante otros métodos.

Con Geogebra definimos un deslizador a $\in$ [1,10] con incremento 1 y los segmentos, con traza:

Segmento[(5, a), (-5, 1 / a)]	Segmento[(-5, a), (5, 1 / a)]
Segmento[(5, -a), (-5, -1 / a)]	Segmento[(-5, -a), (5, -1 / a)]

¿Por qué nos sale una elipse?

De nuevo el desarrollo matemático requiere de ciertas habilidades. Veamos:

Si tomamos como puntos que corresponde unir en las rectas verticales $A(5, a)$ y $A'(-5, 1/a)$ y $B(5, b)$ y $B'(-5, 1/b)$ con $a, b \in (0, \infty)$ las rectas que los unen tienen la expresión:

$AA' \equiv \frac{x-5}{10} = \frac{y-a}{a-\frac{1}{a}}$ y $BB' \equiv \frac{x-5}{10} = \frac{y-b}{b-\frac{1}{b}}$ respectivamente.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones anteriores encontramos el punto C de corte entre ambas rectas, obteniendo:

$$C\left(5\frac{1-ab}{1+ab}\ ,\ \frac{a+b}{1+ab}\right)$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto C de corte cuando las rectas AA' y BB' están muy cercanas o, lo que es lo mismo, $b \to a$. En tal caso

$$C\left(5\frac{1-a^2}{1+a^2}\ ,\ \frac{2a}{1+a^2}\right)$$

Eliminando a encontramos la relación entre x e y: $x^2+25y^2=25$ que, si la escribimos de la forma:

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$$

nos muestra que es una elipse centrada en el origen y con semiejes 5 y 1.

La hipérbola

¿Qué es una hipérbola y dónde puedo encontrar hipérbolas?

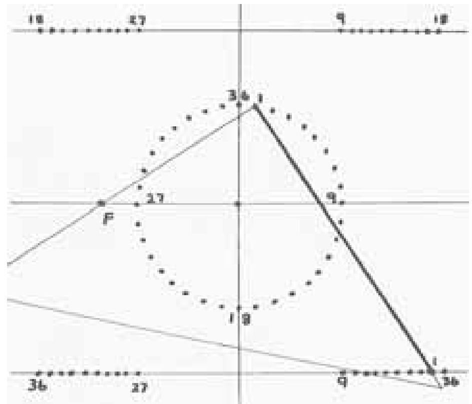
> Lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. Resulta de cortar un cono circular recto por un plano paralelo a la altura del cono.

En los sistemas de posicionamiento de barcos, aviones, etc., se utilizan sistemas hiperbólicos en los que dos estaciones emisoras situadas en tierra se encuentran en los focos. También podemos encontrar hipérbolas en las chimeneas de las centrales térmicas, en determinadas construcciones civiles y quizá, también, en el ala de las mariposas.

¿Cómo se hace la hipérbola?

Veamos cómo elaborar una hipérbola a partir de una circunferencia y dos rectas paralelas.

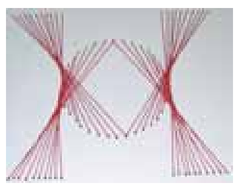
Dibujamos tres rectas paralelas igualmente espaciadas en nuestra tabla. Hacemos agujeros en los 36 puntos equidistantes de una circunferencia centrada en la recta central que tenga el radio menor que la distancia entre las rectas paralelas. Por último, elegimos un punto F que esté en la recta central fuera del círculo.

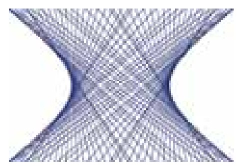


Colocamos una escuadra o cartabón que alinee el punto F con el punto más alto de la circunferencia y hacemos la perpendicular por el mismo. Ésta corta a la recta inferior en un punto que se va marcando para hacer en él el correspondiente agujero.

Seguimos el proceso con el siguiente punto de la circunferencia en el sentido de las agujas del reloj hasta acabar con el punto que está más a la derecha de la circunferencia. El resto de agujeros se pueden marcar por simetrías llevando las medidas con un compás. Los segmentos que unen los puntos de la circunferencia con los que nos han aparecido en las rectas paralelas iniciales nos configura la composición deseada.

El perfil que nos deja a derecha e izquierda la intersección de las rectas son las ramas de una hipérbola. Distintas excentricidades se pueden conseguir acercando o alejando el punto F a la circunferencia.





Con Geogebra definimos un deslizador a ∈ [0,360] con incremento 10 y las rectas con traza:

Recta[(5cos(2*3.14a/360),5sin(2*3.14a/360)),
(5cos(2*3.14a/360)+5sin(2*3.14a/360),5sin(2*3.14a/360)-5cos(2*3.14a/360)-7)]
Recta[(-5cos(2*3.14a/360),-5sin(2*3.14a/360)),
(-5cos(2*3.14a/360)-5sin(2*3.14a/360),-5sin(2*3.14a/360)+5cos(2*3.14a/360)+7)]

¿Por qué nos sale una hipérbola?

Si tomamos como puntos con $F(-7,\ 0)$, $A(5\cos\alpha,\ 5\operatorname{sen}\alpha)$ y $B(5\cos\beta,\ 5\operatorname{sen}\beta)$, con $\alpha, \beta \in [-\pi/2,\ \pi/2]$, tenemos que las rectas perpendiculares a $\overline{FA}$ y $\overline{FB}$, pasando por A y B son:

$$r_1 \equiv \frac{x-5\cos\alpha}{5sen\alpha} = \frac{y-5sen\alpha}{-5\cos\alpha-7} \text{ y } r_2 \equiv \frac{x-5\cos\beta}{5sen\beta} = \frac{y-5sen\beta}{-5\cos\beta-7}$$

respectivamente.

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} r_1 \equiv 5x\cos\alpha + 7x + 5ysen\alpha = 25 + 35\cos\alpha \\ r_2 \equiv 5x\cos\beta + 7x + 5ysen\beta = 25 + 35\cos\beta \end{cases}$$

y, trabajando sobre él, obtenemos :

$$\frac{y}{7-x} = \frac{cos\alpha - cos\beta}{sen\alpha - sen\beta} \text{ de donde } \frac{y}{x-7} = tan\frac{\alpha+\beta}{2}$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto de corte $C(x,y)$ cuando los puntos A y B están muy cercanos o, lo que es lo mismo, $\alpha \to \beta$. En tal caso $y/(x\text{-}7) = tan\alpha$.

Así:

$$sen\alpha = \frac{y}{\sqrt{(x-7)^2 + y^2}} \text{ y } \cos\alpha = \frac{x-7}{\sqrt{(x-7)^2 + y^2}}$$

y por lo que, sustituyendo en la recta r_1:

$$\frac{-5(x-7)^2 - 5y^2}{\sqrt{(x-7)^2 + y^2}} = 7x - 25 \Rightarrow -5\sqrt{(x-7)^2 + y^2} = 7x - 25$$

Quitando la raíz cuadrada se obtiene , que es la hipérbola
Notar que el 24 que aparece es el resultado de $7^2 - 5^2$

Epicicloides

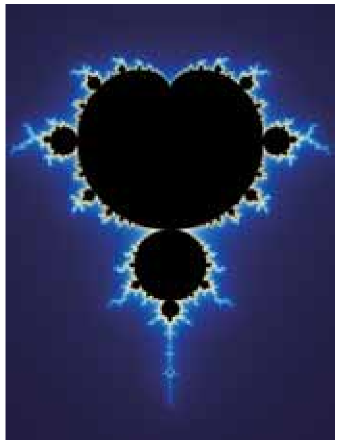
La epicicloide es la curva que sigue la trayectoria de un punto unido a una circunferencia que rueda, sin deslizamiento, por el exterior de otra circunferencia. Estas curvas, al igual que las hipocicloides, fueron estudiadas entre otros por Durero, Desargues, Huygens, Leibniz, Newton, L'Hôpital, Jacob Bernoulli, la Hire, Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli y Euler entre los siglos XVI y XVIII.

La cardioide

¿Qué es una cardioide y dónde puedo encontrarla?

> Lugar geométrico descrito por un punto de una circunferencia rodante que gira exteriormente, sin deslizamiento, sobre otra circunferencia fija del mismo radio.

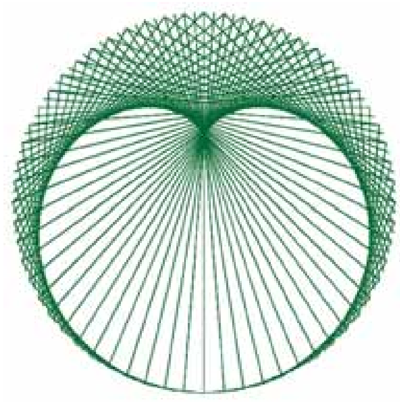
La cardioide toma su nombre de su similitud con el corazón. Se puede encontrar el patrón polar cardioide en algunos modelos de micrófonos ya que reducen la captación de sonidos laterales y posteriores. También podemos generar gráficamente la cardioide mediante el Conjunto Mandelbrot (figura fractal).



¿Cómo se hace la cardioide?

Marcamos en el panel de madera una circunferencia mediante 72 puntos equidistantes haciendo los correspondientes agujeros. Supuesto que hemos numerado estos del 1 al 72, unimos con el hilo cada uno con el que ocupa la posición doble, es decir, 1 con 2, 2 con 4, 3 con 6, 4 con 8, etc.

1	2	19	38	37	2	55	38
2	4	20	40	38	4	56	40
3	6	21	42	39	6	57	42
4	8	22	44	40	8	58	44
5	10	23	46	41	10	59	46
6	12	24	48	42	12	60	48
7	14	25	50	43	14	61	50
8	16	26	52	44	16	62	52
9	18	27	54	45	18	63	54
10	20	28	56	46	20	64	56
11	22	29	58	47	22	65	58
12	24	30	60	48	24	66	60
13	26	31	62	49	26	67	62
14	28	32	64	50	28	68	64
15	30	33	66	51	30	69	66
16	32	34	68	52	32	70	68
17	34	35	70	53	34	71	70
18	36	36	0	54	36	72	0



Con Geogebra definimos un deslizador a ∈ [0,360] con incremento 3 y un segmento con traza:

Segmento[(4+6cos(2*3.14a/360),6sin(2*3.14a/360)),
(4+6cos(4*3.14a/360),6sin(4*3.14a/360))]

¿Por qué nos sale una cardioide?

Si tomamos como puntos en la circunferencia $A(cos\alpha, sen\alpha)$ y $A'(cos2\alpha, sen2\alpha)$ con $\alpha \in [0^o,360^o]$, la recta que pasa por ambos tiene la expresión:

$$AA' \equiv \frac{x - cos\alpha}{cos2\alpha - cos\alpha} = \frac{y - sen\alpha}{sen2\alpha - sen\alpha}$$

que, con diversas transformaciones trigonométricas se nos queda en:

$$AA' \equiv xcos\frac{3\alpha}{2} + ysen\frac{3\alpha}{2} - cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

Repitiendo el proceso con otro par de puntos $B(cos\beta, sen\beta)$ y $B'(cos2\beta, sen2\beta)$ nos da:

$$BB' \equiv xcos\frac{3\beta}{2} + ysen\frac{3\beta}{2} - cos\frac{\beta}{2} = 0$$

Buscando el punto C de corte entre ambas rectas:

$$\left(-xsen\frac{3\alpha+3\beta}{4} + ycos\frac{3\alpha+3\beta}{4}\right)\left(4cos^2\frac{\alpha-\beta}{4} - 1\right) + sen\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto de corte cuando A y B están muy cercanos así como A' y B'. Así es que llegamos a la situación límite B→A y, por tanto β→α.

En tal caso:

$$3\cdot\left(-xsen\frac{3\alpha}{2} + ycos\frac{3\alpha}{2}\right) + sen\frac{\alpha}{2} = 0$$

Resolviendo el sistema formado por:

$$\begin{cases} xcos\frac{3\alpha}{2} + ysen\frac{3\alpha}{2} - cos\frac{\alpha}{2} = 0 \\ xsen\frac{3\alpha}{2} - ycos\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{3}sen\frac{\alpha}{2} = 0 \end{cases}$$

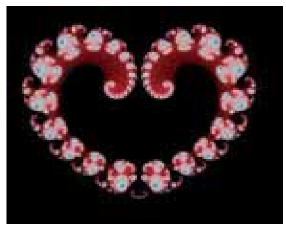
nos da como solución:

$$\begin{cases} xcos\frac{3\alpha}{2} + ysen\frac{3\alpha}{2} - cos\frac{\alpha}{2} = 0 \\ xsen\frac{3\alpha}{2} - ycos\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{3}sen\frac{\alpha}{2} = 0 \end{cases}$$

Buscando expresión polar:

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{9}\left(1 + 8cos^2\frac{\alpha}{2}\right) \text{ y, por tanto } r = \frac{1}{3}\sqrt{5 + 4cos\alpha}$$

que es una cardioide desplazada del eje vertical un tercio.



La nefroide

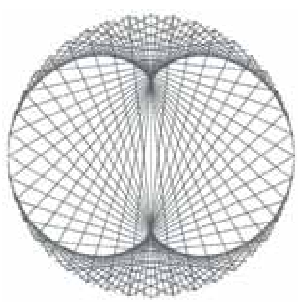
¿Qué es una nefroide y dónde puedo encontrarla?

> Lugar geométrico descrito por un punto de una circunferencia rodante que gira exteriormente, sin deslizamiento, sobre otra circunferencia fija de doble radio.

La nefroide toma su nombre de su similitud con el riñón y de ahí la especialidad en medicina interna de nefrología.

¿Cómo se hace la nefroide?

De forma análoga a como se ha elaborado la cardioide, unimos con el hilo cada punto con el que ocupa la posición triple, es decir, 1 con 3, 2 con 6, 3 con 9, 4 con 12, etc.



Con Geogebra definimos un deslizador a ∈ [0,360] con incremento 3 y un segmento con traza:

Segmento[(4+6cos(2*3.14a/360),6sin(2*3.14a/360)),
(4+6cos(6*3.14a/360),6sin(6*3.14a/360))]

¿Por qué nos sale una nefroide?

Si tomamos como puntos en la circunferencia $A(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y $A'(\cos 3\alpha, \operatorname{sen} 3\alpha)$ con $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ]$, la recta que pasa por ambos tiene la expresión:

$$AA' \equiv \frac{x - \cos\alpha}{\cos 3\alpha - \cos\alpha} = \frac{y - \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen} 3\alpha - \operatorname{sen}\alpha}$$

que, con diversas transformaciones trigonométricas, se nos queda en:

$$AA' \equiv x\cos 2\alpha + y\operatorname{sen} 2\alpha - \cos\alpha = 0$$

Repitiendo el proceso con otro par de puntos $B(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ y $B'(\cos 3\beta, \operatorname{sen} 3\beta)$ nos da:

$$BB' \equiv x\cos 2\beta + y\operatorname{sen} 2\beta - \cos\beta = 0$$

Buscando el punto C de corte entre ambas rectas:

$$(-x\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + y\cos(\alpha+\beta))2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto de corte cuando A y B están muy cercanos así como A' y B'. Así es que llegamos a la situación límite $B \to A$ y, por tanto $\beta \to \alpha$.

En tal caso $2(-x\operatorname{sen} 2\alpha + y\cos 2\alpha) + \operatorname{sen}\alpha = 0$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x\cos 2\alpha + y\operatorname{sen} 2\alpha - \cos\alpha = 0 \\ x\operatorname{sen} 2\alpha - y\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha = 0 \end{cases}$$

nos da como solución:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen} 2\alpha + \cos\alpha\cos 2\alpha \\ y = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\operatorname{sen} 2\alpha \end{cases}$$

Buscando la expresión polar:

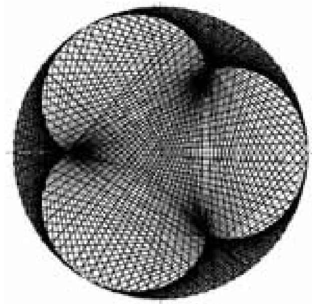
$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 3\cos^2\alpha\right)$ y, por tanto:

$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 3\cos^2\alpha\right)$, que es una nefroide.

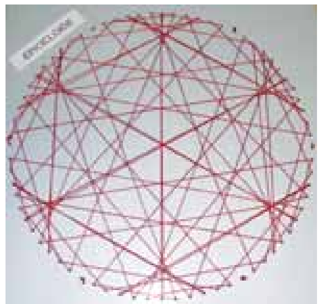
Otras epicicloides

En el momento que hemos visto cómo elaborar la cardioide y la nefroide, la cuestión es echarle ganas e imaginación y ver lo que pasaría al unir cada punto de la circunferencia:

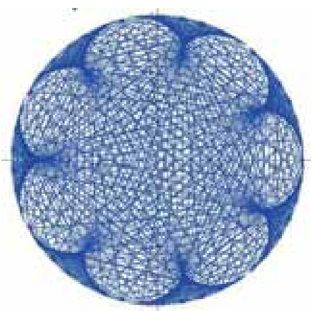
- con su cuádruple (epicicloide de Cremona);



- con el que sea siete veces mayor;



- con el que sea ocho veces mayor; etc.



Hipocicloides

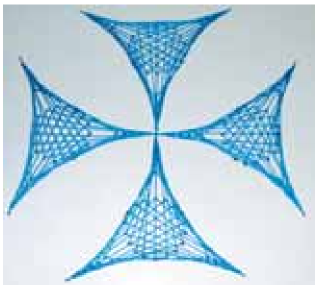
La hipocicloide es una curva generada por la trayectoria que describe un punto situado sobre una circunferencia que rueda, sin deslizamiento, por el interior de otra circunferencia.

La deltoide

¿Qué es una deltoide y dónde puedo encontrarla?

> La deltoide es una curva que se obtiene por un punto de una circunferencia rodante que gira interiormente, sin deslizamiento, sobre otra circunferencia fija de radio tres veces mayor.

Es la forma que tiene el músculo del mismo nombre o, por ejemplo, el ala delta, que a su vez toman el nombre de la letra griega delta mayúscula. La Cruz de Malta también tiene una figura semejante.

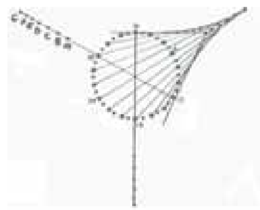


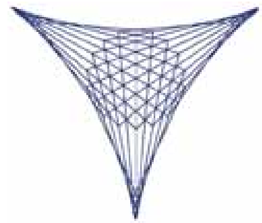
¿Cómo se hace la deltoide?

Marcamos en el panel de madera una circunferencia mediante 36 puntos haciendo los correspondientes agujeros. Supuesto que hemos numerado los agujeros del 1 al 36, veamos como construir cada una de sus tres puntas o cuernos.

Dibujamos los diámetros que unen los puntos 6 y 24, 12 y 30 así como 18 y 36 y los prolongamos a partir del 6, 18 y 30 el doble de su longitud respectivamente. Hacemos las siguientes parejas: 1 - 34, 2 - 32, 3 - 30, 4 - 28 y así sucesivamente, prolongándolas hasta donde cortan a los tres diámetros anteriores marcando dichos puntos de corte con unos agujeros.

1	34	13	10	25	22
2	32	14	8	26	20
3	30	15	6	27	18
4	28	16	4	28	16
5	26	17	2	29	14
6	24	18	36	30	12
7	22	19	34	31	10
8	20	20	32	32	8
9	18	21	30	33	6
10	16	22	28	34	4
11	14	23	26	35	2
12	12	24	24	36	36





Con Geogebra definimos un deslizador a∈ [0,360] con incremento 10 y una semirrecta con trazo:

Semirrecta[(3+2cos(-4*3.14a/360+3.14/2), 2sin(-4*3.14a/360+3.14/2)), (3+2cos(2*3.14a/360+3.14/2), 2sin(2*3.14a/360+3.14/2))]

¿Por qué nos sale una deltoide?

Si tomamos como puntos en la circunferencia $A(cos\alpha, sen\alpha)$ y $A'(cos(-2\alpha), sen(-2\alpha))$ con $\alpha \in (0^o, 360^o)$, la recta que pasa por ambos tiene la expresión:

$$AA' \equiv \frac{x - cos\alpha}{cos(-2\alpha) - cos\alpha} = \frac{y - sen\alpha}{sen(-2\alpha) - sen\alpha}$$

que, con diversas transformaciones trigonométricas se nos queda en:

$$AA' \equiv xcos\frac{\alpha}{2} - ysen\frac{\alpha}{2} = cos\frac{3\alpha}{2}$$

Repitiendo el proceso con otro par de puntos $B(cos\beta, sen\beta)$ y $B'(cos(-3\beta), sen(-3\beta))$ nos da:

$$BB' \equiv xcos\frac{\beta}{2} - ysen\frac{\beta}{2} = cos\frac{3\beta}{2}$$

Buscando el punto C de corte entre ambas rectas:

$$xsen\frac{\alpha+\beta}{4} + ycos\frac{\alpha+\beta}{4} = sen\frac{3\alpha+3\beta}{4}\left(4cos^2\frac{\alpha-\beta}{4} - 1\right)$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto de corte cuando A y B están muy cercanos así como A' y B'. Así es que llegamos a la situación límite $B \rightarrow A$ y, por tanto $\beta \rightarrow \alpha$. En tal caso:

$$xsen\frac{\alpha}{2} + ycos\frac{\alpha}{2} = 3sen\frac{3\alpha}{2}$$

Resolviendo el sistema formado por:

$$\begin{cases} xcos\frac{\alpha}{2} - ysen\frac{\alpha}{2} = cos\frac{3\alpha}{2} \\ xsen\frac{\alpha}{2} + ycos\frac{\alpha}{2} = 3sen\frac{3\alpha}{2} \end{cases}$$

Encontramos que

$$\begin{cases} x = 3sen\dfrac{3\alpha}{2}sen\dfrac{\alpha}{2} + cos\dfrac{3\alpha}{2}cos\dfrac{\alpha}{2} \\ y = 3sen\dfrac{3\alpha}{2}cos\dfrac{\alpha}{2} - cos\dfrac{3\alpha}{2}sen\dfrac{\alpha}{2} \end{cases}$$

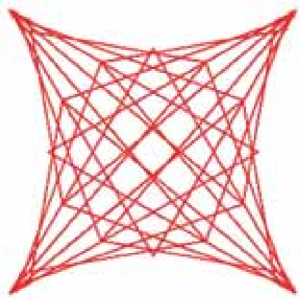
que, con diversas transformaciones se queda en:

$$\begin{cases} x = 2cos\alpha - cos2\alpha \\ y = 2sen\alpha + sen2\alpha \end{cases}$$

que es una deltoide.

La astroide y otras hipocicloides

Con la ayuda del ordenador podemos dibujar una hipocicloide con el número de cuernos deseados.



Con Geogebra conseguimos una astroide definiendo un deslizador $a \in [0,360]$ con incremento 10 y una semirrecta con trazo:

Semirrecta[(3+3cos(-6*3.14a/360), 3sin(-6*3.14a/360)),
(3+3cos(2*3.14a/360),3sin(2*3.14a/360))]

¿Por qué nos sale una astroide?

Si tomamos como puntos en la circunferencia $A(cos\alpha, sen\alpha)$ y $A'(\cos(-3\alpha), sen(-3\alpha))$ con $\alpha \in (0^o, 360^o)$, la recta que pasa por ambos tiene la expresión:

$$AA' \equiv \frac{x - cos\alpha}{cos(-3\alpha) - cos\alpha} = \frac{y - sen\alpha}{sen(-3\alpha) - sen\alpha}$$

que, con diversas transformaciones trigonométricas se nos queda en

$$AA' \equiv xcos\alpha + ysen\alpha = cos2\alpha$$

Repitiendo el proceso con otro par de puntos $B(cos\beta, sen\beta)$ y $B'(cos(-3\beta), sen(-3\beta))$ nos da:

$$BB' \equiv xcos\beta + ysen\beta = cos2\beta$$

Buscando el punto C de corte entre ambas rectas:

$$xsen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + ycos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2cos\frac{\alpha-\beta}{2}sen(\alpha+\beta)$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto de corte cuando A y B están muy cercanos así como A' y B'. Así es que llegamos a la situación límite $B \to A$ y, por tanto $\beta \to \alpha$.

En tal caso $xsen\alpha + ycos\alpha = 2sen2\alpha$

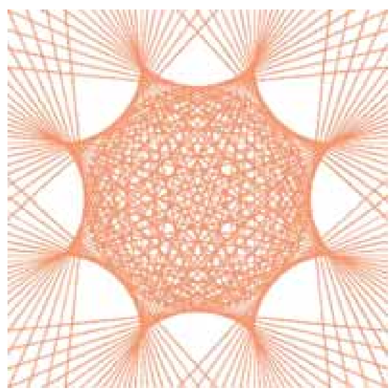
Resolviendo el sistema formado por:

$$\begin{cases} xcos\alpha + ysen\alpha = cos2\alpha \\ xsen\alpha + ycos\alpha = 2sen2\alpha \end{cases}$$

Encontramos que:

$$\begin{cases} xcos\alpha + ysen\alpha = cos2\alpha \\ xsen\alpha + ycos\alpha = 2sen2\alpha \end{cases}$$

que es una astroide. ■



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MILLINGTON, J. (2004): *Curve Stitching*, Tarquin Publications. Norfolk (Inglaterra)

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 43-49

Las matemáticas del IRPF: ¿Por qué ganamos menos si ganamos más?

Este trabajo pretende poner de manifiesto que la rebaja del IRPF anunciada habitualmente por los candidatos a Presidente del Gobierno es confusa y está lejos de ser tan maravillosa como tratan de convencernos. Desde el punto de vista pedagógico, se trata de un bonito ejemplo del carácter multidisciplinar de las matemáticas y su aplicabilidad a problemas de la vida real. In particular, este trabajo puede ser útil para insistir a nuestros alumnos ee la necesidad de tener buenos conocimientos en matemáticas y economía para poder mirar a la vida con un carácter crítico.

This work is aimed at showing that the reduction of IRPF that is usually announced by candidates to Prime Minister is misleading and far from being so wonderful as they try to convince us. At the pedagogical point of view, it is a nice example of both the multidisciplinary character of mathematics and its applicability to real life problems. In particular, it may be useful to insist our students the needed of having a good background of maths and economy to look at life with a critical character.

Introducción

¿Por qué todos los gobiernos, independientemente de la índole política que tengan, intentan apuntarse ante la ciudadanía una rebaja del Impuesto sobre la Renta de las Personas Físicas (IRPF)?

La respuesta está clara: el IRPF, es el mayor impuesto directo a través del cual cualquier gobierno llena las arcas del Estado, pero también al que la mayoría de los españoles nos enfrentamos año tras año y, por tanto, el que mayor popularidad o impopularidad puede generar a cualquier poder ejecutivo.

Con este artículo pretendemos analizar detalladamente que la premisa de la rebaja del IRPF resulta engañosa, ya que es un hecho probado que todos los gobiernos de forma pendular nos intentan demostrar que ellos han conseguido lo que todos anhelamos en cierta manera: “una rebaja impositiva”.

En lo que concierne a aspectos puramente pedagógicos, queremos demostrar el carácter interdisciplinar de dos materias: las Matemáticas y la Economía. A través de ellas los alumnos de Bachillerato podrían entender, con ejemplos prácticos, la realidad a la que los contribuyentes españoles nos enfrentamos año tras año.

También pretendemos favorecer la actitud crítica del alumnado de 1º y 2º de Bachillerato, mediante prácticas de 6 sueldos tipo que van de los 10000 euros hasta los 40000 euros anuales, con la finalidad de demostrar que estas “rebajas impositivas” realizadas en el IRPF por los últimos gobiernos han resultado factibles y positivas pero sólo durante el primer año de su imposición y no los restantes años. Por otra parte han favorecido más a los españoles de sueldos más altos.

Además, consideramos fundamental demostrar dos premisas evidentes:

1ª. La aplicabilidad a la vida real de una ciencia pura como son las Matemáticas. A través de este artículo el alumnado podrá comprobar que el análisis estadístico no resulta un mero cúmulo de datos.

2ª. La necesidad que presenta la Economía, como ciencia social, de las Matemáticas para su propia evolución.

Nos parece importante señalar que con este artículo no pretendemos explicar cómo se hallan los cálculos del IRPF, ya que existen multitud de textos que los realizan con claridad y precisión, si no que lo que queremos es insistir en que las

Nuria Plasencia Ruiz
IES Carlos III, Cartagena (Murcia).
José Antonio Pérez Porcel
IES Francisco García Pavón, Tomelloso (Ciudad Real).

rebajas del IRPF no son tan “maravillosas” como nos intentan demostrar una y otra vez.

Este artículo está dividido en varias partes:

1ª- Explicación del concepto del impuesto sobre la renta de las personas físicas.

2º- Objetivo de estudio de este artículo, así como cálculo del porcentaje de retención del IRPF con ejemplos prácticos.

3ª- Obtención de los cálculos numéricos y análisis de lo que sucede con los distintos tipos de sueldo.

4ª- Conclusiones a las que hemos llegado a lo largo de estas líneas.

¿Qué es el IRPF?

Es el Impuesto de la Renta de las Personas Físicas. Se trata de un impuesto de tipo directo (es decir, que tiene en cuenta las circunstancias personales del ciudadano), y que grava la renta obtenida por todos nosotros en cómputo anual. La obligación de realizar o no la declaración de la renta viene estipulada por unos mínimos que el poder ejecutivo de turno acuerda de manera anual.

¿Qué pretendemos estudiar en este artículo?

En los últimos años, cada cierto tiempo los gobiernos han modificado el IRPF anunciando sustanciales rebajas pero: ¿qué ocurre el año que entra en vigor una reforma o rebaja del IRPF? y ¿qué sucede en los años sucesivos?

Nos proponemos, a través de ejemplos prácticos, estudiar cómo han afectado tales rebajas a diferentes tipos de renta y comprobar si se mantienen en el tiempo o se van diluyendo como consecuencia de la inflación.

Para facilitar la comprensión, simplificaremos los cálculos y la multitud de casos posibles y nos impondremos las siguientes limitaciones:

- Estudiaremos la evolución desde el año 1999 al 2007, ambos inclusive, abarcando 3 reformas: una de 1999 a 2002, otra de 2003 a 2006 y otra en 2007. Hay que destacar que en el año 1999 entró en vigor una reforma del IRPF que modificó completamente los criterios seguidos hasta entonces y que se mantienen hasta hoy día.
- Utilizaremos siempre el euro como moneda. Por lo tanto, durante los años en los que se utilizaba la peseta, convertiremos las cifras a euros (166,386 pesetas = 1 euro).
- Estudiaremos 6 casos posibles de rentas anuales brutas: 10.000, 15.000, 20.000, 25.000, 30.000 y 40.000 euros, del año 1999. Para el año 2000 y siguientes, actualizaremos las rentas incrementándolas cada año según la subida del IPC[1] del año anterior, es decir, supondremos que en estos 4 casos las personas mantienen el mismo poder adquisitivo (similar a mantener un sueldo anual constante).

Los casos anteriores se referirán a un contribuyente soltero, viudo, divorciado o separado legalmente, menor de 65 años, sin minusvalía, sin descendientes ni ascendientes a su cargo, cuya renta proviene sólo de los rendimientos de un trabajo.
Supondremos una cuota anual a la Seguridad Social, Mutualidades y Pasivos del 6% (porcentaje similar a la realidad de un trabajador contratado por cuenta ajena e indefinido) del sueldo bruto.

¿Cómo se calcula el porcentaje de retención del IRPF? Ejemplos prácticos.

Año 1999

Las retenciones sobre rendimientos del trabajo sufrieron un cambio radical en 1999. Cada contribuyente tenía su porcentaje particular de retención. Para calcular dicho porcentaje hay que realizar una serie de operaciones aritméticas:

1º.- Calcular la base para hallar el tipo aplicable:

A los rendimientos brutos de trabajo anuales (incluidas las pagas extras) deberán restarse:

a) Las cuotas que paga el trabajador a la Seguridad Social, Mutualidades y Pasivos (aplicaremos un 6%).

b) Una reducción fija que va desde 3.005,06 euros a 2.253,80 euros (dependiendo del nivel de ingresos del contribuyente). Y para rentas superiores a 12.020,24 euros, será de 2.253,80 euros.

c) Un mínimo personal de sustento familiar de 3.305,57 euros.

Del resultado de restar de la base bruta de los rendimientos las deducciones anteriores saldrá la base para calcular el tipo de retención.

2º.- Se aplica la siguiente escala de IRPF (aprobada en el reglamento del IRPF a finales de cada año)

Base para calcular el tipo de retención Hasta euros	Cuota de retención Euros	Resto base para calcular tipo retención Hasta euros	Porcentaje
0,00	0,00	3606,07	18
3606,07	649,09	9015,18	24
12621,25	2812,74	12020,24	28,3
24641,50	6214,47	15025,30	37,2
39666,80	11803,88	26444,53	45
66111,33	23703,92	En adelante	48

Veámoslo con un ejemplo:

A un trabajador que perciba una retribución anual bruta de 25.000 euros se le restan: 1.500 euros (el 6%) de Seguridad Social, 2.253,80 euros de reducción de trabajo y 3.305,57 euros de mínimo personal. El resultado es 17.940,63 euros que será la base para calcular el tipo de retención. Si acudimos a la tabla resultaría:

- Hasta 12.621, 25 paga 2.812, 74 euros.
- Resto 5.319,38 al 28,3% paga 1.505,38 euros.
- Total a pagar (suma de los anteriores conceptos): 4.318,12 euros.

Se divide los 4.304,24 euros entre 25.000 euros. El 0,1727 se multiplica por 100. El resultado: 17,27%, será la retención que deberá practicarse en este ejemplo.

Haciendo cálculos similares para otros sueldos anuales obtenemos los siguientes datos para 1999:

Sueldo Tipo 1	% IRPF	Sueldo Tipo 2	% IRPF	Sueldo Tipo 3	% IRPF
10.000	7,05	15.000	12,22	20.000	14,94
Sueldo Tipo 4	% IRPF	Sueldo Tipo 5	% IRPF	Sueldo Tipo 6	% IRPF
25.000	17,27	30.000	18,83	40.000	22,42

Años 2000, 2001 y 2002

Durante estos tres años se mantienen las mismas deducciones que en 1999 y se utiliza una nueva escala de IRPF. Es la siguiente:

Base para calcular el tipo de retención Hasta euros	Cuota de retención Euros	Resto base para calcular tipo retención Hasta euros	Porcentaje
0.00	0.00	3678,19	18
3678,19	662,07	9195,49	24
12873,68	2868,99	12260,65	28,3
25134,33	6338,75	15325,81	37,2
40460,13	12039,96	26973,42	45
67433,56	24178	En adelante	48

Actualizando los sueldos anteriores un 2,9%, 4% y 2,7% según los IPCs de 1999, 2000 y 2001 respectivamente y procediendo como en el año anterior, obtendríamos los siguientes resultados:

	Sueldo Tipo 1	% IRPF	Sueldo Tipo 2	% IRPF	Sueldo Tipo 3	% IRPF
2000	10.290	7,45	15.435	12,49	20.580	15,19
2001	10.701,61	8,03	16.052,40	12,87	21.403,20	15,63
2002	10.990,54	8,41	16.485,81	13,13	21.981,09	15,92
	Sueldo Tipo 4	% IRPF	Sueldo Tipo 5	% IRPF	Sueldo Tipo 6	% IRPF
2000	25.575	17,48	30.870	19,00	41.160	22,63
2001	26.754,00	17,83	32.104,80	19,29	42.806,40	23,10
2002	27.476,36	18,06	32.971,63	19,56	43.962,17	23,41

Años 2003 y 2004

Durante estos años al sueldo bruto se le restan 2400 euros de reducción de trabajo (antes 2.253,80 euros) y 3.400 euros de mínimo personal (antes 3.305,57 euros), más la Seguridad Social. La nueva escala de IRPF se reduce de 6 a 5 tramos:

Base para calcular el tipo de retención Hasta euros	Cuota de retención Euros	Resto base para calcular tipo retención Hasta euros	Porcentaje
0.00	0.00	4000	15
4000	600	9800	24
13800	2952	12000	28
25800	6312	19200	37
45000	13416	En adelante	45

Actualizando los 4 tipos de sueldos de 2002 un 4% y 2,6% según los IPCs de 2002 y 2003, respectivamente, y calculando los porcentajes de IRPF obtendríamos:

	Sueldo Tipo 1	% IRPF	Sueldo Tipo 2	% IRPF	Sueldo Tipo 3	% IRPF
2003	11.430,16	7,23	17.145,25	12,34	22.860,33	15,23
2004	11.727,35	7,62	17.591,02	12,60	23.454,70	15,51
	Sueldo Tipo 4	% IRPF	Sueldo Tipo 5	% IRPF	Sueldo Tipo 6	% IRPF
2003	28.575,41	17,45	34.290,49	19,09	45.720,66	23,01
2004	29.318,37	17,67	35.182,05	19,49	46.909,40	23,31

Año 2005

Durante 2005 se mantienen las mismas deducciones que en 2003 y 2004 y se utiliza una nueva escala de IRPF:

Base para calcular el tipo de retención Hasta euros	Cuota de retención Euros	Resto base para calcular tipo retención Hasta euros	Porcentaje
0.00	0.00	4080	15
4080	612	9996	24
14076	3011,04	12240	28
26316	6438,24	19584	37
45900	13684,32	En adelante	45

Actualizando los 4 tipos de sueldos de 2004 un 3,2% según el IPC de 2004 y calculando los porcentajes de IRPF obtendríamos para 2005:

Sueldo Tipo 1	% IRPF	Sueldo Tipo 2	% IRPF	Sueldo Tipo 3	% IRPF
12.102,62	8,02	18.153,94	12,87	24.205,25	15,77
Sueldo Tipo 4	% IRPF	Sueldo Tipo 5	% IRPF	Sueldo Tipo 6	% IRPF
30.256,56	17,88	36.307,87	19,78	48.410,50	23,53

Año 2006

Durante 2006 se mantienen las mismas deducciones que en 2005 y se utiliza una nueva escala de IRPF:

Base para calcular el tipo de retención Hasta euros	Cuota de retención Euros	Resto base para calcular tipo retención Hasta euros	Porcentaje
0	0	4161,6	15
4161,6	624,24	10195,92	24
14357,52	3071,26	12484,8	28
26842,32	6567	19975,68	37
46818	13958	En adelante	45

Actualizando los 4 tipos de sueldos de 2005 un 3,7% según el IPC de 2005 y calculando los porcentajes de IRPF obtendríamos para 2006:

Sueldo Tipo 1	% IRPF	Sueldo Tipo 2	% IRPF	Sueldo Tipo 3	% IRPF
12.550,42	8,48	18.825,63	13,02	25.100,84	16,07
Sueldo Tipo 4	% IRPF	Sueldo Tipo 5	% IRPF	Sueldo Tipo 6	% IRPF
31.376,05	18,12	37.651,26	20,14	50.201,69	23,80

Año 2007

Durante este año al sueldo bruto se le restan 2.600 euros de reducción de trabajo (antes 2.400 euros) y 5.050 euros de mínimo personal (antes 3.400 euros), más la Seguridad Social. La nueva escala de IRPF se reduce de 5 a 4 tramos:

Base para calcular el tipo de retención Hasta euros	Cuota de retención Euros	Resto base para calcular tipo retención Hasta euros	Porcentaje
0	0	17360	24
17360	4166,4	15000	28
32360	8366,4	20000	37
52360	15766,4	En adelante	43

Actualizando los 4 tipos de sueldos de 2006 un 2,7% según el IPC de 2006 y calculando los porcentajes de IRPF obtendríamos:

Sueldo Tipo 1	% IRPF	Sueldo Tipo 2	% IRPF	Sueldo Tipo 3	% IRPF
12.889,28	8,33	19.333,92	13,06	25.778,57	15,44
Sueldo Tipo 4	% IRPF	Sueldo Tipo 5	% IRPF	Sueldo Tipo 6	% IRPF
32.223,21	17,52	38.667,85	18,98	51.557,13	25,86

Resultados del estudio

Si juntamos todos los cálculos anteriores y los agrupamos por tipos de sueldos obtendríamos:

1º Análisis

- Tipo de sueldo 1: 10000 euros/anuales de 1999.

- El sueldo se mantiene invariable, es decir, sólo aplicamos la subida del IPC para que el contribuyente no pierda poder adquisitivo.

AÑO	IPC	Sueldo Tipo 1	% IRPF	Variación IRPF
1999	2,9%	10000,00	7,05	
2000	4,0%	10290,00	7,45	0,4
2001	2,7%	10701,60	8,03	0,58
2002	4,0%	10990,54	8,41	0,38
Reforma con rebaja del IRPF. En vigor en 2003				
2003	2,6%	11430,16	7,23	-1,18
2004	3,2%	11727,35	7,62	0,39
2005	3,7%	12102,62	8,02	0,40
2006	2,7%	12550,42	8.48	0.46
Reforma con rebaja del IRPF. En vigor en 2007				
2007		12889,28	8,32	-0,16
Diferencia entre 1999 y 2007 (subida impositiva)				1,27

IPC. Índice de precios al consumo de cada año. Subida del nivel de vida anual.

Sueldo tipo 1. Nuestro análisis comienza con un sueldo tipo de 10000 euros, al que sólo se le aplica el IPC de forma anual.

Porcentaje de retención en el sueldo de cada contribuyente (porcentaje de IRPF que se le debe descontar en cada nómina al sujeto pasivo).

Si sumamos las distintas variaciones (positivas o negativas) del IRPF a lo largo de estos años, obtenemos una subida o bajada impositiva. En este caso una subida impositiva.

2º Análisis

- Tipo de sueldo 2: 15000 euros/anuales de 1999.

El resto de características, así como las notas de la tabla anterior las mantenemos en este 2ª análisis y en los restantes.

AÑO	IPC	Sueldo Tipo 1	% IRPF	Variación IRPF
1999	2,9%	15000,00	12,22	
2000	4,0%	15435,00	12,49	0,27
2001	2,7%	16052,40	12,87	0,38
2002	4,0%	16485,81	13,13	0,26
Reforma con rebaja del IRPF. En vigor en 2003				
2003	2,6%	17145,25	12,34	-0,79
2004	3,2%	17591,02	12,60	0,26
2005	3,7%	18153,94	12,87	0,27
2006	2,7%	18825,63	13,18	0,31
Reforma con rebaja del IRPF. En vigor en 2007				
2007		19333,92	13,06	-0,12
Diferencia entre 1999 y 2007 (subida impositiva)				0,84

3º Análisis

- Tipo de sueldo 3: 20000 euros/anuales de 1999.

AÑO	IPC	Sueldo Tipo 1	% IRPF	Variación IRPF
1999	2,9%	20000,00	14,94	
2000	4,0%	20580,00	15,19	0,25
2001	2,7%	21403,20	15,63	0,44
2002	4,0%	21981,09	15,92	0,29
Reforma con rebaja del IRPF. En vigor en 2003				
2003	2,6%	22860,33	15,23	-0,69
2004	3,2%	23454,70	15,51	0,28
2005	3,7%	24205,25	15,77	0,26
2006	2,7%	25100,84	16,07	0,30
Reforma con rebaja del IRPF. En vigor en 2007				
2007		25778,57	15,44	-0,63
Diferencia entre 1999 y 2007 (subida impositiva)				0,50

4º Análisis

- Tipo de sueldo 4: 25000 euros/anuales de 1999.

AÑO	IPC	Sueldo Tipo 1	% IRPF	Variación IRPF
1999	2,9%	25000,00	17,27	
2000	4,0%	25725,00	17,48	0,21
2001	2,7%	26754,00	17,83	0,35
2002	4,0%	27476,36	18,06	0,23
Reforma con rebaja del IRPF. En vigor en 2003				
2003	2,6%	28575,41	17,45	-0,61
2004	3,2%	29318,37	17,67	0,22
2005	3,7%	30256,56	17,88	0,21
2006	2,7%	31376,05	18,12	0,24
Reforma con rebaja del IRPF. En vigor en 2007				
2007		32223,21	17,52	-0,60
Diferencia entre 1999 y 2007 (subida impositiva)				0,25

5º Análisis

- Tipo de sueldo 5: 30000 euros/anuales de 1999.

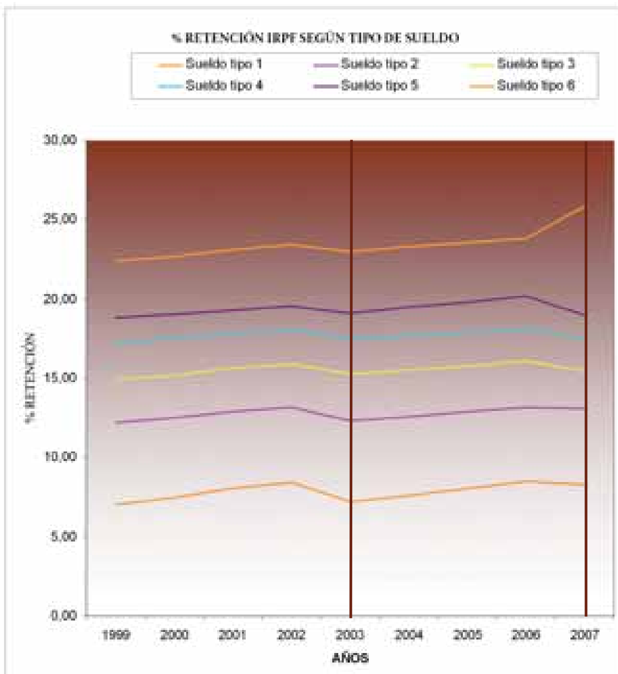
AÑO	IPC	Sueldo Tipo 1	% IRPF	Variación IRPF
1999	2,9%	30000,00	18,83	
2000	4,0%	30870,00	19,00	0,17
2001	2,7%	32104,80	19,29	0,29
2002	4,0%	32971,63	19,56	0,27
Reforma con rebaja del IRPF. En vigor en 2003				
2003	2,6%	34290,49	19,09	-0,47
2004	3,2%	35182,05	19,49	0,40
2005	3,7%	36307,87	19,78	0,29
2006	2,7%	37651,26	20,14	0,36
Reforma con rebaja del IRPF. En vigor en 2007				
2007		38667,85	18,98	-1,16
Diferencia entre 1999 y 2007 (subida impositiva)				0,15

6º Análisis

- Tipo de sueldo 6: 40000 euros/anuales de 1999.

AÑO	IPC	Sueldo Tipo 1	% IRPF	Variación IRPF
1999	2,9%	40000,00	22,42	
2000	4,0%	41160,00	22,63	0,21
2001	2,7%	42806,40	23,10	0,47
2002	4,0%	43962,17	23,41	0,31
Reforma con rebaja del IRPF. En vigor en 2003				
2003	2,6%	45720,66	23,01	-0,40
2004	3,2%	46909,40	23,31	0,30
2005	3,7%	48410,50	23,53	0,22
2006	2,7%	50201,69	23,80	0,27
Reforma con rebaja del IRPF. En vigor en 2007				
2007		51557,13	25,86	2,06
Diferencia entre 1999 y 2007 (subida impositiva)				3,44

Por tanto y como conclusión a los 6 análisis anteriores, observamos cómo sólo en los años 2003 y 2007 resulta efectiva y real una rebaja del IRPF para los contribuyentes.



Gráfica 1

Conclusiones

En nuestro estudio hemos tenido como periodo de análisis del IRPF los años comprendidos entre 2000 y 2007, ambos inclusive. Como conclusiones tendríamos las siguientes:

Tabla 1: De 2000 a 2002 se ha producido una subida impositiva en todos los tramos de sueldo y en todos los años referidos. Las subidas más significativas del IRPF corresponden al tramo de sueldo más bajo (10000 € de 1999) en los años 2000 y 2001 y las menos significativas corresponden a los tramos más altos de renta del año 2000.

Variación porcentual del IRPF						
	Sueldo de 10000 €	Sueldo de 15000 €	Sueldo de 20000 €	Sueldo de 25000 €	Sueldo de 30000 €	Sueldo de 40000 €
Año 2000	↑ 0,40%	↑ 0,27%	↑ 0,25%	↑ 0,21%	↑ 0,17%	↑ 0,21%
Año 2001	↑ 0,58%	↑ 0,38%	↑ 0,44%	↑ 0,35%	↑ 0,29%	↑ 0,47%
Año 2002	↑ 0,38%	↑ 0,26%	↑ 0,29%	↑ 0,23%	↑ 0,27%	↑ 0,31%

Tabla 1

Tabla 2: La rebaja del IRPF en el año 2003 se produce en todos los tramos de sueldos analizados. La mayor rebaja en el año 2003 se produjo en el tramo de sueldo más bajo (10000 €), así como la menor rebaja correspondió al sueldo más alto (40000 €).

Variación porcentual del IRPF						
	Sueldo de 10000 €	Sueldo de 15000 €	Sueldo de 20000 €	Sueldo de 25000 €	Sueldo de 30000 €	Sueldo de 40000 €
Año 2003	↓ 1,18%	↓ 0,79%	↓ 0,69%	↓ 0,61%	↓ 0,47%	↓ 0,40%

Tabla 2

Tabla 3: Con respecto a los años 2004, 2005 y 2006 se producen subidas del IRPF en todos los tramos de sueldo y en todos los años estudiados. La mayor subida se produce en el año 2006 y en el tramo de sueldo más bajo.

Variación porcentual del IRPF						
	Sueldo de 10000 €	Sueldo de 15000 €	Sueldo de 20000 €	Sueldo de 25000 €	Sueldo de 30000 €	Sueldo de 40000 €
Año 2004	↑ 0,39%	↑ 0,26%	↑ 0,28%	↑0,22%	↑ 0,40%	↑ 0,30%
Año 2005	↑ 0,40%	↑ 0,27%	↑0,26%	↑0,21%	↑ 0,29%	↑ 0,22%
Año 2006	↑ 0,46%	↑ 0,31%	↑0,30%	↑ 0,24%	↑ 0,36%	↑ 0,27%

Tabla 3

Tabla 4: En el año 2007 se producen rebajas del IRPF en todos los tramos de sueldo a excepción de los sueldos superiores a 40000 cuya subida del 2,06% es muy significativa y supone una variación en la tendencia del resto de tramos.

Variación porcentual del IRPF						
	Sueldo de 10000 €	Sueldo de 15000 €	Sueldo de 20000 €	Sueldo de 25000 €	Sueldo de 30000 €	Sueldo de 40000 €
Año 2007	↓ 0,16%	↓ 0,12%	↓ 0,63%	↓ 0,60%	↓ 1,16%	↑ 2,06%

Tabla 4

- Las rebajas en el porcentaje del IRPF (como consecuencia de una modificación anunciada) son bruscas y las subidas (consecuencia de no actualizar los mínimos y las tablas según el IPC) son lentas. De ahí que la impresión que le queda al ciudadano es que se ha producido una rebaja notable en el IRPF.

- Estos resultados pueden ser difíciles de detectar por los ciudadanos, ya que no siempre los sueldos suben el IPC. Además, a veces, se cambia de sueldo por diversos motivos: cambio empresa, nuevos complementos por ascensos, cargos, antigüedad, etc.

- Las Matemáticas y la Economía proporcionan una capacidad crítica que permite a los ciudadanos no ser manipulados por las estructuras políticas o económicas. ■

NOTAS

1 Según datos del Instituto Nacional de Estadística (INE).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

RUIZ, E. y LÓPEZ, S. (2002): "Gestión Administrativa de Personal". MacGraw HIll. Interamericana de España, SAU

Ley 46/2002 de Reforma Parcial del IRPF

RD 27/2003 de 10 de Enero de modificación del Irpf de 2003

RD 439/2007 de 30 de Marzo por el que se aprueba el reglamento del IRPF.

Internet:

www.aeat.es
www.lexjuridica.com
www.invertia.com
www.cincodias.com

Manifiesto

de la

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

sobre la

utilización de las calculadoras gráficas

en la

prueba de acceso a la universidad

Convencidos de las posibilidades que ofrecen las calculadoras como recurso didáctico para el área de matemáticas en sus distintos niveles deseamos manifestar como Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas las siguientes consideraciones:

1. Las Universidades y las comisiones que regulan las pruebas de acceso han de velar para que las instrucciones para la realización de las pruebas de acceso sean coherentes con los currículos de Bachillerato. Por tanto, consideramos que deben atender las indicaciones sobre el uso de las calculadoras y de otras herramientas informáticas que aparecen en el REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas[1], así como los desarrollos de los currículos de Bachillerato de las Administraciones Educativas.

2. Consideramos que el uso en el Bachillerato de las calculadoras gráficas supone la continuidad de un proceso que se inicia en la Educación Secundaria Obligatoria, donde la competencia digital forma parte de las competencias básicas que todo ciudadano debe adquirir, de acuerdo con las recomendaciones del Parlamento y el Consejo europeos.

3. Consideramos que resulta contradictorio y es un grave perjuicio para el alumnado impedir la utilización el aprovechamiento de las posibilidades que ofrecen las calculadoras gráficas y simbólicas en una prueba de acceso. Prueba que evalúa los conocimientos determinados en el currículo bachillerato, en el que se incluye su uso para, entre otras cosas, ayudar a la mejor comprensión de conceptos y a la resolución de problemas complejos evitando cálculos tediosos y repetitivos.

4. Consideramos que las Administraciones Educativas deben establecer los mecanismos necesarios para garantizar el uso de calculadoras gráficas en la prueba de acceso a la Universidad y que éste no suponga ningún tipo de discriminación económica, posibilitando en su caso que los recursos de los centros educativos pueden sustituir la adquisición directa por parte del alumnado cuando esto sea necesario.

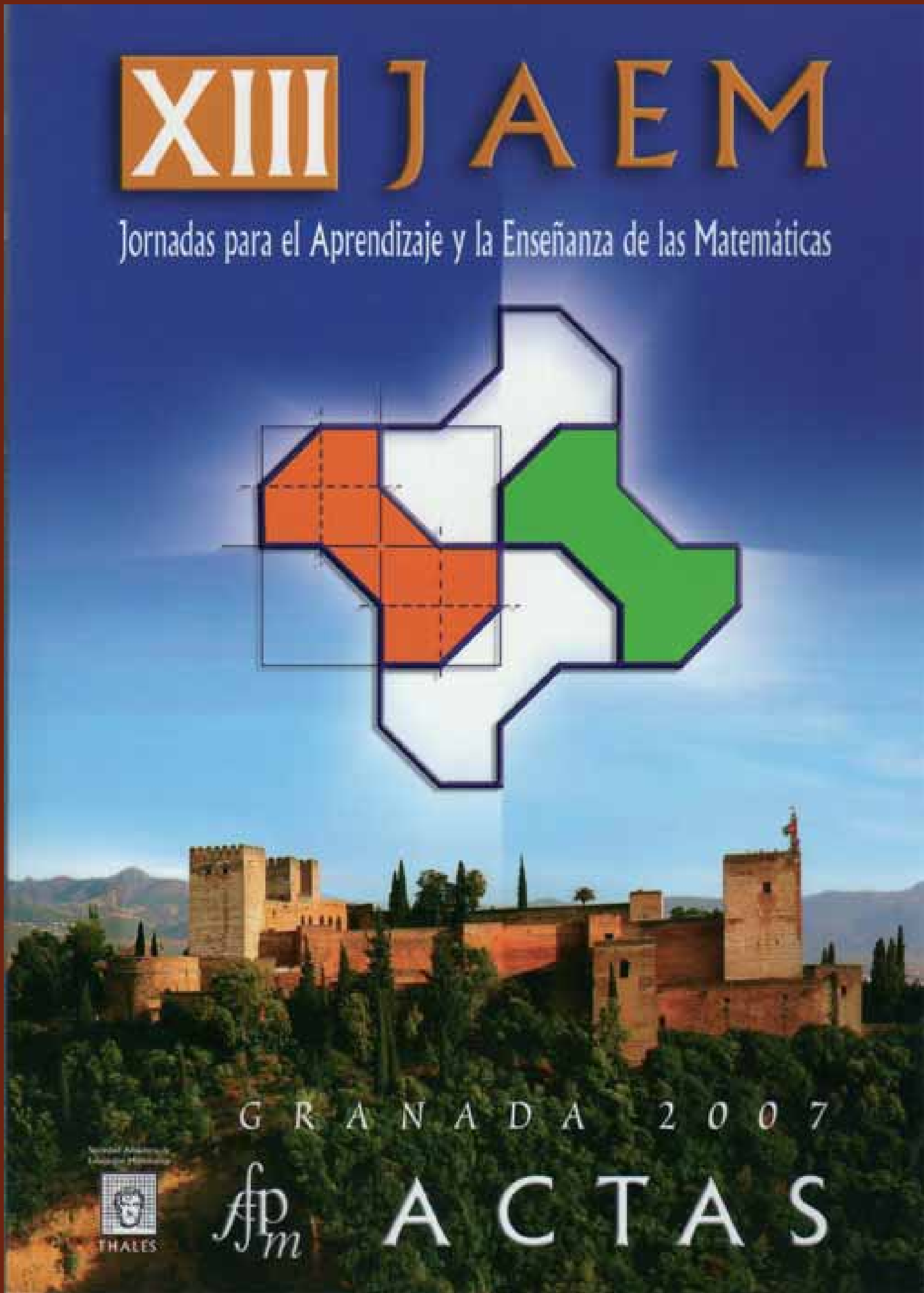
5. Consideramos que la calculadora gráfica y en su caso la calculadora con opciones de cálculo simbólico potencia la reflexión de los alumnos con suficientes conocimientos matemáticos, ayudándoles a utilizar esos conocimientos en el proceso de realización de la prueba. Por el contrario, para aquellos alumnos que no tengan conocimientos suficientes el uso o no de la calculadora resulta irrelevante. Por ello consideramos que no se justifica su prohibición.

Por tanto, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas SE MANIFIESTA A FAVOR DEL USO DE LAS CALCULADORAS EN GENERAL Y ESPECÍFICAMENTE DE LAS CALCULADORAS GRÁFICAS Y SIMBÓLICAS EN LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas está a disposición de las Administraciones Educativas y de las Universidades para colaborar en la determinación de las normas que regulen su uso en la Prueba de acceso a las Universidades.

Octubre, 2008

1 En ese RD puede leerse:
"Las herramientas tecnológicas, en particular el uso de calculadoras y aplicaciones informáticas como sistemas de álgebra computacional o de geometría dinámica, pueden servir de ayuda tanto para la mejor comprensión de conceptos y la resolución de problemas complejos como para el procesamiento de cálculos pesados, (…)"

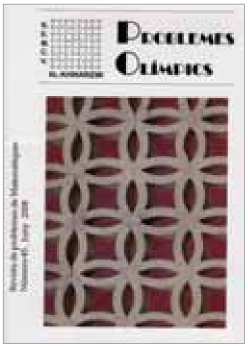


Servicio de Publicaciones de la FESPM

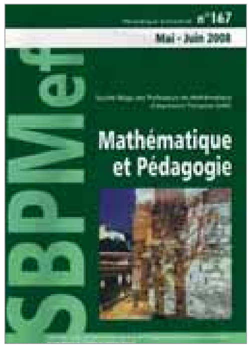
Apartado de Correos 590
06080 Badajoz
Información y pedidos: publicafespm@wanadoo.es

Actas de las XIII JAEM
Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Granada 2007
Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Federacion Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)
Badajoz, 2008
ISBN 978-84-934488-5-1
78 páginas y 3 DVD

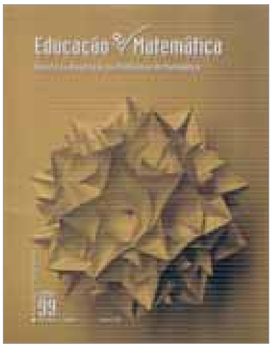
Publicaciones recibidas



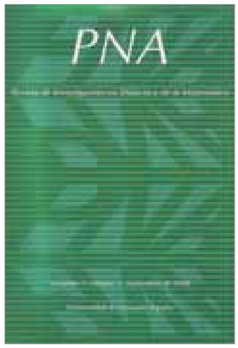
Problemes olímpics
SEMCV Al Khwārizmī
N.º 44, Juny 2008
Valencia
ISSN: 1578-1771



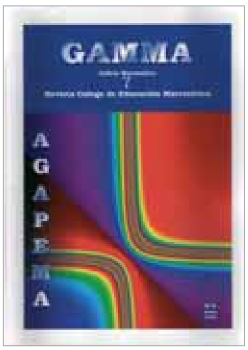
Mathématiques
et Pédagogie
SBPMeF
N.º167, Mai-Juni 2008
ISSN: 0773-7378



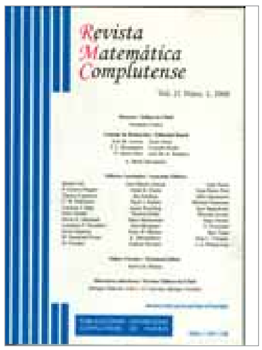
Educação e Matemática
Revista da Associação de Professores de Matemática
N.º 99, Setembro-Outubro 2008
ISSN: 0871-7222



PNA. Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Granada
Vol. 3 n.º 1, septiembre 2008
ISSN 1886-1350

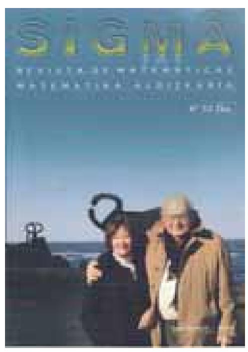


Gamma
AGAPEMA
N.º8, Xuño 2008
Lugo
ISSN: 1578-2980



Revista Matemática Complutene
Publicaciones Universidad Complutense de Madrid
Vol. 21 N.º1, 2008
Madrid
ISSN: 1139-1138

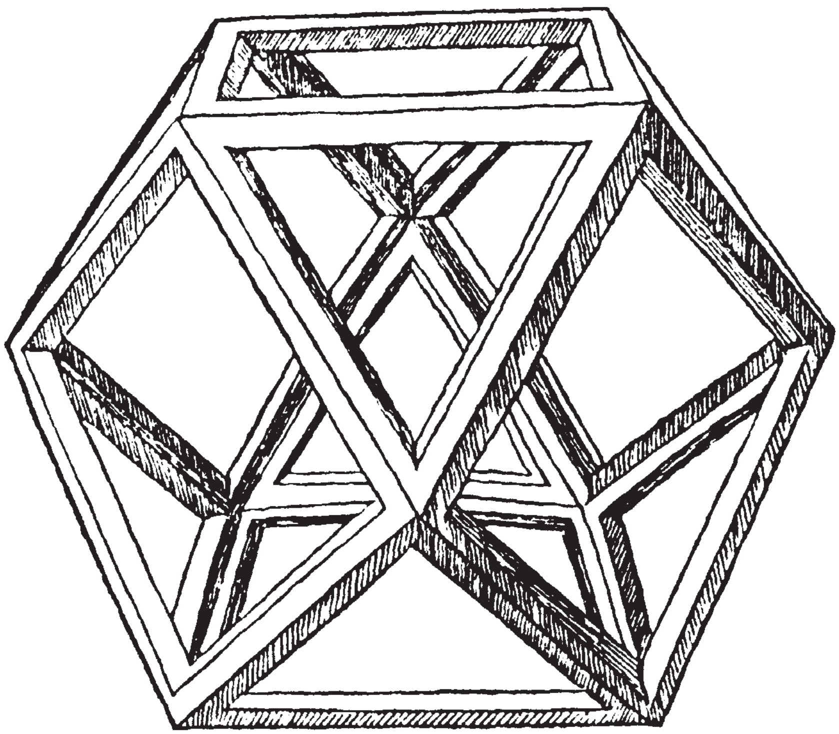
La Gaceta de la RSME
RSME
Vol.11, n.º 3, 2008
Madrid
ISNN 1138-8927



Sigma
Gobierno Vasco
Departamento de Educación, Univ. e Investigación
N.º 32, Vitoria 2008
ISSN: 1131-7787

suma+

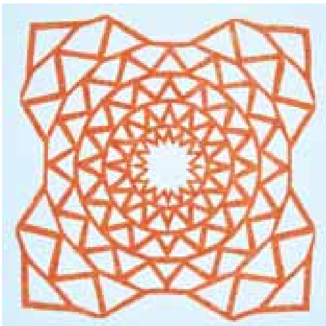
poliedro

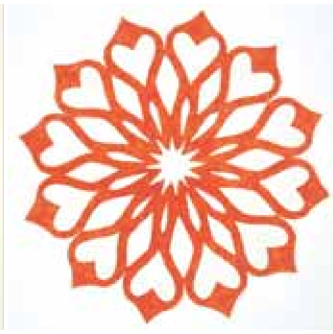


Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 55- 58

Doblar y cortar (kirigami geométrico)





Rara es la persona que en algún momento de su vida no se ha entretenido jugando con papel. A casi todos nos han enseñado de pequeños a hacer pajaritas o aviones de papel para que estuviésemos un rato sin dar la lata. La *papiroflexia* o arte de crear figuras doblando papel, también conocida por su palabra japonesa de *origami* que proviene de las palabras *oru* (doblar) y *kami* (papel), es un pasatiempo atrayente y relajante que nos permite pasar el tiempo entretenidos, bien en la espera sin límite en la consulta médica, en los repetitivos claustros, en la vigilancia de soporíferos exámenes o en algunas kafkianas sesiones de evaluación. Ya en esta sección hemos hablado anteriormente de este arte y de las posibilidades didácticas que tiene dentro de la asignatura de matemáticas, y aunque más adelante volveremos sobre el tema vamos a cambiar de registro.

Hoy queremos hablar del *kirigami* que es el arte de crear figuras recortando papel con tijeras. Para practicar este arte debemos partir de un papel que no tenga ninguna marca (es decir no vale dibujar previamente los cortes) y, cortando, dejar la silueta o el esquema a desplegar de la figura que queramos crear. Ejemplos básicos de este arte hemos hecho seguramente casi todos. Muchos recordaremos haber tomado una hoja varias veces dobladas, recortar un monigote y al abrir el papel encontrarnos con un friso de monigotes unidos unos a otros. En otras ocasiones habremos hecho o visto hacer cortes en un papel doblado y al desplegar encontrarnos con un bello calado para adornar cualquier mesa.

La palabra kirigami procede de la composición de las palabras japonesas *kiru* (cortar) y *kami* (papel). Existen muchas personas que han trabajado el kirigami desde el punto de vista educativo. En concreto podemos destacar al profesor peruano José Luis Castillo Córdova, que tiene varios vídeos colgados en YouTube donde muestra su maestría creando figuras muy diversas. Este profesor utiliza además otro término llamado *maquigami* (mezcla del término quechua *maki* que significa mano y de *kami*) que sería el arte de crear figuras rasgando el papel con las manos. En la dirección:

http://mx.geocities.com/directores2004/kirigami.doc

hay un archivo de texto donde este profesor explica el uso educativo del kirigami y del maquigami.

Grupo Alquerque de Sevilla

Constituido por:

Juan Antonio Hans Martín. *CC Santa María de los Reyes.*
José Muñoz Santonja. *IES Macarena.*
Antonio Fernández-Aliseda Redondo. *IES Camas.*
juegos@revistasuma.es

Posibilidades educativas del kirigami geométrico

Vamos a tratar un caso particular que mezclaría papiroflexia y kirigami. La idea es doblar un papel en las partes que necesitemos (no necesariamente iguales) y tras dar un corte recto abrir el papel y encontrarnos con algún patrón geométrico que hayamos propuesto previamente.

Por ejemplo, podemos plantear partir de un cuadrado y doblarlo convenientemente para que al dar un corte al papel doblado y desplegar el resultado nos encontremos con la figura 1.

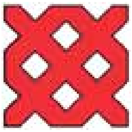


Figura 1

Con este tipo de actividad se pueden desarrollar y potenciar los siguientes aspectos educativos:

- Atención y observación
- Discriminación
- Percepción visual
- Imaginación y creatividad
- Paciencia y constancia

Y permite el trabajo en diferentes niveles de dificultad.

Para realizar una tarea de kirigami geométrico es imprescindible utilizar la percepción visual y realizar mentalmente el proceso a seguir para llegar al resultado, el corte en sí se utiliza al final para ver si el resultado del reto que se nos ha planteado es correcto.

El desafío es fácil y rápido de comprender, la ejecución y la comprobación también; no así la fase de planificación que presenta algo más de dificultad. Pero es cómodo de repetir en busca de la solución correcta. Además se usa el heurístico típico de resolución de problemas de considerar el problema resuelto y recorrer el proceso al revés.

Uno de los aspectos que se trabaja en todo momento es la simetría del dibujo, ya que los ejes de simetría van a coincidir con los lugares donde deberemos hacer los dobleces. En algunos casos hay que tener en cuenta que la línea por la que se dobla el papel no divide a la pieza en dos partes iguales, lo que complica la resolución del problema.

Metodología

En primer lugar debemos proveernos de gran cantidad de cuadrados. Nosotros solemos reciclar el papel, en concreto cortamos toda la publicidad que llega a los buzones, periódicos atrasados y folletos de todo tipo pues no se requiere de un papel especial.

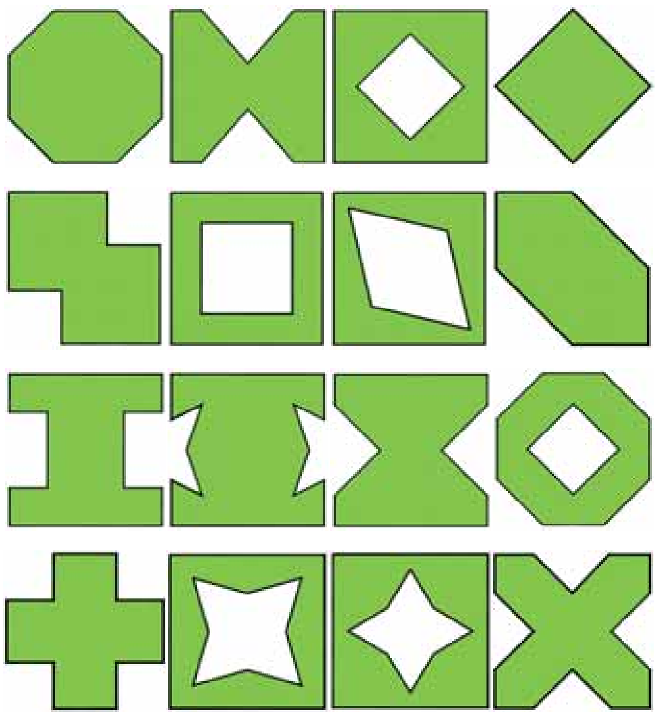
Entregamos a los alumnos, junto con el papel y las tijeras, unas tarjetas-enunciado en las que se encuentran las figuras que deben conseguir. El alumno elige una figura e intenta conseguir el doblez para que al cortar aparezca el patrón geométrico elegido. Si lo consigue se anota un punto y pasa a otro, si no, tiene la posibilidad de intentarlo nuevamente. Hay que tener en cuenta que en los más casos complicados es posible que se tengan que probar varios cortes antes de dar con el resultado.

Las siluetas-problemas las tenemos agrupadas en tres niveles de dificultad, según la cantidad de dobleces que haya que realizar antes del dar el corte. En cada tarjeta aparecen tres o cuatro figuras de idéntico nivel de dificultad.

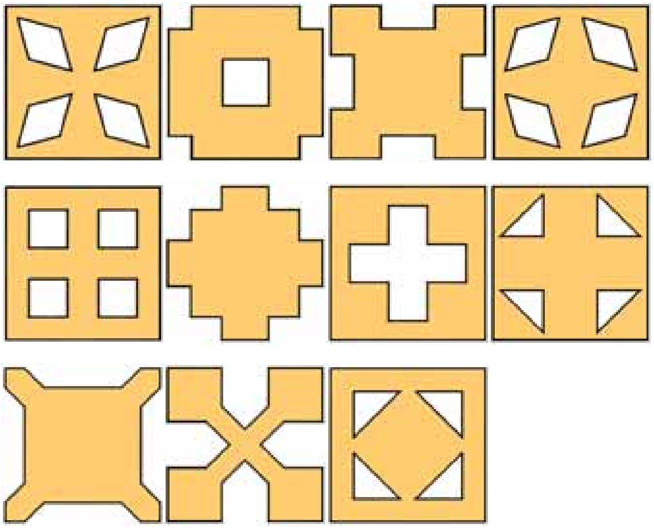
Kirigami geométrico

A continuación vamos a presentar las imágenes que hay que conseguir. Recuerden que el juego consiste en tomar una hoja cuadrada de papel (podría ser rectangular pues el objetivo es que queden los cortes que se ven al desdoblar) doblarla y dar un solo corte recto de forma que se obtenga una de las siguientes imágenes.

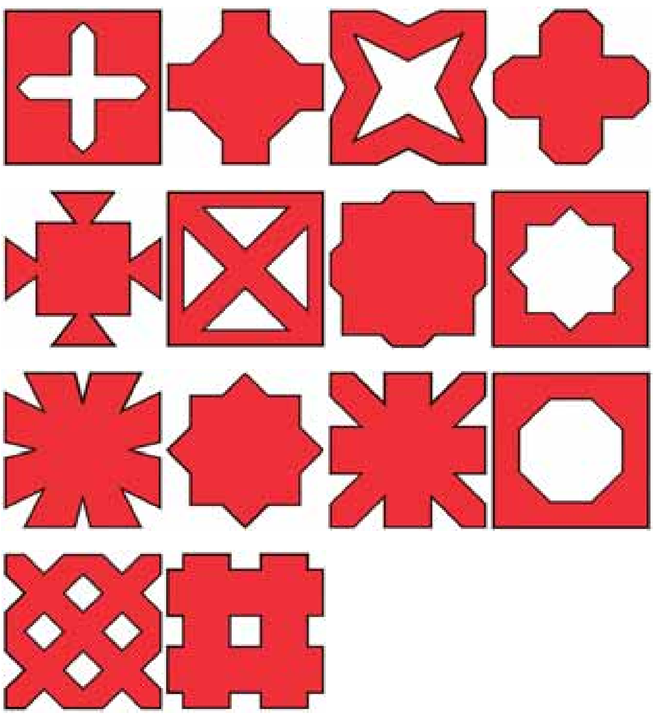
Figuras de nivel fácil



Figuras de nivel medio



Figuras de nivel difícil

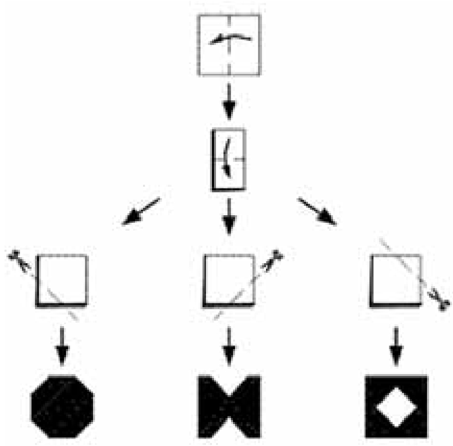


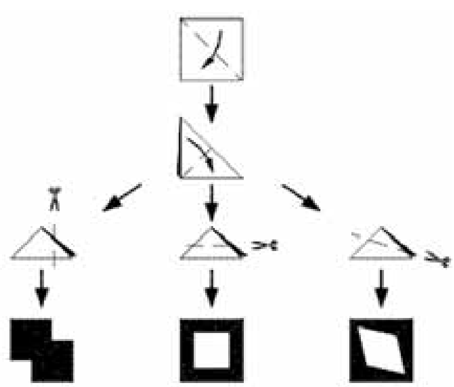
Estudio y construcción de las piezas

Esta actividad la conocíamos desde hace tiempo pues algunos amigos ya la habían utilizado en concursos de resolución de problemas, como el Open Matemático que se organiza desde Requena (Valencia), y hay incluso pasatiempos de revistas en los que había aparecido. Pero como nos parecía que daba bastante juego para trabajar la geometría hicimos un estudio sistemático con nuestros alumnos en los talleres de matemáticas.

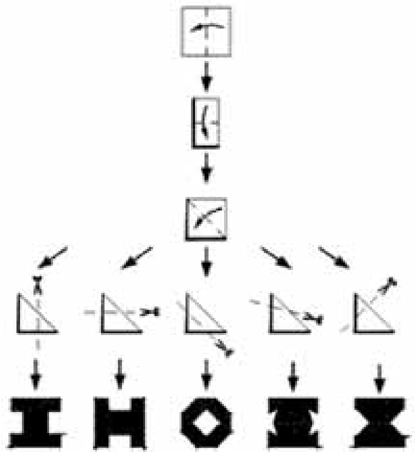
Partiendo de una hoja cuadrada realizamos el estudio de todos los dobleces que era posible realizar y de todas las figuras que podíamos obtener. En las imágenes siguientes aparecen algunos de esos patrones con las imágenes que quedan.

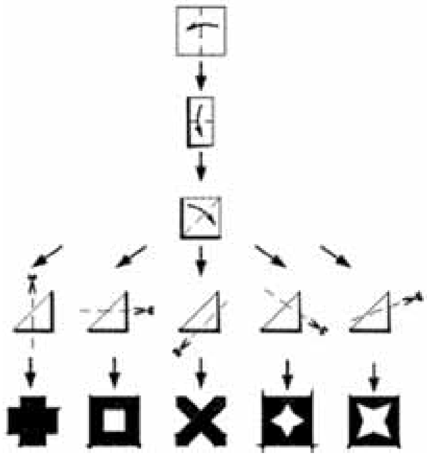
Utilizando solo dos dobleces

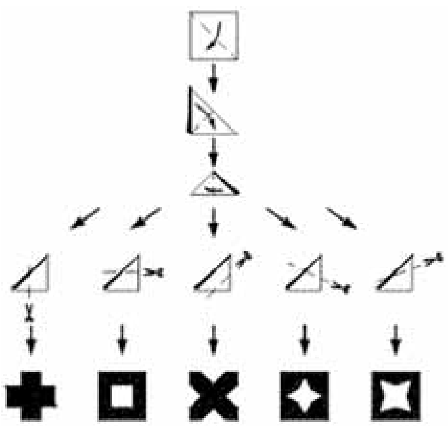




Utilizando tres dobleces

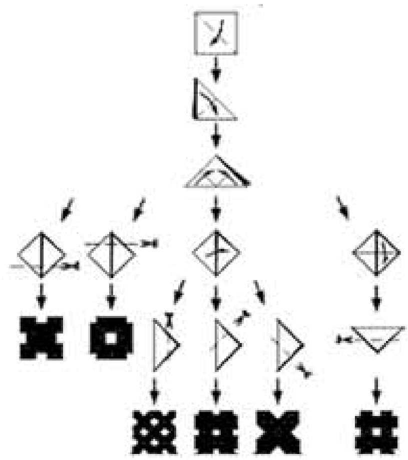






El resto de las figuras necesitan realizar, al menos, cuatro dobleces antes de llegar a la solución.

Para acabar mostramos uno de los estudios y así dejamos los demás para que nuestros lectores se entretengan.



JUEGOS

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 59-60

El perímetro de Dubai y el área de Singapur

Hasta hace poco la idea de que todo país estable tenía un perímetro de frontera y una superficie determinada formaba parte de las firmes creencias de todos nosotros. En estos sorprendentes tiempos en que vivimos hasta estas ideas firmes sobre medidas empiezan a ser superadas. Durante décadas la escasez de terreno inducía a construir edificios cada vez más altos y a ir aumentando la cotización de determinadas zonas como las de los centros y la primera línea de mar. Esto esta liquidado.

El creciente perímetro de Dubai

Si en un pequeño país solo hay desierto junto al mar y por debajo no hay petróleo ¿Qué puede hacerse para atraer turismo e inversiones?. La respuesta actual de Dubai ha sido: hagamos grandes edificios de todo tipo (hoteles, bancos, tiendas, museos, apartamentos,...) que sean espectaculares y dignos de ser visitados, garanticemos la seguridad del lugar y que no haya impuestos (paraíso fiscal). Los otros Emiratos Árabes Unidos tienen petróleo pero hoy los cruceros van a Dubai.

La siguiente idea inteligente en Dubai ha sido pensar en que "sol y playa" son factores decisivos para atraer a acaudalados personajes que viven en países fríos escalfándose los dedos quemando billetes de 100 dólares o de 100 euros. Pero estos inversores, que además en Dubai no van a necesitar gastar en rayos UVA, quieren grandes residencias junto al mar. ¿Cómo poder ofrecer primera línea de mar a todos? Este podría ser un problema en cualquier sitio, pero no en Dubai. Como la línea de costa natural es limitada en longitud lo que era necesario era ir creando (a partir del 2002) sobre el mar zonas estrechas que permitieran alargar at infinitum (de momento 120 km) la línea de costa e ir edificando. Bienvenida la *geometría fractal* al Emirato. Estos son los proyectos "The Palm" de Dubai. Se diseñó todo a priori y se empezó a crear tierra en el mar siguiendo una forma de palmera (Figura 1) aparecien-

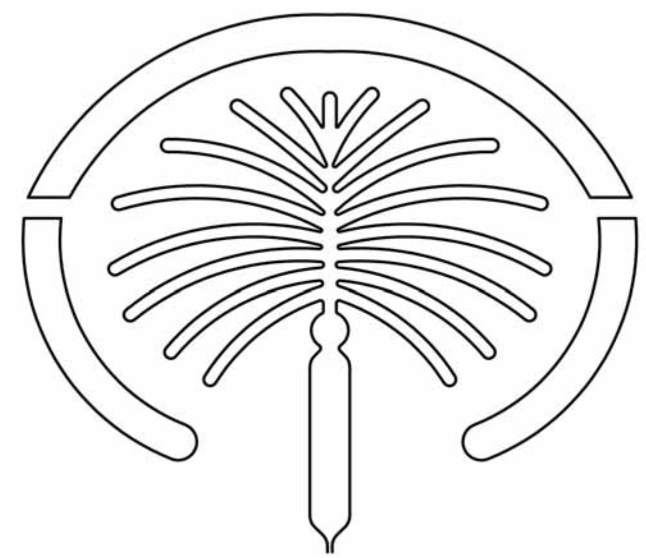


Figura 1

Claudi Alsina
Universitat Politècnica de Catalunya
elclip@revistasuma.es

do multitud de “islas” alargadas conectadas por puentes. Por tanto lo realmente espectacular en Dubai no es tanto como ha crecido la superficie si no el perímetro. De momento los tres grandes proyectos son:

- *The Palm en Mumeirah:* área residencial de descanso y ocio, con residencias ajardinas, hoteles, apartamentos, etc.
- *The Palm en Jebel Alí:* lugar de visita y entretenimiento con una ciudad del mar, parques temáticos, hoteles, etc.
- *The Palm en Deira* será la mayor con 14 km de longitud, con más de 8000 residencias en 41 brazos de “la palmera”.

La creciente superficie de Singapur

Singapur era un pequeño lugar situado en una zona privilegiada para pescadores, piratas, mercaderes, etc. Esto es lo que encontró el británico Thomas Stanford Raffles en 1819.

Hoy la ciudad-estado de Singapur es un centro privilegiado de comunicaciones por mar y por aire, con un puerto extraordinario y uno de los aeropuertos más bellos e importantes del mundo, acogiendo la ciudad un exitoso distrito financiero. Modernos rascacielos han ido eliminando la arquitectura típica (solo queda una calle) y solo una vegetación exuberante de orquídeas permite recordar al visitante que no está en Rotterdam o Cincinatti sino en un centro neurálgico de Asia.

La gran sorpresa de Singapur es el propio “territorio”. Singapur es hoy 33 km^2 mayor que en el siglo XIX al haber ido expandiéndose sobre el mar. El gran aeropuerto ocupa 12 km^2 ganados al mar.

Primero el país quedó plano, al usarse sus montañas (hoy exmontañas) para construir la nueva tierra en el mar. Pero acabadas las existencias propias ¿cómo pueden seguir ganando terreno si además la zona de mar es cada vez más profunda? Ningún problema: compran arena y tierra en el extranjero(!). Muchas islas indonesias y malasias han ido desapareciendo o reduciéndose enormemente al vender su terreno o sus colinas. Nuevos países vecinos ofrecen, a los dólares de Singapur, sus existencias terrenales. ONG’s, organizaciones ecologistas y todo tipo de colectivos protestan... pero Singapur sigue creciendo. Lo de las urbanizaciones-palmera de Dubai es una tímida expansión al lado de este desarrollo que, por ahora, se propone ganar 60 km^2 más y un incremento del 14% de costa.

Al ser Dubai y Singapur lugares exóticos para nosotros podemos caer en el error de creer que el tema nos toca de lejos. Si usted tiene una propiedad en España en “primera” línea de mar póngase a temblar. Esto de las palmeras de Dubai y de los terrenos de Singapur pronto va a crecer en todos los sitios. De hecho muchas zonas de puerto están ya ganando terreno al mar y en el año 2000 ICME9 de Japón se celebró en la zona de Makujari que era toda ella artificial y ganada al mar.

En clase siempre insistimos, con la inestimable ayuda de una cinta atada, que un mismo perímetro en el plano puede abarcar superficies diferentes, siendo los límites circulares los que maximizan la extensión. Ahora nos ha salido un nuevo reto: incluir las formas fractales en terrenos y evaluar incrementos perimetrales y superficiales.

Como bien dijo von Neumann: “*Si la gente no cree que las matemáticas son simples es sólo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida*”.

EL CLIP ■

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 61-66

Matemáticas lúdicas

Seguimos adelante con el recorrido que hemos comenzado por las TIC y su uso en el aula de matemáticas en esta sección **Mate*más*TIC**. Si el primer número de la sección lo dedicamos a una aplicación de software libre para el desarrollo del cálculo mental y el segundo a una aplicación para la práctica de la geometría interactiva, en esta tercera hemos optado por una aplicación lúdica de contenido matemático.

Antes de entrar en materia, vamos a hacer referencia a dos sitios de Internet en los que encontrar material de juegos con carga matemática y que nos puedan servir de introducción a alguno de los temas que debemos tratar en el aula con nuestros alumnos. Si buscamos en Internet, existe gran cantidad de espacios web dedicados a esta sección. De entre ellos, hemos seleccionado dos, uno más generalista y otro de índole particular en el tema que trata.

El primero de ellos es la zona de juegos de DivulgaMAT que podemos encontrar en la siguiente dirección:

http://divulgamat.ehu.es/weborriak/RecursosInternet/Juegos/

En la imagen 1 podemos observar lo que esta web nos ofrece.

Imagen 1: Juegos en DivulgaMAT

Mariano Real Pérez
CEP de Sevilla
matemastic@revistasuma.es

Esta sección de la web de DivulgaMAT está dirigida por el grupo Alquerque de Sevilla, compuesto por Juan Antonio Hans Martín, José Muñoz Santoja, Antonio Fernández-Aliseda Redondo y José Blanco García.

En ella encontramos varios recursos lúdico-matemáticos que han sido publicados por este grupo en SUMA desde el año 2000. En la sección se recogen numerosos artículos con actividades aconsejadas para realizar con los alumnos en el aula.

El segundo de los sitios en Internet que os recomendamos es un lugar en el que encontramos un Tangram que utilizaremos On line. La dirección de este recurso es

http://www.digijuegos.com/game/2167/Tangram-Game.html

En la imagen 2 observamos la web referenciada.

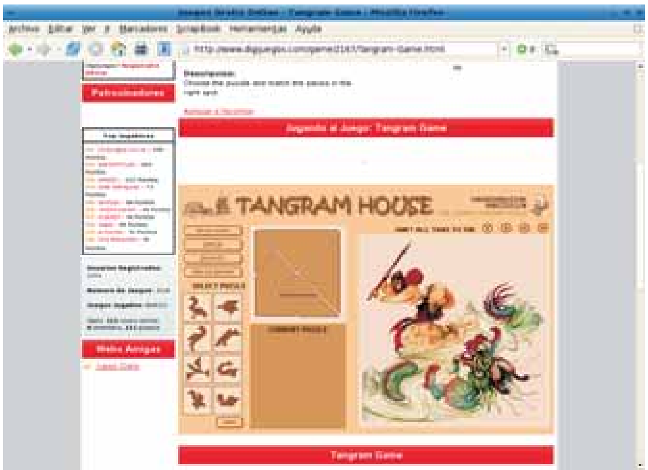


Imagen 2: Tangram On line

Para que podamos observar la pantalla del Tangram necesitamos tener instalado en nuestro equipo el plugin de Flash. Este Tangram tiene implementadas 32 figuras distintas. Aunque está en inglés, la utilización del mismo es bastante intuitiva. La pantalla aparece dividida en tres partes. En la primera de ellas, la que se encuentra más hacia la izquierda, contiene una botonera con las distintas opciones de la pantalla. Debajo de esta botonera se encuentran las imágenes que vamos a poder realizar con el Tangram. Observamos 8 imágenes, pero al pulsar sobre el botón “next” aparecen otras 8 imágenes y así hasta las 32 totales que contiene. En la segunda parte, situada a la derecha de la anterior, encontramos las piezas del Tangram formando un cuadrado y debajo aparecerá la pieza que hayamos seleccionado para realizar. La última de estas partes, situada a la derecha es el espacio de trabajo en el que debemos ir situando las piezas para formar la imagen seleccionada.

En esta web, cuando estemos formando una figura, para girar una pieza del Tangram, deberá estar primero seleccionada. En ese momento pulsaremos sobre uno de sus vértices y giraremos la pieza arrastrando con el ratón. El movimiento que presenta es continuo.

GTANS: un tangram de software libre

Uno de los elementos lúdicos a los que solemos recurrir en clase de matemáticas es el Tangram. En la imagen 3 observamos uno de los momentos de utilización del Tangram en el aula.

Imagen 3: Utilización del Tangram

Este elemento lleva aparejado el tener disponibilidad suficiente para todos los alumnos o que ellos mismos creen el suyo propio para, posteriormente, utilizarlo en el aula.

Para el propósito que nos ocupa, vamos a recurrir a una aplicación de software libre llamada Gtans. Gtans es un programa desarrollado por Philippe Banwarth y que ha sido traducido a numerosos idiomas. La web oficial de esta aplicación es

http://gtans.sourceforge.net/

Gtans es un programa desarrollado por Philippe Banwarth que permite la construcción de figuras con las piezas del Tangram

La aplicación Gtans ha sido desarrollada para Linux y se encuentra disponible en los repositorios de las distintas distribuciones, aunque también se puede descargar directamente de la siguiente dirección:
http://distro.ibiblio.org/pub/linux/distributions/amigolinux/download/Applications/Games/gtans-1.2/?C=N;O=D

Cuando ejecutamos la aplicación aparece la ventana que observamos en la imagen 4.

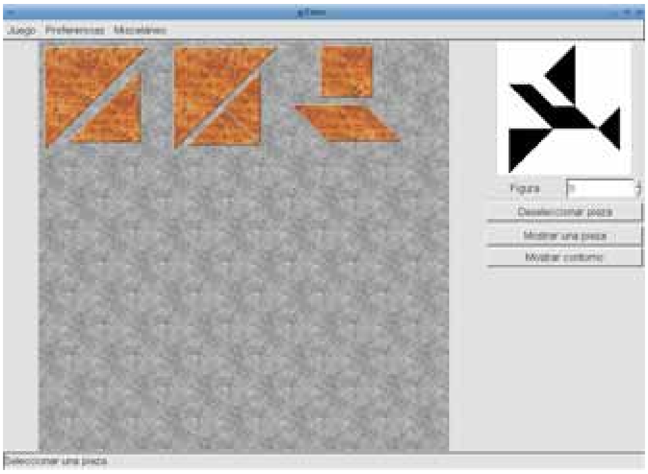


Imagen 4: Inicio del Gtans

Esta pantalla aparece dividida en tres partes que se distinguen claramente. La primera, la parte superior, en la que aparece el menú del programa. El segundo es la parte lateral derecha y la tercera parte es la zona de trabajo, en la que contemplamos las piezas del Tangram.

Gtans tiene implementadas hasta 158 figuras distintas que podemos construir con las piezas del juego

Vamos a hacer un recorrido para ver lo que nos ofrece cada una de ellas. Comenzaremos por la parte de la derecha. en ella observamos una imagen que podemos hacer con las piezas del Tangram. Gtans tiene implementadas hasta 158 figuras distintas que podemos construir con las piezas del juego. Debajo de la imagen, en el contador numérico, podremos elegir la pieza que deseemos construir.

Debajo de este contador, localizamos tres botones que sirven de ayuda a los alumnos para facilitar la tarea a la hora de construir la figura. Cada botón tiene una función que es la siguiente:

a.- "Deseleccionar pieza": Al pulsar sobre este botón deja de estar cualquier pieza que tuviéramos seleccionada en ese momento en el área de trabajo.

b.- "Mostrar una pieza": Si pulsamos este botón se resalta en la imagen que deseamos construir una de las piezas que la forman. En la imagen 5 podemos contemplar que al pulsar esta opción, se ha resaltado una de las piezas que componen la figura. En esa imagen observamos que la figura que se pretende construir es la 18.

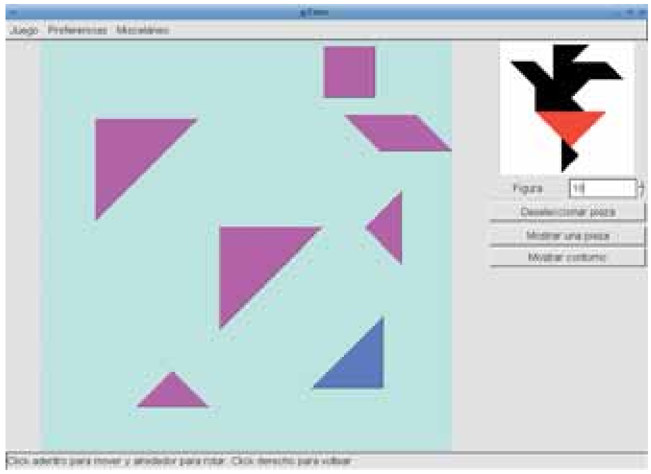


Imagen 5: Mostrar una pieza

c.- "Mostrar el contorno": Este botón permite al alumno observar en el espacio de trabajo el contorno de la figura que desea construir. En la imagen 6 podemos observar que se ha utilizado esta opción con la figura 157.

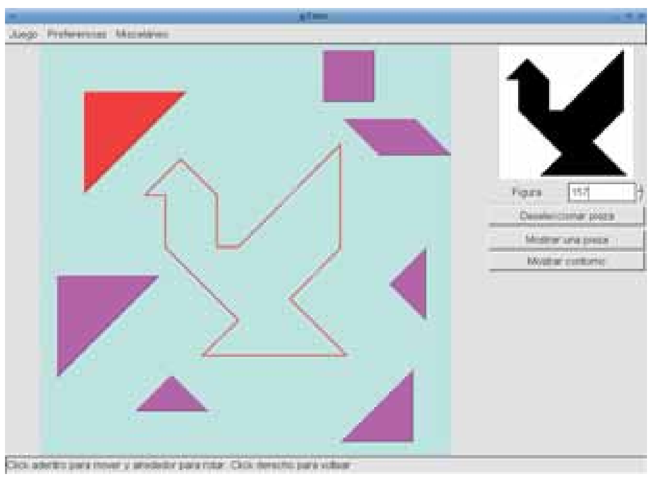


Imagen 6: Mostrar contorno

En la parte superior de la pantalla de la aplicación observamos un menú con el que podemos configurar los elementos que

Nos encontramos ante un software potente y robusto para utilizar en el aula de matemáticas. El número total de figuras que nos permite hacer gtans es 381

aparecen el la zona de trabajo. Para comprender la configuración sobre la que podemos actuar, debemos conocer las acciones que podemos efectuar sobre el área de trabajo. Ya hemos visto alguna, como la de mostrar una pieza o la de mostrar el contorno de la figura que deseamos realizar con las piezas del Tangram. Ya dentro de la construcción, para mover una pieza, la debemos seleccionar previamente. Para ello solamente debemos pulsar sobre ella con el botón izquierdo del ratón. La pieza seleccionada cambia de color para indicarnos que está seleccionada. Si pulsamos con el botón derecho una pieza seleccionada, se voltea y si pulsamos alrededor de una pieza seleccionada, podemos girar la pieza moviendo el ratón. En la imagen 7 observamos un momento en el que se está girando una pieza y podemos ver una línea que une el centro de la pieza con el ratón. En este caso, la imagen que se pretende construir es la 22.

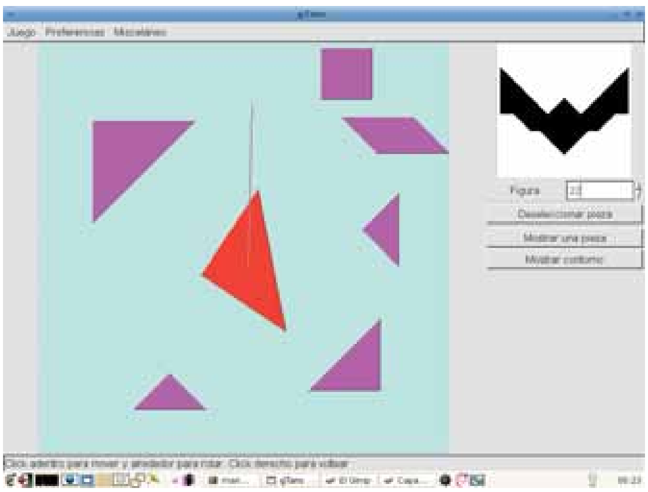


Imagen 7: Giramos una pieza

Ya explicadas las acciones que podemos efectuar sobre el área de trabajo, pasamos a explicar los diferentes elementos sobre los que podemos actuar en la configuración. La configuración la efectuamos sobre la acción “Preferencias” del menú principal. En este menú encontramos:

1.- Piezas: Nos permite la posibilidad de elegir el color o la textura que tendrán las piezas del Tangram que tengamos en el área de trabajo. En el color podremos elegir esta característica de entre un círculo de posibilidades que nos ofrecen. Con respecto a la textura, nos permiten elegir una de entre diez básicas que contiene por defecto la aplicación, aunque nosotros podremos fabricarnos nuestra propia textura para las piezas, sin más que guardar el archivo de textura en la carpeta pixmaps de gtans. En la imagen 8 observamos las posibilidades que nos ofrece esta opción.

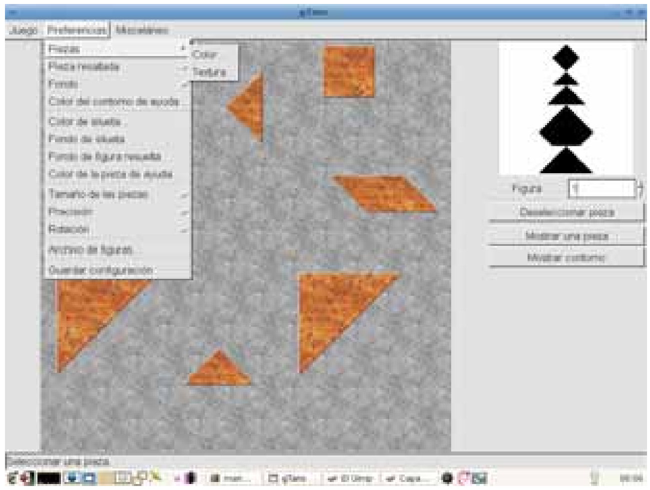


Imagen 8: Elección de textura o color de una pieza

2.- Pieza resaltada: Nos da la posibilidad de elegir el color o textura que nos mostrará el programa cuando tengamos seleccionada una pieza.

3.- Fondo: Esta opción nos permite elegir la textura o el color que deseamos para nuestro espacio de trabajo.

4.- Color del contorno de ayuda: Esta opción nos permite seleccionar el color con el que deseamos aparezca el contorno de la pieza cuando lo necesitemos. Este contorno es el que observamos en el imagen 6. Si el color del contorno es el mismo que el del fondo del área de trabajo, no le permitiríamos a los alumnos que utilizaran la posibilidad de ayuda del contorno.

5.- Color de silueta: La silueta es la figura que hayamos seleccionado para dibujar y que aparece en la parte superior derecha de la pantalla. Esta silueta, por defecto, es de color negro. Con esta opción podremos elegir el color de la misma.

6.- Fondo de silueta: Con esta opción podremos seleccionar el color del fondo de la silueta.

7.- Fondo de figura resuelta: Cuando formamos la figura seleccionada con las piezas del Tangram sobre el espacio de trabajo, el fondo de la silueta cambia de color, informándonos de haber conseguido realizarla. Con esta opción, vamos a poder seleccionar el color que deseamos que aparezca en el fondo cuando hayamos resuelto la figura.

8.- Color de la pieza de ayuda: En la imagen 5 observamos que le podíamos solicitar que nos indicara la posición sobre la figura de alguna de las piezas del Tangram. En esta opción, el programa nos permite elegir el color de esa pieza de ayuda. si el color de la pieza de ayuda es el mismo que el color de la silueta, no le permitiremos al alumno utilizar la opción de "Mostrar una pieza".

9.- Tamaño de la pieza: Esta opción nos va a permitir elegir el tamaño de las piezas del Tamgram como observamos en la imagen 9. Esto va a suponer una ventaja de cara a la utilización de este software con alumnos con deficiencia visual.

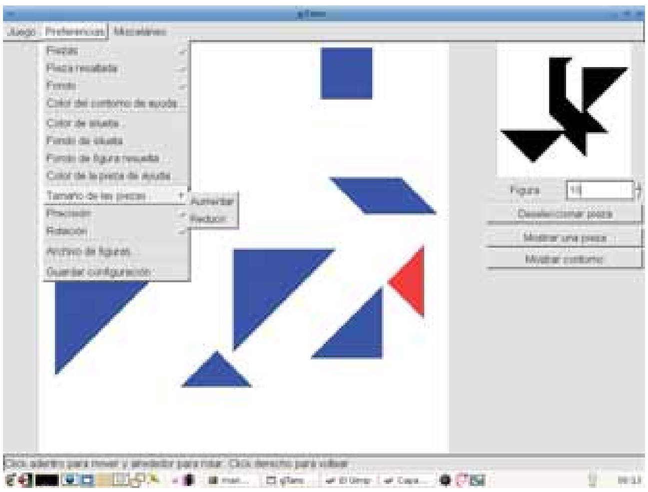


Imagen 9: Tamaño de las piezas

10.- Precisión: Cuando colocamos las piezas sobre el área de trabajo para formar la figura deseada, lo podemos hacer con más o menos rigor sobre la posición que debe ocupar la pieza. Esta opción nos va a permitir configurar esa precisión. En la imagen 10 observamos las opciones permitidas.

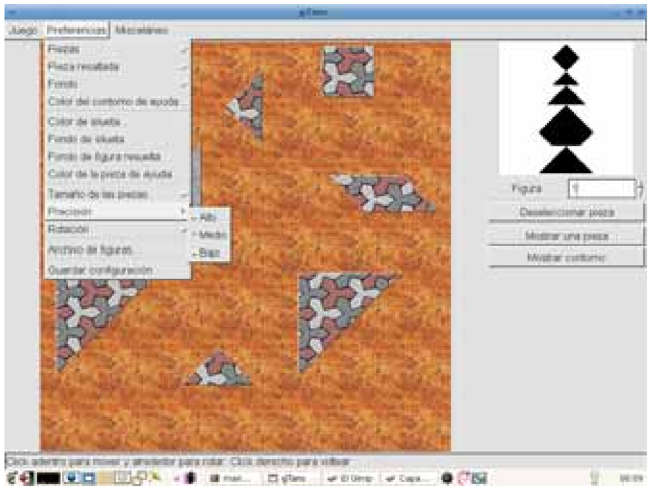


Imagen 10: Precisión para colocar las piezas

11.- Rotación: Como hemos comentado anteriormente, la seleccionada en el área de trabajo puede ser rotada tal y como observamos en la imagen 7. En esta opción vamos a poder configurar la rotación de estas piezas. Las posibilidades que nos ofrece es rotar la pieza de forma continua, es decir, el giro de la pieza va a ir pasando por todos los ángulos posibles, o bien rotar la pieza paso a paso, con lo que conseguiremos que cuando se rote una pieza lo haga a saltos, saltando los ángulos de forma espaciada.

12.- Archivo de figuras: Esta opción nos permite elegir entre distintos archivos de figuras. En la imagen 11 observamos varios de esos archivos de figuras que contienen: default.figures 158 figuras, alpha.figures 83 figuras, misc.figures 102 figuras y similiar.figures 38 figuras. Por lo tanto, el número total de figuras que nos permite hacer gtans con los anteriores archivos es 381.

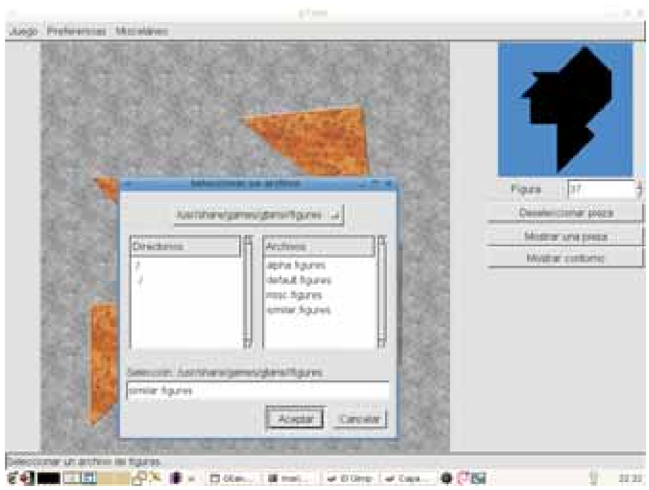


Imagen 11: Elección de archivo de figuras

13.- Guardar configuración: Nos permite guardar la configuración con las opciones que hayamos seleccionado en cada uno de los anteriores doce campos.

Así, nos encontramos ante un software potente y robusto para utilizar en el aula de matemáticas.

Debemos indicar también que existe una versión bajo Java de gtans. Bajo la denominación **jtans**, se integra en páginas web y puede ser visualizado con un navegador si se tiene instalado el motor Java. En la imagen 12 podemos contemplar como se visualizaría jtans con un navegador. En este caso hemos seleccionado una dirección web en la que se encuentra que es:

http://www.terra.es/personal/jgmoyay/tangram_es.htm

(web de José Gabriel Moya)

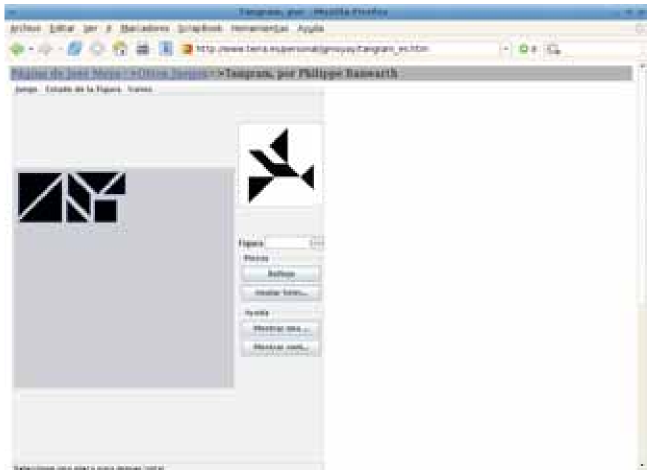


Imagen 12: Web con jtans

Ni que decir tiene que la versión jtans tiene muy limitado el tamaño de la imagen respecto a gtans, este último más completo y robusto para su utilización en el aula.

MatemásTIC ■

Ficha educativo - técnica	
Nombre	Gtans
Sistema	Aunque es una aplicación propia de Linux y para cada distribución cuenta con el archivo de instalación en su repositorio, también encontramos una versión para Windows y otra para Mac.
Descarga	Repositorio de la distribución de Linux correspondiente o: http://distro.ibiblio.org/pub/linux/distributions/amigolinux/download/Applications/Games/gtans-1.2/?C=N;O=D
Licencia	GPL
Contenido	Construcción de figuras con las piezas Tangram chino.
Nivel	Multinivelar: primaria, secundaria.
Metodología	Los alumnos la utilizarán por pareja en sesiones cortas de 10 a 15 minutos. Uno de los alumnos realiza la figura en el espacio de trabajo con las indicaciones dadas por el otro.

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 67-72

El Greco en otra dimensión

El Bautismo de Cristo, El Greco, ca. 1589, M.N. del Prado, Madrid

Pintó este cuadro Doménikos Theotokópoulos, en griego Δομήνικος Θεοτοκόπουλος, El Greco, *para el Colegio de Agustinos de María de Aragón, de Madrid, hacia 1598. Es un cuadro de grandes dimensiones, 350×144 cm, y está claramente dividido en dos partes. En la inferior, El Bautista vierte con una concha el agua del Jordán sobre la cabeza de Cristo. En la superior, el Padre Eterno, rodeado de ángeles, arcángeles y algunos querubines, contempla la escena desde el cielo, complaciéndose en ella. Sobre la cabeza de Cristo se superponen, un manto rojo, signo del sacrificio, la concha bautismal y La Paloma, que une ambas escenas, la superior y la inferior en las que se desarrolla el cuadro.*

Francisco Martín Casalderrey
IES Juan de la Cierva (Madrid)
fmc@revistasuma.es

El cuadro que miraremos con ojos matemáticos en esta ocasión es *El Bautismo de Cristo*, de El Greco y forma parte de la colección permanente del Museo Nacional del Prado de Madrid.

En 1596 encargaron a El Greco las pinturas que habrían de decorar el Colegio de María de Aragón. Se trataba del Colegio de la Encarnación, convento y seminario de agustinos aunque popularmente, en los casi doscientos años que existió, fue más conocido por el nombre de su patrocinadora doña María de Córdoba y Aragón, una dama de la Corte de la reina Ana de Austria (1549-1590), esposa de Felipe II, y de la hija de éste último y de Isabel de Valois, la infanta Isabel Clara Eugenia de Austria (1566-1633).

El colegio se situaba cerca del Real Alcázar, residencia de los reyes, en el noroeste de la ciudad, en el lugar que actualmente ocupa el Palacio del Senado.

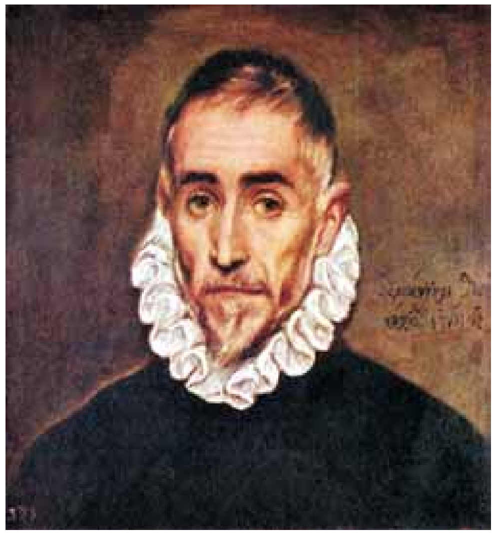
Disposición con respecto al Real Alcázar,
del Colegio de la Encarnación o Colegio de María de Aragón

Si Doña María de Aragón fue la encargada de sufragar la obra del convento, la concepción y quizás la responsabilidad de su desarrollo corrió a cargo de un personaje singular: fray Alonso de Orozco (1500-1591). Este fraile, escritor místico, es una de las figuras intelectuales más interesantes del reinado de Felipe II. En su proceso de beatificación intervinieron como testigos, entre otros, la infanta Isabel Clara Eugenia y los escritores Lope de Vega y Francisco de Quevedo. Finalmente fue canonizado en 2002 por Juan Pablo II.

Probablemente fue Alonso de Orozco el inspirador espiritual y temático de las obras encargadas a El Greco. Y fue sin duda aun con los parámetros de la época un encargo sumamente importante, tanto por la relevancia del Colegio y por su ubicación, como por la entidad artística del encargo y el precio pagado. Doménikos cobró una buena cantidad de reales, por la realización del retablo completo, que parece que constaba de seis cuadros todos ellos de grandes dimensiones, además de la arquitectura de sostén que los enmarcaba y que se ha perdido.

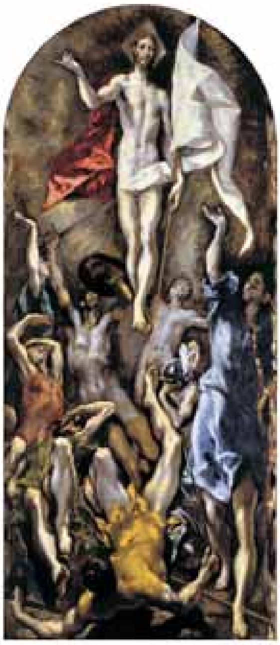
El Convento fue clausurado en 1809, por decreto del rey José Bonaparte. En 1814 el retablo se había desmontado, para trasformar el edificio en Salón de Cortes, transformándose la planta original, rectángular con un abside, en un rectángulo con dos semicirculos en los lados menores. Aunque el edificio retomó por breves periodos su función de iglesia, el retablo no fue nunca montado de nuevo. Las piezas que lo componían fueron a parar a distintos lugares hasta recalar todas ellas en el Museo del Prado, excepción hecha de la titulada *Adoración de los pastores*, que se encuentra en el Museo Nacional de Arte de Rumanía, en Bucarest.

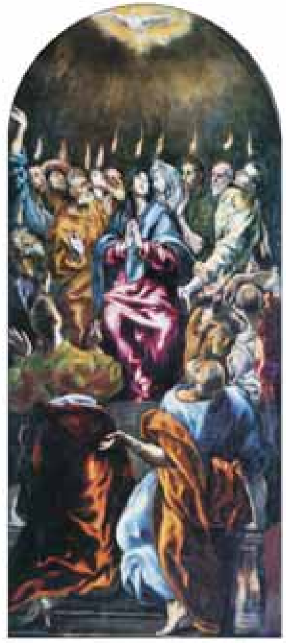
El Greco realizó su trabajo entre los años 1596 y 1600 en su taller de Toledo, trasladando una vez terminado éste, las distintas piezas hasta el convento. Parece ser que, además de los seis cuadros que se conservan, el conjunto constaba de otro más, probablemente uno más pequeño que se situaba en el centro sobre los demás y de unas cuantas esculturas.



Δομήνικος Θεοτοκόπουλος,
Doménikos Theotokópoulos, El Greco

Los seis cuadros conservados, aunque tratan temas muy frecuentes en la iconografía cristiana, suponen una innovación absoluta. Las tres pinturas del piso inferior presentan una doble escena, la terrenal y la divina, situando naturalmente la segunda sobre la primera. La composición en los tres casos converge hacia el centro del plano del dibujo mostrando una forma que recuerda a la de un reloj de arena. Tanto en *La Anunciación* como en *El Bautismo de Cristo*, esa zona de convergencia central está ocupada por el Espíritu Santo en forma de paloma, que juega, desde un punto de vista compositivo, el papel de nexo de unión entre *lo divino* y *lo humano.*






Posible disposición de los cuadros
en el retablo del
Colegio de María de Aragón

Sobre el hexaedro y el teseracto

El hexaedro regular o cubo es quizás el poliedro más dibujado en las pizarras escolares. Su representación más habitual en la clase de matemáticas es la que corresponde a la figura 1, es decir, dos cuadrados desplazados uno con respecto al otro y unidos por cuatro líneas. Es ésta una visión *generativa* del cubo. Si un cuadrado se genera moviendo un segmento a lo largo de una dimensión perpendicular al segmento una longitud igual al segmento, un cubo se puede generar moviendo un cuadrado en una dimensión perpendicular al plano que lo contiene una longitud igual al segmento que lo generó. Esta visión generativa se puede completar hacia abajo considerando el segmento, como cuadrado de dimensión uno, generado por un punto que se desplaza una determinada longitud. Esta idea nos permitirá, generalizándonla, poder hablar a nuestros alumnos del *teseracto* o hipercubo de cuatro dimensiones, que se genera desplazando un cubo, en una dimensión perpendicular a las tres del espacio habitual, una longitud igual a su lado.

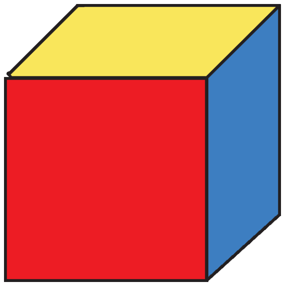


Figura 1

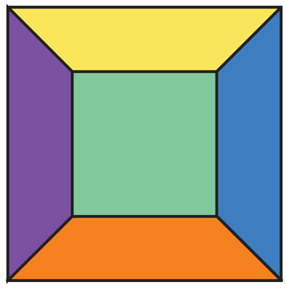


Figura 2

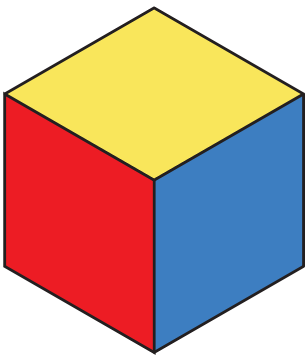


Figura 3

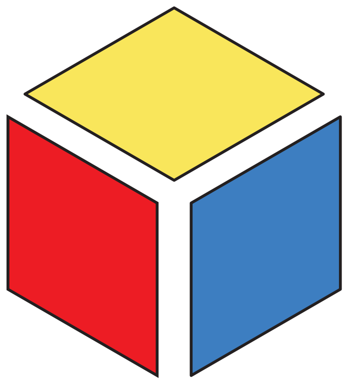


Figura 4

De cualquier modo, la representación en perspectiva caballera que solemos utilizar para visualizar el cubo (figura 1) no es la única ni mucho menos. En la figura 2 vemos la que corresponde a una perspectiva cónica central. Es la forma en que veríamos un cubo si acercamos suficientemente el ojo a una de las caras. En la figura 3 se dibuja el cubo en perspectiva isométrica. La tres caras que convergen en un mismo vértice (figura 4) se *ven* con forma de rombo en esta representación plana del cubo.

De igual manera podemos hacer con el *teseracto*. La figura 5 nos muestra la representación tridimensional en proyección cónica central de un hipercubo. La figura 6 es la proyección isométrica en 3-D del hipercubo. Las caras resultan ser todas rómbicas y en la parte externa sólo aparecen doce, ya que el resto de las caras se encuentran en el interior. Se forma así un rombidodecaedro. Esto sucede de la misma manera que lo que sucedía en la figura 3, en la que sólo vemos tres de las seis caras del cubo, ya que las otras tres quedan del otro lado del plano del papel. Las tres caras cuadradas que convergen en un mismo vértice en el caso del cubo (figura 4), en el teseracto, son cuatro cubos que convergen en un mismo vértice (figura 7).

Como las páginas de SUMA son planas, las figuras que vemos son proyecciones en 2-D de las proyecciones en 3-D del teseracto 4-D. Pero esto no es un grave problema, si quiere ver estas proyecciones en 3-D, basta que descargue el archivo *Complemento* que aparece junto al título de éste artículo en la página web de SUMA y, con un poco de paciencia, monte los recortables que allí se ofrecen. Podrá ver así las proyecciones

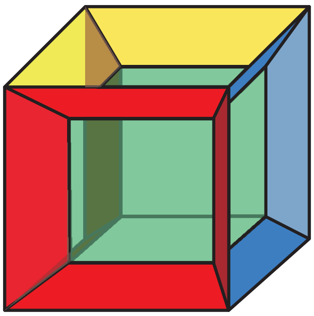


Figura 5

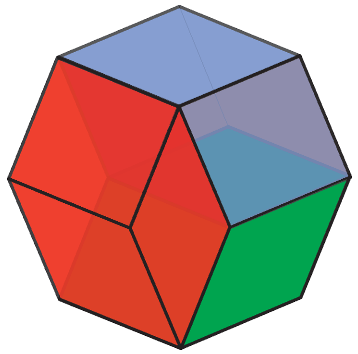


Figura 6

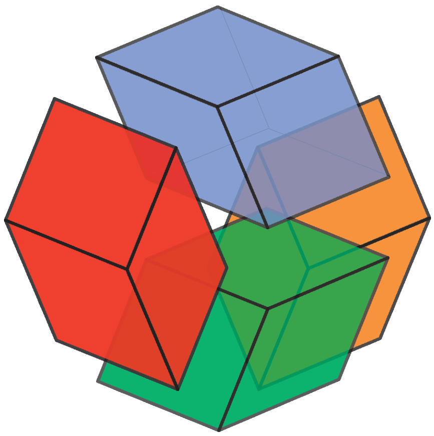


Figura 7

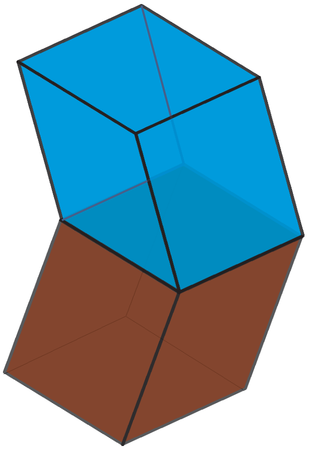


Figura 8

3-D del teseracto, que aquí solo puede ver reproyectadas en 2-D. Quizás, si se decide a hacer con sus alumnos un estudio *generativo* del cambio de dimensión estos recortables pueden serle de ayuda. Yo lo he probado y resulta divertido, además de ser un ámbito perfecto para practicar la idea de *generalización*.

Por último, la figura 8 trata de presentar dos cubos perpendiculares entre sí, que se tocan a lo largo de una cara. De la misma manera que dos caras adyacentes de un cubo, son perpendiculares entre sí y se tocan a lo largo de una arista. A la superior le hemos dado el color celeste y a la inferior un marrón terroso.

Más de uno se debería, llegados a esta altura, preguntar qué tienen que ver cubos y teseractos con el cuadro *El Bautismo de Cristo* pintado por El Greco para el retablo del convento de la Encarnación de Madrid hacia el 1598 y al que hemos dedicado la primera parte de este artículo. La respuesta, un tanto metafórica, pero no por ello menos matemática, si aún no se le ha ocurrido, la podrá encontrar pasando la página.

Parafraseando el cuento de Cortázar *El manuscrito hallado en un bolsillo* –que a su vez parafraseaba el título de la novela de Jan Potocki *El manuscrito hallado en Zaragoza*–, la respuesta la hemos camuflado en el título de este artículo: *El Greco en otra dimensión.*

Si miramos con ojos matemáticos el cuadro veremos que las escenas representadas en la parte superior e inferior no corresponden a un mismo punto de vista, ni en el dibujo, ni en la iconografía, ni desde el punto de vista de la teología.

Son, de algún modo, como los dos cubos que se tocan en una misma cara, pero, que entre sí, son perpendiculares: los cielos y la tierra. El Greco nos presenta cada uno de ellos como una realidad tridimensional separada de la otra, una arriba y la otra abajo, pero con una cara cuadrada en común que les hace permanecer en contacto. Y en esa cara común sitúa al Espiritu Santo.

La cosmogonía de El Greco sería, así concebida, un espacio de cuatro dimensiones –al menos–, en el que nuestro universo 3-D sería una hipercara que se desarrolla en tres ejes perpendiculares, como las tres aristas de un cubo convergentes en un vértice. Los cielos, serían otra realidad 3-D diferente, otra hipercara transversal a la nuestra en el mismo universo tetradimensional. Ambos, el cielo y la tierra, serían hipercaras adyacentes de un mismo teseracto, compartiendo un plano en común, en el que habita la Tercera Persona de la deidad, que es sólo Espíritu y como tal, puede vivir perfectamente en el interior de un plano.

En nuestro anterior artículo nos preguntábamos si Zurbarán había pensado y calculado cómo debía deformar los personajes de *La Defensa de Cádiz contra los ingleses* para que, una vez colgado el cuadro en el Salón de Reinos, se vieran sin deformidades y respondíamos que sí.

En esta ocasión es obvio que no podemos pensar que Doménikos Theotokópoulos estuviera pensando en cuatro dimensiones cuando concibió su cuadro. Al menos no conscientemente, pero intuitivamente, quizás basándose en las lecturas misticas del padre Orozco, esta imagen virtual, que hoy definiríamos 4-D, rondó en su cabeza.

Y puesto que la matemática, en el proceso de abstracción, no hace otra cosa que pasar de la realidad a una metáfora que la representa, nosotros podemos hacer esta lectura del cuadro, que ayuda a intepretarla, desde el punto de vista místico-religioso, pero también geométrico-plástico. Así, las figuras alargadas características de El Greco, estarían justificadas por el proceso de proyección, de igual manera que las caras cuadradas de un cubo se transforman en esbeltos rombos al proyectarlos en isométrica.

Si la imaginación de El Greco llegó siquiera a intuir algo de todo esto, no cabe duda de que es porque a Doménikos Theotokópoulos como pintor, se mire con ojos matemáticos o no, hay que situarlo verdaderamente *en otra dimensión.*

ARTE CON OJOS MATEMÁTICOS ■

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 73-80

En las ciudades invisibles VIII

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

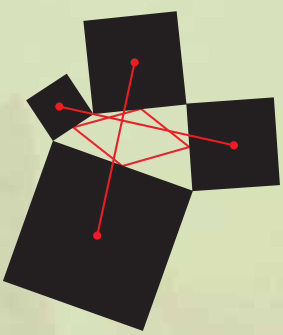
diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Si cada ciudad es como una partida de ajedrez, el día que llegue a conocer sus leyes poseeré finalmente mi imperio, aunque jamás consiga conocer todas las ciudades que contiene.

Para conocer un todo no es necesario el conocimiento exhaustivo de cada uno de los elementos que lo componen. Basta con determinar sus elementos fundamentales y saber qué leyes determinan la relación entre ellos y los demás. Solamente un todo pequeño (finito) puede conocerse por completo, elemento a elemento. Los todos más vastos (infinitos), jamás. Kublai se da cuenta de que no hay otro modo de conocer conjuntos tan grandes. El conjunto de los números naturales se conoce a partir de un elemento (uno) y de una ley de formación (uno más uno: dos). Un espacio vectorial se conoce a partir de los vectores de su base y del modo en que operan (suman y multiplican) entre ellos y con los escalares de un cuerpo K.

Kublai necesita al viajero Marco Polo. No para llevar a cabo una tarea documental y exhaustiva, sino para extraer de los informes del veneciano tanto la base (prototipos generadores) como las relaciones (operaciones) de su imperio. La tarea de Kublai no es sencilla, pues no construye su imperio de arriba abajo, como es costumbre en Matemáticas, sino de abajo arriba. Partiendo de las ciudades documentadas por Polo el emperador levanta un todo coherente y armonioso del que las ciudades acaban siendo meros casos particulares, reflejos locales, subgrupos o subespacios del grupo o espacio vectorial imperial. De la diversidad de lugares, gentes y costumbres, Kublai sacará una base y las operaciones que le permitirán *poseer finalmente su imperio.*

A veces le parecía que estaba a punto de descubrir un sistema coherente y armonioso por debajo de las infinitas deformidades y desarmonías...

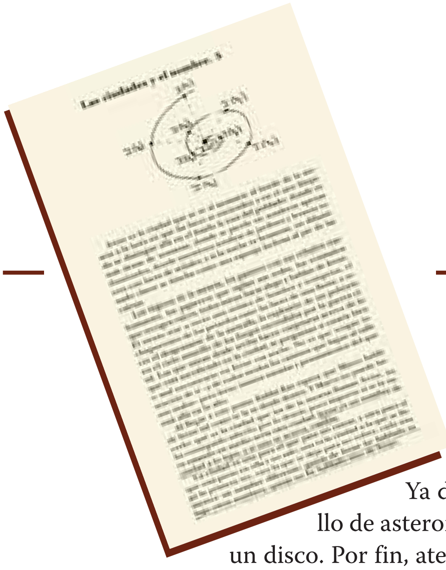


Si las leyes se encuentran en el fondo o en la superficie no importa. Importan la coherencia y armonía que revelan el orden subyacente en el caos. Las *infinitas deformidades y desarmonías*, aunque extraordinarias, acaban siendo previstas. Al final, el caos inicial es tan sólo eso, inicial, aparente. Kublai descubre el orden en el que se sostiene la selva igual que un matemático demuestra un teorema. Transforma en perenne una situación a priori extraordinaria, anecdótica, insólita. Así ocurre en el teorema de *Varignon*, el de *Napoleón* y el que afirma que los centros de los cuadrados construidos sobre los lados de un cuadrilátero cualquiera son perpendiculares.

Confinar el caos y el azar a reductos insignificantes es uno de los objetivos de la Ciencia y de algunas ramas de las Matemáticas. Consiste en buscar *sistemas subyacentes coherentes y armoniosos por debajo de las infinitas deformidades y desarmonías* para, a partir de ahí, establecer los isomorfismos que declararán como iguales cosas aparentemente distintas. Pero una sombra distorsiona el nítido horizonte del pensamiento de Kublai. ¿Descubre órdenes subyacentes o los impone como es propio de un emperador? ■

Diseño y maquetación FMC

Miquel Albertí Palmer
IES Vallés, Sabadell
ciudadesinvisibles@revistasuma.es


Las ciudades y el nombre. 5

Irene

Desde los confines del Universo la Tierra no existe. Entrando en la galaxia parece un punto. Ya dentro del sistema solar, y una vez superado el anillo de asteroides, el punto se ha agrandado hasta convertirse en un disco. Por fin, aterrizas sobre un plano.

...Irene es un nombre de ciudad desde lejos, y si uno se acerca, cambia.

Así pensaba que sería Irene antes de visitarla, pues *si uno se acerca, cambia*. Mi hipótesis era que la ciudad sería siempre ella misma y que los cambios producidos por la distancia serían tan sólo aparentes, fruto de mi aproximación. Sin embargo, a cada paso más distinta y compleja la veía. Entonces cambié mi modelo por otro más sutil y la concebí como una especie de conjunto de Mandelbrot el cual, pese a su autosemejanza global, presenta detalles invisibles a lo lejos y sólo distinguibles por la proximidad microscópica.

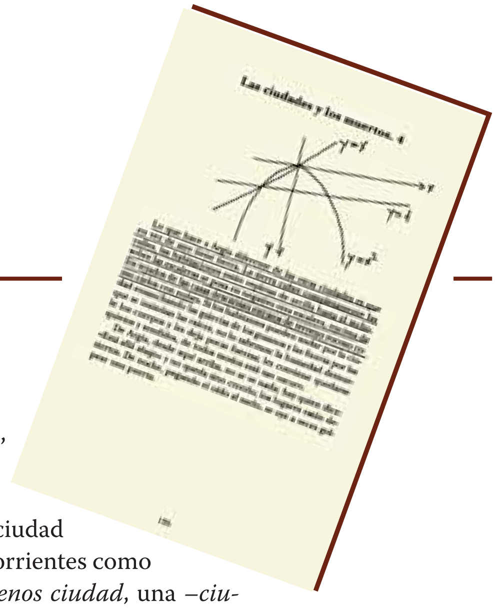
Si Irene cambia según la distancia, debe ser la misma cuando se la contempla desde puntos equidistantes de ella, sus cambios obedeciendo una ley de circunferencias concéntricas extendidas a su alrededor. Acercándote en línea recta siguiendo un radio común a todas ellas ves una ciudad distinta a cada instante. Esto dificulta tus pasos, pues no logras enfocar bien la ciudad. Sientes mareos y te detienes. Durante el reposo te das cuenta de que otros viajeros también se han detenido. Unos más cerca, otros más lejos, de ti y de Irene. Las discrepancias sobre la ciudad desaparecen en cuanto se entra en ella y la distancia se hace nula. Dentro de Irene sólo hay una única Irene.

...quizás de Irene he hablado ya bajo otros nombres; quizás no he hablado sino de Irene.

No resulta fácil hablar de Irene a quien no la ha visitado. Su fórmula no depende sólo del tiempo, también del espacio: $I(x, t)$. ¿Cómo explicar que la ciudad común para todo el mundo y de la única que puedes hablar es un límite: $I(0, t)$? Los límites no se entienden aisladamente, su sentido reside en la aproximación. Y cuando otro día tus pasos levantan unas casas en una colina pensarás que es Irene, pues como ella también cambia a medida que te acercas. Más tarde, al explicar tu viaje, no sabrás si hablas de ella o de Irene y te preguntarás si *no has hablado sino de Irene*. Y es que una vez que has estado en Irene ves que su característica es común a todas las ciudades. Ésa es tu conclusión, que todas las ciudades son Irene. Y cierras tu discurso con un consejo: dirigíos a ella dando un rodeo en espiral para mitigar así el vértigo del viaje. ■

Irene: *función del tiempo y del espacio*

Argia


Las ciudades y los muertos. 4

Lo que hace a Argia diferente de las otras ciudades es que en vez de aire tiene tierra. La tierra cubre completamente las calles, las habitaciones están repletas de arcilla hasta el cielo raso, ... encima de los techos de las casas pesan estratos de terreno rocoso como cielos con nubes.

...sobre las escaleras se posa en negativo otra escalera...

En lugar de levantar sus edificios hacia el cielo, Argia los hunde en la tierra. Pero no la vacía para llenarla de aire. Para ti, su aire es de tierra. Para un argiano, de aire es la tierra de la ciudad en que tú vives. Con respecto a las ciudades corrientes como la tuya, Argia es una ciudad negativa, una *menos ciudad*, una *–ciudad*, una *civitas minus*. El color de su cielo el marrón terroso. Un cielo cuyos aludes (vientos de tierra) agitan con gran peligro las rocas negras (nubes). Una fotografía de Argia parece la imagen en negativo de una ciudad corriente.

Es verdad que en esa ciudad *sobre las escaleras se posa en negativo otra escalera*, puesto que el complementario de una escalera es otra escalera. En las ciudades normales este complementario sería aéreo, pero en Argia las escaleras complementarias ascienden hacia las entrañas de la Tierra y son tierra pura. Las arquetas que el recién llegado ve en el suelo no cubren accesos a sistemas de alcantarillado, gas, electricidad o cables de TV, sino que cierran las casas de la ciudad negativa. Desconociendo tal característica pisotea esas puertas horizontales para desesperación de los argianos, que acuden corriendo a ver quién llama. Pero no le invitan a entrar. En lugar de eso, le piden a gritos que haga el favor de pasar de puntillas. Y él, no comprendiendo su lengua, confunde la algarabía con el ruido del metro o de los desagües como los que oye a diario en casa.

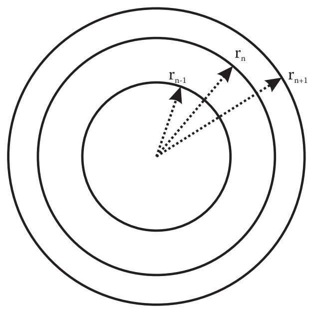
Abandonas Argia sin conocer a nadie de los que viven ahí enterrados, sin saber que también tú vives en una ciudad que los de ahí abajo llamarían *ciudad negativa*, *menos ciudad*, *–ciudad* o *civitas minus*. De saberlo, pensarías que quizá a los pies de tu ciudad también se adentre en la tierra otra ciudad opuesta y, por tanto, simétrica de la tuya con relación al plano en el que ambas se asientan. ■

Argia: *–ciudad: –(–Argia)*

Olinda

Los barrios de Olinda son coronas circulares. En el exterior tienen *mayor perímetro y menor espesor*, aunque *mantienen sus proporciones*. Con eso de que mantienen sus proporciones quizá Calvino quiso decir que las áreas de los barrios deben conservarse. Al ser mayores los perímetros de los barrios exteriores, éstos deben tener *menor espesor* para conservar el área de los interiores, de menor perímetro y mayor espesor. Se trata de un hermoso problema geométrico: ¿qué radios garantizan que las coronas de una serie de círculos concéntricos tengan la misma área?

Sea $\{r_n\}_{n\in \mathrm{N}}$ la sucesión de radios. Las áreas de dos coronas consecutivas son iguales si:



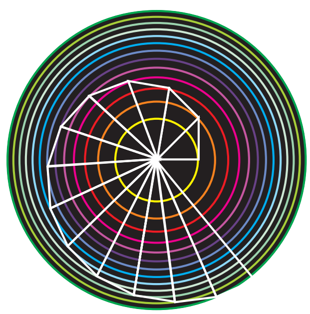
$$\pi\left(r_{n+1}^2 - r_n^2\right) = \pi\left(r_n^2 - r_{n-1}^2\right)$$

$$r_{n+1}^2 - r_n^2 = r_n^2 - r_{n-1}^2$$

$$r_{n+1}^2 = 2r_n^2 - r_{n-1}^2$$

$$r_n^2 = \frac{r_{n+1}^2 + r_{n-1}^2}{2}$$

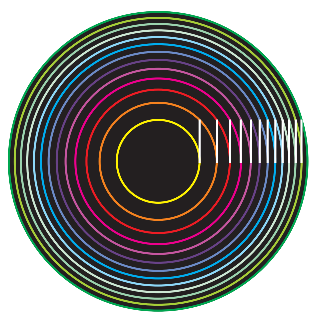
El cuadrado del radio de una corona tiene que ser la media aritmética de los cuadrados de los radios de sus dos coronas vecinas. La siguiente sucesión de radios cumple esta propiedad:



$$r_n = k\sqrt{n + c_0} \quad \mathrm{k,c_0} \in \mathrm{R}^+$$

Una configuración plausible para Olinda es la de una serie de coronas circulares cuyos radios son las raíces cuadradas de los números naturales *($r_0=1$, $k=1$, $c_0=0$): $\{\sqrt{n}\}_{n\in \mathrm{N}}$*. El área de cada barrio será π.

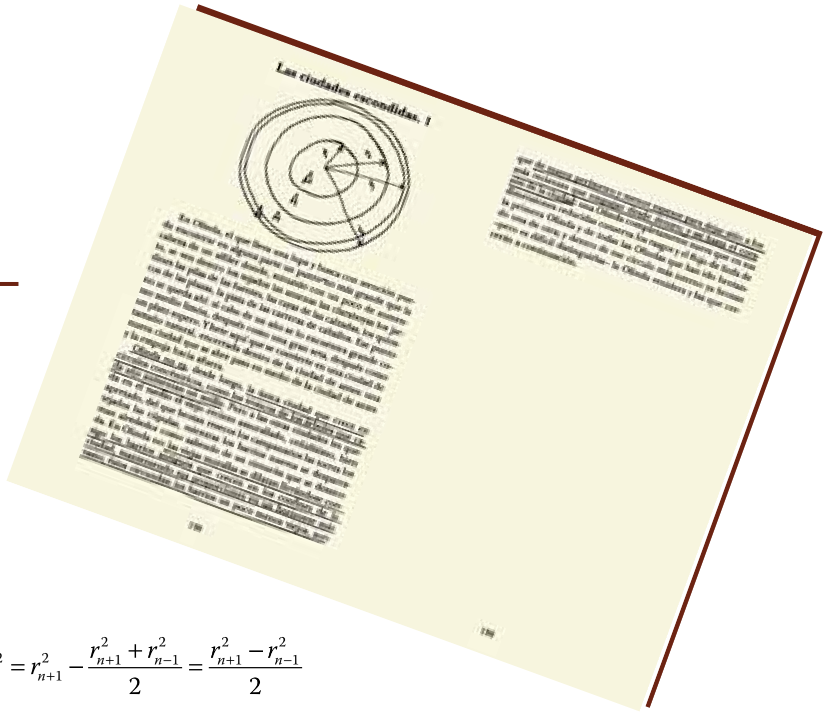
Se da la circunstancia de que todas las tangentes a la circunferencia interior de cada corona (de color blanco en la figura al margen) tienen idéntica longitud *c*.



En efecto, sean t_{n-1} y t_n son dos tangentes consecutivas. Entonces, son catetos de triángulos rectángulos de hipotenusas r_n y r_{n+1} respectivamente. Luego:

Olinda no es ... la única ciudad que crece en círculos concéntricos, como los troncos de los árboles que cada año aumentan un anillo...las viejas murallas se dilatan llevándose consigo los barrios antiguos que crecen en los confines de la ciudad, manteniendo sus proporciones en un perímetro más vasto; éstos circundan barrios un poco menos viejos, aunque de mayor perímetro y menor espesor para dejar sitio a los más recientes que empujan desde dentro...

Olinda


Las ciudades escondidas. 1

$$t_n^2 = r_{n+1}^2 - r_n^2 = r_{n+1}^2 - \frac{r_{n+1}^2 + r_{n-1}^2}{2} = \frac{r_{n+1}^2 - r_{n-1}^2}{2}$$

$$t_{n-1}^2 = r_n^2 - r_{n-1}^2 = \frac{r_{n+1}^2 + r_{n-1}^2}{2} - r_{n-1}^2 = \frac{r_{n+1}^2 - r_{n-1}^2}{2}$$

Aplicando también el teorema de Pitágoras se aprecia que el área de cada corona equivale precisamente al círculo que tiene por radio dicha tangente de longitud t:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi t^2$$

En Olinda me pregunté cómo sería una Olinda cuya extensión no se desarrollase en el plano, sino en el espacio. Me la imaginé como una ciudad cebolla. Así que cambié coronas circulares por esféricas, perímetros por superficies, áreas por volúmenes y cuadrados por cubos en las fórmulas anteriores:

$$\frac{4}{3}\pi\left(r_{n+1}^3 - r_n^3\right) = \frac{4}{3}\pi\left(r_n^3 - r_{n-1}^3\right)$$

El resultado que obtuve concordaba con la Olinda plana, pues la sucesión de radios más plausible para esa nueva Olinda era la de las raíces cúbicas:

$$r_n^3 = \frac{r_{n+1}^3 + r_{n-1}^3}{2} \Rightarrow r_n = k\sqrt[3]{n + c_0} \quad k, c_0 \in \mathrm{R}^+$$

¿Y qué decir de las bolas n-dimensionales que se hinchan empujando los barrios más viejos manteniendo sus proporciones en hiper superficies más vastas? Sus hiper volúmenes se conservarán si se consideran raíces enésimas.

Sin embargo, esas Olindas cúbicas y multidimensionales eran irreales e inventadas, fruto de mis desvaríos geométricos. La Olinda real era la ciudad anillada como el interior de un árbol y sustentada, como los árboles, por raíces. ■

Olinda: *la ciudad que crece como un árbol de raíces cuadradas*

Tecla

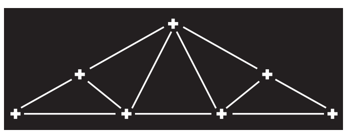
Tecla

...armazones que cubren otras armazones, vigas que apuntalan otras vigas.

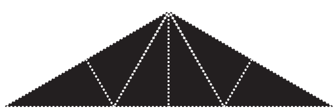
Cae la noche sobre las obras. Es una noche estrellada. – Éste es el proyecto –dicen.

La composición de una función consigo misma, la recurrencia $f \circ f$, también desempeña un papel destacado en la construcción de esta ciudad.

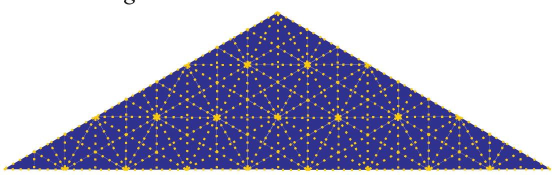
Si, como se afirma, el proyecto de las obras lo dictan las constelaciones, parece lógico que las estructuras arquitectónicas las evoquen con tejados sostenidos por cerchas renovadas según los descubrimientos de los astrónomos. *Éste es el proyecto*, pero las estructuras de Tecla no pueden reproducir fielmente el firmamento. Si lo hiciesen los edificios se derrumbarían. En las constelaciones abundan los cuadriláteros y escasean los triángulos, por lo que usar una constelación como modelo estructural es tan sólo una inspiración romántica inservible como armadura. De ahí que los arquitectos, o bien reinterpreten las constelaciones incorporando en ellas triangulaciones inexistentes, o bien las utilicen únicamente para poner nombres bellos a sus diseños: Pegaso, Casiopea, Hércules, Osa menor, Libra. Bajo esos nombres se ocultan los de quienes crearon tales estructuras: Pratt, Howe, Fink, Warren...



Contemplando las armaduras de Tecla me pregunté sobre la posibilidad de una cercha pitagórica hecha con triángulos rectángulos idénticos. Tras unos momentos de análisis diseñé una con mitades de triángulo equilátero.



Y como en Tecla se realizan *armazones que cubren otras armazones* y *vigas que apuntalan otras vigas*, me permití diseñar una ampliación de dicha cercha pitagórica. Me detuve en el nivel 4. Un armazón de $162=6\cdot3^3$ triángulos rectángulos en la que se pone de manifiesto la estructura hexagonal subyacente. No sé si podría sostener un techo, pero me parece tan bella que le he puesto nombre: *Hexagonum 306090.*




Las ciudades continuas. 2

Trude

Puedes remontar el vuelo cuando quieras, ...pero llegarás a otra Trude, igual punto por punto, el mundo está cubierto por una única Trude que no empieza ni termina...

Calvino habla de Trude bajo el epígrafe de ciudad continua, aunque en el ámbito matemático, el adjetivo apropiado es el de conexa. Una función pueden calificarse como continua o discontinua; un conjunto puede ser conexo o desconexo. La coherencia entre ambos términos está en que la gráfica de una función continua es un conjunto conexo:

$$f \text{ es continua en } X \text{ conexo} \Rightarrow f(X) \text{ es conexo}$$

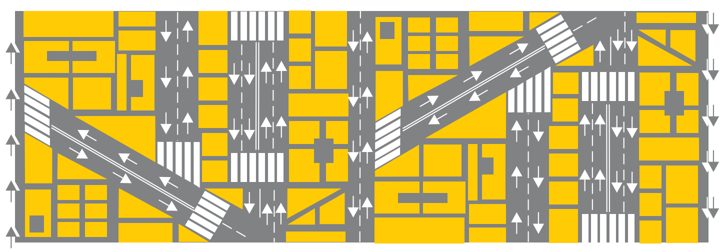
Imaginarse un conjunto conexo es fácil. Puedes recorrerlo sin salirte de él. Está hecho de una sola pieza, sin agujeros ni intervalos. Trude no tiene principio ni fin. Cubre el mundo entero sin interrupciones. Por tanto, Trude no es sólo la imagen conexa de una función continua como es la *función urbana*, Trude es, además, exhaustiva, lo cubre todo. La ciudad superficie del mundo es una esfera carente de referentes donde situar un origen o un fin. Cualquier lugar puede servir a tal propósito. Trude es la aldea global.

Pero no es la ausencia de principio o fin lo que hace a Trude continua, sino la función que la define. Una función *f(x)* es continua en un punto *a* si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Una ciudad es el resultado (imagen) de la aplicación de la función urbana a una parte del espacio llamada suelo (dominio). La función urbana transforma en ciudad aquel punto donde se levanta una casa, se abre un camino, se canaliza el agua de un río, se cava un pozo, se clava un semáforo o donde unos peregrinos extienden una estera para descansar. No sólo el hombre es su agente, también muchos animales.

Puesto que Trude es continua, mejor dicho, conexa, carece de 'puntos ciudad' aislados. Todo entorno, por ínfimo que sea, de un punto urbanizado *f(a)* contiene otros puntos urbanizados *f(x)*. Esta es la versión en lenguaje corriente de la definición abstracta y simbólica de función continua escrita más arriba. Trude se constituye en racionalización absoluta y exhaustiva del espacio en el que se asienta. Una banda de Möbius urbana le sirve de modelo: ■



Trude*: la ciudad continua*

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Saber científico versus saber socio cultural. Un tablero de ajedrez es mucho más que un cuadrado hecho con 32 cuadrados blancos y 32 negros sobre los que 16 piezas blancas y 16 negras trazan paralelas a los lados, diagonales y saltos.

El matemático podría expresar de diversos modos los posibles destinos de cada pieza desde una posición cualquiera en el tablero, ya sea mediante vectores (componentes del movimiento origen-final desde la posición ocupada por la pieza) o mediante coordenadas polares (la distancia *d* y el ángulo *A* del movimiento con respecto a la base del tablero):

$0 \le k \le 7$, $k \in$ N		$0 \le k \in$ N
(0, 1)	*Peón*	$d=2$, $A=90^\circ$ / $d=1$, $A=90^\circ$ / $d=\sqrt{2}$, $A=45^\circ$, 135°
$(\pm k, 0)$, $(0, \pm k)$	*Torre*	$d=k\le 7$, $A=0^\circ$, $\pm 90^\circ$, 180°
$(\pm 2, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm 2)$	*Caballo*	$d=\sqrt{5}$, $A=\pm\text{arctg}(\pm 1/2)$, $\pm\text{arctg}(\pm 2)$
$(\pm k, \pm k)$	*Alfil*	$d=k\cdot\sqrt{2}$ $(k\le 7)$, $A=\pm 45^\circ$, $\pm 135^\circ$
$(\pm k, \pm k)$, $(\pm k, 0)$, $(0, \pm k)$	*Reina*	$d=k\le 7$, $A=0^\circ$, $\pm 90^\circ$, 180° / $d=k\cdot\sqrt{2}$ $(k\le 7)$, $A=\pm 45^\circ$, $\pm 135^\circ$
$(\pm k, \pm k)$, $k=0,1$	*Rey*	$d=1$, $A=0^\circ$, $\pm 90^\circ$, 180° / $d=\sqrt{2}$, $A=\pm 45^\circ$, ± 135

Pero eso sería confuso y estúpido. Hoy en día el código que señala la posición de las piezas se basa en una coordenada alfabética horizontal y otra numérica vertical. Dada la inutilidad de las cábalas precedentes, algunos matemáticos se preguntarán por los posibles movimientos de cada pieza, o por el número de posibles movimientos de todas juntas. Incluso por el número de partidas distintas posibles que acaben con la victoria de blancas, negras, o en tablas. Los habrá quienes se creerán matemáticos precisamente porque empiezan a sumar las componentes vectoriales de diversos recorridos y porque se formulan preguntas de ese estilo. Pero nada de eso es *Ajedrez*. Comprender el intríngulis geométrico de algo no significa conocerlo.

Otra cosa es conocer el tablero. Sin conocimiento científico el tablero no existiría tal y como es. ¿Cómo garantizar la perfecta alineación de las casillas, la misma longitud de sus cuatro lados y sus ángulos rectos? ¿Cómo asegurar el plano de la superficie resultante, un gran cuadrado de cuadrados? Tareas imposibles sin Matemáticas, aunque no baste con ellas. Calvino expone un aspecto esencial del conocimiento artesanal. Su descripción del tablero omite cualquier detalle técnico. No es lo importante. Lo que importa es la habilidad y maestría del artesano para aprovechar los defectos y virtudes de la madera, para ajustar perfiles distintos, para casar asperezas. Los defectos no son inútiles ni despreciables. Su utilidad está en complementarlos con otros defectos y virtudes. Quien no sabe aprovecharlos no es artesano ni maestro, tampoco profesor. Si el matemático se limita a lo suyo corre un grave peligro, como señala Kobo Abe (2007) en *El rostro ajeno*, de 'ver el triángulo y no ver el pan' cuando contempla un pan triangular. ¿Tiene sentido hablar del triángulo de un pan triangular sin referirse al pan? ¿Y hablar de los cuadrados del tablero de Ajedrez y de los trayectos geométricos de sus piezas sin considerar la madera ni el juego? No creo que sea éste el sentido de las Matemáticas.

EN LAS CIUDADES INVISIBLES ■

Tu tablero, sire, es una taracea de dos maderas: ébano y arce. La tesela en la que se fija tu mirada luminosa fue tallada en un anillo del tronco que creció durante un año de sequía: ¿ves cómo se disponen las fibras? Aquí protubera un nudo apenas insinuado: una yema trató de despuntar un día de primavera precoz, pero la helada de la noche la obligó a desistir... Aquí hay un poro más grande: tal vez fue el nido de una larva; no de carcoma, porque apenas nacido hubiera seguido excavando, sino de un brugo que royó las hojas y fue la causa de que se eligiera el árbol para talarlo... Este borde lo talló el ebanista con su gubia para que se adhiriera al cuadrado vecino que sobresalía...

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 81-95

Mi presentación

Daniel Sierra Ruiz

Granada, julio de 2007. Un grupo de participantes en cierto congreso salen de un edificio de la universidad con extrañas estructuras en sus manos hechas de pajitas, de las de beber, y una sonrisa que va desde una oreja hasta la otra. Uno de ellos se encuentra con un conocido que le pregunta por la estructura, a lo que el primero le contesta con gesto solemne «Parece mentira que tú, todo un profesor de matemáticas, no veas que esto es una representación tridimensional de un hipercubo, o, mejor dicho, un tesseract», y estalla en carcajadas. Algo así es lo que ocurrió en las últimas JAEM a la salida de uno de los talleres que presentó la firmante de *Mi biblioteca particular* de este número, Covadonga Rodríguez-Moldes. Visto el resultado en los profesores, imagínense en el alumnado de secundaria. Quien piense que los alumnos de hoy no se ilusionan por nada, que pruebe este sencillo material.

Las JAEM tienen algunos detractores y hay quien piensa que como las de los primeros años ya no se celebran. Sin embargo, existen algunos aspectos en las que son insuperables. Cuando uno coge rumbo a este oficio de profesor, en seguida le empiezan a hablar de las bajas por depresión, de las agresiones, de la desmotivación del alumnado…, en fin, que las ganas se pueden marchar igual que han venido. Sin embargo, en estas reuniones, ahora veraniegas, se puede ver a personas que llevan muchos años en ello, que van a seguir y, sobre todo, que lo hacen con una gran ilusión. Sin duda, Covadonga (a quien sólo conocía de acudir a sus talleres) es una clara representante de este tipo de profesional: aquel que no descansa en su búsqueda de nuevos materiales que mejoren la práctica diaria, que, transitando por nuevas vías, intenta constantemente motivar a sus alumnos superando incluso los momentos de desesperanza —provocados por unos adolescentes inmersos en una sociedad que cada vez valora menos el esfuerzo—, y que, además, no se cansa de compartir sus experiencias con los demás (su activa y continua presencia en múltiples foros así lo atestigua). Al ver a personas como ella, es cuando piensas que la profesión merece la pena.

Además, Covadonga transmite una imagen de modestia y humildad que he podido comprobar en todos los compañeros gallegos que he conocido; como uno de ellos dijo en otras JAEM (pongan acento gallego, por favor) «yo no inventé

Daniel Sierra Ruiz (coordinador de la sección)
IES Benjamín Jarnés, Fuentes de Ebro (Zaragoza)
biblioteca@revistasuma.es

nada, ¿para qué? Con la de cosas hay inventadas ya». Así que no sé si es por este andar como de puntillas que tienen o porque nos quedan *tan lejos,* pero parece que nos olvidamos de ellos.

Por cierto, que ella va a ser la primera mujer que firme en la sección, lo que no deja de ser curioso, puesto que entre el profesorado de matemáticas el número de mujeres sigue creciendo, posiblemente superando el de hombres, por lo que, afortunadamente, queda obsoleto aquel prejuicio sobre las capacidades de cada uno de los sexos para nuestra ciencia.

No voy a enumerar más méritos, ni motivos; es sencillo rastrear su labor en el sinnúmero de talleres, ponencias y actividades de lo más diversas. Sólo añadir que agradezco que haya podido encontrar un hueco en su apretado calendario profesional y personal para escribir esta colaboración. Para mi es una gran satisfacción que Covadonga Rodríguez-Moldes Rey nos ofrezca *su biblioteca particular.*

Mi biblioteca particular

Covadonga Rodríguez-Moldes Rey

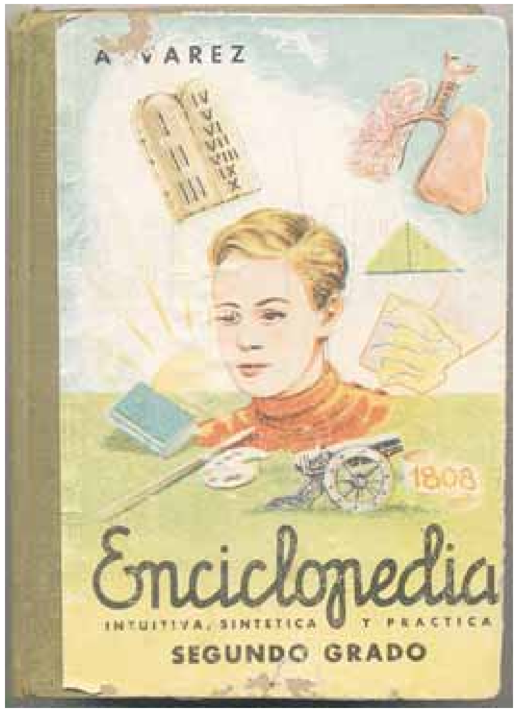
Acepté ilusionada la invitación de Daniel para ocupar este espacio sin ser consciente de la enorme osadía que ello suponía; ahora, cuando ya no hay marcha atrás, afronto asustada la tarea no sin antes detenerme a dar a conocer mis coordenadas como elemento que soy de MAT^5, el conjunto de estructura todavía no suficientemente bien estudiada al que pertenecemos todos aquellos humanos que tenemos relación de forma consciente y directa con las matemáticas. Conocer a quien va a emitir opinión me parece la forma más adecuada de prevenir los posibles desajustes a las expectativas que pueda suscitar mi aportación a la sección.

Bien, paso pues a definirme a través de las cinco coordenadas que me corresponden como elemento de MAT^5. Estas son (43º25‘36“N, 8º14‘34‘, 0, LIII, P_2++). Las tres primeras me ubican geográficamente a orillas del mar, en una península habitada por doce mil personas situada en el noroeste español. La cuarta es la de mi edad y, aunque pueda parecer una trivialidad, el criterio de usar números romanos para esta coordenada me agrada: LIII es más atractivo y liviano que XXXV y esto no suele suceder al invertir el orden de las cifras de un número en notación decimal. Por último, mi quinta coordenada, la controvertida componente matemática, es P_2++. Conviene recordar que, después de muchas discusiones, esta coordenada puede tomar los siguientes valores: P si el individuo es un docente, E si es estudiante, I si se dedica a la investigación y A si se es una persona con afición a las matemáticas —después de la última revisión quedó descartada la U de usuario por considerarse que la poseen todos los elementos de MAT^5—. Se recuerda también el significado de los subíndices: 1 primaria, 2 secundaria y 3 universidad y que se pueden añadir hasta dos signos + que indican el grado de satisfacción e implicación del individuo con las matemáticas; así, P_{23} correspondería a un docente con actividad principal en secundaria pero colaborando con la universidad y E_3+ a una activa estudiante universitaria.

A través de mis coordenadas se percibe que soy a una persona de pueblo, profesora de matemáticas en secundaria, entregada a una profesión que me satisface plenamente y en edad de compartir experiencias después de tres décadas de intensa labor docente. Nada más. Paso ahora a dar respuesta al cuestionario.

Si tuvieras que empezar tu biblioteca matemática ahora, ¿con que libro o libros de los de tus primeros años como matemática comenzarías?

Para contestar trataré de recordar cuales fueron los primeros libros que despertaron mi curiosidad matemática..., ¡ya está!, sin lugar a dudas, el primero, el segundo y el tercero fueron la E*nciclopedia Álvarez primer grado, segundo grado y tercer grado* respectivamente, reeditadas en 1997 por la editorial EDAF. Recuerdo que cuando era niña me detenía una y otra vez en los dibujos de la parte de geometría, tanto es así que siguen fijados en mi memoria de forma que podría ubicarlos sin error en la página correspondiente. La idea de un único libro en ciertas etapas de primaria me parece que debería ser recuperada por muchas razones: acceso cómodo y rápido a la parte preferida —literatura, ciencias, historia, matemáticas...— facilita a los padres la ayuda en las tareas escolares, no se quedaría olvidado en casa, no supone un peso excesivo para transportar y, sin lugar a dudas, resulta más económico tanto para las familias como para el Estado.



...me encontré con unos libros de texto de matemáticas, tristes, sosos, nada que ver con los de hoy en día...

Continúo; llegué al bachillerato sabiendo que me gustaban las matemáticas y allí me encontré con unos libros de texto de matemáticas, tristes, sosos, nada que ver con los de hoy en día, pero que cumplieron su misión de mantener mi interés por la materia. Ya en la facultad lamento profundamente haber basado mis estudios en los apuntes recogidos en clase y no directamente en los textos de autores matemáticos importantes. Espero que hoy en día en las facultades haya cambiado esta tendencia de estudiar casi exclusivamente «por apuntes». También en secundaria muchos profesores siguen «dando apuntes» basando en ellos su actividad docente y utilizando poco los excelentes textos disponibles a los que en muchos casos apenas se recurre más que para marcar ejercicios y actividades de «hacer en casa».

Como consecuencia de lo dicho anteriormente, empezaría mi biblioteca matemática con todos mis libros que texto escolares.

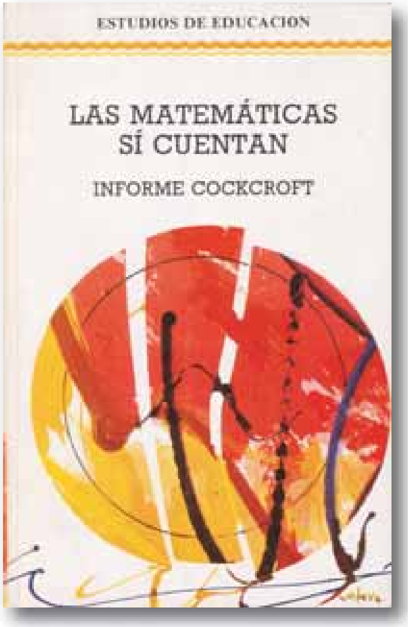
¿Qué libro o libros de didáctica de las matemáticas consideras destacables por lo que en su momento y en el desarrollo posterior de la disciplina supusieron para ti?

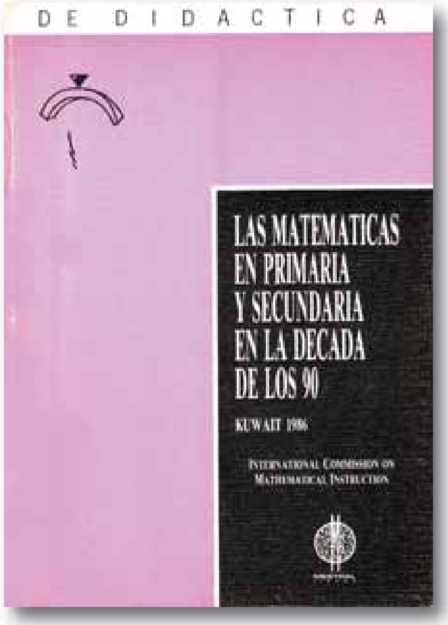
En mis primeros años de docencia intenté ser una buena profesora dentro del sistema sin atreverme a cuestionar los métodos de enseñanza que estaba utilizando y que se basaba esencialmente en repetir la enseñanza que yo había recibido. En el año 1993 acudo a mis primeras JAEM, en Badajoz y todo cambia para mi (por cierto, desde entonces no he faltado nunca a la cita bianual que espero siempre con impaciencia). En Badajoz descubrí tres libros que cambiaron mi concepción de la enseñanza de las matemáticas: *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft, Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90. Kuwait 1986* del *ICMI* (Mestral, 1987) y los *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática* del *NCTM* editado por SAEM Thales (Sevilla, 1991), conocidos como «Informe Cockcroft», «Informe Kuwait» y «Estándares» respectivamente.

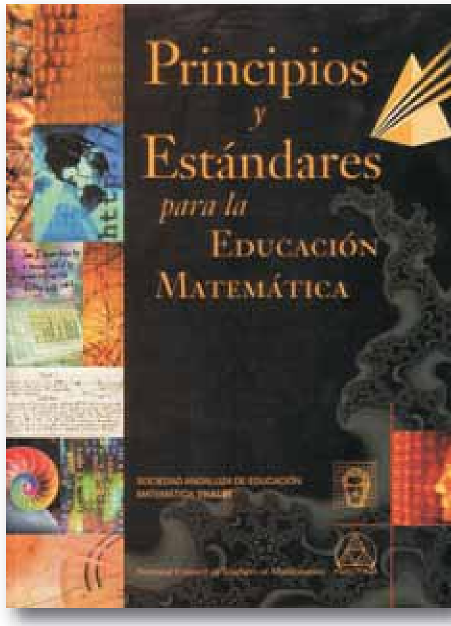
Del Informe Cockcroft editado por el MEC en 1985 destacaría:

> ...las cinco cosas que debía incluir la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles son:
>
> • exposición por parte del profesor
> • discusión entre el profesor y los alumnos y entre estos últimos
> • trabajo práctico apropiado
> • consolidación y práctica de las destrezas y rutinas básicas
> • resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las matemáticas a las situaciones de la vida cotidiana
> • realización de trabajos de investigación

En el «Informe Kuwait» elaborado en febrero de 1996 por los expertos en educación matemática entre los que estaba el







profesor Ubiratán D'Ambrosio reunidos con el objeto de analizar lo que deberían ser las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90 pude leer:

> ...en cualquier grupo socio-cultural hay una gran variedad de herramientas para clasificar, ordenar, cuantificar, medir, comparar, tratar la orientación espacial, percibir el tiempo, planear actividades, razonar lógicamente, relacionar acontecimientos u objetos, deducir, actuar de acuerdo a los recursos, dependencias y restricciones existentes, etc. Aunque estas sean actividades matemáticas, las herramientas no son normalmente herramientas explícitamente matemáticas. En cualquier caso, constituyen los componentes básicos del comportamiento matemático, cuyo desarrollo debería ser un objetivo prioritario en la enseñanza de las matemáticas en la escuela

y así fue como me interesé por las *etnomatemáticas.* Por último, en los «Estándares» comprendí que

> Los nuevos objetivos sociales de la enseñanza de las matemáticas son.
>
> - aprender a valorar las matemáticas
> - adquirir seguridad en la propia capacidad
> - ser capaz de resolver problemas matemáticos
> - aprender a comunicarse matemáticamente
> - oportunidad para todos
> - electorado bien informado»

A pesar de los más de veinte años transcurridos desde que aparecieron estas publicaciones pienso que su contenido sigue siendo útil en los tiempos de cambio continuo que estamos viviendo en nuestra profesión docente y su lectura sigue siendo útil y sugerente.

¿Algún libro de didáctica de las matemáticas ha influido en tu desarrollo docente por encima de otros?

En la pregunta anterior me referí a tres publicaciones que surgen del análisis y posterior consenso de muchos expertos en educación matemática; ahora debo referirme a mis tres maestros, a las personas cuyas enseñanzas, opiniones e ideas sobre la enseñanza de las matemáticas intento humildemente imitar. Se trata de Pedro Puig Adam, Miguel de Guzmán y Emma Castelnuovo. A Puig Adam he tenido la oportunidad de estudiarlo y conocerlo a través del legado matemático de una tía mía ya fallecida, Asunción Rodriguez-Moldes, que inició su periplo de profesora de matemáticas en el Instituto Laboral de Ribadeo (Lugo) justo en el momento en que Puig Adam es

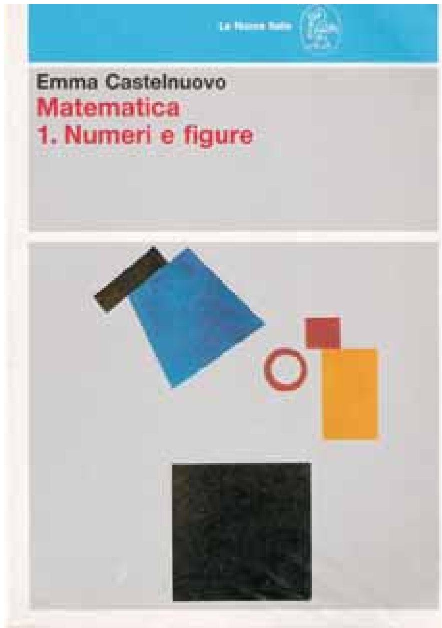
> *Cualquier persona interesada en la cultura y en el conocimiento humanístico no debería excluir de sus lecturas el conocimiento de los aportes de las ciencias, y en concreto de las matemáticas, a la humanidad*

nombrado Asesor de Matemáticas en los Institutos Laborales (1956) convirtiéndose así en su *maestro*. Un libro de Puig Adam que influye mucho en mi desarrollo docente es *Didáctica matemática eurística* editado en 1956 por el Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral (Madrid), en el que nos da a conocer treinta lecciones «activas» sobre la enseñanza de matemáticas en secundaria que van desde la división y sus propiedades, potencias y cálculo con exponentes, nociones de proporcionalidad directa e inversa, ecuaciones lineales y sistemas hasta los poliedros; en esta lección explica como crea el *omnipoliedro*, una extraordinaria figura geométrica todavía no suficientemente conocida tanto dentro como fuera de España. Puig Adam en la introducción del libro previene de «el peligro de un vicio que en ningún modo quisiera fomentar con este libro: el de la imitación; uno de los más graves y frecuentes en pedagogía» pues «la buena didáctica no admite soluciones rígidas» y recomienda «Aprendan ante todo los profesores a observar atentamente a sus alumnos, a captar sus intereses y sus reacciones, y cuando sepan leer bien en ellos, comprobarán que en ningún libro ni tratado existe tanta sustancia pedagógica como en el libro abierto de una clase, libro eternamente nuevo y sorprendente». Precioso ¿no?.

A Emma Castelnuovo y a Miguel de Guzmán he tenido la dicha de escucharles directamente —de nuevo en las JAEM— y, como no podía ser de otra forma, me convertí en su seguidora. De Miguel de Guzmán cito una obra de consulta continua en la que siempre encuentro algo que aprender. No está en mi biblioteca sino en mi *cedeoteca*, se trata de *Pensamientos en torno al quehacer matemático*, el magnífico trabajo de recopilación que generosamente nos dejó el añorado profesor en el que está recogida tanta sabiduría, tantos pensamientos, sugerencias y consejos que es una obra imprescindible para cualquier persona interesada en las matemáticas y en su enseñanza. De la entrañable profesora Emma Castelnuovo quiero mencionar unos libros con muchas ideas y material de trabajo para llevar directamente al aula, se titulan *Matemática 1. Numeri e figure* y *Matemática 2. Figure e formule* de la editorial La Nuova Italia (1989), una fuente inagotable de propuestas didácticas concretas, el primero, con casi ochocientas páginas, *per la 1º e la 2ª classe della scuola media* y el segundo, casi seiscientas páginas, *per la 3ª classe della scuola media.*

¿Qué libro de visión general de las matemáticas recomendarías a un no matemático interesado en leer algo sobre el tema?

Me resulta muy difícil contestar a esta pregunta porque hoy en día hay en el mercado muchísimas publicaciones en las que las matemáticas tienen un papel importante. En cualquier librería se pueden encontrar libros para todas las edades y condiciones: cuentos novelas, biografías…, no hay presupuesto suficiente para su adquisición ni espacio para colocarlos..., ¡tampoco tiempo para leerlos! Sin embargo me atrevo a recomendar un libro que ya ha aparecido en esta sección con anterioridad y que pienso debe alcanzar la categoría de «clásico» —en el sentido de que no debería faltar en ninguna biblioteca—, es *Viaje a través de los genios. Biografías y teoremas de los grandes matemáticos* de William Dunham (Editorial Pirámide, 1993). En los capítulos de este libro van apareciendo tanto aspectos biográficos de Euclides, Arquímedes, Cardano, Newton, Euler o Cantor como las explicaciones de los aportes geniales a las matemáticas de estas figuras. Según el autor «aquí presento los clásicos genuinos (los "Hamlets" o las "Mona Lisas") de las matemáticas». Cualquier persona interesada en la cultura y en el conocimiento humanístico no debería excluir de sus lecturas el conocimiento de los aportes de las ciencias, y en concreto de las matemáticas, a la humanidad. Este libro es una magnífica oportunidad para ello.



Aparte de los mencionados, ¿destacarías algún otro libro por su belleza, originalidad, repercusión...?

Pues sí, un libro que encontré por casualidad en 1976 en unos almacenes de Santiago llamados «El Pilar». En medio de montones de productos rebajados estaba un ejemplar del libro *El hombre que calculaba* de Malba Tahan, seudónimo usado por el brasileño Júlio César de Mello e Souza que lo escribió en 1946. Cuando lo compré yo estaba en la mitad de una carrera en la que creía no había espacio para la poesía y la belleza. Fue un maravilloso descubrimiento. He utilizado este libro en mi actividad docente en numerosas ocasiones y seguiré haciéndolo al margen de la practicidad o los currículos pues, como dice de sí mismo el sabio calculador Beremiz en el libro «Cuento los versos de un poema, calculo la altura de una estrella, cuento el número de franjas de un vestido, mido el área de un país o la fuerza de un torrente, aplico en fin las fórmulas algebraicas y los principios geométricos, sin ocuparme del lucro que pueda resultar de mis cálculos o estudios. Sin el sueño y la fantasía, la ciencia se envilece. Es ciencia muerta.». Es un libro que se reedita continuamente siendo la última edición de Verón Editores en 2007.

Puedes dar alguna cita de tus lecturas que tenga que ver con las matemáticas que hayas incorporado a tus referencias?

Hay una cita que puedo repetir de memoria sin equivocarme que no está relacionada específicamente con las matemáticas sino con la tarea de enseñar. Su autor, de nuevo, es Pedro Puig Adam y aparece en la Circular n.º 4 de la Asesoría de Matemáticas que él envía al comenzar el curso 1956-57 saludando al profesorado de matemáticas de los Institutos Laborales y dice así:

> Cuando cada profesor se sienta creador de obra didáctica en su clase, específicamente suya y como tal con peculiaridades y novedades que la distinguen de las demás, sentirán como nunca la belleza de nuestra tarea y se gozarán enseñando, como sus alumnos aprendiendo.

Me reconforta ese reconocimiento de que cada aula es distinta de las demás, de que lo que sirve en un aula no sirve para otra, nadie puede darnos recetas y tenemos que dedicar todos nuestros esfuerzos a la *creación de obra didáctica* para sentir la belleza de nuestra profesión.

En tus lecturas ajenas a las matemáticas (literatura, arte...), ¿has encontrado algún libros recomendable en el que las matemáticas (como resultado o como inspiración) jueguen un papel interesante?

El autor que primero me viene a la memoria es Borges con dos títulos, los relatos *La biblioteca de Babel* y *El Aleph*; se que esta respuesta no es nada original pero no puedo aportar otra. Cada vez que leo estos cuentos me asombro: ¿cómo es posible describir con tanta belleza conceptos como el instantáneo y eterno infinito?: «El diámetro del Aleph sería de dos o tres centímetros, pero el espacio cósmico estaba ahí, sin disminución de tamaño. Cada cosa (la luna del espejo, digamos) era infinitas cosas, porque yo claramente la veía desde todos los puntos del universo» o «vi en el Aleph la tierra, vi mi cara y mis vísceras, vi tu cara, y sentí vértigo y lloré, porque mis ojos habían visto ese objeto secreto y conjetural, cuyo nombre usurpan los hombres, pero que ningún hombre ha mirado: el inconcebible universo».

También quiero referirme a un libro cuya lectura, hace más de diez años, fue importante para mi por hacerme reflexionar sobre el desigual trato dado a las mujeres a lo largo de la historia. El libro se titula *Las vidas privadas de Einstein* de Roger Highfield y Paul Carter, editado por Espasa-Calpe (1996), en el que se analiza, entre otros documentos, la correspondencia entre Einstein y la que fue su primera mujer, Mileva Maric, quien parece que, debido a sus conocimientos matemáticos, jugó un papel importante en los orígenes de la teoría de la relatividad. Me parece enormemente injusto el trato recibido por una mujer intelectual tanto de su compañero («...Ya han pasado tres semanas y media, y una buena mujercita no debe dejar a su marido por más tiempo. Las cosas en casa aún no están tan desordenadas como piensas. Podrás limpiarlas en un periquete») como de las instituciones *(a las mujeres les estaba prohibido matricularse en Heidelberg)*. Por desgracia creo que en la actualidad todavía queda mucho trabajo por hacer para lograr la igualdad debida.

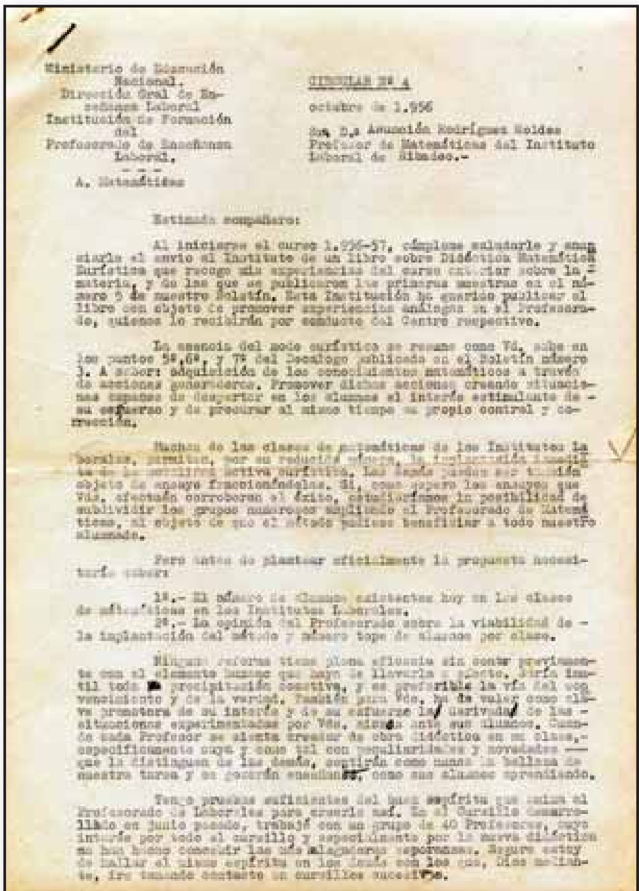
> *...nadie puede darnos recetas y tenemos que dedicar todos nuestros esfuerzos a la creación de obra didáctica para sentir la belleza de nuestra profesión...*

¿Qué libro te resulta más interesante entre los últimos que has leído sobre matemáticas?

Un libro que leí hace un año, *El código de Arquímedes,* de Reviel Netz y William Noel, de la editorial temas de hoy (2007). Se trata de un libro en el que los autores describen todo el proceso realizado para descifrar e interpretar lo que escondía detrás de las plegarias cristianas el llamado *palimpsesto de Arquímedes*. Es un libro muy curioso con muchas imágenes de todo el proceso desde que el *palimpsesto,* adquirido en una subasta por un misterioso comprador es puesto en manos de William Noel, experto curador del Museo de Arte Walters en Baltimore, con el encargo de formar un equipo para descifrarlo y estudiarlo. Noel llama para esta tarea, entre otros a Reviel Netz, matemático experto en Ciencia Antigua en la universidad de Standford y «amigo de Arquímedes». En el libro se cuenta la aventura maravillosa que supuso el descubrir fragmentos nuevos de la obra de Arquímedes que lo confirman como «el científico más importante que jamás haya existido», capaz de anticiparse a la teoría de conjuntos o de hacer cálculos utilizando sumas infinitesimales como luego usará el cálculo moderno o de hacer operaciones con los infinitos actuales. Pero además de todo esto, el libro me hizo reflexionar sobre la importancia del trabajo en equipo, algo que creo no estamos trabajando en las aulas con la intensidad que debiéramos —basta observar la disposición de los pupitres en las aulas en la mayoría de las imágenes que aparecen en los medios de comunicación—. Tenemos que ser conscientes de la importancia del trabajo en equipo o del trabajo cooperativo, es la manera de avanzar, aprendiendo y compartiendo aprendizajes con los demás. Es bueno para las matemáticas y para la vida.

Coméntanos algún libro no matemático que hayas leído últimamente y que te gustara especialmente.

Hace muchos años, cuando era una jovencita, mi padre, de quien aprendí a valorar en un hogar más que sus paredes los libros que las cubren, me aconsejó la lectura del libro de Stefan Zweig, *Momentos estelares de la humanidad*, pero yo desconfié no solo del título del libro sino también del bigotillo rectangular sobre el labio superior del autor y no leí el libro. Este último año fue mi madre quien me incitó vivamente a leer *Memorias de un europeo* (Editorial Acantilado, 2005) del mismo autor. Esta vez si hice caso, no podía ser de otra forma ya que mi madre es una lectora muy perspicaz. Y tenía razón. Me encontré con un tesoro: el testimonio de un intelectual, un escritor vienés con mucho éxito en toda Europa, nacido en 1881, que participa de los cambios que se suceden en la primera mitad del siglo XX, viviendo y narrando la descomposición de Europa por las dos guerras, suspirando y trabajando por el ideal de una Europa sin fronteras ni exclusiones. Son muchos los personajes famosos que aparecen en estas memorias y muchas las enseñanzas de este estudioso y filántropo. Me parece un libro altamente recomendable en el que para mí, la única pero importante pega es la escasa presencia femenina. En las primeras páginas del libro, Zweig describe su paso por la escuela: «No recuerdo haberme sentido "alegre y feliz" en ningún momento de mis años escolares —monótonos, despiadados e insípidos— que nos amargaron a conciencia la época más libre y hermosa de la vida, hasta tal punto que, lo confieso, ni siquiera hoy logro evitar una cierta envidia cuando veo con cuanta felicidad, libertad e independencia pueden desenvolverse los niños de este siglo», y habla así de sus profesores «No eran buenos ni malos, ni tiranos ni compañeros solícitos sino unos pobres diablos que, esclavizados por el sistema y sometidos a un plan de estudios impuesto por las autoridades, estaban obligados a impartir su "lección" —igual que nosotros a aprenderla— y que, eso sí que se veía claro, se sentían tan felices como nosotros cuando, al mediodía, sonaba la campana que nos liberaba a todos». Estas frases me hacen reflexionar, pues no quisiera ser recordada así por mis alumnos. La conclusión es la necesidad de seguir aprendiendo para mejorar en el desempeño de nuestra querida y difícil profesión. ■


Ministerio de Educación Nacional.
Dirección Gral de Enseñanza Laboral
Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.
A. Matemáticas

CIRCULAR Nº 4
octubre de 1.956

Estimado compañero:

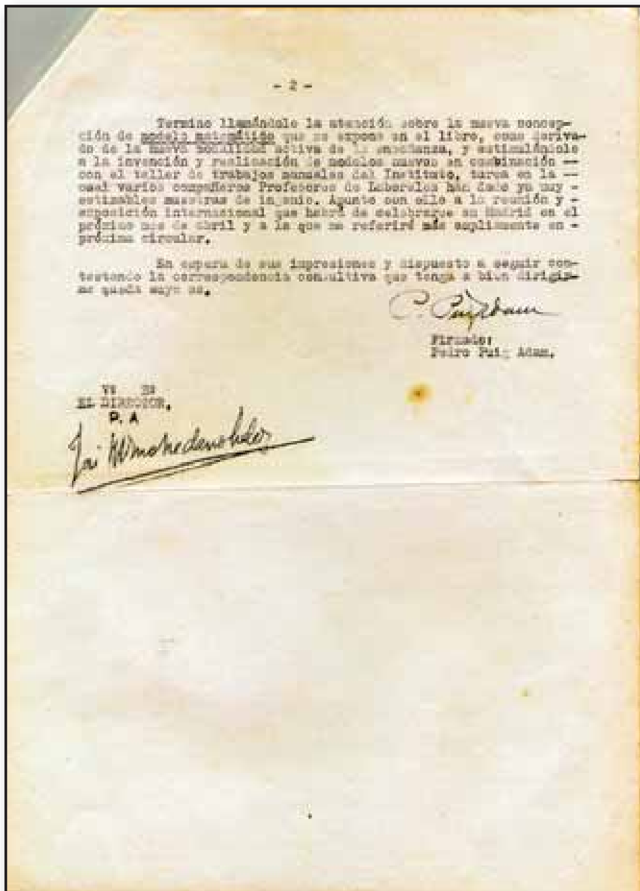
Al iniciarse el curso 1.956-57, cúmpleme saludarle y anunciarle el envío al Instituto de un libro sobre Didáctica Matemática Eurística que recoge mis experiencias del curso anterior sobre la materia, y de las que se publicaron las primeras muestras en el número 5 de nuestro Boletín. Esta Institución ha querido publicar el libro con objeto de promover experiencias análogas en el Profesorado, quienes lo recibirán por conducto del Centro respectivo.

[illegible]

Pero antes de plantear oficialmente la propuesta necesitaría saber:

1º.- El número de alumnos existentes hoy en las clases de matemáticas en los Institutos Laborales.
2º.- La opinión del Profesorado sobre la viabilidad de la implantación del método y número tope de alumnos por clase.

[illegible]


- 2 -

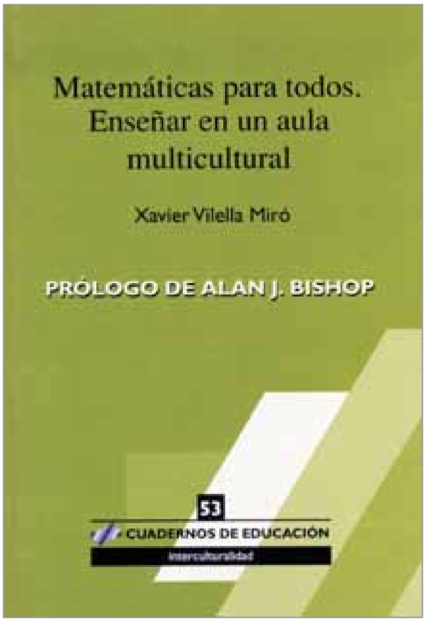
Termino llamándole la atención sobre la nueva concepción de modelo matemático que se expone en el libro, como derivado de la nueva modalidad activa de la enseñanza, y estimulándole a la invención y realización de modelos nuevos en combinación con el taller de trabajos manuales del Instituto, tarea en la cual varios compañeros Profesores de Laborales han dado ya muy estimables muestras de ingenio. Apunte con ello a la reunión y exposición internacional que habrá de celebrarse en Madrid en el próximo mes de abril y a la que me referiré más ampliamente en próxima circular.

En espera de sus impresiones y dispuesto a seguir contestando la correspondencia consultiva que tenga a bien dirigirme queda suyo af.

Firmado:
Pedro Puig Adam.

Vº Bº
EL DIRECTOR,
P.A

Escaparate 1:
Matemáticas para todos. Enseñar en un aula multicultural



MATEMÁTICAS PARA TODOS. ENSEÑAR EN UN AULA MULTICULTURAL.
Xavier Vilella Miró
ICE Universitat de Barcelona y Horsori Editorial,
Barcelona, junio 2007
ISBN: 978-84-96108-30-9
186 páginas

En estas fechas de inicio de curso puede ser un buen momento para reflexionar sobre el modo en que la comunidad educativa a la que pertenecemos afronta la diversidad presente en nuestras aulas. La lectura de este libro ofrece una perspectiva completa y profunda de un tipo de diversidad, la de los alumnos inmigrados. Para el autor es primordial identificar el reto al que nos enfrentamos: romper una brecha cultural que no se reduce de forma simplista a superar la barrera del idioma.

La lectura del libro me ha recordado que cuando empezaba a dar clases en secundaria y ante la reiterada y lapidaria frase por parte de ciertos alumnos «no entiendo nada», sin entrar en el asunto de la doble negación, replicaba que el texto se orientaba de izquierda a derecha y de arriba a abajo, y que no dudaba de su conocimiento del idioma castellano ni de los dígitos y símbolos matemáticos que aparecían en la pizarra (todos mis alumnos eran españoles). De una manera inconsciente tenía claro que no existía una barrera cultural, las dificultades de aprendizaje tenían razones más prosaicas.

El autor, Xavier Vilella Miró, se apoya en numerosos trabajos teóricos y en un dilatado periodo de puesta en práctica para ofrecernos una visión realista de los conflictos culturales que sufren los alumnos inmigrados. El primer paso es romper algunos mitos que impiden apreciar el problema al que nos enfrentamos.

En el libro se hace énfasis en que la realidad multiétnica de las aulas se engloba dentro de un conjunto más amplio, la «diversidad de diversidades», para dejar muy claro que cada una de las diversidades necesita un tratamiento específico y que en el caso particular de los alumnos inmigrados no resulta adecuado considerarlos a priori alumnos con dificultades de aprendizaje.

De manera muy justificada el prólogo del libro está escrito por Alan J. Bishop, prestigioso investigador australiano en el área de la Educación Matemática que ha desarrollado gran parte de su carrera en la Universidad de Cambridge. A lo largo del mismo aparecen numerosas investigaciones de Bishop, y Vilella se apoya en las mismas para poner de relieve el carácter cultural del currículo matemático y cómo afrontar el reto

Pedro Latorre García
IES Pilar Lorengar (Zaragoza)

de establecer un puente entre la cultura de origen del alumno y la nuestra.

El objetivo principal del autor es conseguir una enseñanza matemática significativa en la que cada alumno desarrolle al máximo su potencialidad. Estamos buscando una educación equitativa e inclusiva, evitando el modelo del déficit cognitivo: la diferencia es déficit.

En la primera parte del libro se establece con claridad la situación de los alumnos inmigrados y su evolución desde infantil hasta secundaria. El autor pone de manifiesto varios mitos que deben ser revisados:

- La universalidad de las matemáticas. Hay que ser conscientes del componente cultural que tiene nuestra asignatura. Desde los algoritmos, los símbolos de los dígitos hasta la forma de evaluar son características de nuestra cultura occidental, que estará en algunos casos muy alejada de la que conocían nuestros alumnos inmigrados.
- El ideal del grupo homogéneo. El «alumno medio» no existe. La respuesta organizativa en algunos centros de crear agrupaciones por niveles presupone que hay que evitar la diversidad. Los estudios reseñados en el libro apuntan en la dirección contraria. No hay que hacer invisible la diversidad, sino aprovechar la riqueza que aporta.

Una vez que se ha revelado el problema, aparentemente invisible para muchos, en la segunda parte se indican algunas pautas para resolverlo. Se trata de responder a las preguntas: ¿Cómo facilitar la transición entre diversas culturas matemáticas? ¿Cómo gestionar la diversidad en el aula? También se resalta que los estudios realizados evidencian que las medidas para mejorar las posibilidades del aprendizaje de los alumnos inmigrados resultan beneficiosas para todo el alumnado.

Una estrategia que se considera fundamental es la introducción de las matemáticas de uso cotidiano en el aula. Esto implica que el alumnado no sea un desconocido al que tratamos de transmitir unos contenidos descontextualizados sino que la actividad docente tiene que adaptarse a la realidad de fuera del centro. Y para poder conocer a nuestros alumnos es necesario que los grupos sean reducidos.

Las investigaciones de Bishop indican una serie de actividades matemáticas presentes en todas las culturas y que suponen un punto de partida para la elaboración de un curriculum accesible a todos: contar, medir, jugar... La mayor parte de los estos contenidos ya están en nuestro currículo. La labor estriba en desarrollarlos de forma adecuada, sin centrarnos en los aspectos instrumentales.

Dos elementos que se destacan para el aprendizaje son la interacción entre los alumnos y las expectativas positivas que transmite el profesor. Por lo tanto hay que desarrollar actividades en pequeños grupos que fomenten la interacción entre iguales. Asimismo para favorecer y animar la participación de los alumnos en los debates con todo el grupo tenemos que enfatizar todo elemento positivo de sus intervenciones y usar los errores como fuente de nuevas preguntas.

Para el autor, una manera de articular los puntos anteriormente mencionados es la realización de «actividades ricas»: Están cerca de la realidad cotidiana, lo cual posibilita la participación, la aportación de ideas. Son motivadoras y facilitan el aprendizaje cooperativo aprovechando las diferentes perspectivas que aportan nuestros alumnos. La contextualización no debería suponer simplificación, todo lo contrario, sería un primer paso hacia la modelización y la abstracción. En el libro tenemos numerosos ejemplos de «actividades ricas» y se reseñan varios libros en los cuales podemos encontrar más.

Al planificar una actividad no se puede olvidar qué aspectos se valorarán para realizar su evaluación. En el caso de las «actividades ricas» resulta necesario hacer una evaluación formativa que ayude a mejorar las actividades para conseguir un mejor cumplimiento de los objetivos propuestos.

La lectura del libro puede resultar interesante para cualquier docente. Presenta un modelo de educación matemática alejado del tradicional. Las ideas y pautas de actuación presentadas para un aula multiétnica pueden servir para reflexionar sobre cuál es el modelo educativo que nos gustaría implantar en nuestro centro. ■

Escaparate 2: Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible

MATEMÁTICA INCLUSIVA. PROPUESTAS PARA UNA EDUCACIÓN MATEMÁTICA ACCESIBLE
Àngel Alsina y Núria Planas
Narcea, Madrid, 2008
ISBN: 978-84-277-1591-2
176 páginas

En su colección «Educación hoy estudios», la Editorial Narcea acaba de publicar el libro *Matemática Inclusiva*, escrito en coautoría por Àngel Alsina y Núria Planas, profesores de las Universidades de Girona y Autónoma de Barcelona respectivamente. Se trata de un libro interesante por diversos motivos, pero fundamentalmente porque es capaz de integrar reflexiones teóricas de gran complejidad con buenos ejemplos de aula. A lo largo de sus páginas, se argumenta que una Educación Matemática inclusiva —basada en el pensamiento crítico, la manipulación, el juego y la atención a la diversidad— tiene que destacar los contextos donde se piensan las prácticas, los grupos de conocimientos implicados y la especificidad de las personas en la reformulación de contenidos matemáticos. Desde estos supuestos se plantea una visión de la Educación Matemática abierta e integradora, exigente con el conocimiento matemático y atractiva y útil para las personas. A mi entender, este libro complementa, actualiza y amplía varios aspectos de otro libro publicado en la misma colección hace una década, *Matemática Emocional*.

Matemática Inclusiva tiene multitud de valores añadidos, entre ellos, la referencia constante a las necesidades del alumnado y del profesorado de matemáticas, pensadas en el contexto dado por la época actual. Los cuatro primeros capítulos —El pensamiento crítico, La manipulación, El juego y La atención a la diversidad— dan voz a grupos de profesores con los que se ha colaborado en la planificación, el diseño, la implementación y, sobre todo, la validación de las actividades matemáticas que se ofrecen; la voz de los alumnos está especialmente presente en las fases de planificación y de diseño, cuando se da prioridad a sus intereses en la organización de la práctica matemática escolar. Todas estas voces expertas se articulan en un discurso común con voces de profesionales e investigadores en el área de Didáctica de la Matemática o en áreas afines: voces clásicas como las de Josep Estalella y Pedro Puig Adam; históricas como las de Lev Vygostki y John Dewey; institucionales como las de la OCDE y el NCTM norteamericano; fundamentales como las de Hans Freudhental y Paulo Freire; y actuales como las de Mögen Niss y Ole Skovsmose, entre otras.

Vicenç Font Moll
Universitat de Barcelona

Es especialmente reconfortante que los autores no eludan el debate sobre la calidad. Cuando se ha hablado de calidad en Educación Matemática se han sugerido ideas muy distintas, incluso opuestas. Muchas veces la calidad ha significado una cantidad relevante de buenos resultados escolares; otras veces con esta noción nos hemos referido a la eficiencia de unos ciertos programas curriculares con unos grupos de alumnos. En *Matemática Inclusiva,* se examina la calidad desde otro punto de vista, mucho más cualitativo: una Educación Matemática de calidad es aquella que resulta accesible y comprensible para todo el mundo sin que ello lleve a prescindir del aprendizaje de conocimientos matemáticos básicos ni redunde en una simplificación del discurso de enseñanza de las matemáticas. Más tarde, se nos explica que la diversidad de ritmos de aprendizaje y de intereses del alumnado obliga a diversificar los modelos de enseñanza de las matemáticas y los tipos de actividades para que tenga sentido pensar en la condición de accesibilidad «para todo el mundo» y «todo el mundo» pueda llegar a tener una visión global de la Matemática, de su peso específico en nuestra sociedad y de su papel en el desarrollo de una educación crítica.

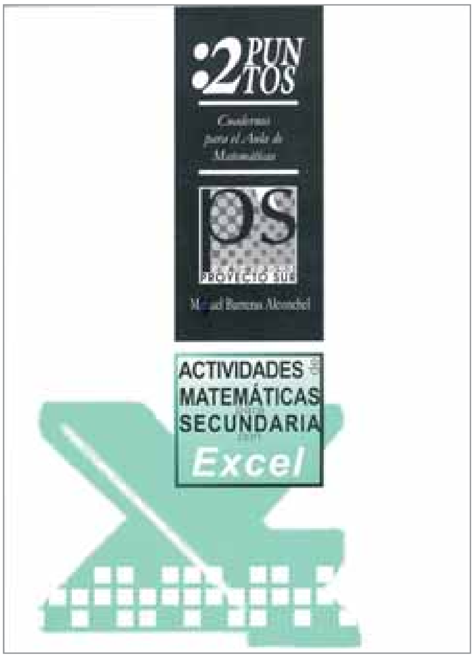
En el último capítulo del libro, *Hacia un enfoque integrado*, podemos leer el siguiente texto:

> La mayoría de tareas matemáticas se centran en los conocimientos sobre las matemáticas y no en los conocimientos sobre el mundo. Una de las consecuencias de este enfoque es que se piensa sin contextualizar —ya sea manipulando, jugando y/o atendiendo a la diversidad—, llegándose a penalizar en algunas ocasiones a quien piensa contextualizando. Sin embargo, no hay confrontación entre unos y otros conocimientos, aunque a menudo se plantee de este modo en el entorno escolar. Para trabajar bien las matemáticas han de trabajarse bien conocimientos de los mundos físico y social; muchos de ellos ayudan a anticipar el desarrollo de los procesos de pensamiento matemático y, después, contribuyen a validarlos [...]. Cuando alguien piensa matemáticamente, debería apelar a multitud de conocimientos construidos a lo largo de su experiencia. Cualquier respuesta o resolución en matemáticas debería surgir de integrar procesos de inferencia basados en conocimientos de ámbitos distintos.

En los capítulos anteriores se han sentado las bases de estas afirmaciones, algunas de ellas ciertamente controvertidas. ■

Escaparate 3:
Actividades de Matemáticas para Secundaria con Excel

Actividades de Matemáticas para secundaria con Excel
Miguel Barreras Alconchel
Colección 2 Puntos. Proyecto Sur Ediciones
ISBN 978-84-8254-368-0
109 páginas. Incluye CD-ROM



Entre las aplicaciones informáticas de utilidad para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, la hoja de cálculo ocupa un lugar destacado.

En los nuevos currículos de Secundaria no sólo se cita como herramienta didáctica útil para el estudio de distintos contenidos, sino que además, la hoja de cálculo aparece en algunos niveles como un contenido más, interesante en sí mismo, y debe ser desarrollado en las aulas, por su potencialidad para el manejo de tablas de datos numéricos y su representación gráfica, especialmente en el bloque de Estadística.

No obstante, su presencia en los nuevos libros de texto es menor de lo que cabría esperar a la vista de esos nuevos currículos y no parece que su uso en nuestras clases esté generalizado.

Si una publicación anterior del mismo autor (*Matemáticas con MS Excel* de editorial RA-MA) se podía describir como un curso práctico sobre Excel (ver recensión en SUMA 51 [N. de la R.]), en esta ocasión *Actividades de Matemáticas para Secundaria con Excel* responde mejor a la demanda del profesorado de materiales o propuestas didácticas elaboradas para su aprovechamiento inmediato en el aula. Planteamiento que encaja en la línea de la colección «2 Puntos» de Proyecto Sur.

Miguel Barreras es profesor de Matemáticas, desde hace bastantes años, en el IES *Matarraña* de Valderrobres (Teruel). Su página *web* «Matemáticas desde contextos» cuya dirección es: http://www.catedu.es/calendas/ da fe de su capacidad productiva y creativa: es una de las páginas con mayor cantidad de recursos disponibles para el aula de Matemáticas de Secundaria. Desde ella se pueden descargar numerosas e interesantes propuestas de actividades planteadas en torno a contextos o situaciones cercanas a la realidad del alumnado.

Actividades de Matemáticas para Secundaria con Excel responde mejor a la demanda del profesorado de materiales o propuestas didácticas elaboradas para su aprovechamiento inmediato en el aula

Además de esta línea de trabajo de *Matemáticas desde contextos*, Miguel ha trabajado especialmente en temas de Probabilidad y de Historia de las Matemáticas (en su *web* se puede conseguir un juego para ordenador dedicado a este tema que ha sido galardonado en la última edición de *Ciencia en acción*).

Finalmente hay que destacar la faceta literaria de Miguel que también es el ganador de la última convocatoria del concurso de Relatos cortos de *Divulgamat*. En el apartado «MateLite» de su *web* pueden encontrarse algunos de sus interesantes y curiosos relatos con *guiños* o contenidos matemáticos.

Volviendo al libro que nos ocupa, se trata de una colección de actividades o propuestas didácticas pensadas especialmente para la enseñanza de las Matemáticas de 3.º y 4º de ESO, aunque también pueden ser aprovechables en Bachillerato.

Está estructurado en siete partes atendiendo a los correspondientes contenidos tratados: Números, Álgebra, Funciones, Geometría, Probabilidad, Estadística y Optimización. Además hay un apéndice dedicado al Cálculo mental.

Las actividades están diseñadas con la idea de que sean los propios alumnos quienes las vayan realizando de manera autónoma: en la mayoría de los casos el alumno ha de empezar abriendo una o varias hojas de cálculo (incluidas en el CD que acompaña al libro) elaboradas para su manipulación, observación y búsqueda de diversos resultados que ha de escribir en las mismas hojas para la evaluación por parte del profesorado. En algunos casos se explica el proceso para la elaboración de la hoja por parte de los propios alumnos.

Tanto en uno como en otro caso, no se trata de que el alumnado aprenda informática. Los ordenadores permiten minimizar los esfuerzos dedicados a los cálculos, focalizando la actividad en modelizar problemas, manejar o crear algoritmos, buscar soluciones, generalizar, trabajar con diferentes categorías numéricas (constante, variable, parámetro) y, en definitiva, en hacer y aprender Matemáticas.

Por otro lado, muchas de las hojas de cálculo facilitadas en el CD pueden ser herramientas de utilidad didáctica también al margen de las actividades propuestas por Miguel, pudiendo ser utilizadas por el profesorado para trabajar en el aula determinados conceptos o temas o como apoyo a sus explicaciones. Haremos una breve descripción el contenido y enfoque de cada uno de los bloques de actividades:

En el bloque de *Números*, se incluyen varias actividades, de dificultad progresiva, dedicadas a la Aritmética y que se apoyan en contextos como, por ejemplo, consumo, facturas, notas ponderadas o mezclas. También se incluyen numerosas actividades dedicadas a sucesiones y progresiones. Quien no conozca las funciones *Buscar objetivo* y *Solver* de Excel se verá sorprendido por su tremenda potencialidad. Su utilización puede servir para abordar una mayor cantidad y variedad de problemas sin invertir excesivo tiempo en la realización de engorrosos cálculos, lo que puede redundar en la mayor comprensión de los conceptos tratados.

En el bloque de *Álgebra* se facilitan varias hojas de cálculo diseñadas para su manipulación por parte del alumnado. De nuevo, es posible eludir los cálculos y métodos clásicos para abordar tanto la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado como los sistemas, centrando la actividad en la interpretación gráfica y en la búsqueda de soluciones. También en esta ocasión se recurre a la herramienta *Buscar*

Manuel Sada Allo
IES Zizur Mayor BHI (Zizur Mayor, Navarra)

objetivo para resolver las ecuaciones (incluidas algunas inabordables con lápiz y papel).

La elección del tipo de gráfico adecuado *(Dispersión con líneas suavizadas)* convierte a Excel también en una buena herramienta para la representación gráfica de *Funciones*. En el CD se facilitan un buen número de hojas ya diseñadas, a partir de las que se pueden trabajar diversos problemas concretos cuya resolución pasa por el uso de funciones y la interpretación de sus gráficas. También se estudian familias de funciones dependientes de parámetros (funciones lineales, cuadráticas, de proporción inversa, exponenciales, etc.)

En cuanto al bloque de *Geometría*, aunque *Excel* no sea la herramienta informática más adecuada para su estudio, se abordan dos temas: el de las áreas planas y otro dedicado a las curvas que se pueden dibujar con un espirógrafo. Además del interés implícito de las propuestas didácticas, es destacable el ingenio del autor para conseguir polígonos y curvas a partir de las herramientas gráficas de la hoja de cálculo.

Las actividades sobre *Probabilidad* conducen a la experimentación y simulación de diferentes situaciones o experimentos aleatorios. La hoja de cálculo es aquí de gran utilidad no sólo para la recogida ordenada de los resultados, los cálculos correspondientes (frecuencias acumuladas, porcentajes, etc.) y los oportunos gráficos, sino también para la simulación de un número de experimentos tan elevado como se quiera, mediante el manejo de números aleatorios.

Las actividades están diseñadas con la idea de que sean los propios alumnos quienes las vayan realizando de manera autónoma

Las actividades propuestas en el estudio de la *Estadística* consisten en la elaboración guiada de una hoja para la recogida de datos de una variable estadística unidimensional y su tratamiento para que sea el ordenador quien haga los cálculos de los diversos parámetros estadísticos que con lápiz y papel resultan rutinarios y tediosos. Posteriormente la misma hoja puede resultar útil para cambiar los datos por los correspondientes a un nuevo estudio estadístico.

Algo parecido se consigue con otros ejemplos de variables bidimensionales para los que la atención se centra en la representación grafica de la nube de puntos y la recta de regresión.

En el apartado de *Optimización* se comprueba la utilidad de la herramienta *Solver* que permite resolver no sólo los clásicos problemas de optimización que aparecen en los libros de texto de Bachillerato sino otros muchos inabordables en esos niveles como, por ejemplo, algunos en los que la función a maximizar es una polinómica de tercer grado u otros en los que se trata de hallar el punto de una curva más próximo a otro dado.

Por último, encontraremos dos hojas de cálculo con las que se puede trabajar el *Cálculo mental* (en una de ellas con las cuatro operaciones entre números enteros y en la otra con porcentajes). Con ellas comprobaremos cómo el uso de sencillas macros (y números aleatorios) puede permitir crear cómodamente, sobre una hoja de cálculo, ejercicios de cálculo autoevaluables (y que se generarán en tanta cantidad como se desee).

La parte final del libro incluye una guía en la que se aporta una ficha para cada actividad, en la que se cita el nivel recomendado, el tema y los contenidos que se trabajan y una breve descripción que suele incluir alguna recomendación o sugerencia dirigida a los potenciales docentes que se animen a llevarla al aula.

En resumen, con esta publicación se facilita al profesorado de Matemáticas una considerable cantidad y variedad de actividades para el aula basadas en el uso de la hoja de cálculo.

Además del interés de las mismas, como propuestas didácticas aprovechables directamente, sin necesidad de mayores adaptaciones, las hojas de cálculo ya diseñadas (y también algunos de los *trucos* utilizados en ellas) pueden también servir como fuente de ideas para el diseño de nuevas hojas de cálculo y actividades. ■

Escaparate 4:
FERMAT y los orígenes del Cálculo Diferencial

FERMAT Y LOS ORÍGENES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL.
Pedro Miguel González Urbaneja
Nivola, Madrid, 2008
ISBN: 97884-96566-79-8
174 páginas

Leer un artículo o libro de P. M. González Urbaneja significa encontrarse siempre ante un trabajo de gran calado investigador, ya que es un conocedor profundo de la historia de las Matemáticas, de sus autores y obras. La profusión de datos y citas, la mayoría obtenidas desde las fuentes originales de los autores, nos señala siempre su afán de justificar, de la manera más clara y precisa, las aportaciones que en sus libros o artículos nos presenta. Esto le permite *mojarse* cuando hay que tomar partida por uno u otro matemático, cuando el contenido presentado es atribuido a los dos.

Muchas veces ocurre que los autores de libros o artículos citan el conflicto pero no se decantan por alguno de ellos y, en este libro, tiene oportunidad de hacerlo pues la paternidad del Cálculo Diferencial sabemos que está muy repartida. Siempre se han citado a Newton y Leibniz como sus creadores pero, como Pedro Miguel postula en este libro, dos de los problemas (máximos y mínimos, tangente a una curva), que hoy se resuelven mediante el Cálculo Diferencial, son resueltos por Fermat con anterioridad al trabajo de Newton y Leibniz.

No debemos olvidar que, en ese momento, se llega al Cálculo Diferencial porque hay cuatro problemas a resolver por la comunidad matemática: los dos antes citados, junto con el cálculo de las magnitudes instantáneas y el área bajo una curva. Por tanto, eran muchos los matemáticos, y en muchos lugares diferentes, que trabajan sobre la misma tarea.

El libro consta de un *Prefacio*, donde ya marca las líneas que va a trabajar y comienza a señalar algunas de las fuentes que llevaron a Fermat a realizar sus trabajos, en especial, los matemáticos griegos: Euclides (*Elementos*), Diofanto (Aritmética), Apolonio (*Cónicas*), Arquímedes, Pappus (*Colección Matemática*), además de Viète con su obra *Teoría de ecuaciones.* No se debe olvidar que Fermat era conocedor de las lenguas clásicas lo que le permitió ir directamente a las fuentes originales prescindiendo de traducciones, evitando interpretaciones críticas que aparecían con las traducciones.

El capítulo primero titulado *Introducción* consta, en líneas generales, de una reseña del personaje, su vida en Toulouse, su condición profesional de juez, no de matemático, su relación con otros matemáticos, especialmente con Carcavi, Descartes, Mersenne (este último fue el difusor de su obra), sus otras creaciones (*Geometría Analítica*), las raíces de sus trabajos, la importancia de su época, etc. No debemos olvidar que Fermat

Fernando Fouz Rodríguez
Asesor de Matemáticas del Berritzegune de Donostia

nace y vive en el siglo XVII, sin duda el siglo más importante en la historia de las Matemáticas.

Conviene que nos centremos un poco en estos puntos anteriores que el libro desarrolla. La figura de Fermat es realmente única pues, como antes se ha señalado, era juez y sus trabajos matemáticos nunca se publicaron en forma de libro mientras él vivió, salvo una pequeña *Memoria* (1660) sobre rectificación de curvas, como apéndice de un tratado de Lalouvère. Es conocida la anécdota que muchas de sus ideas y creaciones aparecían escritas en los márgenes de los libros que leía. Sus trabajos los enviaba mediante cartas a otros matemáticos, especialmente a Carcavi y Mersenne, de manera que su obra quedó desperdigada por toda Europa y, sólo a su muerte, fue su hijo Samuel el que recolectó sus trabajos para publicarlos conjuntamente. Este comportamiento es la causa de que su obra fuese conocida con gran tardanza.

Respecto a los temas matemáticos que el autor cita en la introducción, y que los desarrolla en los otros capítulos, son dos: *máximos y mínimos* y *trazado de la tangente a una curva*. A esta tarea le dedicó mucho tiempo, desde 1626 a 1640, y sobre los que ya adelanta que «no se basan en consideraciones infinitesimales sobre límites aunque sí introduce la idea de movimiento de la variable».

Dentro de este capítulo de introducción, es obligado recordar el énfasis que pone el autor en respetar los términos primigenios para no incurrir en interpretaciones que pueden llevar a atribuir al autor conceptos que, en ese momento, no existían. De esta manera se mueve en el filo de no utilizar toda la terminología arcaica de Fermat, que lo haría difícilmente comprensible, y una terminología moderna que desfigure lo escrito por Fermat, especialmente con el uso del lenguaje simbólico.

En los dos siguientes capítulos, segundo y tercero, desarrolla los dos trabajos, antes citados, en los que se centró Fermat: *Máximos y mínimos* y *Trazado de la tangente a una curva*. Para el primer tema se extiende en la presentación y justificación de las fuentes en las que se basa Fermat, fundamentalmente en Viéte y su teoría de ecuaciones (método de la *Syncrisis*) para la resolución de problemas de *condiciones límites*, ya tratados por los griegos en sus problemas *de diorismos*. Este contenido le lleva a Fermat hasta Pappus. Pero no sólo son estos dos matemáticos, a lo que Fermat se va a acercar, ya que también Apolonio, Euclides, Arquímedes, etc., aparecen en la fundamentación de su trabajo.

Desde la perspectiva actual, en la que usamos un lenguaje simbólico amplio y determinados términos y conceptos que nos parecen creados desde siempre, llama la atención que, en todo el desarrollo de Fermat para el cálculo de máximos y mínimos, el término *infinitesimal* no aparece por ninguna parte. Sin embargo, Fermat crea y utiliza el término de *adigualdad*, concepto que se puede asociar a una *cuasi-igualdad, aproximadamente igual...*, algo que parece intuir una dirección de trabajo hacia lo infinitesimal.

El capítulo tercero trata de las tangentes a las curvas y, el trabajo de Pedro Miguel, como ya señala en la introducción, va dirigido a responder a la pregunta: *¿en qué sentido el método de tangentes deriva del método de máximos y mínimos?* Después de una introducción general concreta los ejemplos de curvas de las que estudió el trazado de sus tangentes: parábola, elipse, curvas algebraicas (cisoide, concoide) y curvas mecánicas (cicloide).

Cada uno de los problemas está explicado separadamente y, en criterio del autor, una de las ideas más importantes de este capítulo, es la evolución que se realiza, en el trabajo de Fermat al estudiar la tangente a la cicloide, con el concepto de adigualdad hacia «la noción infinitesimal de aproximadamente igual». Esto ocurre porque establece los principios de que *se pueden sustituir las ordenadas de las curvas por las ordenadas de las tangentes halladas y las longitudes de arco de las curvas por las partes correspondientes de las tangentes ya halladas.* A partir de se momento Fermat va abandonando ese concepto.

El libro concluye con un *Epílogo*, donde se recapitula lo más importante de la obra de Fermat y su influencia en la aparición del Cálculo Diferencial. A modo de resaltar la importancia de su trabajo, respecto a la de otros matemáticos posteriores, es interesante citar el párrafo, en el que coloca la cita de E. T. Bell, donde señala que: *cuando Fermat creó y aplicó el Cálculo Diferencial faltaban trece años para que naciese Newton y diecisiete Leibniz.* Para finalizar el libro aparece una completa bibliografía, dividida por temas, apartado en el que Pedro Miguel es un experto de primer nivel.

Resumiendo podemos decir que el libro revindica la figura y obra de Fermat, nos explica sus métodos de trabajo y nos presenta los desarrollos matemáticos para los cálculos de los máximos y mínimos y trazado de la tangente a una curva. Es un libro muy interesante y recomendable para el profesorado de Matemáticas ya que, además de mejorar su cultura matemática, aporta ideas que pueden ser llevadas al aula.

Si siempre se cita a Arquímedes, Newton, Euler y Gauss como los grandes matemáticos de la historia de las Matemáticas, creo que en el corazón de cualquier conocedor de las Matemáticas hay un querer especial por Fermat y su obra, por este motivo, estoy seguro que este libro será bien recibido. ■

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Francisco Martín Casalderrey**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

Secretariados:
Prensa: **María Peñas Troyano**
Revista SUMA: **Tomás Queralt Llopis/Onofre Monzó del Olmo**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Actividades con alumnos: **Floreal Gracia Alcaine/Esther López Herrainz**

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidenta: Carme Aymerich Padilla
CEIP Rocafonda
C/Tàrrega, 41
08304 Mataró (Barcelona)

Organización Española para la Coeducación Matemática *Ada Byron*
Presidenta: M.ª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38200 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: María José González López
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira*
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidente: Elena Ramirez Ezquerro
CPR. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

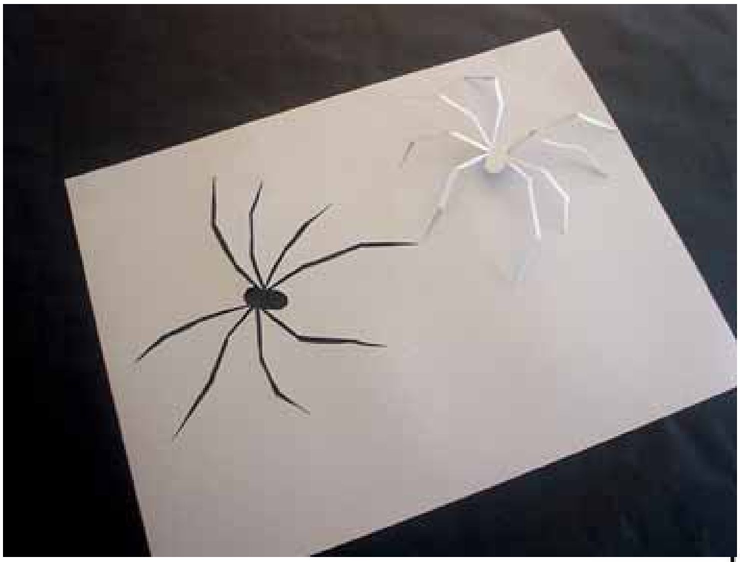
Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 97-104

Para la libertad



Cuando se utilizan las aportaciones, universalmente conocidas, de los grandes científicos, como Newton o Einstein, no hay que citarles. Tampoco debería ser necesario citar a personalidades de las letras de igual renombre, cuando nos apoyamos en las suyas. Pero, si la fuente no tiene esa universalidad, parecería una falta de respeto no hacerlo.

Hoy, gracias a la telaraña mundial, es fácil encontrar las fuentes, si los textos están tomados con suficiente literalidad. Por eso yo propongo un juego, adivinar, buscando en la red cuando sea necesario, las autorías originales de las distintas estrofas del siguiente poema que, ya aviso, es un collage o centón.

Pensaron que era la paciente esposa
de un héroe. La que espera noche y día
tejiendo y destejiendo. La que ignora
que nunca vuelve el mismo que ha partido.
No creáis mi historia
Ni yo esperaba a Ulises
Tantas Troyas y mares y distancias y olvidos...,
ni mi urdimbre de tela
desurdida de noche
se trenzaba en su nombre.

Por mi desafío,
atrapada me hallo,
sobre las cuerdas de seda
suspendidas en la brisa,
al acecho,
soy mi propio minotauro
El hilo que me atrapa deberá liberarme

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
ariadna@revistasuma.es

Foto: *Pilar Moreno Gómez*

Ahora que decaen los discursos posmodernos, gracias entre otras cosas, a intervenciones tan espectaculares como la protagonizada por Sokal, podemos recuperar frases del pasado como la que Cantor parece ofrecer a Aracné, como hilo de Ariadna:

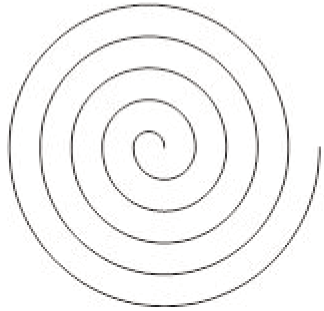
> La ciencia de las matemáticas reside en su libertad,
>
> pues,
>
> de la cárcel del problema, siempre aparentemente insoluble, esta ciencia nos lleva a la alegría liberadora de la comprensión.

Cuando no hay respuestas, el ser humano elabora mitos: Aracné, famosa por su virtuosismo en las labores de tejer y bordar, desafió a la diosa de estas artes, Atenea. Para castigar su orgullo, la diosa transformó en araña a la joven, que, en su nuevo estado, continuó tejiendo.

Las hilanderas de Velázquez
(el sueño de Aracné)

Si atendemos a las múltiples cuestiones que hay que resolver para emplazar y construir una telaraña adecuadamente, concluiremos que Aracné reunía condiciones para vencer a la diosa de la sabiduría, era una experta matemática, resolvía, entre otras la siguiente cuestión algorítmica:

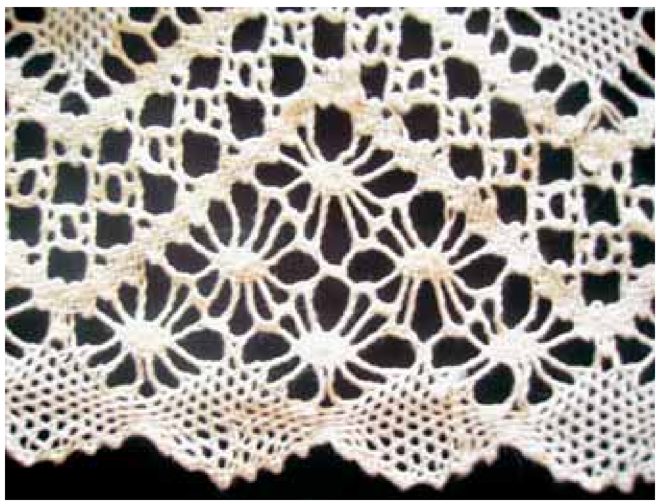
```
to telaraña :lado :angulo
if :lado>40 [end]
fd :lado
rt :angulo
telaraña :lado+0.1 :angulo
end
```



Para conocer mejor las habilidades matemáticas de Aracné, os recomiendo la lectura del cuento “La tejedora jactanciosa” de Juan de Burgos y los capítulos 36 y 37 de *Ritmos. Matemáticas Imágenes*.

Otras heredaron su ingenio y mejoraron las técnicas del tejido, como Ada Byron, gracias a cuyas subrutinas, se revolucionó la industria textil y nació la informática, madre de la telaraña mundial, una red que puede extender las tradicionales redes solidarias y en cuyas manos reside una de las llaves para la libertad verdadera de la humanidad, sojuzgada por la tergiversación torticera e interesada del término que en este capítulo nos ocupa. Si somos capaces de aprovechar su potencial, será una herramienta para construir otro mundo posible con otras reglas de juego. Tal vez, las redes y el hilo de Ariadna contribuyan a nuestra liberación.

La Web fue creada alrededor del simbólico año 1989 por el inglés Tim Berners-Lee y el belga Robert Cailliau mientras trabajaban en el CERN en Ginebra, Suiza. Nacía para respon-



Luz Botaya Jiménez

der a la necesidad de intercambio de información entre universidades e institutos de investigación de todo el mundo, como el propio CERN, empeñado actualmente en la búsqueda del bosón de Higgs. Experimento sobre el que se han cernido críticas agoreras y esotéricas, anticientíficas y catastróficas. También la WEB tiene, justificadamente, sus detractores. Habrá que escardar el huerto de los discursos, limpiarlos de malas hierbas, de retóricas inútiles, falaces y malintencionadas, para escuchar con claridad y sencillez lo que la ciencia nos puede contar. Y habrá que analizar en profundidad el por qué de los caminos seguidos por la investigación científica, para corregir su rumbo y colocarla de nuevo al servicio del bienestar de toda la humanidad.

El lenguaje matemático, claro, preciso y conciso, el método racional de las matemáticas y la belleza de sus construcciones son herramientas que, utilizadas adecuadamente, ayudan a realizar dicha limpieza y a explicar el discurso científico, no sólo con claridad y sencillez sino con emoción poética.

Porque, como siempre, lo perjudicial no son los descubrimientos científicos en sí, sino el uso que de ellos se haga.

También el quehacer poético se enriquece cuando mira hacia las matemáticas. Así lo vieron los poetas concretos como Joan Brossa:

Si los poetas han dado el paso de incorporar nuevos lenguajes al acto poético para ampliar sus posibilidades de expresión y con ello han conseguido una poesía más sintética, más polisémica, más rica, más acorde con el mundo icónico en el que vivimos ¿por qué siguen anclados los libros de texto de matemáticas, en el problema con enunciado verbal? Muchas veces la maraña a desenredar es el propio texto.

Multiculturalidad (Forges)

El misterio del problema, ayudado por una imagen, queda desvelado, el problema deja de serlo, se descubre que no era un verdadero problema. Guardemos nuestras energías para resolver los verdaderos problemas y aprovechemos las características de nuestra materia, como han hecho los poetas concretos y los humoristas, jugando para proporcionar la máxima información en el mínimo espacio con el recurso del máximo de lenguajes: verbal, visual, aritmético, geométrico, algebraico, topológico.

También el juego tiene detractores, y, otra vez, todo depende del uso que de él hagamos.

Foto: *Lucía Morales*

A los críticos del enfoque lúdico en el aprendizaje, les recomiendo la lectura de “El Principito” en una de cuyas páginas podrán leer:

> Conozco un planeta donde hay un Señor carmesí. Jamás ha aspirado una flor. Jamás ha mirado una estrella. Jamás ha querido a nadie. No ha hecho, más que sumas y restas. Y todo el día repite como tú: “¡Soy un hombre serio! “¡Soy un hombre serio!” Se infla de orgullo. Pero no es un hombre; es un hongo.

A quienes la necesidad de rigor les paraliza, también. Ellos encontrarán frases como:

> Es preciso que soporte dos o tres orugas si quiero conocer a las mariposas

Y para quienes se obsesionan con la disciplina parece estar escrita la siguiente:

> …si ordeno a un general que se transforme en ave marina y si el general no obedece, no será culpa del general. Será culpa mía.

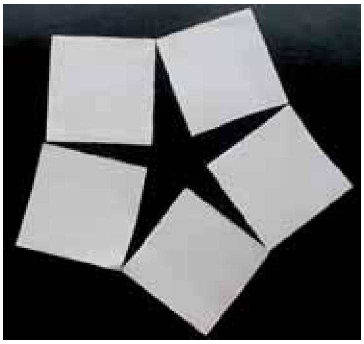
Pero para ejercer la libertad, es necesario respetar la ajena, es necesario establecer normas y nada mejor para aprender esto que los juegos. En los que las reglas son las normas y pueden ser modificadas de común acuerdo, dando lugar a nuevos juegos.

Por ello os proponemos que juguéis hasta el próximo capítulo.

Problemas propuestos

La libertad

Este problema ha sido propuesto por José Luís Belmonte:



Cinco cuadrados iguales se ubican unidos por uno de sus vértices de modo que formen en su interior un pentágono estrellado con las cinco puntas iguales.

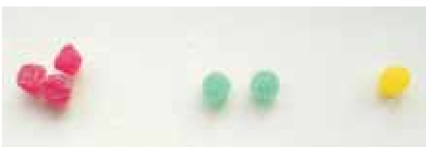
¿Es rígido dicho pentágono o tiene la libertad de cambiar de forma?

Los tres problemas siguientes han sido propuestos por Vicente Calixte Juan y Juan Carlos Orero

Gominolas

Isabel y Maria se enfrentan en un juego para el que utilizan tres montones de gominolas.

En el primer montón no hay más que una gominola; en el segundo dos; en el tercero 3.



Las reglas del juego son las siguientes:
1. Cada jugadora ha de retirar o una sola gominola o todas las gominolas de cualquiera de los montones.
2. La jugadora que retira la última gominola pierde.
3. Le toca a Isabel iniciar la partida.

¿De qué montón ha de retirar Isabel sus gominolas si quiere ganar la partida?

Tres en raya

Los “Tres en raya” se juegan sobre un cuadrado grande, dividido en nueve cuadrados pequeños.

1) Cada uno de los jugadores que intervienen en él pone su marca (por regla general, una equis o un círculo) en una de las casillas.

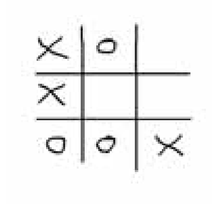
2) El jugador que consigue colocar tres marcas formando una línea (horizontal, vertical o diagonal) gana la partida.

3) Las marcas se colocan alternativamente, mientras queden huecos en el tablero, y no se haya conseguido el tres en raya.

4) Al llegar su turno los jugadores procuran colocar su marca en una línea que contenga

a) dos de sus propias marcas
b) dos de su oponente a fin de impedirle ganar, dando siempre preferencia al caso a sobre el b.

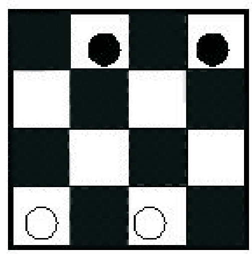
En la partida sólo falta por colocar la última marca



¿Cuál de estas marcas x ó o ganará el juego?

Damas

¿Cuál es el número mínimo de jugadas para intercambiar las posiciones de estas cuatro fichas del juego de las damas?



Las capturas son obligatorias.
Al final las cuatro fichas tienen que ser necesariamente damas dobles.

Belleza de un rectángulo

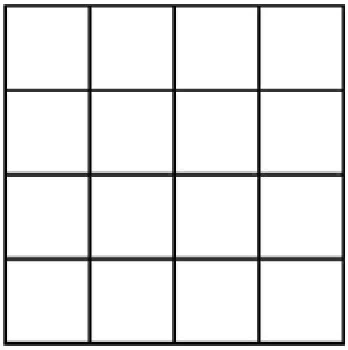
Belleza de un rectángulo (Propuesto por Claudi Alsina y Enrique Trillas en *Fuzzy Sets and Mathematics Education. For The Learning of Mathematics*. Montreal, 1992)

¿Cómo podríamos definir el grado de belleza de un rectángulo?

Soluciones de los problemas del número anterior

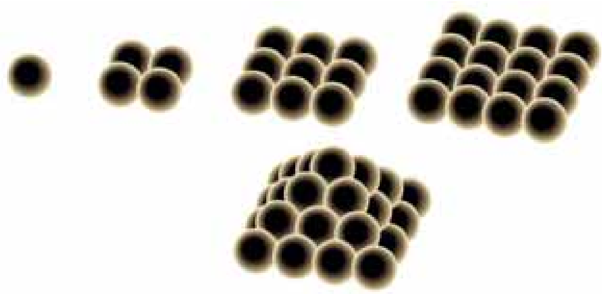
Números para contar

Existe un famoso problema que consiste en contar el número de cuadrados cuyos lados están sobre una malla cuadrada. ¿Existe algún número figurado que pueda expresar la solución?



Tamaño del lado	1	2	3	4	
Número de cuadrados	4x4	3x3	2x2	1x1	
	16	9	4	1	Total: 30

30 es un número piramidal cuadrado

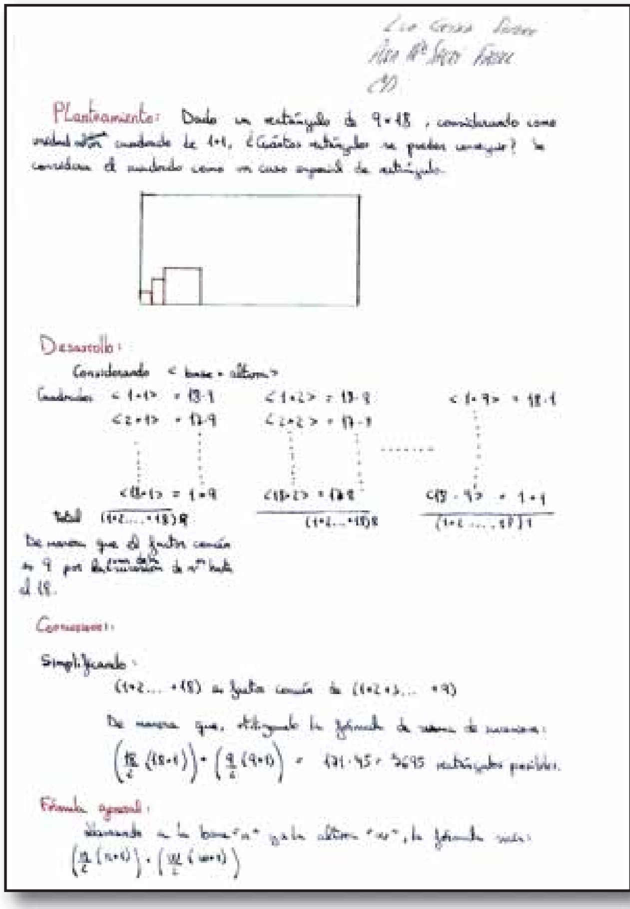


Si la base tuviera n bolas, la fórmula que nos daría la suma total es:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Los números piramidales son hijos de Descartes que los generalizó a partir de los números poligonales que nos dejó Diofanto como legado en una de sus obras.

Al hilo de este problema, nos ha llegado una generalización, trabajada en la clase de segundo de BUP en el Instituto Español de Andorra en el año 1989 por dos alumnas de Pilar Moreno



Acertijo

En las antiguas cajetillas de cerillas, solían venir acertijos que, como es de suponer, iban dirigidos al ingenio del público en general. Se suponía que no había que utilizar ningún aparato matemático, sino el puro razonamiento mental. Uno de ellos decía así:

En un corral hay conejos y gallinas, contándose en total 22 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

¡Falta un dato! ¿O no?

Algunas alumnas recuerdan un problema parecido, pero con un dato más:

En un corral, un campesino tiene gallinas y conejos. Si entre unos y otros tenemos 40 cabezas y 108 patas, ¿cuántas gallinas y conejos tenemos?

GRUPO 1: La estrategia que siguieron fue la que ilustra el dibujo adjunto. A partir de ella el problema parecía fácil:

108/4=27 es decir, es como si hubiera 27 conejos, pero como un conejo equivale a dos gallinas, 27/3=9
SOLUCIÓN: 9 conejos y 18 gallinas.

Obviamente han introducido una falsa hipótesis y han olvidado un dato, precisamente el que reclamaban.

GRUPOS 3 y 5:
Actúan por tanteo ingenuo. *¡Es muy largo profe!*, dicen con cara de aburrimiento.

GRUPO 2:
Plantean un sistema de ecuaciones. Terminan rápido, pero sin grandes emociones. La mecánica del método ha hecho todo el trabajo. Sólo han tenido que ser disciplinados siguiendo los pasos preestablecidos.

GRUPO 4:
Actúan por tanteo inteligente: comienzan por simplificar a la vista del dibujo. Es lo mismo decir que las patas suman 108, que hablar de que los pares de patas son 54. Las cabezas siguen siendo 40. Se trata de descomponer el cuarenta en los dos sumandos adecuados; por lo pronto, el número de gallinas no puede ser impar, pues al sumar el doble de conejos, saldría un número impar, por tanto, distinto de 54.

gallinas	conejos	2·conejos	gallinas+2·conejos=54
2	38	76	Imposible! Se pasa de 54
4	36	72	idem
...	...	...	...
22	54/3=18	36	idem
24	16	32	idem
26	14	28	26+28=54

Tras la exposición de los grupos, la profesora insiste en que no, no falta ningún dato al problema propuesto, así que… hay que seguir pensando…La sencillez y claridad que ha aportado al problema la solución anterior, actúa como inductor para abordar el problema sin hacer uso de la herramienta algebraica.

nº de gallinas (patas de gallinas)	**nº total de patas - nº de patas de gallina = nº patas de conejo**	**nº patas de conejo/4 = nº de·conejos**	**soluciones**
1 (2)	22-2=20	20/4=5	(1,5)
2 (4)	22-4=18	18/4=4,5	imposible
¡debe ser impar!	¡debe ser múltiplo de 4!	¡debe ser entero!	(entero, entero)
3 (6)	22-6=16	16/4=4	(3,4)
5 (10)	22-10=12	12/4=3	(5,3)

Pronto adivinan las restantes soluciones (7,2) y (9,1). La profesora pregunta:

¿Podrían sumar 23 las patas de los animales?

La ecuación gráfica del inicio es de gran ayuda para la discusión que se plantea en clase. La conclusión:

El número de patas debe ser par, porque es el número de patas de una colección de gallinas. Así que, no puede ser 23.

Luego, la profesora propone una extensión:

Intenta resolver el problema suponiendo que las gallinas y los conejos son extragalácticos y tienen, respectivamente 5 y 6 patas y que en total suman 87.

Ahora sí, ahora sí que hay que sacar la artillería pesada, para eso está el álgebra, para resolver los casos que son demasiado arduos para un razonamiento mental.

$$5x+6y=87$$

Pero… ¡falta una ecuación!

Sí, falta una ecuación para resolver el sistema que tenéis en mente, pero tenemos más datos: las gallinas y los conejos son unidades que no se pueden fraccionar. La solución, como habéis visto, no puede ser media gallina ni 7,3 conejos. Esto, que en principio es un inconveniente, podemos utilizarlo a nuestro favor, como una información muy valiosa; estas ecuaciones, con estas características, con uno o más de un grado de libertad, y con soluciones enteras, son conocidas como *ecuaciones diofánticas*, en honor a Diofanto.

Si $x=\frac{87-6y}{5}=17-y+\frac{2-y}{5}=17-y+t \qquad t=\frac{2-y}{5}$

$y=2-5t \qquad x=15+6t$

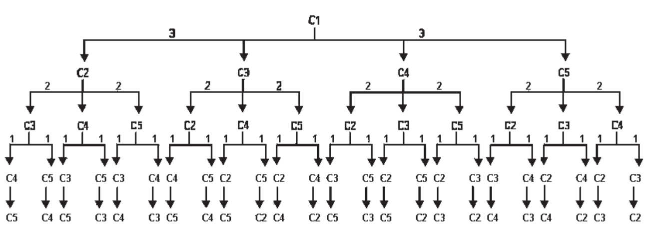
t	x	y
-1	9	7
-2	3	12
-3	negativo	
1		negativo

Tragedia convertida en comedia

El material necesario son diez gorros negros y nueve blancos. Diez personas se sientan en corro a la vista del resto de participantes. A cada una de las personas del corro se le pone un gorro en la cabeza. El resto de participantes da una palmada y la persona que concluya que su gorro es negro se pone de pie. Si no se levanta nadie, el resto de participantes da una nueva palmada, y así sucesivamente. Si hay cinco personas que llevan gorro negro, se levantarán las cinco, a una, cuando oigan la quinta palmada. ¿Qué razonamiento les llevará a tal actuación?

Un razonamiento doble, por arriba y por abajo, deja clara la situación. Supongamos que sólo hay un gorro negro. Todos lo ven salvo quien lo lleva puesto, por lo tanto él no ve ningún gorro negro, pero, sabe que hay al menos uno, de modo que no puede ser otro que el suyo. Al oír la primera palmada, se levanta. Supongamos ahora que sólo hay dos gorros negros A y B, cada uno de ellos ve un gorro negro, por tanto cada cual espera que a la primera palmada se levante. Pero no ocurre así, es decir, su compañero veía otro gorro negro: A veía el de B por eso no se levantó; B veía el de A e hizo lo propio. A la segunda palmada se levantan los dos, pues les quedó claro en la primera que el otro gorro negro lo llevaban puesto ellos.

Razonemos por arriba. A, B, C, D, E, F y G llevan gorro negro. ¿Cómo razonarán? Supongamos que seguimos el pensamiento de G. G ve 6 gorros negros, por lo tanto espera que A, B, C, D, E y F vean 5. De ellos elegimos a F. Si G estuviera en lo cierto, F pensaría que A, B, C, D y E sólo ven 4 gorros negros, puesto que los ven todos salvo el propio. De ellos, por ejemplo D pensará que A, B y C sólo ven dos gorros negros y ello nos lleva a ver que, por ejemplo C cree que A y B sólo ven un gorro negro y por eso no van a levantarse a la primera palmada, como vimos en el párrafo anterior. Tampoco lo harán A, B y C a la segunda, ni A, B, C y D a la tercera, ni A, B, C, D y E a la cuarta y tampoco A, B, C, D, E y F a la quinta. Se levantarán los seis a la sexta, una vez cerciorados todos de que el gorro negro que falta es el que llevan puesto ellos mismos.
El siguiente esquema representa con C_i (i=1, 2, 3, 4 y 5) a cada uno de los 5 compañeros. Es un esquema completo de las relaciones de pensamientos que llevan al resultado visto.



Una variante divertida, introducida por Colera, consiste en dar mensajes secretos a los portadores de gorro negro indicándoles que no cumplan la orden de levantarse al oír la palmada y a los que llevan gorro blanco les dice, también en secreto, que, en caso de tener que levantarse, lo hagan sujetándose el gorro. ¿Qué creéis que pasa con este cambio en las reglas del juego? ¿Qué creéis que piensan los espectadores al ver el resultado?

Trozos de tarta

¿Cuántos trozos de tarta podemos obtener como máximo practicándole sólo cuatro cortes?

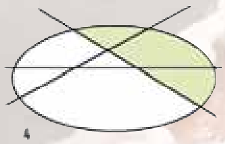
La primera observación a este enunciado está vinculada al pasatiempo mencionado en el número anterior, en el cual existe una premisa, la de la igualdad de las partes, que aquí no existe. Se trata únicamente de ver cuál es el máximo número de porciones obtenidas al realizar 4 cortes. Es decir, cuál es el máximo número de regiones en que se puede dividir el espacio ordinario si lo cortamos mediante 4 planos.

Resolveremos un problema isomorfo: vamos a sustituir la tarta de queso por un queso de bola. Procederemos por inducción: si en lugar de un espacio euclídeo de dimensión 3, empezamos por el de dimensión uno, la recta, y comenzamos por 0, 1, 2, 3, … puntos de corte para la 1ª, 2ª, 3ª partición, vemos que:

Partición	Nº de puntos	Nº de intersecciones con las regiones anteriores	Nº de regiones lineales L(n) determinadas por n puntos
1ª	0	0	1
2ª	1	1	2
3ª	2	1	3
4ª	3	1	4
n	n	1	L(n)= n+1

Seguimos con el espacio R^2, ahora los instrumentos de la partición serán las rectas

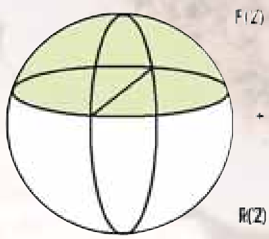
Partición	Nº rectas: n	Nº de intersecciones con las regiones anteriores	Nº de regiones planas determinadas por n rectas: P(n)
1ª	0	0	1
2ª	1	1	1+1=2
3ª	2	2	2+2=4
4ª	3	3	4+3=7
n+1ª	n	n	P(n)= P(n-1) + n = =1+(1+2+3+4+5....+n)



¿Se cumple la misma fórmula en R^3?

Partición	Nº planos: n	Nº de intersecciones con las regiones anteriores	Nº de regiones del espacio determinadas por n planos: R(n)
1ª	0	0	1
2ª	1	1	1+1=2
3ª	2	2	2+2=4
4ª	3	4	4+4=8
5ª	4	7	8+7=15
n+1	n	n	R(n)= R(n-1) + P(n-1)

El queso de bola.



El problema puede generalizarse a hiperesferas de dimensión h y número de cortes n.

Dinamarca

Piensa un número entero comprendido entre 1 y 9, multiplícalo por 9, réstale 5, suma sus cifras hasta obtener un número de una sola cifra, piensa un país europeo que empiece por la letra del alfabeto que ocupa ese lugar, luego, piensa un nombre de gran mamífero que empiece por la siguiente letra del alfabeto.

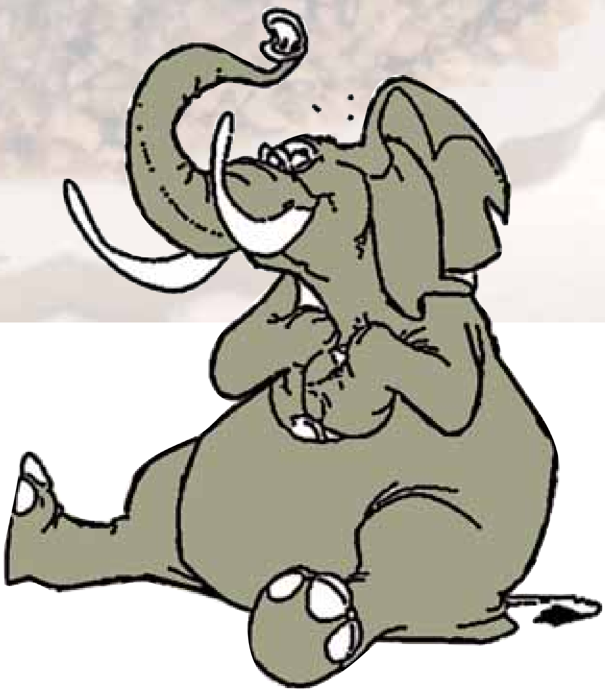
Invariablemente, el país elegido es Dinamarca y el mamífero el elefante. La profesora, sin mirar los cuadernos, dice

¡En Dinamarca no hay elefantes!

La risa de quienes han resuelto correctamente el problema llena la clase. Quienes se equivocaron en los cálculos no entienden la risa, pero, puesto que reír es un placer, se esfuerzan en repetir sus cuentas hasta formar parte de la comunidad carcajeante.

Este divertimento me ha sido proporcionado por un amigo "de letras" convencido de que su aversión a las matemáticas no reside en ellas, puesto que es capaz de disfrutarlas, sino en la imagen que de ellas se hizo en una etapa escolar en que era difícil que el juego entrara en las aulas. Gracias, Miquel Palomero. Actualmente escribe novelas absurdas y tan hilarantes que su carga crítica se filtra entre las carcajadas sin ofrecer resistencia.

EL HILO DE ARIADNA



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORRAS, E., MORENO, P. y NOMDEDEU, X. (2002): *Ritmos. Matemáticas e imágenes*. Nivola, Madrid.

COLERA, J. (1990): "Un problema interesante: maridos engañados en un pueblo integrista". *Suma,* nº 5, pp. 39-43

DE BURGOS, J. (1994): *Los relatos de Gudor Ben Jusá*. Fundación General de la UPM, Madrid.

GARDNER, M. (2002): *Damas, parábolas y más mistificaciones matemáticas.* Gedisa. Barcelona.

SAINT EXUPERY, A. (1983): *El principito*. Alianza/Emece. Madrid.

SUMMERS, G.J. (1988): *Juegos de ingenio 2.* Martínez Roca. Barcelona.

Internet

http://www.math.kth.se/~shapiro/problem.html

http://www.mensa.es/juegosmensa/s176180.html#SOLU178

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 105-112

Historias de al-Khwārizmī (2ª entrega): los libros

Como sucede en general con los autores de la antigüedad el establecimiento de una relación de los escritos de al-Khwārizmī es una labor detectivesca. No se conserva, por supuesto, ningún manuscrito que haya salido de su mano, sino sólo, en el mejor de los casos, copias realizadas por otros. Y estas copias, pueden estar hechas por alguien con conocimientos de la materia del libro o por copistas de profesión, que podían no entender nada de lo que estaban copiando. Más aún, lo habitual es que la copia que se conserve haya sido a su vez copiada de otra copia.

Hay libros que se conocen únicamente porque algún autor posterior lo cita, ya sea en libros que continúan el trabajo de al-Khwārizmī o lo evocan, o bien en repertorios bibliográficos escritos por historiadores. Y estos libros, a su vez, también se conservan a través de una tradición de copias.

O puede suceder que lo único que se conserve sea una traducción a otra lengua, que, a su vez, se conserva a través de una tradición de copias. También cabe que se hayan conservado libros que no son copias sino adaptaciones comentadas o traducciones que no pretenden ser fieles sino ser adaptaciones a otra lengua. O incluso que dispongamos de un libro en el que se ha incorporado una parte de algún libro del autor anterior, más o menos textualmente, mencionándolo o sin mencionarlo.

Hay que añadir además que todo esto varía con el tiempo. Siempre es posible que aparezca en alguna biblioteca o en algún depósito de libros un nuevo manuscrito del que no se tenía noticia.

El trabajo pues de los historiadores que preparan la edición de un libro de un autor de la antigüedad acaba siendo siempre la elaboración de un texto a partir de los materiales de los que se dispone, que se acompaña de la explicación de las fuentes que se han utilizado, las decisiones que se han tomado para elaborarlo, y las variantes que cabe considerar. Y este trabajo, en ocasiones, no está exento de polémica.

Todas estas posibilidades están presentes en el caso de al-Khwārizmī. En esta entrega de Historias, voy a dar cuenta de lo que yo conozco del asunto. Hablaré pues de los libros de al-Khwārizmī y la elaboración de las ediciones publicadas por los historiadores, pero apenas de su contenido.

Luis Puig
Universitat de València Estudi General
historias@revistasuma.es

Los libros de al-Khwārizmī

Al-Khwārizmī es conocido sobre todo por su libro de álgebra y por el libro en que introduce el sistema de numeración posicional y cifrado de los hindúes y el cálculo aritmético en ese sistema, y es razonable que así sea por la importancia que ambos libros han tenido en la historia de las matemáticas. Sin embargo, se tiene noticia de que escribió un buen número de libros en varias disciplinas.

Ésta es una lista de los libros de los que yo tengo noticia. Doy de ellos una transliteración del título árabe, una traducción del título y unas someras indicaciones.

Kitāb al-Mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala (*Libro conciso de cálculo de restauración y oposición*).

El libro de álgebra. Según el prólogo debió escribirlo entre 813 y 833, ya que se lo dedica al califa al-Ma'mūn, y ésos son los años en que fue califa. Roshdi Rashed dice que "Mukhtasar", "conciso" no forma parte del título, sino que fue una decisión de Rosen, en su edición de 1831, el usar para el título una frase del prólogo donde al-Khwārizmī dice que va a "componer en el cálculo de al-jabr y al-muqābala un libro conciso" en el que tiene que "encerrar todo lo que es sutil en el cálculo y lo que en él es lo más noble". Según Rashed, esto son "las normas de una redacción elegante" (Rashed, 2007, p. 9), y no significan que el libro sea un compendio, como da a entender el colocar la palabra "conciso" en el título, y como titula Rosen su traducción inglesa (*Mohammed Ben Musa's Compendium on Calculating by Completion and Reduction*). El libro habría que llamarlo, como lo hicieron los matemáticos inmediatamente posteriores a al-Khwārizmī que lo citan, *Kitāb al-jabr wa'l-muqābala* (*Libro de restauración y oposición*), y así lo ha hecho él en su edición reciente (Rashed, 2007)[1].

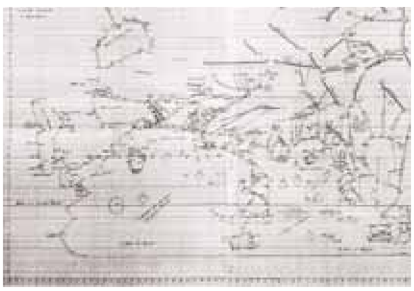


Figura 1
Reconstrucción del mapa del mundo

Kitāb al-hisāb al-^{c}adad al-hindī (*Libro del cálculo con los números hindúes*).

Escrito también después de 813. El libro en que explica el sistema de numeración hindú y el cálculo aritmético con él. No se conserva ningún manuscrito árabe de este libro. Veremos en el apartado "El libro de cálculo hindú. La edición de A. Allard" lo que ha llegado hasta nosotros.

Kitāb al-jam^{c} wa't-tafrīq (*Libro de la reunión y de la separación*).

Perdido. La opinión de Djebbar (2005) y de Rashed (2007) es que debía contener un cálculo aritmético anterior a la introducción del cálculo hindú.

Kitāb sūrat al-ard (*Libro de la configuración de la tierra*).

Escrito alrededor de 817, según Djebbar, o terminado en 833, según Ayyubi (1990). Se conserva una copia árabe en la Biblioteca de la Universidad de Estrasburgo, y una traducción latina en la Biblioteca Nacional de Madrid. En esta geografía, al-Khwārizmī sigue la teoría de los siete climas, y usa datos de Ptolomeo, pero otros que no están en el *Almagesto*. Es probable que haya participado en la expedición organizada por al-Ma'mūn para comprobar los datos del libro de Ptolomeo. En ninguna de las copias hay mapas, y se especula sobre si al-Khwārizmī incluiría un mapa del mundo. Hay una reconstrucción hecha por Hubert Dannicht, a partir de las coordenadas que aparecen en el libro de al-Khwārizmī (figura 1), y un mapa del mundo (figura 2) atribuido a los geógrafos del califa al-Ma'mūn aparece en *Masālik al-absār* de Ibn Fadlallāh al-'Umarī (ca. 1340)[2].

Figura 2
Mapa del mundo atribuido a los geógrafos del califa al-Ma'mūn

Istikhrāj ta'rīkh al-Yahūd (*Determinación del calendario judío*).

En este libro, escrito alrededor de 824 y descubierto alrededor de 1940, al-Khwārizmī muestra conocer también el mundo hebreo, ya que describe las reglas de cálculo de las longitudes medias del sol y de la Luna a partir del calendario judío. Youschkevitch (1976, p. 51) llega a decir que no excluye que al-Khwārizmī conociera el hebreo, lo que explicaría también el parecido de la parte de geometría de su libro de álgebra con el *Mishnat Ha Middot*, el primer libro de geometría que se conoce en hebreo, escrito alrededor del año 150[3].

Zīj as-Sindhind (*Tablas hindúes*)

Escrito después de 813. El libro más importante de astronomía de al-Khwārizmī. Además escribió otros menos conocidos, perdidos o redescubiertos recientemente, que cito a continuación. De éste hablaré en el apartado siguiente.

Maᶜrifa siᶜa al-mashriq fī kull balad (*Determinación de la amplitud ortiva en cada ciudad*).

No tengo más noticia de este libro y de los dos siguientes que la que da Rosenfeld (1993), según la cual se encuentra en unos manuscritos en Estambul (ver también Ahmedov, ad-Dabbagh, & Rosenfeld, 1987).

Maᶜrifa samt min qibal al-irtifāᶜ (*Determinación del azimut según la altitud*).

ᶜAmal siᶜa ayy mashriq shi'ta min al-burūj fī ayy ard shi'ta bi'l-handasa (*Construcción geométrica de la amplitud ortiva de cada signo y para cada latitud*).

ᶜAmal al-sāᶜāt fī basīt al-rukhāna (*Construcción de las horas en el plano del cuadrante solar*).

Según Rashed (2007, p. 6, n. 10) éste libro y el siguiente están en la colección Aya Sofya 4830 de la biblioteca Süleymaniye de Estambul.

Tarā'if min ᶜamal Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī: maᶜrifat al-samt bi-al-asturlab (*Nuevas adquisiciones de Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī: el conocimiento del azimut mediante el astrolabio*).

Kitāb ᶜAmal al-asturlāb (*Libro sobre la realización del astrolabio*).

No se conserva ninguna copia. Mencionado por al-Nadīm, en su *Kitāb al-Fihrist*. En este libro, publicado en 938, al-Nadīm pretendió recoger en un índice todos los libros escritos en árabe hasta ese momento.

Kitāb al-rukhāma (*Libro sobre el cuadrante solar*).

Perdido, salvo que coincida como dice Rashed (2007, p. 376) con el libro *ᶜAmal al-sāᶜāt fī basīt al-rukhāna*, que está en la biblioteca Süleymaniye de Estambul. Mencionado también por al-Nadīm en su catálogo.

Kitāb al-ᶜAmal bi'l-asturlāb (*Libro sobre la utilización del astrolabio*).

Identificado por unos fragmentos reproducidos por el astrónomo del siglo IX al-Farghānī.

Kitāb al-Tārīkh.

Mencionado también por al-Nadīm, se trata de un libro de historia, escrito después de 826.

Las tablas astronómicas de al-Khwārizmī

Según Djebbar (2005, pp. 20-21), como el nombre de al-Khwārizmī no figura en la lista de miembros del equipo de astrónomos encargados por al-Ma'mūn de elaborar unas tablas astronómicas, debió de trabajar en las suyas de forma independiente. Estas tablas se basan sobre una obra hindú ofrecida en 773 al califa al-Mansūr, que fue traducida al árabe por Muhammad al-Fazārī. Al-Khwārizmī, sin embargo, no usó sólo esa obra hindú, sino también tomó de la astronomía persa recogida en las *Zīj ash-Shāhī* (*Tablas del Sha*) las ecuaciones de máximos, entre otras cosas, y de la astronomía griega del *Almagesto* de Ptolomeo, disponible en el mundo árabe desde el siglo VIII, las declinaciones del sol y las ascensiones rectas. Además tomó datos del libro de Brahmagupta (598-668) *Brāhmasphutasiddhānta* (*La apertura del universo*) para el movimiento de los siete planetas.

No se conserva ninguna copia de este libro. Si se conoce, es a través de una versión de esas tablas de al-Khwārizmī, que se habían introducido en al-Andalus en la época de ᶜAbd al-Rahmān II, que escribió alrededor del año 1000 el astrónomo de al-Andalus, nacido en Madrid, Maslama al-Majrītī. Maslama no se limitó a traducir el libro de al-Khwārizmī, sino que cambió el meridiano de referencia, que era el que pasa por la localidad de Uyyain en la India, por el "meridiano de agua", situado al oeste de las Islas Canarias, e introdujo otros cambios para el uso de las tablas con Córdoba como centro religioso (Dorce, 2008). Pero tampoco se conserva ninguna copia árabe de la reelaboración de Maslama, sino sólo una traducción latina, hecha probablemente por Adelardo de Bath en 1126, de la que se conservan varios manuscritos. Suter la editó en 1912, y hay una traducción inglesa con comentarios hecha por Neugebauer de esa edición latina de Suter, suplementada con un manuscrito del Corpus Christi College de Oxford (Neugebauer, 1962).

El libro de cálculo hindú. La edición de Allard.

Si lo que nos ha llegado de las tablas astronómicas de al-Khwārizmī, escritas en el siglo IX en Bagdad y para el Oriente árabe, es una traducción latina del siglo XII, de una versión árabe de alrededor del año 1000, adaptada por un astrónomo de al-Andalus para su uso en el otro extremo del mundo árabe, lo que tenemos del *Kitāb al-hisāb al-ᶜadad al-hindī*, el libro de cálculo con los números hindúes, es también algo alejado del original escrito por al-Khwārizmī.

Tampoco en este caso se conserva ninguna copia en árabe. Sí se conservan, sin embargo, varios textos en latín que están relacionados con el libro de al-Khwārizmī, aunque André Allard, que ha editado recientemente los cuatro más importantes, mantiene que todos ellos son textos híbridos en los que lo que puede provenir del libro que escribiera al-Khwārizmī está combinado con cuestiones que proceden de otras tradiciones aritméticas (Allard, 1992).

Los cuatro libros que ha editado Allard se conocen por las palabras con las que empiezan, lo que se llama el *Incipit* en la terminología de los estudiosos de manuscritos, y son los siguientes:

Dixit Algorizmi…, es decir, *Dijo al-Khwārizmī…* (al que me referiré como DA).

Liber Ysagogarum Alchorismi…, es decir, *Libro de la introducción de al-Khwārizmī…* (LY).

Liber Alchorismi…, es decir, *Libro de al-Khwārizmī…* (LA).

Liber pulueris…, es decir, *Libro de polvo…* (LP).

El primero de ellos, *Dixit Algorizmi…* ha sido estudiado y se ha editado en varias ocasiones, la primera por el príncipe Baldassarre Boncompagni en 1857. Sólo se conserva un manuscrito de él, en la Biblioteca de la Universidad de Cambridge, que es del siglo XII, y bastantes historiadores lo han considerado como una traducción directa al latín del libro de al-Khwārizmī. Sin embargo, Allard mediante un examen detallado de ciertas series de expresiones que aparecen en este manuscrito y en los de los otros tres libros latinos, dice que hay dos fuentes distintas que se manifiestan no sólo en los otros tres libros, sino también en éste, y llega a afirmar que en él no sólo está presente la traducción del libro de al-Khwārizmī, sino que también hay partes que tienen que proceder de la tradición de Boecio y de la *Aritmética* de Nicómaco. De todas maneras, DA sigue siendo, según Allard, la mejor fuente del libro de al-Khwārizmī. El traductor podría haber sido Adelardo de Bath o Robert de Chester, según opinión bastante extendida, pero Allard también afirma que no hay ninguna razón de peso para preferir estos traductores a cualquier otro traductor conocido de la época (Allard, 1992, p. VII, n. 31).

Crossley y Henry, que publicaron una traducción inglesa de este manuscrito un par de años antes de la edición de Allard, también afirman que no es una traducción directa del texto árabe de al-Khwārizmī, sino una copia de una traducción latina hecha por un copista que no estaba familiarizado con las cifras hindoárabes y “que no entendía demasiado la aritmética que estaba copiando” (Crossley y Henry, 1990, p. 107). De hecho, en la mayoría de los folios del manuscrito en donde deberían estar las cifras hay huecos, que el copista dejaba para escribir las cifras más tarde en tinta roja, cosa que nunca llegó a hacer. Youschkevitch, que publicó también un facsímil de este manuscrito, ya decía que “no se trata de una traducción fiel del árabe, los diversos errores y añadidos hechos al texto lo testimonian. Pero se ignora si se deben al primer traductor o al copista” (Youschkevitch, 1976, p. 15).

Figura 3.
Liber Alchorismi, Biblioteca Nacional de Paris (s. XIII)

Si ésta es la situación del mejor testimonio que tenemos del libro de al-Khwārizmī, el análisis de los otros tres libros por parte de Allard concluye con el descubrimiento de incorporaciones aún más variadas de las presentes en *Dixit Algorismi…* En particular, desglosa el *Liber Ysagogarum Alchorismi…*, del que hay cinco manuscritos de los siglos XII a XVI, en tres subtipos (que representaremos por LY I, LY II y LY III), y ve en él un conjunto de influencias variopintas, que habrían sido recogidas probablemente “alrededor de 1143 en los medios toledanos cercanos a Avendauth” (Allard, 1992, p. XX). Este Avendauth no está muy claro quién pueda ser, pero Allard señala como hipótesis más convincente que se trate del filósofo judío Abraham ibn Daūd, que vivió en Toledo entre 1140 y 1180.

El *Liber Alchorismi…*, del que hay nueve manuscritos de los siglos XII a XVI, sale mejor parado del análisis de Allard, aunque éste también se entretiene en desmontar la hipótesis de que su autor fuera Juan de Sevilla (Iohannis Hispalensis) a quien se atribuye desde que Boncompagni editara en 1857 uno de los manuscritos que se conservan de él en la Biblioteca Nacional de París, cuyo comienzo es “Incipit prologus in libro alghoarismi de pratica arismetrice qui editus est a magistro Iohanne Yspalensi”, en el que se le menciona (Boncompagni, 1857, p. 25). Allard aduce que eso sólo sucede en ese manuscrito, pero no en los otros ocho manuscritos que también se conservan de este libro, en los que en todo caso se habla de un “maestro Juan”, a secas. Así, por ejemplo, la primera página del manuscrito del *Liber Alchorismi…* que reproducimos aquí (figura 3) y que se encuentra también en la Biblioteca Nacional de París, codificado como Lat. 15461, está escrito en Italia en la primera mitad del siglo XIII, y comienza así: “Incipit prologus in libro alchorismi de pratica arismetice qui editus est a magistro Iahanne”, es decir, “Comienza el prólogo del libro de al-Khwarizmi”, como en el otro manuscrito, pero en él se menciona que ha sido editado por un “Maestro Juan”, sin especificar qué Juan. Allard propone llamar Juan de Toledo a ese “Maestro Juan”, aunque no haya constancia de nadie con ese nombre (Allard, 1992, p. XIX). De paso, señalaré que este manuscrito es del siglo XIII, según Allard, y no del siglo XII, como dice Charbonier (2004), de cuyo folleto para profesores editado por el IREM de Clermont Ferrand hemos tomado la figura. Lo que es del siglo XII es la traducción latina hecha en Toledo, pero no esta copia.

El *Liber pulueris*, por su parte es más breve, está inspirado en las mismas fuentes que LA, y de él sólo se conservan dos copias del siglo XIV.

El análisis de Allard está resumido gráficamente por él en el árbol genealógico de los manuscritos y sus influencias que incluimos aquí (figura 4), y que muestra la distancia entre el libro de al-Khwārizmī y los libros de que disponemos para saber algo de él.

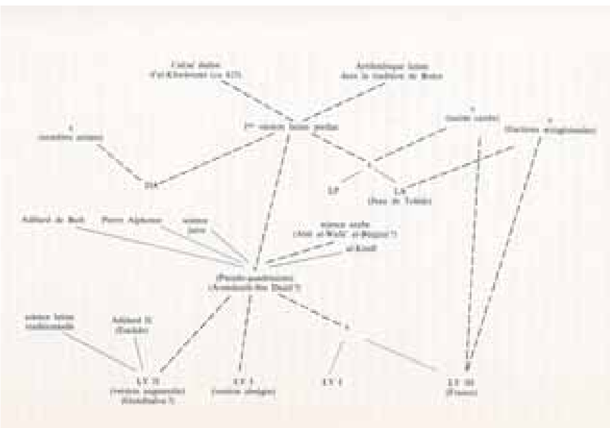


Figura 4

En cualquier caso, la huella de al-Khwārizmī quedó en los incipit de estos libros en la forma latinizada de su nombre, Algorismi o Alchorismi, que pronto dejó de significar “de al-Khwārizmī” para adquirir como significado el contenido de esos libros. Así proliferan los libros de Algorismos, como el *Algorismus Vulgaris* de Juan de Sacrobosco (comienzo del siglo XIII), del que se conocen unos doscientos manuscritos y varias ediciones impresas entre 1488 y 1582. Y a partir de ahí la palabra “algoritmo” va adoptando el significado que hoy en día tiene en la terminología de las matemáticas.

El libro de álgebra. Traducciones y ediciones.

Del libro de álgebra de al-Khwārizmī sí que se conservan manuscritos árabes, pero eso no significa que el establecimiento de un texto lo más cercano al original posible no esté exento de problemas. Hasta hace poco tiempo la edición del álgebra de al-Khwārizmī de que se disponía era la que hizo Frederic Rosen en 1831, acompañada de su traducción al inglés (Rosen, 1831). Esa edición estaba hecha a partir de un único manuscrito (figura 5) que se conserva en la Bodleyan Library de Oxford (Hunt. 212, fol. 1^{v}-54^{r}), que es de 1342, es decir, más de cinco siglos posterior a la fecha de redacción por parte de al-Khwārizmī.

Figura 5.
Portada del álgebra de al-Khwārizmī

Aunque el manuscrito está en muy buen estado y el copista hizo un trabajo cuidadoso, con el texto nítido en tinta negra y los títulos y las figuras en tinta roja, y con la escritura vocalizada a menudo, e incluso indicó el día exacto en que acabó la copia (19 Muharram del 743 de la Hégira, es decir, 24 de junio de 1342), no cupo nunca duda de que el tiempo transcurrido desde el original tenía que haber producido cambios, pérdidas o incorporaciones por su paso por múltiples manos de copistas.

El libro fue editado de nuevo en Egipto en 1939 por ^{c}Alī Mustafā Masharrafa y Muhammad Mursī Ahmad en árabe a partir del mismo manuscrito, en una edición ligeramente más cuidadosa que la realizada por Rosen (Masharrafa y Ahmad, 1939), que apenas modificaba la situación.

A falta de manuscritos árabes más antiguos, los historiadores recurrieron al estudio de las traducciones latinas medievales, una de las cuales resultó ser especialmente buena. En efecto, se conservan tres traducciones latinas diferentes del álgebra de al-Khwārizmī. La más antigua es de Robert de Chester (ca. 1145), seguida de cerca por una de Gerardo de Cremona (ca. 1170). La tercera parece ser de Guglielmo de Lunis (ca. 1250), aunque esa atribución no está exenta de controversia, y, lo que la hace particularmente interesante, hay una traducción de ella a un italiano medieval (al vernáculo, o "volgare" como dice Raffaella Franci, que la ha publicado recientemente[4]).

Recientemente las dos primeras han sido editadas por Barnabas Hughes usando todos los manuscritos que se conocen actualmente, tres en el caso de la traducción de Robert de Chester (Hughes, 1989), y quince en el caso de la de Gerardo de Cremona (Hughes, 1986). Pero esas tres traducciones ya se conocían desde hace tiempo. En 1838, Libri publicó una edición de la de Gerardo de Cremona (no muy buena, según Hughes, 1986, p. 211); en 1850, Boncompagni publicó la de Guglielmo de Lunis como si fuera de Gerardo de Cremona, y Karpinski, en 1915, publicó la de Robert de Chester a partir de un único manuscrito.

La traducción de Robert de Chester comienza así: "In nomine dei pii et misericordis incipit Liber Restaurationis et Oppositionis Numeri quem edidit Mahumed filus Mysi Algaurizm", es decir "En nombre de los píos y misericordiosos comienza el libro de Restauración y Oposición, que compuso Mahoma hijo de Moisés, al-Khwārizmī". Robert de Chester traduce los términos árabes al-jabr y al-muqābala al latín por "restauración" y "oposición", y, como hemos visto que dice Roshdi Rashed, no indica en el título del libro que sea "conciso".

La de Gerardo de Cremona se titula "Liber Maumeti filii Moysi Alchorismi de Algebra et almuchabala", es decir, "Libro de Mahoma, hijo de Moisés, Alchorismi, de Álgebra y almuchabala". Gerardo de Cremona optó por no traducir los términos árabes al-jabr y al-muqābala al latín, sino que los transliteró. Podemos hacer la hipótesis de que Gerardo pensó que esos términos tenían un significado técnico en el texto de al-Khwārizmī, que hacía poco aconsejable traducirlos por palabras del latín que tenían significados en su uso fuera de las matemáticas, que él no quería que los evocara el lector y por eso se decidió por la transliteración. El hecho es que su decisión tuvo como consecuencia la creación del término con que acabaría conociéndose no sólo una operación del cálculo expuesto por al-Khwārizmī en su libro, sino la disciplina matemática que en cierta manera funda: el Álgebra.

La traducción de Gerardo de Cremona ya es importante por este hecho, pero además, la edición de Barnabas Hughes y el posterior estudio de Jens Høyrup comparándola con el manuscrito árabe de la biblioteca Bodleian de Oxford, ha demostrado que la traducción de Gerardo se puede considerar que está mucho más cerca del texto escrito por al-Khwārizmī que el manuscrito de Oxford (Høyrup, 1991). De hecho, el mejor manuscrito de la traducción de Gerardo, que se conserva en la Biblioteca Nacional de París (Lat. 9335 fols. 116v-125v) es del siglo XIII, y se supone que el manuscrito árabe que usó Gerardo para su traducción era del siglo XI. Høyrup ha mostrado que el cuidado y la meticulosidad de las traducciones de Gerardo garantiza que ésta es lo mejor que tenemos hasta la fecha para conocer el álgebra de al-Khwārizmī.

Ésa era la situación hasta hace poco en que empezó a tenerse noticia de la existencia de otros manuscritos árabes del álgebra de al-Khwārizmī[5]. Sin embargo, la reciente edición hecha por Roshdi Rashed a partir de los cinco manuscritos que ha podido consultar[6] (más uno[7] de poco valor), no le quita a la traducción latina de Gerardo de Cremona el lugar privilegiado que ya tenía, a pesar de que ahora hay también un par de buenos manuscritos (uno de 1222), y, además, un manuscrito de un comentario escrito por al-Khuzāᶜī, en el mes del Ramadan del 607 de la Hégira (febrero/marzo 1211), que Roshdi Rashed ha encontrado en Estambul (Yeni Cami 803), en el que éste va transcribiendo el texto de al-Khwārizmī, intercalando sus comentarios.

En el árbol de la figura 6 está resumida la genealogía de los manuscritos que se conservan en árabe, más la posición en ella de la traducción de Gerardo de Cremona (Rashed, 2007, p. 90). Los manuscritos que Rashed ha usado son:

A: Oxford, Bod., Hunt 214 (de 1342)
B: Berlin, Landberg 199 (tardío)
O: Medina, ᶜArīf Hikmat, 4-jabr (1222)
H: Medina, ᶜArīf Hikmat, 4-jabr (1767, pero correspondiente a una tradición anterior)
M: Teherán, Malik 3418 (sólo contiene el capítulo de geometría o medida)
S: Smith, New York, Columbia
L: Gerardo de Cremona
K: Gerardo de Cremona (problemas del apéndice)

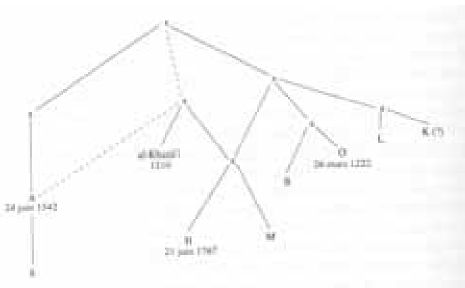


Figura 6

Nota final

No he pretendido ser exhaustivo en esta entrega de "Historias de al-Khwārizmī", ni entra dentro de mi competencia, sino sólo mostrar que la historia de los textos no es simple. De lo que me dejo en el tintero, mencionaré sólo que no hay traducción castellana alguna del álgebra de al-Khwārizmī. La hay inglesa, la de Rosen de 1831 que he citado y que ha sido recientemente reeditada en facsímil en varias editoriales[8] También la hay francesa muy reciente, la de Rashed (2007). Tengo noticia de que hay una traducción persa, cuya referencia no he podido localizar, y de una traducción rusa, que según Hughes (1989, p. 23) es de Rosenfeld y se publicó en 1964. Ya he mencionado la casi primera traducción en vernáculo hecha en Italia, que ha editado Raffaella Franci (2003) y de la que también habla Hissette (2003).

Señalaré finalmente que queda otra tradición medieval por explorar, que es la hebraica. Tony Lévy afirma que no se conoce ninguna versión hebrea del álgebra de al-Khwārizmī en el primero de sus estudios sobre el álgebra árabe en los textos hebraicos (Lévy, 2003), pero también habla de un manuscrito que él ha encontrado en el que hay una adaptación hebrea de la parte del libro de al-Khwārizmī en que se exponen las seis ecuaciones canónicas y su procedimiento de solución, y afirma que, aunque no aparece la palabra álgebra, ni se cita a al-Khwārizmī, puede ser una traducción directa o una adaptación hecha por Ibn Ezra (1089-1164) o un contemporáneo suyo, y, por tanto, ser contemporánea de las traducciones latinas. Como Ibn Ezra se fue de España en 1140 al norte de Italia y luego a la Provenza en 1148, esta versión hebrea del álgebra de al-Khwārizmī, podría haber sido compuesta en España (Lévy, 2002 y 2003).

Esto es lo que los historiadores nos han puesto disponible para conocer la obra de al-Khwārizmī. Las vicisitudes que he esbozado aquí de la historia de los textos conviene tenerlas presentes a la hora de hacer afirmaciones sobre lo que dijo al-Khwārizmī. En una próxima entrega de estas historias, podré entrar a hablar pues de lo que *Dixit Algorizmi*.

HISTORIAS ■

NOTAS

1 Ya que sigo aquí a Roshdi Rashed, conviene señalar que el trabajo prolífico de este historiador ha estado trufado de agrias controversias con otros historiadores (Sesiano, Hojendijk, Toomer), en las que se han cruzado por ambos bandos acusaciones de trabajo poco cuidadoso, falta de rigor, apropiación del trabajo del otro, etc. No conozco ninguna recensión de la edición de Rashed que estoy citando en ninguna revista especializada, hasta la fecha.

2 No he podido consultar esta enciclopedia de la época mameluca. La referencia aparece en: http://web.uni-frankfurt.de/fb13/igaiw/geschichte_arabisch/geschichte_arabisch.html, la página del Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften (Instituto para la Historia de las Ciencias Árabo-islámicas), que dirige Fuat Sedgin, en el que se está publicando una monumental Geschichte des Arabischen Schrifttums (Historia de los escritos árabes).

3 Solomon Gandz publicó esta geometría hebrea junto con la parte de geometría del libro de álgebra de al-Khwārizmī, acompañadas ambas por su traducción al inglés, en Gandz (1932), y afirma que esa parte del libro de al-Khwārizmī está simplemente copiada de ella, sin embargo pensaba que lo había leído en una traducción al sirio o al persa y no en hebreo (Gandz ,1932, pp. 63-64).

4 Ver Franci (2003). La traducción está en un manuscrito de comienzos del siglo xv. Franci indica que "la primera traducción en vernáculo completa y declarada del Al-jabr actualmente conocida está contenida en el manuscrito Fon. Prin. II. III. 198 de la Biblioteca Nacional de Florencia y es de finales del siglo xiv" (Franci, 2003, p. 29), con lo que el que ella ha editado sería unas décadas posterior, pero tiene el interés de que se sabe exactamente de qué texto latino fue traducido.

5 De hecho Anbouba (1978) ya mencionaba hace treinta años un manuscrito que estaba en Berlín.

6 Rashed (2007, p. 83) dice que conoce la existencia de otros dos, pero que son difícilmente accesibles, porque ambos se encuentran en Kabul, Afganistán (o, al menos, se encontraban). Uno, dice, forma parte de una colección privada, y lo tuvo entre sus manos en un viaje que hizo entre la caída de la monarquía y el comienzo de la invasión soviética, pero nunca le enviaron la copia fotostática prometida. El otro debería haber estado en la biblioteca del antiguo Palacio Real, en la que Rashed nunca tuvo autorización para entrar. Rashed concluye diciendo "se comprende que actualmente, después de la nueva invasión, sea imposible trabajar sobre el terreno" Rashed (2007, p. 83).

7 Se trata del manuscrito que luego llama S y que está en New York, Columbia. Rashed dice que este manuscrito es una copia que el historiador David Eugene Smith hizo de la edición de Rosen. Rashed no parece haber leído a Gandz (1932) que cuenta que Smith compró ese manuscrito en Lahore (India) a un persa que se lo vendió como antiguo, para descubrir posteriormente que había sido timado, al comprobar que era de hecho una copia posterior a 1831 de la edición de Rosen.

8 A título de curiosidad diré que, aparte de tener una fotocopia de la edición original de 1831, que conseguí hace años en la biblioteca de Matemática Educativa del CINVESTAV de México, tengo una edición en facsímil publicada en 2003 por The University Press of the Pacific, Honolulu, Hawaii.

Primera pàgina del álgebra de al-Khwārizmī

Algorismus de Johannes de Sacrobosco (s. XII-XIII)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ahmedov, A. A., ad-Dabbagh, J., & Rosenfeld, B. A. (1987). Istanbul Manuscripts of al-Khwārizmī's Treatises. *ERDEM, 3* (7), 163-211.

Allard, A. (Ed.). (1992). *Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī. Le calcul indien (Algorismus).* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

Anbouba, A. (1978). L'algèbre arabe aux IX^{e} et X^{e} siècles. Aperçu général. *Journal for the History of Arabic Science*, *2*, 66-100.

Ayyubi, N. A. (1990). Contribution of Khwârazmî to Mathematics and Geography. In *Acts of the International Symposium on Ibn Turk, Khwârazmî, Farabî, Beyrûnî, and Ibn Sina* (Ankara, 9-12 September 1985), pp. 213-214.

Boncompagni, B. (1857). *Trattati di Aritmetica. II. Ioannis Hispalensis. Liber Algorisme de Parstica Arismetrice*. Roma: Tipografia delle Scienze Fisiche e Matematiche.

Charbonnier, R. (2004). *La route des chiffres à travers les civilisations indienne, arabe et occidentale du Ve siècle au XVIIIe siècle.* Aubiere: IREM de Clermont Ferrand.

Crossley, J. N., & Henry, A. S. (1990). Thus Spake al-Khwārizmī: A Translation of the Text of Cambridge University Library Ms. Ii. vi.5. *Historia Mathematica* , *17*, 103-131.

Djebbar, A. (2005). *L'algèbre arabe. Genèse d'un art*. Paris: Vuibert / Adapt.

Dorce, C. (2008). *Azarquiel. El astrónomo andalusí.* Madrid: Nívola.

Franci, R. (2003). Una traduzione in volgare dell'al-jabr di al-Khwarizmi (Ms. Urb. Lat. 291 Biblioteca Apostolica Vaticana). En R. Franci, P. Pagli, & A. Simi (Edits.), *Il sogno di Galois. Scritti di storia della matematica dedicati a L. Toti Rigatelli per il suo 60º compleanno* (pp. 19-49). Siena, Italia: Centro Studi della Matematica Medioevale. Università di Siena.

Gandz, S. (Ed. Trans.) (1932). The Mishnat ha Middot, the First Hebrew Geometry of about 150 C.E., and the Geometry of Muhammad ibn Musa al-Khowarizmi, the First Arabic Geometry <c. 820>, Representing the Arabic Version of the Mishnat ha Middot. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik*. Abteilung A: Quelle, 2. Band. Berlin: Julius Springer.

Hissette, R. (2003). L'al-Jabr d'al-Khwārizmī dans les mss Vat. lat. 4606 et Vat. Urb. lat. 291 et Guglielmo de Lunis. *Miscellanea Bibliothecae Apostolicae Vaticanae* , *X*, 137-158.

Høyrup, J. (1991). 'Oxford' and 'Cremona': On the relations between two Versions of al-Khwârizmî's Algebra. *Filosofi og videnskabsteori på Roskilde Universitetcenter. 3. Række: Preprint og Reprints* nr. 1.

Hughes, B. (1986). Gerard of Cremona's Translation of al-Khwārizmī's al-jabr: A Critical Edition, *Mediaeval Studies*, *48*, 211-263.

Hughes, B. (1989). *Robert of Chester's Translation of al-Khwārizmī's al-jabr: A New Critical Edition*, Boethius, Band XIV. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

Lévy, T. (2002). A newly-discovered parcial translation of al-Khwārizmī's Algebra. *Aleph, 2*, 225-234.

Lévy, T. (2003). L'algèbre arabe dans les textes hébraïques (I). Un ouvrage inédit d'Issac Ben Salomon al-Ahdab (xiv^{e} siècle). *Arabic Sciences and Philosophy, 13*, 269-301.

Libri, G. (1838). *Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres, jusqu'à la fin du 17e siècle.* 4 volumes. Paris: Chez Jules Renouard et Cie., libraires.

Masharrafa, A. M. y Ahmad, M. M. (Eds.) (1939). *Al-Khwārizmī, Muhammad ibn Mūsa. Kitāb al-mukhtasar fī hisāb al-jabr wa'l-muqābala*. Cairo: al-Qahirah. Reprinted 1968.

Neugebauer, O. (1962). *The astronomical tables of al-Khwārizmī. Translation with Commentaries of the Latin Version edited by H. Suter supplemented by Corpus Christi College MS 283.* København: Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab.

Rashed, R. (Ed.). (2007). *Al-Khwārizmī. Le commencement de l'algèbre.* Paris: Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard.

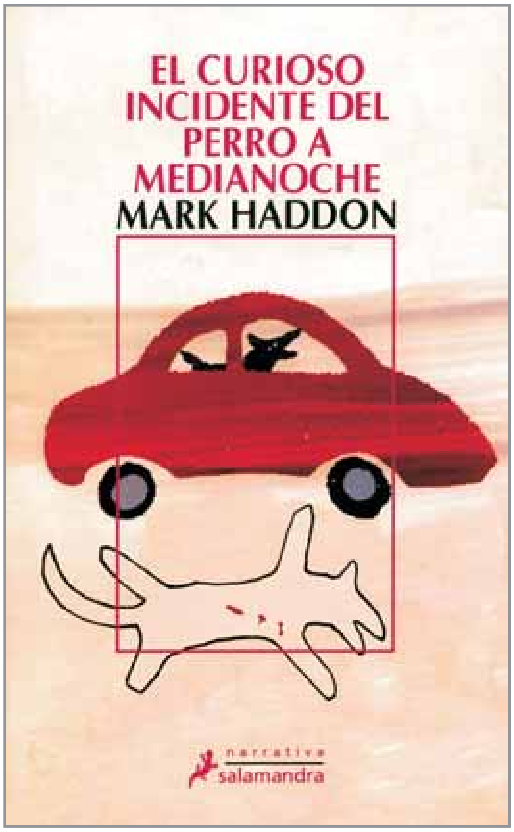
Rosen, F. (1831). *The algebra of Mohammed Ben Musa.* London: Oriental Translation Fund.

Rosenfeld, B. A. (1993). "Geometric trigonometry" in treatises of al-Khwārizmī, al Māhānī and Ibn al-Haytham. En M. Folkerts, & J. P. Hogendijk (Edits.), *Vestigia Mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard* (pp. 305-308). Amsterdam - Atlanta, GA: Rodopi.

Youschkevitch, A. P. (1976). *Les Mathématiques arabes ($VIII^{e}$-XV^{e} siècles).* Paris: Librairie Philosophique Vrin.

suma+ 59
Noviembre 2008, pp.113-120

Matemáticas a medianoche 2ª parte



El curioso incidente del perro a medianoche
(The curious incident of the dog in the nigth-time)
Mark Haddon
Ediciones B, Tiempos Modernos
Publicaciones y Ediciones Salamandra S. A. Barcelona.
Barcelona, Septiembre de 2004 (1ª Edición en español)
ISBN: 84-7888-910-8.
270 páginas

Sobre este mismo libro ver SUMA 51, pp. 112-113, SUMA 53 pp. 13-18 y SUMA 54, pp. 123-130 [N. de la R.]

En el nº 54 de SUMA (febrero de 2007, pp. 123-130) presentábamos esta obra y una propuesta de trabajo para el aula, basada en algunas de las múltiples sugerencias matemáticas que aparecen en sus páginas. Vamos a completar el guión presentado en aquellas fechas con unas nuevas propuestas de trabajo. Sugerimos, para los que no conozcan la obra, que consulten el número de SUMA citado anteriormente, pues allí se presentaban y se comentaban en profundidad sus principales características: argumento, personajes, etc, así como las preferencias en cuanto a nivel educativo y contexto más apropiado para llevarla a la práctica.

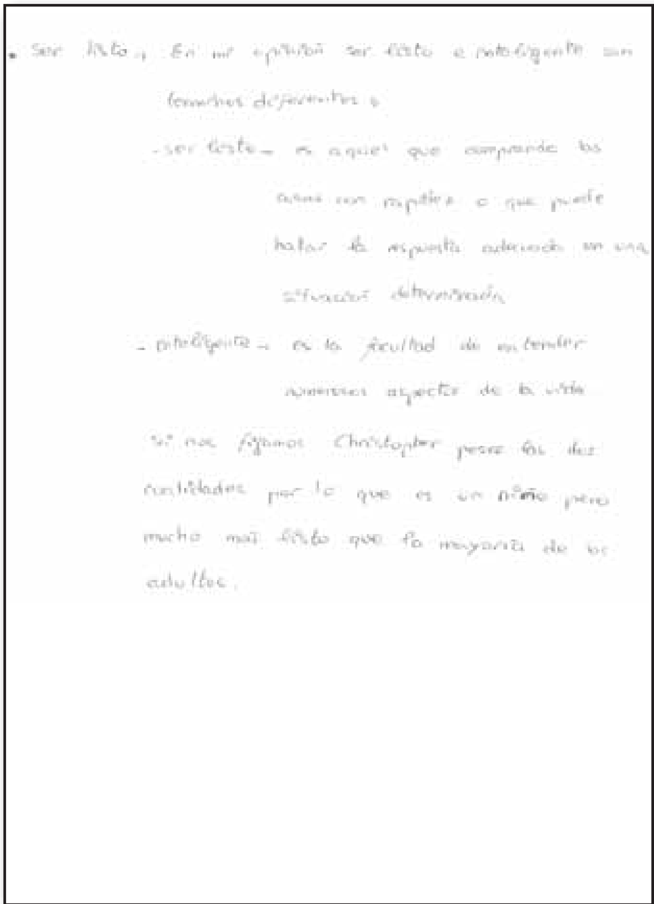
Algunos lectores estarán pensando que en esta sección vamos a emular a algunos directores de cine, *amenanzando* con sacar a la luz una saga con *El curioso incidente del perro a medianoche* como excusa, pero pueden estar tranquilos porque no es esa nuestra intención…

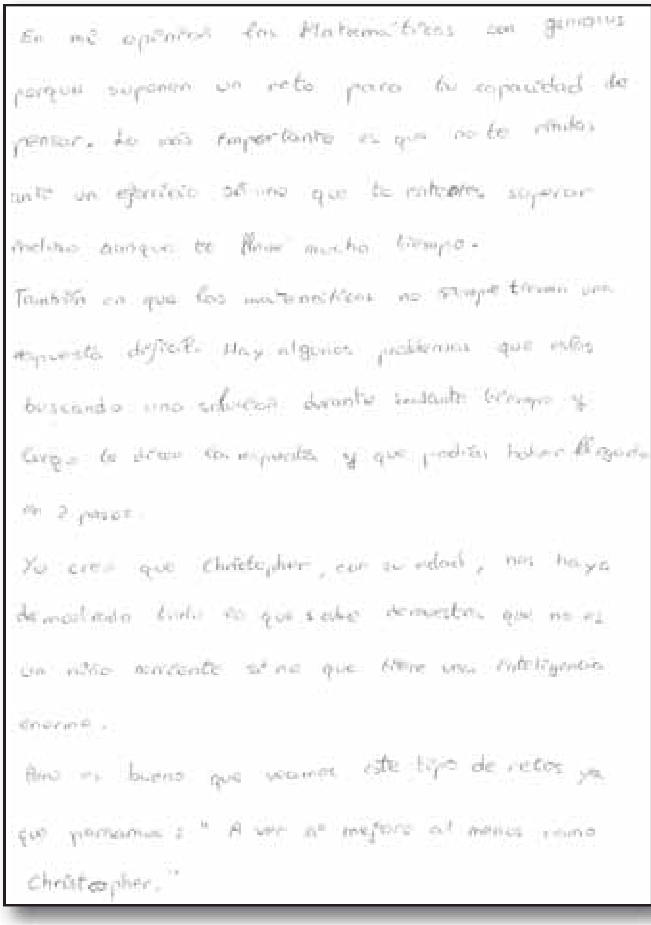
Las cuestiones presentadas más abajo no son un nuevo guión sobre la novela, sino que forman parte del guión original preparado sobre esta obra, pero no aparecieron en el nº 54 de

Constantino de la Fuente Martínez
IES Cardenal López de Mendoza, Burgos
literatura@revistasuma.es

SUMA por falta de espacio; de ahí nuestro interés por completarlo ahora. Las actividades versan sobre temas matemáticos que aparecen en la novela y completan los planteados en el anterior.

En cualquier caso no olvidemos que estamos ante un personaje adolescente con Síndrome de Asperger, muy apropiado para que el alumnado en general se encuentre con alguien *especial*, como algún compañero de su clase. Es curioso que algunos alumnos y alumnas, cuando hacen el trabajo y exponen sus opiniones e ideas sobre el personaje, lo catalogan como un chico con altas capacidades, con una inteligencia superior a la normal y dejan claro que les gustaría parecerse a él en algunos aspectos. Como ejemplo ilustrativo, presentamos las respuestas dadas por un alumno de 4º de ESO a las cuestiones nº 9 y 10 del presente guión, concretamente sobre *la idea de ser listo* (pág. 41 del libro) y sobre *las matemáticas* (pág. 86):


• Ser listo: En mi opinión ser listo e inteligente son términos diferentes:
- ser listo - es aquel que comprende las cosas con rapidez o que puede hallar la respuesta adecuada en una situación determinada.
- inteligente - es la facultad de entender numerosos aspectos de la vida.
Si nos fijamos Christopher posee las dos cualidades por lo que es un niño pero mucho más listo que la mayoría de los adultos.


En mi opinión las Matemáticas son geniales porque suponen un reto para tu capacidad de pensar. Lo más importante es que no te rindas ante un ejercicio sino que lo intentes superar incluso aunque te lleve mucho tiempo.
También es que las matemáticas no siempre tienen una respuesta difícil. Hay algunos problemas que estás buscando una solución durante bastante tiempo y luego te dicen la respuesta y que podrías haber llegado en 2 pasos.
Yo creo que Christopher, con su edad, nos haya demostrado todo lo que sabe demuestra que no es un niño corriente sino que tiene una inteligencia enorme.
Pero es bueno que veamos este tipo de retos ya que pensamos: "A ver si mejoro al menos como Christopher."

En los dos textos podemos leer referencias hacia el personaje principal. En el que habla de la idea de ser listo escribe:

> Si nos fijamos, Christopher posee las dos cualidades [se refiere a listo e inteligente, que explica un poco antes] por lo que es un niño pero mucho más listo que la mayoría de los adultos.

Y en el otro texto manuscrito, sobre lo que son las matemáticas, dice:

> Yo creo que [el que] Christopher, con su edad, nos haya demostrado todo lo que sabe, demuestra que no es un niño corriente sino que tiene una inteligencia enorme.

Cuando se les comenta en clase las características de Christopher, se sorprenden y recapacitan sobre los prejuicios sociales a los estas personas se pueden ver sometidas y toman conciencia, a medida que conocen el tema, para rechazarlos con rotundidad. Y es que esta obra es un magnífico ejemplo para trabajar el respeto a las diferencias, el rechazo a la discriminación social que sufren algunos colectivos de personas, etc.

Sin más dilación pasamos a detallar el guión de actividades que completa el anteriormente publicado.

Una propuesta de trabajo en el aula

Las potencias de un número

> Calculé potencias de 2 en mi cabeza porque me tranquilizaba. Logré llegar hasta 33554432 que es 2^{35} ... (pág. 153)

Como podemos ver, Christopher era capaz de llegar hasta el resultado de 2^{45} mentalmente. ¡Casi nada ...!

Nombre	Simbolo	Potencias binarias y valores decimales
byte	b	2^{0} = 1
Kbyte	KB	2^{10} = 1 024
Megabyte	MB	2^{20} = 1 048 576
Gigabyte	GB	2^{30} = 1 073 741 824
Terabyte	TB	2^{40} = 1 099 511 627 776
Petabyte	PB	2^{50} = 1 125 899 906 842 624
Exabyte	EB	2^{60} = 1 152 921 504 606 846 976
Zettabyte	ZB	2^{70} = 1 180 591 620 717 411 303 424
Yottabyte	YB	2^{80} = 1 208 925 819 614 629 174 706 176

A) Sinceramente, ¿hasta qué potencia de 2 eres capaz de calcular mentalmente? Hazlo y contesta después.

Para compensar que no somos capaces de llegar a 2^{45}, vamos a calcular otras cosas de esos números.

B) ¿Cuáles son las posibles cifras de las unidades de los números que son potencias de 2? Aprovecha el resultado para calcular la cifra de las unidades de 2^{45}.

Hay varios problemas famosos en los que intervienen potencias de 2. Uno de ellos es el del problema del inventor del ajedrez.

C) Investiga su enunciado y la resolución del mismo.

D) Si en vez de operar con potencias de base 2, lo hiciéramos con potencias de base otro número (menor que 10), ¿qué ocurriría?

Completa la tabla siguiente teniendo en cuenta las indicaciones que te damos más abajo y lo podrás deducir razonadamente:

BASE DE LAS POTENCIAS

EXPONENTES	2	3	4	5	6	7	8	9
1								
2								
3						3		
4							6	
5		3						
6								
7								
8								

En esta tabla, los números de la primera fila son las bases de las potencias, los números de la primera columna son los exponentes de las mismas y los demás, que debes calcular, son las cifras de las unidades de las potencias; por ejemplo, la cifra de las unidades de 3^5 es un 3, que hemos puesto en su correspondiente lugar de la tabla. Análogamente hemos calculado las unidades de las potencias 8^4 y 7^3, que son 6 y 3 respectivamente.

E) Con la tabla anterior no tendrás ninguna dificultad para calcular las terminaciones de los siguientes números:

7^{1000}; 4^{457}; 8^{743}; 3^{4130}; 2^{7047}; 9^{8132}.

Más cálculo mental

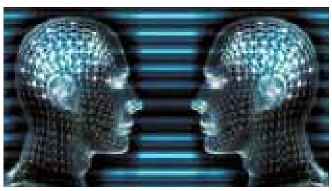
> ¿Cuánto vale 251 por 864? (pág. 92)

Vuelve a leer cómo efectúa nuestro protagonista esta operación mentalmente.

A) ¿Qué te parece? ¿Tú haces habitualmente ese tipo de operaciones mentalmente?

B) Vamos a proponerte algunas operaciones parecidas, para que tú nos expliques cómo las haces mentalmente:

- 56324 multiplicado por 2
- 4138 multiplicado por 99
- 6234 dividido entre 2
- 643 multiplicado por 101
- 5648 dividido entre 4
- 354 multiplicado por 29



Recuerda que debes poner el resultado y explicar cómo los haces mentalmente.

Te vamos a contar un método para obtener mentalmente el resultado de multiplicar un número de dos cifras por 11. Para ello te vamos a poner varios ejemplos:

$42 \cdot 11 = 462$ $\quad$ $34 \cdot 11 = 374$ $\quad$ $63 \cdot 11 = 693$
$58 \cdot 11 = 638$ $\quad$ $75 \cdot 11 = 825$ $\quad$ $39 \cdot 11 = 429$

C) Con esos ejemplos, ¿has podido averiguar en qué consiste el método? Explica razonadamente su validez.

D) Aplícalo para calcular los productos: $87 \cdot 11$ y $68 \cdot 11$

E) Atrévete a investigar cómo puedes obtener el resultado de multiplicar un número de tres cifras por 11. ¡Ánimo!

La mentira y los mentirosos

> Yo no digo mentiras. Madre solía decir que era así porque soy buena persona. Pero no es porque sea buena persona. Es porque no sé decir mentiras. (pag. 32).

Así comienza el capítulo numerado como 37 (según el orden adoptado por Christopher); vamos a aprovecharlo para reflexionar sobre la mentira como cuestión de debate en lógica y sobre personajes mentirosos. Puedes estar tranquilo/a; las preguntas no van ser sobre la frecuencia de tus mentiras, ni si eres mentiroso o no...

La primera situación está sacada de la Segunda Parte de El Quijote, más concretamente del capítulo XLV. Trata sobre una situación que debe resolver Sancho Panza siendo gobernador de la ínsula Barataria, ya que a él corresponde impartir justicia y resolver los conflictos y litigios. Esta es la situación que le presentan sus vasallos y que él debe resolver:

> Señor, un caudaloso río dividía dos términos de un mismo señorío (...). Sobre este río estaba una puente, y al cabo de ella, una horca y una casa de audiencia, en la cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban la ley que había puesto el dueño del río, de la puente y del señorío, que era en esta forma:
>
> "Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jura verdad, déjenle pasar, y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna". Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre, juró y dijo que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa. Repararon los jueces...

> *Normalmente, la gente te mira cuando te habla. Sé que tratan de captar lo que estoy pensando, pero yo soy incapaz de captar lo que están pensando ellos (pág. 38)*

A) Si los cuatro jueces no sabían que hacer, ¿cómo crees que debe resolver Sancho la situación aplicando la lógica? En matemáticas, a las situaciones de este tipo se les denominan paradojas.

B) Realmente en El Quijote, el gobernador Sancho piensa en lo que haría su señor y decide que... Busca tú en un ejemplar de El Quijote y averigua lo que pasó para poder así acabar la frase anterior.

La otra situación que presentamos ocurrió en un país imaginario donde hay habitantes de dos clases: los que siempre dicen la verdad y los que siempre mienten.

Una ventana a la Teoría matemática del Caos

He aquí una fórmula para una población de animales: $N_{nueva} = \lambda \cdot (N_{vieja}) \cdot (1 - N_{vieja})$ (pág. 132)

La ecuación anterior se llama de P. F. Verhulst, que fue un científico que estudió el crecimiento demográfico y la planteó en 1845.

Para simplificar las cosas y que todos la entendamos mejor, vamos a escribir la fórmula así $N' = \lambda \cdot N \cdot (1 - N)$, donde *N* es la población vieja (del año anterior), *N'* es la población nueva (del año siguiente) y λ es una constante que llamamos de fertilidad, que puede cambiar con las condiciones ambientales, de alimentación, depredadores, climáticas, etc. Suponemos, para trabajar con números sencillos, que *N* y *N'* son números entre 0 y 1 y que representan los millones de individuos de esa especie.

A) Comprueba que si $\lambda<1$, la población es cada vez más pequeña y se extingue. Hazlo para los casos λ=0,5 y *N*=0,8, calculando la población en años sucesivos.

B) Si λ=1,5 y la población inicial es 0,1, puedes comprobar que al cabo de 3 años la población será de 0,21676. ¿La población va creciendo? Comprueba que se va estabilizando hacia el valor 0,3333. ¡Y esto ocurre aunque el tamaño inicial sea otro! Compruébalo.

C) Verifica que si λ=2,5 la población se estabiliza en las cercanías del valor 0,6.

D) En el caso λ=3,2, puedes comprobar que la población se estabiliza en valores cercanos a 0,5 y 0,8; un año en uno de ellos y al siguiente en el otro.

E) En el caso de λ=3,5 la población se acerca a cuatro valores: 0,38; 0,83 y otros dos valores que debes descubrir por tus propios medios.

F) Comprueba que para λ=3,57 aparece el caos; es decir, no podemos predecir el resultado de un año sabiendo el del año anterior.

Como dice Christopher en el libro, esto fue estudiado en el siglo XX por el biólogo Robert May junto con otras personas. Estos resultados, junto con los de otras situaciones, fueron la base para la aparición de un nuevo campo de las matemáticas que estudia este tipo de fenómenos y que se denomina Teoría del Caos.

G) Describe alguna otra situación en la que podamos encontrar el caos.

H) Escribe sobre el significado del "efecto mariposa" y su relación con la teoría del caos.

Un paseo por el azar y las probabilidades

Nos vamos a poner a pensar en el azar en general y en las probabilidades. Por ejemplo, cuando hablamos de probabilidades usamos frases como las siguientes:

a. No puede ocurrir.
b. Ocurre casi siempre.
c. No ocurre muy a menudo.
d. Ocurre siempre.
e. Ocurre muy a menudo.

También se suele decir:

1. Muy probable.
2. Improbable.
3. Imposible
4. Probable.
5. No muy probable.

A) Establece una relación entre las frases con letra y las de los números, si significan lo mismo. Puede ocurrir que una misma letra se relacione con varios números.

La teoría de probabilidades surgió a partir del análisis de juegos de azar... Pascal, a petición de un jugador profesional llamado el Caballero de Meré, analizó, junto con otros matemáticos de la época, las posibilidades de ganar en unos juegos de dados. Como resultado de todo ello nació el estudio matemático del azar.

Para que te desafíes a ti mismo, te presentamos unos ejemplos de problemas sencillos sobre azar y probabilidades

B) Ana y Pedro juegan con un dado: si sale un 2, un 3, un 4, un 5 ó un 6, entonces gana Ana 1€. Si sale un 1 gana Pedro. ¿Cuánto debería ganar Pedro para que el juego sea justo, o dicho de otro modo equitativo?

C) Un profesor mandó, como tarea, tirar una moneda a Ana y a Pedro (100 veces a cada uno). Deben anotar un 1 si sale cara y un 0 si sale cruz. Al día siguiente, cuando el profesor solicitó los resultados, le entregaron las siguientes secuencias:

Ana:
10101101100011010110001110110001101001110100101010
10010011101110100100110101110010011010110011001011

Pedro:
11100100001110100001100111000111100000010111001000
11111110000100111010000011110000101011010000001111

El profesor, al observar las secuencias dedujo que uno de ellos había hecho trampa y no había lanzado la moneda, sino que había escrito los resultados que le habían parecido. ¿Quién hizo trampa? ¿Cómo lo ha sabido?

D) Si suponemos que el nacimiento de un niño es igual de probable que de una niña, de los sucesos siguientes, ¿cuál crees que es más probable?:

1. Que de los 10 primeros bebés nacidos en un hospital haya 7 o más niñas.
2. Que de los 100 primeros bebés nacidos en un hospital haya 70 o más niñas.
3. Que de los 100 primeros bebés nacidos en un hospital haya 700 o más niñas.

Las ecuaciones de segundo grado: una particular forma de pasar el rato

> Entonces practiqué un poco de mates en mi cabeza, resolviendo ecuaciones de segundo grado, utilizando la fórmula
> $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ (pág. 199)

En el libro se habla de ecuaciones de segundo grado como si todo el mundo las conociera...

A) ¿Tú sabes lo que es una ecuación de segundo grado?

Si tu respuesta es negativa contesta las a las cuestiones B_1, C_1, ..., y si es positiva contesta a las preguntas B_2, C_2, ...

Para que a partir de ahora sepas algo sobre las ecuaciones de segundo grado, te podemos decir que son ecuaciones en las que figura la x elevada al cuadrado. Por ejemplo:

$2x^2+x=x^2-5x$; $\qquad x^2+5x=-6$;

$-6x+x^2+9=0$; $\qquad x^2-9=0$

En general, si ordenamos la ecuación, agrupamos y operamos los términos semejantes, podemos escribirla de la forma: $ax^2+bx+c=0$, siendo *a, b, c* números reales y *a* distinto de cero. La fórmula de arriba sirve para resolver la ecuación, o lo que es lo mismo, calcular el valor de x que la verifica, al sustituir en la fórmula *a, b, c* por sus valores concretos.

B_1) ¿Por qué crees que *a* debe ser necesariamente distinto de cero?

C_1) Tanteando y dando valores adecuados a x, encuentra las soluciones de las ecuaciones de segundo grado siguientes:

$x^2-9=0$; $\qquad x^2-x=0$; $\qquad x^2-2x+1=0$

D_1) Aplicando la fórmula del principio, resuelve las ecuaciones:

$x^2-5x+6=0$; $\qquad x^2-x-2=0$;
$x^2+2x+1=0$; $\qquad x^2+x+1=0$

E_1) Analizando los casos anteriores y alguno más si hace falta, ¿podrías decirnos cuántas soluciones puede tener una ecuación de segundo grado?

Las siguientes cuestiones son para los que ya conocen lo que es una ecuación de segundo grado...

B_2) Aplica la fórmula para resolver las ecuaciones que aparecen en la página 201 del libro.

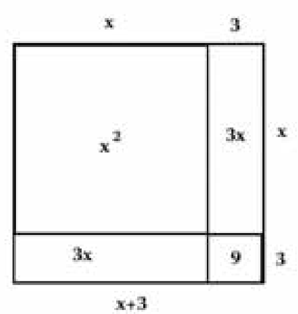
C_2) Algunas ecuaciones de segundo grado se llaman incompletas. ¿Qué significa eso? Resuelve, sin usar la fórmula, algunas ecuaciones de segundo grado incompletas y explica el método en función de la forma que tengan.

D_2) ¿Cuántas soluciones (iguales o distintas) puede tener una ecuación de segundo grado? ¿De qué depende?

El origen de la fórmula para resolver ecuaciones de segundo grado, tal y como la conocemos hoy en día, se basa en un proceso con operaciones algebraicas, con letras y números, que tiene sus antecedentes en los métodos que usó en el siglo IX un matemático árabe, de cuyo nombre se deriva la palabra *algoritmo,* al que vamos a recordar ahora. Por cierto, las fotos pertenecen a un monumento dedicado a su memoria.

E_2) ¿De qué personaje estamos hablando? ¿En qué lugar del mundo está esa estatua conmemorativa? Y ya que estamos hablando de ecuaciones..., la palabra álgebra proviene del título de un libro de matemáticas que escribió él. ¿Cuál es el título del que hablamos?

Este matemático resolvió ecuaciones de segundo grado utilizando un método geométrico basado en figuras. Por ejemplo, imaginemos que tenemos que resolver la ecuación $x^2+6x-16=0$. La idea fundamental consiste en dibujar los términos de la ecuación mediante figuras sencillas: x^2 es el área de un cuadrado de lado x, 6x es el área de un rectángulo... Para ello construimos la figura siguiente:



Es un cuadrado de lado x+3, cuya superficie se puede calcular de dos maneras: elevando el lado al cuadrado o sumando las áreas de las partes que lo componen (los valores están en el interior de cada zona).

Tenemos por tanto:

$$(x+3)^2 = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

Restando 16 a ambos lados, obtenemos:

$$(x+3)^2 -16 = x^2 + 6x + 9 -16$$

Como $x^2+6x-16=0$, queda:

$$(x+3)^2 -16 = 9; \qquad (x+3)^2 = 25$$

Por tanto $x + 3 = \pm \sqrt{25}$; $x + 3 = \pm 5$

Luego $x = 3 \pm 5$; con lo que las soluciones de la ecuación son los valores $x_1 = 8$, $x_2 = -2$. Debemos hacer la salvedad de que la solución negativa no se consideraba en esa época, ya que no estaba claro el significado y la naturaleza de los números negativos. Además, en este caso, x representa la longitud del lado de un cuadrado y no puede ser negativa. En la actualidad, al resolver cualquier ecuación de segundo grado siempre se consideran las dos soluciones reales, sean positivas o negativas.

F_2) Resuelve la ecuación $x^2+4x-21=0$ usando el mismo método que hemos hecho anteriormente. Ten en cuenta que 4x debes representarlo mediante dos rectángulos de área 2x, que añadirás al cuadrado de lado x.

Demuestra el siguiente resultado: "un triángulo cuyos lados pueden escribirse en la forma n^2+1, n^2-1 y $2n$ (donde $n>1$) es rectángulo." Demuestra, mediante un ejemplo opuesto, que el caso inverso es falso. (pág. 257)

G_2) Aunque pueda parecernos mentira, la fórmula general proviene de este método de resolverlas, y casi puedes conseguir deducirla si resuelves las siguientes cuestiones:

- Resuelve usando el método geométrico la ecuación $x^2+4x+c=0$, siendo c cualquier número.

- Resuelve con el mismo método la ecuación $x^2+bx+c=0$, siendo b y c cualesquiera números. Hay que tener en cuenta que uno de los lados de los rectángulos será $b/2$ y que manejar esta expresión tiene más dificultad, por lo que debes extremar el cuidado al operar con ella.

- Te queda el reto final: resolver la ecuación $ax^2+bx+c=0$. Verás que obtienes finalmente la famosa fórmula, pero no es un proceso fácil. La primera dificultad es darle forma geométrica a la expresión ax^2, y para ello debes multiplicar por a toda la ecuación, antes de hacer otra cosa; así a^2x^2 es el área de un cuadrado de lado... Sigue y lo conseguirás.

Si no has conseguido llegar a buen puerto con la cuestión anterior, te proponemos que, a cambio, resuelvas la siguiente:

H_2) Estudia la relación que existe entre las soluciones de las ecuaciones $ax^2+bx+c=0$ y $cx^2+bx+a=0$. Una vez que creas haberla encontrado debes demostrarla rigurosamente.

Un juego "...para despejarme un poco la cabeza"

En el libro aparecen algunos juegos, como por ejemplo el de *Los soldados de Conway* (pág. 182). Te proponemos que hagas un estudio de las reglas de este juego y contestes a las cuestiones que te proponemos en el guión siguiente:

A) Queremos tener tres fichas (o soldados) situadas una línea más arriba de la línea principal. ¿Cómo podemos conseguirlo?

B) Explica un forma sencilla de llegar dos líneas más arriba de la línea principal. Te puedes fijar en el primero de los ejemplos de la página 183.

C) ¿Podrías intentar llegar tres líneas más arriba de la primera línea horizontal? Dibuja el tablero resultante y explica cuáles son las ideas clave para conseguirlo.

Los exámenes... ¡Uf!

> Cuando abrí el examen y lo leí todo no supe cómo responder a ninguna de las preguntas, y además no podía respirar correctamente. Quería pegarle a alguien o ... (pág. 255)

Esas o parecidas sensaciones son las que suelen provocar los verdaderos problemas cuando intentamos resolverlos.

¿Te ocurre a ti lo mismo? Cuéntanos alguna experiencia tuya durante algún examen.

La idea de ser listo

> El señor Jeavons dijo que yo era un chico muy listo.
>
> Yo dije que no era un chico listo. Tan sólo advertía cómo son las cosas, y eso no es ser listo. Sólo es ser observador. Ser listo es ver cómo son las cosas y utilizar la información para deducir algo nuevo. (pág. 41)

Te vamos a pedir tu opinión sobre esta cuestión. Lee con detenimiento el párrafo de la página 41, reflexiona y contesta: ¿Qué es ser listo?

B) ¿Tú te consideras una persona lista?

Sobre las matemáticas

> El señor Jeavons decía que a mí me gustaban las matemáticas porque son seguras. Decía que me gustaban las matemáticas porque consisten en resolver problemas, y esos problemas son difíciles e interesantes, pero siempre hay una respuesta sencilla al final. Y lo que quería decir es que las matemáticas no son como la vida, porque al final en la vida no hay respuestas sencillas.
>
> Eso es así porque el señor Jeavons no entiende los números. (pág. 86).

A) ¿Te parecen ciertas las anteriores afirmaciones? ¿Cómo dirías tú que son las matemáticas?

LITERATURA Y MATEMÁTICAS ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Una fuente de información a tener en cuenta es internet. La búsqueda adecuada puede dar buenos frutos, aunque muchas veces nos encontremos con muchas superficialidades. La adquisición y el fomento de criterios personales para cribar la información de la red, son recursos que debemos cultivar en nuestro alumnado, y debe formar parte del proceso de búsqueda e indagación que queremos que desarrollen.

En cuanto a la bibliografía con soporte escrito hemos seleccionado la siguiente, que es la usada también para la propuesta de trabajo del nº 54 de SUMA, de febrero de 2007 (en el nº 54 de SUMA no hubo espacio para exponerla):

ALLEN PAULOS, J. (1996): *Un matemático lee el periódico*. Tusquets Editores, Barcelona.

BRIGGS, J. y PEAT, F.D. (1990): *Espejo y Reflejo: del caos al orden*. Gedisa, Barcelona.

GALENDE DÍAZ, J.C. (1995): *Criptografía. Historia de la escritura cifrada*. Complutense, Madrid.

POLYA, G. (1965) *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, Mexico.

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 121-127

Intriga y matemáticas

La habitación de fermat
Directores: **Luis Piedrahita y Rodrigo Sopeña**
Actores: *Lluís Homar, Federico Luppi, Alejo Sauras, Elena Ballesteros y Santi Millán*
Guión: *Luis Piedrahita y Rodrigo Sopeña*
Producción: *Manga Films. España 2007*
Distribución: *BManga Films*
Estreno en España: *16 de noviembre de 2007*

En los últimos meses el cine español nos ha ofrecido dos películas con abundantes referencias matemáticas: *La habitación de Fermat* y *Los crímenes de Oxford*. Ambas pertenecen al género de intriga y en ambas los protagonistas son matemáticos que resuelven enigmas. Cualquiera de ellas supondría por si misma un hecho singular; su coincidencia en tan poco tiempo alimenta la ilusión de que nuestra ciencia empieza a ser algo interesante para el gran público [1]. Aunque al hacer esta interpretación tal vez nos pueda el optimismo y en realidad el hecho sólo responda a una tendencia de mercado: los "retos" intelectuales (light, claro está) como objeto de consumo (sudokus, juegos de entrenamiento mental para miniconsolas, suplementos de prensa y concursos del tipo *Mueve tu mente*, etc).

Ciertamente en *La habitación de Fermat* los enigmas son pasatiempos matemáticos bien conocidos; pero hay referencias y personajes que nos asoman al mundo e inquietudes de los matemáticos profesionales. Sin embargo, *Los crímenes de Oxford*, cuyo guión se basa en una obra literaria de autor matemático [2], raya a una altura superior porque trasciende el enigma concreto para plantear cuestiones de Filosofía de la Ciencia, como son la verdad matemática y su relación con el mundo tangible.

José María Sorando Muzás
IES Elaios, Zaragoza
decine@revistasuma.es

La habitación de Fermat

Argumento.- "Pasar a la Historia por resolver un problema, debía ser el sueño de cualquier matemático". Esta frase de uno de los personajes orienta sobre las motivaciones de un peculiar encuentro donde los invitados han sido convocados por su habilidad matemática. La cita es una trampa mortal para los asistentes, quienes, encerrados en una habitación menguante, sólo podrán salvar la vida a través del ingenio, resolviendo problemas ("piensa o muere" es el lema en el cartel y en la web del film). Y entre todos los problemas, el principal: ¿quién los ha convocado? y ¿por qué quiere su destrucción?

Comentario.- La anterior descripción sugiere que esta película toma como modelo a su predecesora *Cube*. Pero, siendo evidente la similitud en la situación, hay importantes diferencias en el desarrollo. Si en *Cube* al terminar seguíamos ignorando cómo y por qué los personajes habían sido encerrados en la trampa, en *La habitación de Fermat* el *cómo* es detallado al principio y el *por qué* constituye el nudo de la intriga, que tiene un desenlace claro y explícito. En *Cube* las Matemáticas eran la llave para lograr la salida, pero aquí son además el leiv motiv de la situación. Son la afición, profesión y obsesión de los protagonistas e incluso proporcionan detalles de ambientación: la geometría de la situación en un espectacular plano cenital, el pomo geométrico de la puerta, una barca llamada Pitágoras, la biblioteca de obras matemáticas, etc. En *Cube*, la tensión de los personajes en la semioscuridad del laberinto se transmitía a los espectadores en la oscuridad de la sala. Pero en *La habitación de Fermat*, pese a que la situación también es claustrofóbica, no nos llega aquel clima agobiante; la acción tiene algunos saltos al exterior y hay incluso algún leve toque de humor.

Las referencias matemáticas son abundantes. La película comienza con el enunciado de la Conjetura de Goldbach y una frase de advertencia: "¿Sabéis lo que son los números primos? porque si no lo sabéis lo mejor que podéis hacer es iros de aquí". Más adelante se mencionan el Teorema de Incompletitud de Gödel y el Problema de Kepler sobre el apilamiento de esferas. Fundamentales en la historia son los problemas o acertijos, casi todos bastante conocidos, de los que se presentan nueve:

1. Descubrir la pauta de esta serie numérica: 5, 4, 2, 9, 8, 6, 7, 3, 1.

2. El problema del pastor, la oveja, la cabra y la col en la barca:

   Un pastor, un lobo, una oveja y una col deben pasar un río en una barca donde sólo caben dos a la vez; y uno de ellos debe ser el pastor, que lleva la barca. No pueden coincidir en las orillas solos el lobo con la oveja, ni la oveja con la col, cuando el pastor vaya a recoger al que falta, pues en cada caso el primero comería al segundo. ¿Cómo se debe hacer el transporte?

3. Un enigma lógico de identificación de cajas mal rotuladas, ya citado en la película *Dentro del laberinto* (Jim Herson 1986):

   Tres cajas cerradas de caramelos están etiquetadas con tres rótulos: anís, menta y mezcla de ambas clases. Ninguno de los rótulos está colocado en la caja que le corresponde. ¿Cuántos caramelos tenemos que sacar de las cajas para saber su contenido exacto?

4. Descifrar un mensaje formado por 169 dígitos binarios.

5. Identificar el interruptor activo en un circuito eléctrico antes de ver la luz:

   En una habitación hay una bombilla. Fuera de la habitación hay tres interruptores, pero sólo uno enciende la bombilla. Estamos fuera de la habitación y sólo se nos permite entrar en ella una vez. ¿Cómo podemos saber cuál es el interruptor que enciende la bombilla?

6. Cronometrar 9 minutos con el uso combinado de dos relojes de arena, uno de 4 minutos y otro de 7.

7. Un célebre problema de divisibilidad, que fuera elogiado por Einstein:

   Dice un matemático: "El producto de las edades de mis tres hijas es 36 y su suma es el número de la casa donde vives".

   Su interlocutor, responde: "Me falta un dato".

   De nuevo, el matemático: "Es cierto. La mayor toca el piano. ¿Cuáles son las edades de mis hijas?".

8. Un problema de edades con una solución poco convencional:

   "Una madre es 21 años mayor que su hijo. Al cabo de 6 años la edad de la madre será cinco veces la que tenga el hijo. ¿Qué está haciendo el padre ahora?"

9. El dilema del prisionero que debe elegir entre dos puertas (una lleva a la libertad y la otra lleva a la muerte) guardadas por un carcelero mentiroso y otro veraz. Al prisionero se le permite hacer una única pregunta a uno de los dos carceleros. ¿Qué debe preguntar para conseguir la libertad?

Resulta algo inconsistente que sean estos acertijos, sacados de los libros de Matemática Recreativa los que ponen a prueba a unos superdotados en Matemáticas, pero ésta es una concesión del guión para que el público pueda involucrarse en los problemas y a la vez para que se puedan resolver en el tiempo rápido que imponen los plazos de la amenaza. Según declaraciones del codirector Luis Piedrahita, para seleccionarlos realizaron un casting de más de mil enigmas.

También se nombra a varios matemáticos famosos: Galois, Fermat, Hilbert, Pascal, Cantor, Gödel, Taniyama y Turing. Y, ¡cómo no!, los desórdenes mentales de algunos de ellos.

Los cuatro protagonistas principales constituyen una galería de arquetipos: el joven genio (un Alejo Sauras matemático "superstar" con sus fans incluidas, situación poco creíble), el matemático maduro que ansía la gloria (Lluís Homar), la chica presa de sus sentimientos (Elena Ballesteros) y el genio práctico que desdeña la ciencia teórica (Santi Millán). No son héroes ni personajes edificantes. Cada uno de ellos muestra su debilidad en algún momento: la ambición, el fraude, la cobardía, la mentira o la falta de escrúpulos. Pero no se pretende describir los matices de la complejidad humana, ni profundizar en ninguna realidad, sino mantener la intriga hasta el final, algo que se consigue de forma digna y eficaz, y, como novedad, en un contexto matemático. Fue razón suficiente para recomendar esta película a nuestros alumnos de Secundaria, mientras estuvo en pantalla.

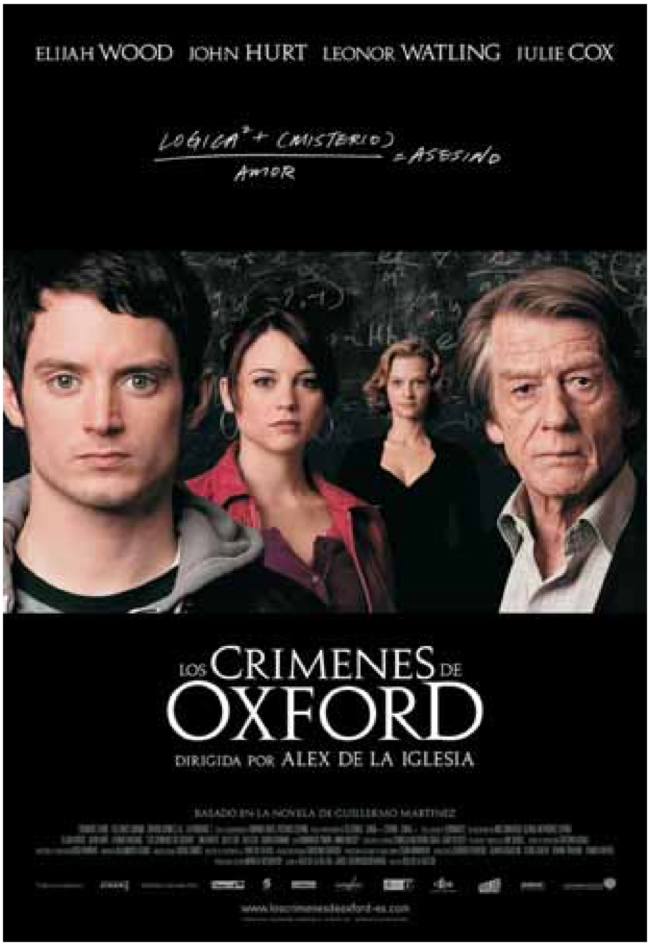
Propuesta para el aula

Cuando esta película sea accesible en DVD, cabrá la posibilidad de usarla en el aula. Se podría hacer deteniendo la imagen tras el planteamiento de cada enigma. De esa forma, los alumnos, imaginariamente transportados a la acción de la película, podrán resolver por si mismos cada reto y se reanudará la proyección una vez resuelto. Cada referencia matemática y cada problema ofrecen además oportunidades para sugerir búsquedas de más información o de nuevos problemas.

Si las apreturas del horario, escaso para llegar a cubrir todo el programa de Matemáticas, nos desaniman para realizar una actividad como la propuesta, sugiero desarrollarla en el tiempo de la Actividad de Estudio, alternativa a la clase de Religión; ese tiempo escolar indefinido en el que, en nombre de la libertad de enseñanza, al profesor se le prohíbe enseñar contenidos curriculares de cualquier materia. Los acertijos de esta película no son encasillables como tales. ■

Los crímeres de Oxford

Los crímenes de Oxford - The Oxford murders
Director: *Alex de la Iglesia*
Actores*: Elijah Wood (Martin), John Hurt (Seldom), Leonor Waitling (Lorna), Julie Cox (Beth).*
Guion: *Álex de la Iglesia, Jorge Guerricaechevarria (Novela: Guillermo Martínez [2])*
Producción: *Tornasol Films /Estudios Picasso /Oxford Crimes /La Fabrique de Films. España - Francia - Reino Unido 2007.*
Estreno en España: *28 de enero de 2008*



Argumento.- Martin, estudiante norteamericano (argentino en la novela), llega a la Universidad de Oxford con el propósito de que Seldom, prestigioso profesor de Lógica, dirija su tesis doctoral. Su relación comienza con un enfrentamiento ideológico. Después, ambos descubren el asesinato de la anciana Mrs. Eagleton. La sospecha de que puede ser el primero de una serie de crímenes les lleva a indagar juntos sobre las pautas del asesino, sus motivaciones y la manera posible de cortar la serie. Ello dará ocasión para que alumno y profesor sigan contrastando sus ideas filosóficas y científicas. Sumido en esta trama intelectual, dos personajes femeninos enfrentan a Martin con el mundo de los sentimientos y debe tomar decisiones.

Comentario.- *Los crímenes de Oxford* es más que una película de asesinatos (como tal, sería simplemente discreta); es sobre todo la escenificación de una batalla de ideas, entre el idealismo neopitagórico de Martin y el escepticismo de Seldom. El mundo y sus acontecimientos, ¿tienen un sentido en si mismos?; ¿o sólo tienen sentido en nuestra mente, a posteriori, por nuestra voluntad de ordenarlos y darles una finalidad?

Seldom nos recuerda que cualquier serie de números (a_1, a_2, a_3…) puede ser continuada con cualquier otro número que elijamos (a_4), existiendo en cada caso un criterio lógico que los relaciona (un polinomio interpolador P(x) tal que $P(1) = a_1$, $P(2) = a_2$, $P(3) = a_3$, $P(4) = a_4$). Por ejemplo: la serie 2, 4, 6, 8… sería continuada por casi todo el mundo con 10, siguiendo el criterio de los números pares, pero también podría ser continuada, por ejemplo, con 543; en tal caso el criterio sería otro evidentemente más complejo, pero no "más verdadero". Entonces, si "todos son ciertos", ¿qué significado tiene querer conocer la verdad?

El profesor opina que sólo existe la verdad lógica, basada en el correcto uso de las reglas de inferencia. Conforme nos alejamos del abstracto mundo de la Lógica Matemática y nos acercamos al mundo de lo cotidiano, desaparecen las certezas absolutas; todo queda sumido en la ambigüedad y el caos. Y concluye: "La Filosofía ha muerto. De lo que no se puede hablar es mejor callar".

Martin piensa que hay un orden que preside la naturaleza. Llega a decir "Creo en el número pi" y hace referencias a la razón áurea y la Sucesión de Fibonacci. Seldom, más potente en su argumentación, le replica: "¿Hay armonía y belleza en el crecimiento desordenado de un cáncer? Esas ideas son sólo miedo. Es triste, pero es lo que hay". [3]

En esa contienda de ideas, cada uno interpreta desde su posición los hechos de la trama policíaca y lo hacen con referencias a grandes hitos de la Ciencia. Pero no se trata de simples citas cultas, sino que aportan claves para el análisis de los crímenes y su contexto. De modo que quedan integrados en el guión, no son verborrea gratuita. Su conocimiento previo facilita la comprensión del film, qué duda cabe; pero no es un requisito necesario, pues son explicados de forma suficiente, asequible aunque no trivial. Bien viene para ello que el director, quien en esta ocasión contiene su reconocida vena humorística, tenga la formación de Licenciado en Filosofía por la Universidad de Deusto. En una entrevista declara:

> Conseguir en dos frases, en dos minutos, explicar el Teorema de Incompletitud de Gödel o el Principio de Indeterminación de Heisenberg de una manera sencilla y rápida era complicado, pero había que hacerlo. Cuando los productores me decían: Nos gusta mucho el guión pero, ¿puedes quitar todo eso de las Matemáticas?, les contestaba que eso es lo que hay que explicar porque si no no se entiende la película.

Las críticas en prensa que tildan a esta película de incomprensible o muy difícil de seguir, parecen revelar dificultades personales o carencias culturales de algunos críticos; porque, sonroja recordarlo, la Ciencia también es Cultura. Hay otras críticas severas en foros de cinéfilos, que reprochan a *Los crímenes de Oxford* su clasicismo y falta de originalidad, añorando el desfile de "frikis" de anteriores películas de Alex de la Iglesia. Pronto recuerdan su reverenciada *Pi. Fé en el caos*, como ejemplo de lo que debe ser una película con Matemáticas; suponen que Matemáticas en el cine debe ser sinónimo de demencia y hermetismo. Unos y otros, en mi opinión, no hacen justicia a una película de excelente factura que logra traer al gran público cuestiones de Filosofía de la Ciencia (en realidad, claves para interpretar la vida); un empeño bastante complejo, logrado con solvencia.

Cine y Literatura

La novela en que se basa esta película es primordialmente de intriga policíaca, aunque protagonizada y resuelta por matemáticos. Pero la película, como se dijo, se centra sobre todo en otro nivel: el antagonismo entre las ideas de Seldom y Martin, y así queda de manifiesto nada más empezar, en la escena de la conferencia, esencial en el film y que no está en la novela. La fuerza de esta escena a su vez está subrayada por una espectacular escena bélica incluida en ella, con Ludwig Wittgenstein escribiendo ajeno al fragor de la batalla en la I Guerra Mundial. Pero también plantea otra disyuntiva vital, en palabras del director: "qué es mejor, ¿vivir la vida, o pensar la vida?"

El guión respeta e incluye casi todos los personajes y episodios de la novela (excepto el sórdido relato del hospital y el capítulo sobre la magia) pero introduce algunos elementos nuevos y enfatiza otros, logrando mayor intensidad dramática y emocional. Así, por ejemplo: el diálogo acerado entre Beth y Mrs. Eagleton; el escarceo amoroso entre Beth y Martin; los detalles erótico-gastronómicos del encuentro íntimo entre Lorna y Martin; el resentimiento de Podorov y su insinuación como sospechoso; Martin va a la búsqueda de Seldom, cuando en la novela su encuentro es casual, etc.

Discurso cinematográfico

Como thriller, es un film peculiar: la acción está más en los diálogos que en los sucesos. Aunque se mantenga la incerti-

dumbre hasta el final, cualquier atento espectador descubre pronto quién asesinó a la primera víctima. Pero, ¿cuál ha sido el verdadero desencadenante de las muertes siguientes?: ¿el orgullo intelectual?, ¿la ayuda a una amiga especial?, ¿el amor de un padre desesperado?, ¿la voluntad de encontrar una lógica a los acontecimientos? Todo ello es cierto, la verdad no es única. El escepticismo de Seldom se impone. Ese cinismo marca en lo profundo una continuidad con la obra anterior de Alex de la Iglesia, aunque en lo formal se trate de una película de corte clásico, aparentemente alejada de *Acción mutante*, *El Día de la Bestia*, etc. Su clasicismo rinde homenaje al maestro Hitchcock (persecución por los tejados, escalera de caracol, etc), en cuya obra también hay presencia matemática.

En el rodaje y montaje de la escena de la conferencia, el director despliega su maestría: hay 18 posiciones diferentes de la cámara. Apoyado en la singular estructura del aula, vemos cómo, conforme avanza en su argumentación, Seldom invade el terreno del auditorio, que es el de Martin; con lo cual se consigue una efectiva plasmación visual de su predominio intelectual.

Otra escena brillante es el plano-secuencia de dos minutos que precede al hallazgo del primer asesinato, en el que el azar hace cruzarse a todos los personajes sin que se lleguen a encontrar, seguidos por la cámara en una sucesión de travellings.

Presencia de las Matemáticas

Veamos los principales elementos matemáticos presentes en *Los crímenes de Oxford*:

- El problema del descifrado de la clave cambiante de la máquina *Enigma* utilizada por los nazis en sus transmisiones durante la II Guerra Mundial. Fue resuelto por un equipo de matemáticos encabezado por Alan Turing. La anciana Mrs. Eagleton lo recuerda en primera persona. En el nº 47 de *Suma* (pags. 130-131) comentábamos el film *Enigma* (Michael Apted 2001).

- El *Tractatus logico-philosophicus* de Ludwig Wittgenstein, magna obra para la fundamentación de la verdad lógica, es la cita de arranque en la conferencia de Seldom en que apoya su tesis.

- Elementos que se nombran de pasada: dimensiones fractales, ecuaciones, series lógicas, etc.

- Se usan escenarios geométricos (escalera en hélice y mosaico bajo ella) en la persecución durante el concierto.

- Se citan tres series famosas: la de Fibonacci, la de las imágenes especulares de las primeras cifras y la simbólica-pitagórica.

- El *Teorema de Incompletitud de Gödel* es citado a propósito del abismo entre lo verdadero y lo demostrable ("Cualquier enunciado puede ser válido").

- El *Principio de Indeterminación de Heisemberg*: se supone que la publicación en prensa de la pauta del asesino le llevará a modificarla (el hecho de la observación influye en el comportamiento del objeto observado).

- El *Efecto Mariposa* (Edward N. Lorenz) da en la escena final la clave última para la interpretación de los hechos.

- Mención especial merece el *Teorema de Fermat* y su demostración pública por Andrew Wiles en 1993 en la Universidad de Cambridge. Se recrea ese momento histórico de las Matemáticas, algo inédito en el cine, pero se cambian los nombres: "Bormat" en lugar de Fermat y "Wilkins" en vez de Wiles. La razón de estos cambios de nombres es que los asesores legales de la productora aconsejaron pedir permiso a Andrew Wiles para que saliera en pantalla un actor que le represente, y Wiles no dio ese permiso. Precisamente la acción se sitúa en 1993 para respetar la cronología de aquella demostración, lo cual según confesaba el director supuso complicaciones en la ambientación (15 años ya es tiempo, pero tampoco es mucho... ¿qué cosas han cambiado?). Pero aunque se hayan modificado los nombres, queda muy claro de quiénes se está hablando. El contenido de la pizarra que se ve en pantalla es réplica exacta de la que escribiera Wiles durante su histórica conferencia. También son correctas las referencias que hace sobre el tema el despechado personaje de

Podorov: la correspondencia entre clases modulares y curvas elípticas, los resultados previos de Taniyama y la existencia de un error en la demostración primera de Wiles (lo resolvería tras dos años de arduo trabajo, acuciado por el impacto mundial de su primera comparecencia, dejando resuelto el problema definitivamente en 1995).

- Los matemáticos que aparecen en la película son de varios tipos: Seldom, la autoridad académica, es duro con su oponente en el debate, resabiado y descreído. Martin, el estudiante al que su confianza en la Ciencia ha llevado desde Arizona a Oxford, representa por contra la opción vitalista ("Prefiero meter la pata para ser feliz que no hacer nada"); alcanza un éxito instantáneo con las mujeres, poco convincente, y por dos veces debe elegir entre la chica o su inquietud intelectual, dando una de cal y otra de arena. Y no faltan los "matemáticos locos": el atormentado Podorov, al que Seldom ha negado la gloria académica, y Frank Kalman, el científico autolobotomizado, continuador de los trabajos de Wittgenstein. La obsesión matemática, que lleva a Martin a escribir fórmulas de trayectorias sobre las paredes de la pista de paddle resulta caricaturesca.

Por último, como profesor de Matemáticas que busca en el cine escenas aprovechables para la clase, debo decir que aunque las Matemáticas estén presentes en toda la película, paradójicamente, no hay ninguna escena que, fuera del contexto del film, me haya parecido útil para el aula.

[1] Además, el director Alejandro Amenábar, ganador de un Óscar por *Mar adentro*, ha comenzado el rodaje de *Ágora*, drama histórico entorno a la figura de la primera matemática y astrónoma conocida, Hypatia de Alejandría.

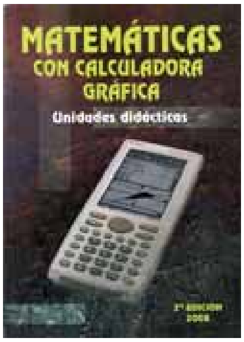
[2] *Los crímenes de Oxford*. Guillermo Martínez. Editorial Destino 2004. Premio Planeta Argentina 2003, bajo el título original de *Crímenes imperceptibles*.

[3] Las investigaciones desarrolladas desde 1993 por Antonio Brú (Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense de Madrid, www.mat.ucm.es/~abruespi/) apuntan a que el crecimiento tumoral no es desordenado, sino que su contorno sigue una pauta fractal.

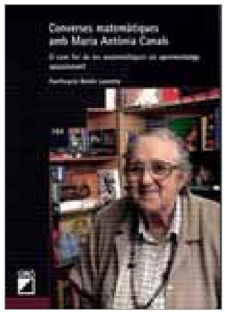
CineMATeca

Libros recibidos

QUE VEINTE AÑOS NO ES NADA. XX AÑOS DE OPEN MATEMÁTICO
Antonio Ledesma López
Colectivo Frontera
Requena, 2008
ISBN: 978-84-691-2698-1
96 páginas



MATEMÁTICAS CON CALCULADORA GRÁFICA. UNIDADES DIDÁCTICAS
Agustin Carrillo Albornoz (Editor)
SAEM "Thales"
Sevilla, 2008
ISBN: 978-84-923760-9-4
252 páginas



CONVERSES MATEMÀTIQUES AMB MARIA ANTÒNIA CANALS.
Purificació Biniés Lanceta
Editorial GRAÓ
Barcelona, 2008
ISBN: 978-84-7827-647-9
93 páginas

UN CONTO XEOMÉTRICO
Julio Rodríguez Taboada
Grupo ANAYA
Madrid, 2008
ISBN: 978-84-667-6051-5
91 páginas

FILOENIGMAS. LOS 150 MEJORES PROLEMAS DE INGENIO DE TODAS LAS ÉPOCAS
J. Pastor Petit
Editorial GEDISA
Barcelona, 2008
ISBN: 978-84-9784-231-0
190 páginas

suma+ 59
Noviembre 2008, pp.129-134

Las fracciones de la música

Tal vez sea la música la matemática del sentimiento
y la matemática la música de la razón

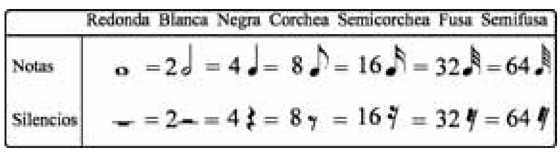
Pedro Puig Adam (1900-1960)

Analizar las proporciones numéricas que aparecen en la Música no resulta una idea original. Basta con hacer una búsqueda en *internet* de “música y fracciones” o “música y proporciones” para darse cuenta de la cantidad de autores que han escrito cosas muy interesantes al respecto. Buena parte de estas aportaciones se centran en las proporciones que aparecen en las distintas maneras de afinar, en las escalas o en la propia estética de las composiciones. Por esta razón, en esta sección no intentaremos abordar estos temas, sino que trataremos de proporcionar material e ideas para que podáis adaptarlas al aula.

La gran cantidad de situaciones en las que el músico está utilizando las fracciones, hace prácticamente imposible hacer una descripción exhaustiva. Por eso, nos conformaremos con presentar el uso de fracciones que rigen la duración de las notas musicales y las que afectan a la altura de los sonidos, ya sea en las notas de la partitura o en la elección de los mismos. Esto significa que, por el momento, no trataremos las proporciones que surgen del hecho de escuchar varios sonidos simultáneamente o de las que rigen los diferentes efectos que busca el compositor.

Las fracciones y los tiempos del pentagrama

Desde las primeras lecciones de música, el estudiante comienza, normalmente de forma inconsciente, un ejercicio de aritmética de fracciones sin el que sería imposible interpretar el pentagrama. Las figuras con las que se escriben las notas musicales guardan entre sí una relación que viene dada por potencias de 2. Así, las notas y sus respectivos silencios, verifican las equivalencias siguientes:



Se toma como unidad la redonda y en este caso, el músico cuenta con las siguientes partes de redonda para hacer las composiciones:

$$N=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},\frac{1}{64}\right\}$$

Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

Aparece así una relación directa con las fracciones que, no obstante, no es la primera que aparece en la partitura. Antes de las figuras, en el pentagrama aparecen la clave (que indica el lugar en el que se sitúa una nota concreta), la armadura (que advierte sobre las notas que deben interpretarse con alteraciones) y el compás. Éste se expresa normalmente con una fracción cuyo denominador expresa cuál es la figura que se utiliza como unidad de tiempo y el numerador expresa cuántas de estas figuras completan cada una de las divisiones del tiempo en que se distribuye la música. Por ejemplo, en el pentagrama siguiente, el compás de 2/4 indica que la unidad rítmica es la negra, 1/4 de redonda, y que la música está dividida en partes iguales, *compases*, que se completan con 2 negras.

Pentagrama 1

Cada uno de los compases estará formado por fracciones del conjunto N cuya suma sea[1] 2/4. Por ejemplo, en los cuatro compases del Pentagrama 1, aparecen las siguientes formas de sumar 2/4:

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

Carolina Bertó y Jorge Sanz, estudiantes de Música interpretando un fragmento que incorpora series de fracciones y notación musical habitual.

Pero, en lo que respecta a medir los tiempos, las operaciones que hacen los músicos no se reducen a la suma de fracciones. En ocasiones, las duración de las figuras se alarga como ocurre con el *dosillo*, que hace que dos notas del mismo tipo ocupen el tiempo de tres notas de ese tipo, o se acorten. Ejemplos de esta última opción son el *tresillo,* el *cuatrillo,* que están formados por un grupo de tres y cuatro notas del mismo tipo, respectivamente, y realmente deben interpretarse en el tiempo ocupado por dos y tres notas de este tipo, respectivamente, o el *cinquillo* y el *seisillo*, formados por cinco y seis notas que en ambos casos ocupan el lugar de cuatro notas. Estas modificaciones se expresan mediante un número que indica el efecto y un corchete que abarca las notas afectadas. Veámoslo en un pentagrama:

Pentagrama 2

Aparece un tresillo, que afecta tres corcheas, y un cinquillo formado por cinco semicorcheas. Por tanto, la manera de sumar 2/4 en los tres compases del pentagrama es la siguiente:

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

De acuerdo con esto, resultaría más sencillo definir el dosillo, tresillo, etc. advirtiendo que el valor de las notas afectadas debe multiplicarse por una de las fracciones siguientes:

DOSILLO	TRESILLO	CUATRILLO	CINQUILLO	SEISILLO
3/2	2/3	3/4	4/5	4/6

Pero, sin duda, esta forma de definirlos no resultaría cómoda para los profesores de música, sobre todo porque el estudiante de Música, muchas veces conoce el tresillo antes de conocer las fracciones.

Las proporciones y la altura de las notas

Si centramos nuestro interés en la altura de las notas, de nuevo aparecen las proporciones y las operaciones con fracciones.

Las frecuencias de las notas que forman parte de la octava se obtienen multiplicando una frecuencia fijada f por números que están en el intervalo [1, 2[. A estas notas se les llama *sistema de afinación* o simplemente *afinación*. Desde luego, la forma de elegir los sonidos afinados no es única y, de hecho, en la orquesta clásica conviven varias afinaciones diferentes (Goldáraz Gaínza (2004), Liern (2005)). De entre éstas, nos quedaremos con dos: el temperamento igual de doce notas, que es la afinación que se utiliza como patrón en prácticamente toda la música occidental, y la afinación pitagórica, en la que continúan afinando los instrumentos de cuerda sin trastes.

Si partimos de la nota Do, con $f = 264.6265$ Hz, para obtener las notas del sistema temperado o doce notas de la afinación pitagórica, basta con multiplicar f por las fracciones o potencias que aparecen en la tabla siguiente:

	Do	Do#	Re	Mi^b	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	Si^b	Si
12 Notas Pitagóricas	1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$
Temperamento igual	1	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$

Teniendo en cuenta esto, un instrumento que afina en el sistema pitagórico, al interpretar el Pentagrama 2 produce la siguiente serie de notas:

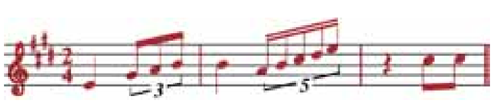
$$f,\frac{81}{64}f,\frac{4}{3}f,\frac{3}{2}f;\quad \frac{3}{2}f,\frac{4}{3}f,\frac{3}{2}f,\frac{27}{16}f,\frac{243}{128}f,2f;\quad 0f,\frac{27}{16}f,\frac{27}{16}f$$

Sin embargo, para los instrumentos que afinan en el sistema temperado, la serie sería la siguiente:

$$f,2^{\frac{4}{12}}f,2^{\frac{5}{12}}f,2^{\frac{7}{12}}f;2^{\frac{7}{12}}f,2^{\frac{5}{12}}f,2^{\frac{7}{12}}f,2^{\frac{9}{12}}f,2^{\frac{11}{12}}f,2f;$$
$$0f,2^{\frac{9}{12}}f,2^{\frac{9}{12}}f$$

Aunque el intérprete no tenga necesidad de pensarlo, de nuevo en la propia esencia de las notas vuelven a aparecer las fracciones. Pero este hecho aún se hace más patente cuando el músico se encuentra con que tiene que interpretar la música a una altura diferente de la original, por ejemplo cuando forma parte de un grupo instrumental o acompaña a algún cantante. Esto significa que debe subir o bajar cada nota de la partitura original un intervalo fijo. Este efecto se conoce como *transporte* o *transposición*.

Como un intervalo musical es un cociente entre las frecuencias de dos notas musicales, desde el punto de vista matemático, la transposición no es más que la multiplicación por una fracción. Por ejemplo, si queremos subir las notas que aparecen en el Pentagrama 2 una tercera mayor[2] (intervalo que se da entre las notas Do y Mi), el músico interpretará lo siguiente:



Pentagrama 3

Lo que ha hecho el músico es multiplicar las frecuencias de las notas que aparecen en el Pentagrama 2 por la fracción

$$\frac{\textit{frecuencia del mi}}{\textit{frecuendia del do}}$$

que en el caso de la afinación pitagórica es 81/64 y en el del sistema temperado $2^{1/3}$. Por lo tanto, para la afinación pitagórica tendremos la serie:

$$\frac{81}{64}\left[f,\frac{81}{64}f,\frac{4}{3}f,\frac{3}{2}f;\frac{3}{2}f,\frac{4}{3}f,\frac{3}{2}f,\frac{27}{16}f,\frac{243}{128}f,2f;\quad 0f,\frac{27}{16}f,\frac{27}{16}f\right]$$

y para el sistema temperado, la serie estaría formada por:

$$2^{\frac{1}{3}}\left[\begin{array}{l} f,2^{\frac{4}{12}}f,2^{\frac{5}{12}}f,2^{\frac{7}{12}}f;2^{\frac{7}{12}}f,2^{\frac{5}{12}}f,2^{\frac{7}{12}}f,2^{\frac{9}{12}}f,2^{\frac{11}{12}}f,2f; \\ 0f,2^{\frac{9}{12}}f,2^{\frac{9}{12}}f \end{array}\right]$$

La solución a un problema secular: las fracciones continuas

De entre todas las formas de elegir los sonidos afinados, nos quedaremos con la más antigua: la afinación pitagórica. Este sistema de afinación puede describirse de la forma siguiente:

Afinación pitagórica: Dada una frecuencia f, que consideramos como nota patrón, estará afinada cualquier nota que se obtenga subiendo o bajando f cualquier número de quintas justas, es decir las que sean de la forma $f\,(3/2)^n$, siendo n un número entero.

En general, cuando se describe una afinación, se divide el conjunto de las frecuencias audibles en subconjuntos que tienen una octava de amplitud, es decir

$$[2^n f,\ 2^{n+1} f\,[,\quad n\in \mathbb{Z}$$

Con esto, si analizamos el intervalo $[f, 2f\,[$, para saber lo que ocurre en el resto de intervalos basta con multiplicar por una potencia de 2 adecuada. Por esta razón se habla del número de notas afinadas que hay en una octava. Y los cálculos aún se pueden simplificar más si hacemos $f = 1$.

Con lo dicho, la afinación pitagórica está formada por los sonidos $(3/2)^n$ transportados a la octava [1, 2[. Para este transporte no hay más que dividir $(3/2)^n$ por una potencia de 2 adecuada, de modo que se verifique:

$$1 \le \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{2^k} < 2, \quad n,k \in Z$$

En esta desigualdad, para cada valor n, el valor de k está determinado unívocamente. Basta multiplicar por 2^k y tomar logaritmos en base 2 para obtener las inecuaciones siguientes:

$$2^k \le \left(\frac{3}{2}\right)^n < 2^{k+1} \rightarrow k \le \log_2\left(\frac{3}{2}\right)^n < k+1$$

Ahora bien, como k es un número entero, se trata de la parte entera por defecto de $\log_2(3/2)^n$, es decir $k = E[n\log_2(3/2)]$. Así, podemos expresar la afinación pitagórica con la sucesión siguiente:

Afinación pitagórica: $a_n = 2^{n\log_2(3/2) - E[n\log_2(3/2)]}, \; n \in Z$

La gran cantidad de situaciones en las que el músico está utilizando las fracciones, hace prácticamente imposible hacer una descripción exhaustiva

Planteando el problema

Tal y como la hemos descrito, en la afinación pitagórica aparecen infinitas notas en una octava. Sin duda, esto haría que no pudiese utilizarse en la práctica. A lo largo de muchos siglos, los musicólogos han tratado de fijar cuál debería ser el número óptimo de notas en una octava. Esto significa que para llegar al consenso de que sean doce las notas que utiliza la mayoría de la música occidental a partir del siglo XVIII, ha habido muchos intentos fallidos (Goldáraz Gaínza (2004)). Y la solución, como podíais esperar, estaba en las fracciones.

Si conseguimos aproximar $\log_2(3/2)$ por una fracción irreducible p/q, los términos de esta sucesión aparecen repetidos a partir de q, es decir

$$a_0 = a_q,\; a_1 = a_{q+1}, \ldots$$

por tanto, si aceptamos la aproximación, sólo son necesarias q notas por octava:

$$\{a_n\}_{n=0}^{q-1}$$

Pero, además de reducir las notas a una cantidad finita, debemos asegurarnos de que están bien distribuidas. Sabemos que la fracción que elegimos para aproximar a $\log_2(3/2)$ marca la cantidad de notas en una octava, pero al reducir toda la afinación a q notas, no debemos pasar por alto ninguna cantidad de notas que, siendo menor que q, aproxime mejor a $\log_2(3/2)$.

A continuación veremos que estas condiciones son las que se consiguen con las fracciones continuas.

NOTA: El razonamiento que hemos seguido para la afinación pitagórica sigue siendo válido para cualquier afinación que esté generada por un sólo intervalo. Por ejemplo, en el temperamento mesotónico de 1/4 de coma, generado por la quinta $\sqrt[4]{5}$, deberíamos aproximar $\log_2\left(\sqrt[4]{5}\right)$ por una fracción continua.

Fracciones continuas simples

A partir de que en el siglo XVIII[3] se estableciesen las bases teóricas de las fracciones continuas, han sido muchos sus campos de aplicación dentro y fuera de las Matemáticas (Redondo Buitrago, Haro Delicado, 2005). A esto se añade que son fáciles de calcular. De hecho, las fracciones continuas, hasta no hace demasiado tiempo, formaban parte de los programas oficiales de Matemáticas de enseñanza secundaria, especialmente de los de Formación Profesional.

Una fracción continua (simple) es una expresión de la forma siguiente:

$$c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 \ldots}}$$

donde los números c_i, $i \ge 1$ son números enteros positivos

En realidad, las fracciones continuas son una sucesión de números racionales, llamados convergentes, que se obtienen de la forma siguiente:

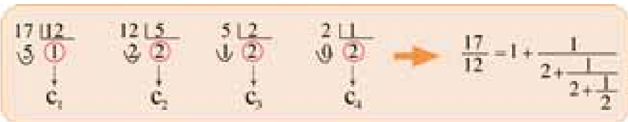
$$\frac{n_1}{d_1} = c_1,\; \frac{n_2}{d_2} = c_1 + \frac{1}{c_2},\; \frac{n_3}{c_3} = c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3}}, \ldots$$

Esta sucesión converge a un número real α que queda determinado por la fracción continua, y la forma con la que los convergentes van aproximándose a α es alternativamente por defecto y por exceso, es decir

$$\frac{n_1}{d_1} < \frac{n_3}{d_3} < \ldots \leq \alpha \leq \ldots < \frac{n_4}{d_4} < \frac{n_2}{d_2}$$

Pero a nosotros, lo que nos va a interesar es que cualquier número real tiene asociada una fracción continua que será finita o infinita, dependiendo de que el número sea racional o irracional, respectivamente.

Veamos en un ejemplo cómo se calculan estas fracciones. Para obtener la fracción continua de 17/12, no hay más que hacer divisiones sucesivas de la forma siguiente:



Los convergentes son los siguientes:

$$1 < \frac{7}{5} < \frac{17}{12} \leq \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$$

Cuando hay muchos convergentes, en lugar de calcularlos operando directamente con fracciones, se suelen obtener por recurrencia mediante las siguientes fórmulas (Ivorra (2006)):

$$\frac{n_1}{d_1} = \frac{c_1}{1},\ \frac{n_2}{d_2} = \frac{n_1 c_2 + 1}{c_2},\ \frac{n_i}{d_i} = \frac{n_{i-1} c_i + n_{i-2}}{d_{i-1} c_i + d_{i-2}},\ i \geq 3$$

Entre las muchas propiedades de las fracciones continuas, para nosotros será fundamental la siguiente (Baker, (1984), Ivorra (2006)):

> **Propiedad:** Dado n_i/d_i un convergente de la fracción continua del número real positivo α, cualquier fracción a/b de manera que
>
> $$\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| < \left|\frac{n_i}{d_i} - \alpha\right|$$
>
> verifica que $d_i < b$

Es decir , que si una fracción a/b aproxima a α mejor que un convergente, su denominador b debe ser mayor que el denominador del convergente.

La solución a dos problemas

En primer lugar, calculamos algunos convergentes de la fracción continua asociada a $\log_2(3/2)$. Esto puede hacerse, bien con la ayuda de alguna aplicación informática como MATHEMATICA® o bien dando un valor aproximado de $\log_2(3/2)$ y tratándolo como un número racional. Por ejemplo, podemos suponer que

$$\log_2(3/2) \approx 0.5849625$$

En cualquier caso, los 10 primeros convergentes de su fracción continua son los siguientes:

$$1 < \frac{1}{2} < \mathbf{\frac{7}{12}} < \frac{31}{53} < \frac{389}{665} < \ldots < \log_2\left(\frac{3}{2}\right) < \ldots < \frac{9126}{15601} < \frac{179}{306} < \frac{24}{41} < \frac{3}{5} < 1$$

El denominador de cada uno de los convergentes nos indica cuál es el número de notas por octava para una cierta precisión. Por ejemplo, como 5 notas resultan insuficientes, se recurre a 12 notas por octava. Esta es la razón matemática por la que casi toda la música actual utiliza doce notas. Si quisiéramos mayor precisión deberíamos recurrir 41, 53, etc., pero estas divisiones son poco habituales en la práctica.

> *...para llegar al consenso de que sean doce las notas que utiliza la mayoría de la música occidental a partir del siglo XVIII, ha habido muchos intentos fallidos. Y la solución, como podíais esperar, estaba en las fracciones.*

La ventaja de haber utilizado fracciones continuas es que tenemos garantizado (por la Propiedad) que cualquier valor intermedio entre dos denominadores de los convergentes no mejoraría la aproximación a la quinta justa, porque si n_i/d_i es un convergente, no existe ninguna fracción p/q con $q < d_i$ que verifique

$$\left|\frac{p}{q} - \log_2\left(\frac{3}{2}\right)\right| < \left|\frac{n_i}{d_i} - \log_2\left(\frac{3}{2}\right)\right|$$

Queda así zanjada la cuestión de encontrar un número óptimo de notas por octava.

Pero aún se puede ir más allá. Si nos quedamos con 12 notas, la aproximación a $\log_2(3/2)$ es 7/12. Con esto, si en la expresión de la afinación pitagórica sustituimos el logaritmo por su valor aproximado, obtenemos

$$\left\{2^{n\frac{7}{12}-E\left[n\frac{7}{12}\right]}\right\}_{n=0}^{11}=\left\{2^{\frac{n}{12}}\right\}_{n=0}^{11}$$

y éste es exactamente el sistema de afinación que utiliza en la gran mayoría de la música occidental: el temperamento igual de doce notas.

MUSYMÁTICAS

NOTAS

[1] No conviene simplificar la fracción que expresa el compás porque, a pesar de que dos fracciones equivalentes representan la misma duración, rítmicamente no responden a la misma realidad. Por ejemplo, el compás de 3/4 está formado por tres tiempos y cada uno de ellos lo ocupa una negra, mientras que el compás de 6/8 tiene seis tiempos y cada uno está ocupado por una corchea.

[2] Las denominaciones de los distintos intervalos pueden encontrarse, por ejemplo, en Randel (1999) o en:

http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_musical#Tipos_de_intervalos

[3] El origen de las fracciones continuas se remonta a Euclides (siglo III a. C.) quien estudió por primera vez este tipo de fracciones en el Libro 8 de los Elementos. En la Edad Moderna la teoría fue retomada por Bombelli, en su libro L'Algebra parte maggiore dell' aritmética, Bolonia 1572, en donde se utilizan fracciones continuas para calcular raíces cuadradas. Posteriormente, Leonhard Euler en De fractionibus continuis, 1737, dio los primeros pasos en la teoría, tal como se conoce en la actualidad. Finalmente, fue Joseph Louis Lagrange quien en 1768 formalizó esta teoría en su memoria Solution d'un problème d'arithmétique.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKER, A. (1996): *Breve introducción a la teoría de números*, Alianza Editorial, Madrid.

GOLDÁRAZ GAÍNZA, J. J. (2004): *Afinación y temperamentos históricos*, Alianza Editorial, Madrid.

HALL, R. W., JOSIC, K. (2001): "The Mathematics of Musical Instruments", *The American Mathematical Mothly 150*, pp. 347-357.

LIERN, V. (2005): "Fuzzy tuning systems: the mathematics of musicians", *Fuzzy Sets and Systems 150*, pp. 35-52.

RANDEL, D. (1999): *Diccionario Harvard de música*, Alianza Editorial, Madrid.

REDONDO BUITRAGO, A., HARO DELICADO, M. J. (2005): "Fracciones continuas, números metálicos y sucesiones generalizadas de Fibonacci", *Suma 50*, pp. 53-63.

Internet

BENSON, D. (2007): Mathematics and Music,

http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/maths-music.html
http://es.wikipedia.org/wiki/Dosillo
http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_musical#Tipos_de_intervalos

IVORRA, C. (2006): Teoría de números,

http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Numeros.pdf

suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 135-139

XIX Olimpiada Matemática Nacional para alumnado de segundo de ESO Región de Murcia, 24 al 28 de junio de 2008

Foto de grupo de todos los participantes

Del 24 al 28 de junio se ha celebrado en Murcia la XIX Olimpiada Matemática Nacional, convocada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, **FESPM,** y organizada por la Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia, **SEMRM**, en la que participaron 58 alumnos acompañados de 26 profesores de las diferentes Sociedades de profesores junto con los invitados del País Vasco, Principado de Andorra y los Institutos Españoles en el Extranjero de Marruecos.

Murcia ha estado presente desde la primera Olimpiada Matemática Nacional, primero a través del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad de Murcia y a partir del año 1999, en que se constituyó la Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia, comenzamos a involucrarnos en el desarrollo de la fase regional, siendo en el año 2001 cuando asumimos plenamente la realización de la Olimpiada, tanto en su fase regional como en la fase nacional. Así pues, en Murcia hemos celebrado la misma edición de las dos fases, la XIX Olimpiada.

Para la preparación y desarrollo de la XIX Olimpiada Matemática Nacional hemos contado con el patrocinio tanto de la Consejería de Educación, Ciencia e Investigación como de la Consejería de Cultura, Juventud y Deportes y con la colaboración de Ayuntamientos, empresas y compañeros de la Sociedad.

Expresar desde aquí, nuestro más sincero agradecimiento a todas las personas que de una manera u otra, se han implicado tanto en la organización, como en el desarrollo, en el patrocinio, colaboración y que nos han inundado de regalos en cada uno de los lugares que hemos visitado y que todo ello ha hecho posible que la XIX Olimpiada Matemática Nacional haya llegado a buen puerto para satisfacción de todos.

Ascensión Fernandez Vicente
Coordinadora del equipo organizador de la XIX Olimpiada Matemática Nacional

Programa

1er. Día, martes, 24 de junio

15:00 Llegada al Centro de Alto Rendimiento (CAR) “Infanta Cristina” **Mar Menor**. Asignación de habitaciones.
19:30 Recepción de los participantes en el **CAR** de **Los Alcázares**.
20:00 Entrega de credenciales y presentación del programa. (Se entregará a cada participante y acompañante una camiseta que llevará el logotipo de la Olimpíada junto al programa detallado y una carpeta con información turística de Murcia).
21:00 Cena en el **CAR**.
23:00 Reunión de profesores
23:30 ¡A dormir!

2º. Día, miércoles, 25 de junio

8:00 Desayuno en el **CAR**.
9:30 Inauguración oficial, presidida por el Rector Magnífico de la **Universidad de Murcia**, en la Facultad de Educación de la **Universidad de Murcia**.
10:00 Realización de la prueba individual en la **Universidad de Murcia**.
12:00 “Bocadillos y refrescos”.
12:30 Visita a algunas de las instalaciones de la **Universidad de Murcia**.
14:00 Almuerzo en la **Universidad de Murcia**.
17:00 Visita al **Museo Salzillo**.
18:30 Actividades Matemáticas en la calle. (Plaza de Santo Domingo)
21:30 Cena en el **CAR**.
23:30 ¡A dormir!

3er. Día, jueves, 26 de junio

8:00 Desayuno en el **CAR**.
9:30 Recepción en el **Ayuntamiento de Cartagena**.
10:00 Visita guiada a la **ciudad de Cartagena**. Viaje en barco.
12:45 Visita a la **Universidad de Cartagena**.
14:00 Comida en la **Universidad Politécnica de Cartagena**.
16:30 Actividades náutico-deportivas.
21:00 Cena en el **CAR**.
23:30 ¡A dormir!

4º Día, viernes, 27 de junio

8:00 Desayuno en el **CAR**.
9:30 Realización de la prueba por equipos en **Los Alcázares**.
12:30 Viaje en barco.
14:00 Almuerzo en el **CAR**.
16:30 Talleres de juegos matemáticos. Baño en la playa.
19:00 Sesión sobre Resolución de Problemas. Discusión y análisis de los problemas planteados en las pruebas.
21:00 Cena institucional de despedida en **Los Alcázares**.
24:00 ¡A dormir!

5º Día, sábado, 28 de junio

8:30 Desayuno en el **CAR**.
10:00 Visita guiada a la **Catedral** y centro de la ciudad de Murcia.
12:30 Recepción en el **Ayuntamiento de Murcia**.
- Acto de entrega de premios y obsequios a todos los participantes.
- Clausura de la XIX Olimpiada Matemática Nacional.
- Vino español

Desarrollo de las actividades

El **primer día,** 24 de junio, fueron llegando los alumnos y profesores al Centro de Alto Rendimiento, C.A.R., de Los Alcázares, lugar donde estuvimos alojados en un marco incomparable a la orilla del Mar Menor. Por la tarde, la Concejala de Educación del Ayuntamiento de los Alcázares nos dio la bienvenida y se repartieron las acreditaciones y diferentes materiales.

El **segundo día,** después del desayuno nos fuimos a Murcia, donde pasamos la jornada. Llegamos a la Facultad de Educación de la Universidad de Murcia y tras la Inauguración oficial a cargo de personalidades de la Universidad y la política, tanto local como autonómica, los alumnos pasaron a realizar la prueba individual. La Universidad de Murcia nos ofreció la comida. A media tarde nos fuimos a ver el Museo Salzillo para contemplar las famosas imágenes de este escultor murciano.

Paralelamente a la Olimpiada, con la intención de acercar las matemáticas a todas las personas y contando con el patrocinio del Ayuntamiento de Murcia, organizamos dos días de Matemáticas en la Calle en su céntrica Plaza Santo Domingo, que visitamos después del Museo Salzillo y donde realizamos algunas de las actividades que allí había, como por ejemplo, montaje de un omnipoliedro, sacar coches de un atasco, practicar con diferentes juegos de lógica, contemplar las exposiciones de fotografía matemática, de mosaicos de Escher, etc. Al finalizar, volvimos al C.A.R.

El **tercer día** pasamos la mañana en Cartagena, donde fuimos recibidos por la Concejala de Educación, visitamos el Ayuntamiento, dimos un paseo por la modernista Calle Mayor y un viaje en barco por el puerto natural de Cartagena.

Matemáticas en la calle

A mediodía, fuimos a la Universidad Politécnica de Cartagena, donde nos enseñaron sus dependencias, la Biblioteca y nos mostraron una serie de experimentos en los que ellos vienen trabajando, haciéndonos partícipes de los mismos y a continuación nos ofrecieron la comida.

Por la tarde volvimos al CAR donde los alumnos, y algunos profesores, se animaron a participar en las actividades náuticas de vela y piragüismo que teníamos previstas por las tranquilas aguas del Mar Menor.

El **cuarto día,** en la misma playa de los Alcázares, realizamos la prueba por equipos, que tenían por nombre el de diferentes personajes relevantes de la Región de Murcia, como Alfonso X El Sabio, Ibn Ben Arabí, Isaac Peral, Juan de la Cierva, Francisco Salzillo, San Isidoro, Cardenal Belluga, Saavedra Fajardo y Conde de Floridablanca cuyo bicentenario celebramos este año en Murcia, ocasión idónea para que visitéis nuestra región. Se realizaron diferentes pruebas matemáticas

Cartel de la XIX Olimpiada Matemática Nacional

Matemáticas en la calle

como por ejemplo, estimar la cantidad de personas que pueden caber en un lugar determinado o calcular la distancia a la Isla del Barón situada en el Centro de Mar Menor, isla a la que, una vez acabada la prueba, bordeamos en el paseo que dimos en barco por esta laguna salada.

Tras la comida en el CAR, Albert Violant organizo un taller de matemáticas con diferentes juegos de ingenio que atrajo durante toda la tarde la atención de alumnos y profesores.

Por la noche tuvimos la cena de clausura, donde les hicimos un reconocimiento a aquellas personas que a lo largo de estos años hicieron posible, no sólo que se comenzase la olimpiada, sino que de forma consecutiva haya cumplido su edición decimonovena.

El **quinto día** fue el de la despedida, la hicimos en Murcia y en su Ayuntamiento celebramos el Acto de Clausura que presidió la Teniente de Alcalde de Educación y personal junto con el Director General de Promoción Educativa e Innovación de la Consejería de Educación, Ciencia e Investigación, el Presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y el presidente de nuestra sociedad. En este acto, se felicitó a todos los participantes haciéndoles entrega de un diploma y diferentes regalos. Después se nombraron aquellos alumnos a los que se les dio una mención por haber destacado en las diferentes pruebas, ya fuese individual o por equipos.

Durante todos estos días hemos tenido el seguimiento de los medios de comunicación, prensa, radio y televisión, especialmente las televisiones Región de Murcia y el Canal Sur de Andalucía con reportajes especiales sobre la Olimpiada y las Matemáticas en la calle.

Los equipos que tuvieron mención especial fueron:

Equipo Ibn Ben Arabí:
Daniel Rodríguez Cavaría de Andalucía
Carlos Maestro Pérez de Castilla León
Carlos Velasco Parras de Extremadura
Celia Traver Abella de Comunidad Valenciana
Clara Carrera I Moreno de Cataluña
Conchi Domínguez Sánchez de Murcia
Daniel Guerra Bernardo de Madrid

Equipo Isaac Peral:
Cristina Blanco Iglesias de Extremadura
Antonio Garre Andrés de Murcia

Prueba por equipos

Daniel Roldán Gutiérrez de Cantabria
Héctor Gutiérrez Muñoz de La Rioja
Enrique Jiménez Izquierdo de Castilla León
Eudald Romo I Grau de Cataluña
Eva Marina González Isla de Castilla La Mancha

Los alumnos que tuvieron mención de honor, a titulo individual y por orden alfabético fueron:

Miguel Carbajo Berrocal de Asturias
Ramiro Martínez Pinilla de Castilla León
Luis Martínez Zoroa de Murcia
Mario Román García de Andalucía
Roberto Tébar Martínez de Castilla La Mancha

Para acabar le dimos el relevo a la Sociedad Isaac Newton de Canarias, en la persona de Arnulfo Santos Hernández, que será la que se encargue de la realización de la XX Olimpiada Matemática Nacional. **Nos vemos en las Islas Afortunadas**.

Para ampliar información puedes visitar la página web de nuestra sociedad:

www. semrm.com

Taller de juegos

Actividades náuticas

Convocatoria de los cargos de la Comisión Ejecutiva de la FESPM correspondientes a las siguientes secretarías:

- Secretaría de Relaciones Internacionales
- Secretaría de Actividades con Alumnos
- Secretaría de Actividades y Formación de profesorado
- Secretaría de Publicaciones

Los Estatutos de la *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas* (FESPM) establecen, en su artículo 11, los cargos unipersonales, entre los cuales se contemplan las secretarías de área. En el artículo 7 del Reglamento de la FESPM se especifican las áreas de trabajo para las que se elegirán Secretarios/as. Éstas son: Publicaciones, Revista SUMA, Prensa, Relaciones Internacionales y Actividades.

La Junta de Gobierno de la FESPM, en la reunión celebrada en Madrid el día 4 de octubre de 2008, acordó convocar la **Secretaría de Relaciones Internacionales**, la **Secretaría de Actividades con Alumnos**, la **Secretaría de Actividades y Formación de Profesorado** y la **Secretaría de Publicaciones**.

De acuerdo con lo establecido en el Artículo 8 del Reglamento de Régimen Interno de la FESPM:

> Podrá ser candidato a las Secretarías, cualquier socio de una Sociedad federada, con un año de antigüedad al menos. La solicitud, dirigida al Presidente de la FESPM deberá ir acompañada de la siguiente documentación:
>
> 1. Certificado en el que conste que es socio activo de una Sociedad Federada, y su antigüedad.
> 2. Un proyecto en el que se exponga su línea de trabajo (máximo cuatro hojas).
> 3. En el caso de la Secretaría de Publicaciones, presentará además un presupuesto económico de ingresos y gastos (que puede ser anual, bienal o para los cuatro años).

Las candidaturas se podrán presentar hasta el 31 de enero de 2009, por correo electrónico remitido a:

secretaria@fespm.es o bien *fmc@fespm.es*

La Junta de Gobierno de la FESPM elegirá a los distintos Secretarios/as de las diferentes Secretarías entre los candidatos/as presentados/as, oído previamente el Secretario General, en su reunión del día 14 de febrero de 2009.

4 de octubre de 2008
Francisco Martín Casalderrey
Secretario General de la FESPM

Convocatoria del VI Premio *Gonzalo Sánchez Vázquez*

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas convoca el VI Premio Gonzalo Sánchez Vázquez, *en homenaje de quien fue su Presidente de Honor, de acuerdo con las siguientes bases:*

1. Se trata de premiar la labor docente y los valores humanos: la entrega desinteresada, el amor, el espíritu tolerante, la buena disposición, etc. hacia sus alumnos, compañeros, amigos y, en general, hacia la enseñanza de la Matemática. Es decir, el magisterio en sentido amplio.

2. La periodicidad del Premio será la misma que la de las Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).

3. El Premio consistirá en el nombramiento de Socio de Honor de la FESPM y placa conmemorativa u objeto alegórico.

4. Podrán concurrir al Premio los profesores dedicados a la enseñanza de las Matemáticas en cualquier nivel educativo.

5. Las candidaturas podrán ser presentadas por una sociedad federada y se dirigirán al Presidente de la FESPM. Los promotores presentarán el currículo e informes que estimen pertinentes, entre ellos el informe de la junta directiva de la sociedad o del conjunto de socios proponentes.

6. El plazo de presentación de candidaturas finalizará el 31 de enero de 2009.

7. La concesión del Premio se hará por la Junta de Gobierno de la FESPM. Para ello, el candidato deberá obtener mayoría absoluta en la correspondiente votación. De no alcanzarse mayoría absoluta en primera votación, se procedería a una segunda; de no obtener mayoría absoluta se declarará desierto.

8. Para la concesión del Premio, la junta de Gobierno atenderá, entre otros, a los siguientes criterios:

   - Su labor docente (dedicación a la enseñanza de la Matemática).
   - Valores humanos (tolerancia, entrega a los demás, talante, espíritu de diálogo, respeto a los compañeros, alumnos, etc.). Constatados por sus avalistas.
   - Currículo con hechos, anécdotas, etc. referidos por los proponentes que pongan de manifiesto estos valores humanos del candidato.

9. Se publicará en SUMA el resultado de la concesión del Premio y una semblanza del premiado.

10. La entrega del Premio se llevará a cabo en el acto de apertura o clausura de las XIV JAEM, que se celebrarán en Girona en julio de 2009. ■

Educación matemática: Competentes en un mundo global

XIV Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas

Girona, del 1 al 4 de julio de 2009

Toda la información en nuestra web:

www.xivjaem.org

Convocatoria de los Premios de Matemáticas para estudiantes de Educación Secundaria

PREMIOS SECUNMAT-UAM

Tercera edición (curso 2008-2009)

Dto. Matemáticas Universidad Autónoma de Madrid

1. Objetivos: Fomentar entre los estudiantes de secundaria el interés por las Matemáticas y los temas relacionados con ellas.
2. Participantes: Estudiantes que durante el año académico 2008/09 estén cursando estudios del segundo ciclo de ESO o de Bachillerato y que preparen un trabajo de investigación o experimental sobre un tema relacionado con las Matemáticas. Cada trabajo puede tener un mínimo de 2 y un máximo de 5 autores, y debe ser coordinado por uno o varios tutores.
3. Premios. Se concederán un máximo de 4 premios, de 500 euros cada uno, a los mejores trabajos presentados, teniendo en cuenta, en especial, el esfuerzo de los participantes en relación con su curso o nivel. Se premiará a los Centros de los equipos ganadores.
4. Solicitudes: Desde el día 10 de noviembre hasta el día 18 de diciembre de 2008 rellenando la solicitud que se encuentra en la página Web abajo mencionada.
5. Trabajos definitivos: Desde el día 1 de abril hasta el día 30 de abril de 2009. El trabajo definitivo se presentará en soporte electrónico. Se debe acompañar de un informe del profesorado que ha guiado el trabajo que detalle el material complementario, si procede, resumen del trabajo, objetivos, metodología y conclusiones. Deberá también acompañarse de un presentación electrónica en tamaño póster A1 para exposición.

Información detallada en:
www.uam.es/matematicas

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 498, E-46900 Torrent (Valencia), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original impreso ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres contando los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; correo electrónico; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia de los archivo de texto que contenga el artículo y del que contega la hoja con los datos y los resumenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
    TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
    En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
    En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	25 €	10 €
Centros	40 €	15 €
Europa	50 €	20 €
Resto del mundo	60 €	22 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 498
46900-Torrent (Valencia)
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: .... NIF/CIF: ....

Dirección: .... Teléfono: ....

Población: .... CP: ....

Provincia: .... País: ....

Correo electrónico: .... Fax: ....

	Importe (€)
☐ Suscripción a partir del año (3 números) ________	
☐ N.^{os} sueltos ________________	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2077-0347-11-1101452547)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos: ....

Código Cuenta Cliente: Entidad: |_|_|_|_| Oficina: |_|_|_|_| DC: |_|_| Cuenta: |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Banco/Caja: ....

Agencia n.º: .... Dirección: ....

Población: .... Provincia: ....

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ISSN 1130-488X

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.