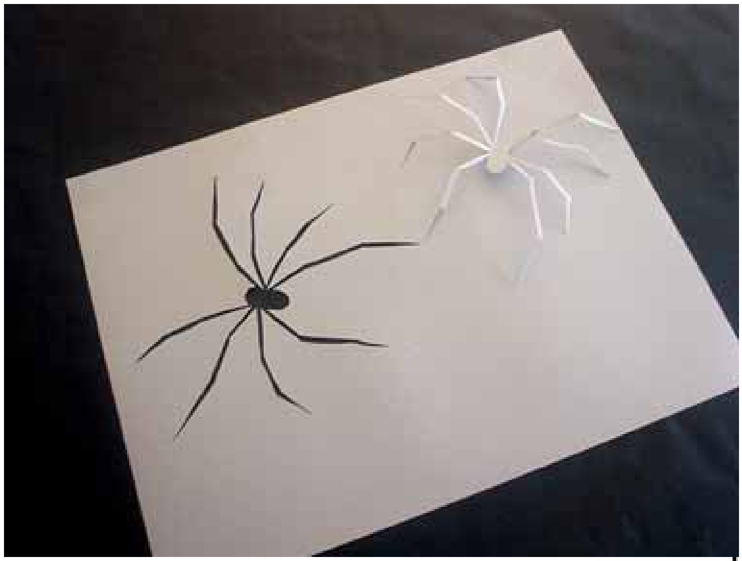
suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 97-104

Para la libertad

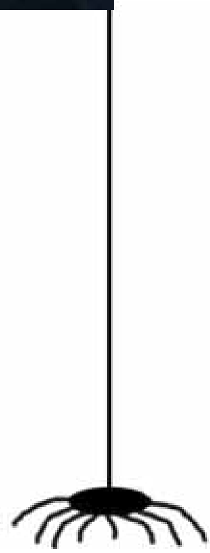


Cuando se utilizan las aportaciones, universalmente conocidas, de los grandes científicos, como Newton o Einstein, no hay que citarles. Tampoco debería ser necesario citar a personalidades de las letras de igual renombre, cuando nos apoyamos en las suyas. Pero, si la fuente no tiene esa universalidad, parecería una falta de respeto no hacerlo.

Hoy, gracias a la telaraña mundial, es fácil encontrar las fuentes, si los textos están tomados con suficiente literalidad. Por eso yo propongo un juego, adivinar, buscando en la red cuando sea necesario, las autorías originales de las distintas estrofas del siguiente poema que, ya aviso, es un collage o centón.

Pensaron que era la paciente esposa
de un héroe. La que espera noche y día
tejiendo y destejiendo. La que ignora
que nunca vuelve el mismo que ha partido.
No creáis mi historia
Ni yo esperaba a Ulises
Tantas Troyas y mares y distancias y olvidos...,
ni mi urdimbre de tela
desurdida de noche
se trenzaba en su nombre.

Por mi desafío,
atrapada me hallo,
sobre las cuerdas de seda
suspendidas en la brisa,
al acecho,
soy mi propio minotauro
El hilo que me atrapa deberá liberarme



Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
ariadna@revistasuma.es

Foto: *Pilar Moreno Gómez*

Ahora que decaen los discursos posmodernos, gracias entre otras cosas, a intervenciones tan espectaculares como la protagonizada por Sokal, podemos recuperar frases del pasado como la que Cantor parece ofrecer a Aracné, como hilo de Ariadna:

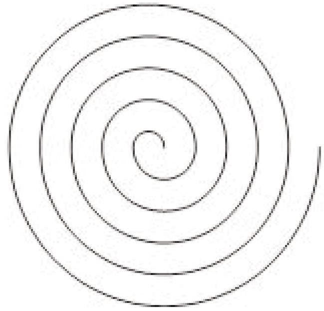
> La ciencia de las matemáticas reside en su libertad,
>
> pues,
>
> de la cárcel del problema, siempre aparentemente insoluble, esta ciencia nos lleva a la alegría liberadora de la comprensión.

Cuando no hay respuestas, el ser humano elabora mitos: Aracné, famosa por su virtuosismo en las labores de tejer y bordar, desafió a la diosa de estas artes, Atenea. Para castigar su orgullo, la diosa transformó en araña a la joven, que, en su nuevo estado, continuó tejiendo.

Las hilanderas de Velázquez
(el sueño de Aracné)

Si atendemos a las múltiples cuestiones que hay que resolver para emplazar y construir una telaraña adecuadamente, concluiremos que Aracné reunía condiciones para vencer a la diosa de la sabiduría, era una experta matemática, resolvía, entre otras la siguiente cuestión algorítmica:

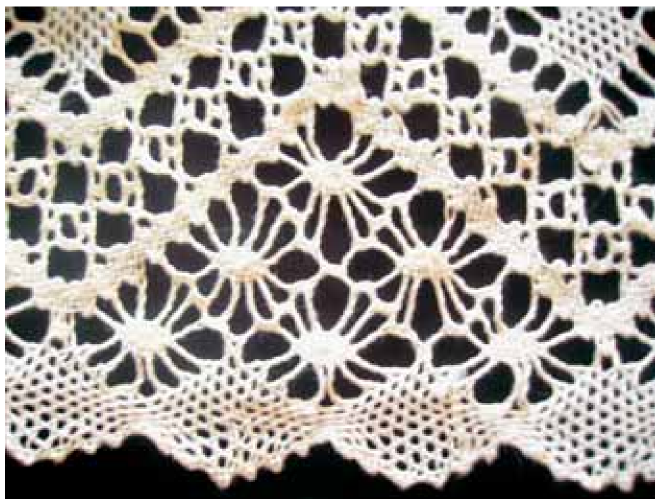
```
to telaraña :lado :angulo
if :lado>40 [end]
fd :lado
rt :angulo
telaraña :lado+0.1 :angulo
end
```



Para conocer mejor las habilidades matemáticas de Aracné, os recomiendo la lectura del cuento "La tejedora jactanciosa" de Juan de Burgos y los capítulos 36 y 37 de *Ritmos. Matemáticas Imágenes*.

Otras heredaron su ingenio y mejoraron las técnicas del tejido, como Ada Byron, gracias a cuyas subrutinas, se revolucionó la industria textil y nació la informática, madre de la telaraña mundial, una red que puede extender las tradicionales redes solidarias y en cuyas manos reside una de las llaves para la libertad verdadera de la humanidad, sojuzgada por la tergiversación torticera e interesada del término que en este capítulo nos ocupa. Si somos capaces de aprovechar su potencial, será una herramienta para construir otro mundo posible con otras reglas de juego. Tal vez, las redes y el hilo de Ariadna contribuyan a nuestra liberación.

La Web fue creada alrededor del simbólico año 1989 por el inglés Tim Berners-Lee y el belga Robert Cailliau mientras trabajaban en el CERN en Ginebra, Suiza. Nacía para respon-



Luz Botaya Jiménez

der a la necesidad de intercambio de información entre universidades e institutos de investigación de todo el mundo, como el propio CERN, empeñado actualmente en la búsqueda del bosón de Higgs. Experimento sobre el que se han cernido críticas agoreras y esotéricas, anticientíficas y catastróficas. También la WEB tiene, justificadamente, sus detractores. Habrá que escardar el huerto de los discursos, limpiarlos de malas hierbas, de retóricas inútiles, falaces y malintencionadas, para escuchar con claridad y sencillez lo que la ciencia nos puede contar. Y habrá que analizar en profundidad el por qué de los caminos seguidos por la investigación científica, para corregir su rumbo y colocarla de nuevo al servicio del bienestar de toda la humanidad.

El lenguaje matemático, claro, preciso y conciso, el método racional de las matemáticas y la belleza de sus construcciones son herramientas que, utilizadas adecuadamente, ayudan a realizar dicha limpieza y a explicar el discurso científico, no sólo con claridad y sencillez sino con emoción poética.

Porque, como siempre, lo perjudicial no son los descubrimientos científicos en sí, sino el uso que de ellos se haga.

También el quehacer poético se enriquece cuando mira hacia las matemáticas. Así lo vieron los poetas concretos como Joan Brossa:

Si los poetas han dado el paso de incorporar nuevos lenguajes al acto poético para ampliar sus posibilidades de expresión y con ello han conseguido una poesía más sintética, más polisémica, más rica, más acorde con el mundo icónico en el que vivimos ¿por qué siguen anclados los libros de texto de matemáticas, en el problema con enunciado verbal? Muchas veces la maraña a desenredar es el propio texto.

El misterio del problema, ayudado por una imagen, queda desvelado, el problema deja de serlo, se descubre que no era un verdadero problema. Guardemos nuestras energías para resolver los verdaderos problemas y aprovechemos las características de nuestra materia, como han hecho los poetas concretos y los humoristas, jugando para proporcionar la máxima información en el mínimo espacio con el recurso del máximo de lenguajes: verbal, visual, aritmético, geométrico, algebraico, topológico.

Multiculturalidad (Forges)

También el juego tiene detractores, y, otra vez, todo depende del uso que de él hagamos.

Foto: *Lucía Morales*

A los críticos del enfoque lúdico en el aprendizaje, les recomiendo la lectura de "El Principito" en una de cuyas páginas podrán leer:

> Conozco un planeta donde hay un Señor carmesí. Jamás ha aspirado una flor. Jamás ha mirado una estrella. Jamás ha querido a nadie. No ha hecho, más que sumas y restas. Y todo el día repite como tú: "¡Soy un hombre serio! "¡Soy un hombre serio!" Se infla de orgullo. Pero no es un hombre; es un hongo.

A quienes la necesidad de rigor les paraliza, también. Ellos encontrarán frases como:

> Es preciso que soporte dos o tres orugas si quiero conocer a las mariposas

Y para quienes se obsesionan con la disciplina parece estar escrita la siguiente:

> ...si ordeno a un general que se transforme en ave marina y si el general no obedece, no será culpa del general. Será culpa mía.

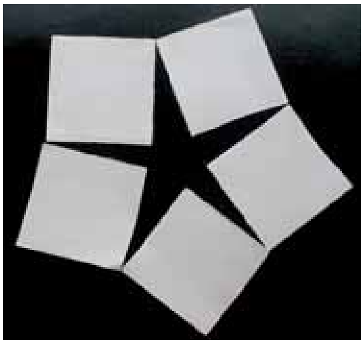
Pero para ejercer la libertad, es necesario respetar la ajena, es necesario establecer normas y nada mejor para aprender esto que los juegos. En los que las reglas son las normas y pueden ser modificadas de común acuerdo, dando lugar a nuevos juegos.

Por ello os proponemos que juguéis hasta el próximo capítulo.

Problemas propuestos

La libertad

Este problema ha sido propuesto por José Luís Belmonte:



Cinco cuadrados iguales se ubican unidos por uno de sus vértices de modo que formen en su interior un pentágono estrellado con las cinco puntas iguales.

¿Es rígido dicho pentágono o tiene la libertad de cambiar de forma?

Los tres problemas siguientes han sido propuestos por Vicente Calixte Juan y Juan Carlos Orero

Gominolas

Isabel y Maria se enfrentan en un juego para el que utilizan tres montones de gominolas.

En el primer montón no hay más que una gominola; en el segundo dos; en el tercero 3.

Las reglas del juego son las siguientes:
1. Cada jugadora ha de retirar o una sola gominola o todas las gominolas de cualquiera de los montones.
2. La jugadora que retira la última gominola pierde.
3. Le toca a Isabel iniciar la partida.

¿De qué montón ha de retirar Isabel sus gominolas si quiere ganar la partida?

Tres en raya

Los "Tres en raya" se juegan sobre un cuadrado grande, dividido en nueve cuadrados pequeños.

1) Cada uno de los jugadores que intervienen en él pone su marca (por regla general, una equis o un círculo) en una de las casillas.

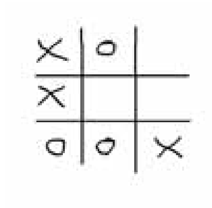
2) El jugador que consigue colocar tres marcas formando una línea (horizontal, vertical o diagonal) gana la partida.

3) Las marcas se colocan alternativamente, mientras queden huecos en el tablero, y no se haya conseguido el tres en raya.

4) Al llegar su turno los jugadores procuran colocar su marca en una línea que contenga

a) dos de sus propias marcas
b) dos de su oponente a fin de impedirle ganar, dando siempre preferencia al caso a sobre el b.

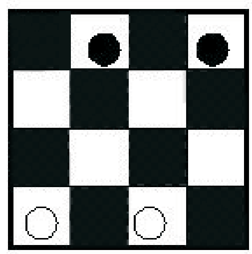
En la partida sólo falta por colocar la última marca



¿Cuál de estas marcas x ó o ganará el juego?

Damas

¿Cuál es el número mínimo de jugadas para intercambiar las posiciones de estas cuatro fichas del juego de las damas?



Las capturas son obligatorias.
Al final las cuatro fichas tienen que ser necesariamente damas dobles.

Belleza de un rectángulo

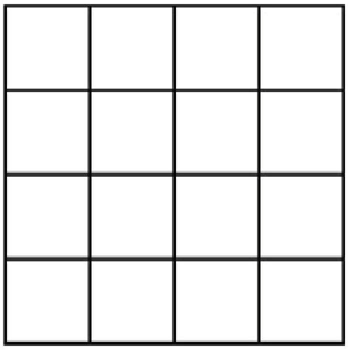
Belleza de un rectángulo (Propuesto por Claudi Alsina y Enrique Trillas en *Fuzzy Sets and Mathematics Education. For The Learning of Mathematics*. Montreal, 1992)

¿Cómo podríamos definir el grado de belleza de un rectángulo?

Soluciones de los problemas del número anterior

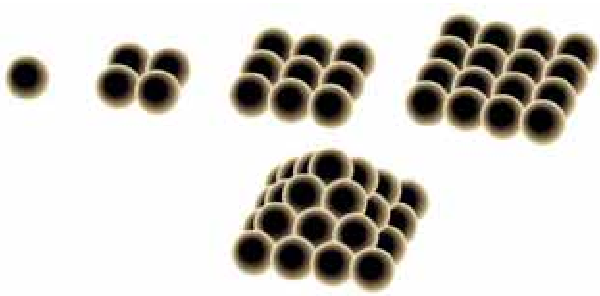
Números para contar

Existe un famoso problema que consiste en contar el número de cuadrados cuyos lados están sobre una malla cuadrada. ¿Existe algún número figurado que pueda expresar la solución?



Tamaño del lado	1	2	3	4	
Número de cuadrados	4x4	3x3	2x2	1x1	
	16	9	4	1	Total: 30

30 es un número piramidal cuadrado

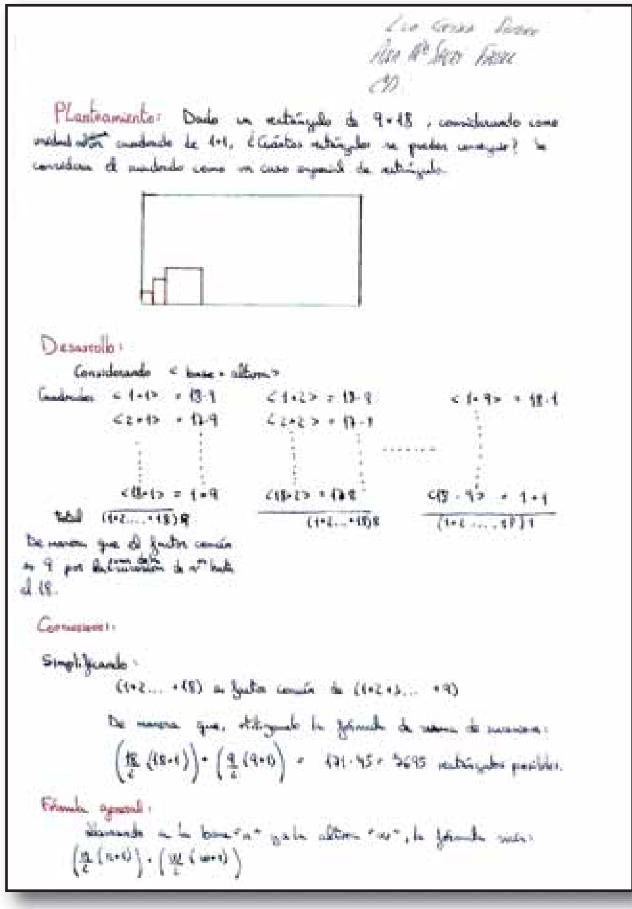


Si la base tuviera n bolas, la fórmula que nos daría la suma total es:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Los números piramidales son hijos de Descartes que los generalizó a partir de los números poligonales que nos dejó Diofanto como legado en una de sus obras.

Al hilo de este problema, nos ha llegado una generalización, trabajada en la clase de segundo de BUP en el Instituto Español de Andorra en el año 1989 por dos alumnas de Pilar Moreno


Planteamiento: Dado un rectángulo de 9×18, considerando como unidad un cuadrado de 1×1, ¿Cuántos rectángulos se pueden conseguir?

Desarrollo:

Considerando <base × altura>

Cuadrados <1×1> = 18·9 <1×2> = 18·8 <1×9> = 18·1

<2×1> = 17·9 <2×2> = 17·8

<18×1> = 1·9 <18×2> = 1·8 <18×9> = 1·1

Total (1+2…+18)9 (1+2…+18)8 (1+2…+18)1

Conclusiones:

Simplificando:

(1+2…+18) es factor común de (1+2+3…+9)

$\left(\frac{18}{2}(18+1)\right)\cdot\left(\frac{9}{2}(9+1)\right)$ = 171·45 = 7695 rectángulos posibles.

Fórmula general:

$\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)\cdot\left(\frac{m}{2}(m+1)\right)$

Acertijo

En las antiguas cajetillas de cerillas, solían venir acertijos que, como es de suponer, iban dirigidos al ingenio del público en general. Se suponía que no había que utilizar ningún aparato matemático, sino el puro razonamiento mental. Uno de ellos decía así:

En un corral hay conejos y gallinas, contándose en total 22 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?

¡Falta un dato! ¿O no?

Algunas alumnas recuerdan un problema parecido, pero con un dato más:

En un corral, un campesino tiene gallinas y conejos. Si entre unos y otros tenemos 40 cabezas y 108 patas, ¿cuántas gallinas y conejos tenemos?

GRUPO 1: La estrategia que siguieron fue la que ilustra el dibujo adjunto. A partir de ella el problema parecía fácil:

108/4=27 es decir, es como si hubiera 27 conejos, pero
como un conejo equivale a dos gallinas, 27/3=9
SOLUCIÓN: 9 conejos y 18 gallinas.

Obviamente han introducido una falsa hipótesis y han olvidado un dato, precisamente el que reclamaban.

GRUPOS 3 y 5:
Actúan por tanteo ingenuo. *¡Es muy largo profe!*, dicen con cara de aburrimiento.

GRUPO 2:
Plantean un sistema de ecuaciones. Terminan rápido, pero sin grandes emociones. La mecánica del método ha hecho todo el trabajo. Sólo han tenido que ser disciplinados siguiendo los pasos preestablecidos.

GRUPO 4:
Actúan por tanteo inteligente: comienzan por simplificar a la vista del dibujo. Es lo mismo decir que las patas suman 108, que hablar de que los pares de patas son 54. Las cabezas siguen siendo 40. Se trata de descomponer el cuarenta en los dos sumandos adecuados; por lo pronto, el número de gallinas no puede ser impar, pues al sumar el doble de conejos, saldría un número impar, por tanto, distinto de 54.

gallinas	conejos	2·conejos	gallinas+2·conejos=54
2	38	76	Imposible! Se pasa de 54
4	36	72	idem
...	...	...	...
22	54/3=18	36	idem
24	16	32	idem
26	14	28	26+28=54

Tras la exposición de los grupos, la profesora insiste en que no, no falta ningún dato al problema propuesto, así que… hay que seguir pensando…La sencillez y claridad que ha aportado al problema la solución anterior, actúa como inductor para abordar el problema sin hacer uso de la herramienta algebraica.

nº de gallinas (patas de gallinas)	**nº total de patas - nº de patas de gallina = nº patas de conejo**	**nº patas de conejo/4 = nº de·conejos**	**soluciones**
1 (2)	22-2=20	20/4=5	(1,5)
2 (4)	22-4=18	18/4=4,5	imposible
¡debe ser impar!	¡debe ser múltiplo de 4!	¡debe ser entero!	(entero, entero)
3 (6)	22-6=16	16/4=4	(3,4)
5 (10)	22-10=12	12/4=3	(5,3)

Pronto adivinan las restantes soluciones (7,2) y (9,1). La profesora pregunta:

¿Podrían sumar 23 las patas de los animales?

La ecuación gráfica del inicio es de gran ayuda para la discusión que se plantea en clase. La conclusión:

El número de patas debe ser par, porque es el número de patas de una colección de gallinas. Así que, no puede ser 23.

Luego, la profesora propone una extensión:

Intenta resolver el problema suponiendo que las gallinas y los conejos son extragalácticos y tienen, respectivamente 5 y 6 patas y que en total suman 87.

Ahora sí, ahora sí que hay que sacar la artillería pesada, para eso está el álgebra, para resolver los casos que son demasiado arduos para un razonamiento mental.

$$5x+6y=87$$

Pero… ¡falta una ecuación!

Sí, falta una ecuación para resolver el sistema que tenéis en mente, pero tenemos más datos: las gallinas y los conejos son unidades que no se pueden fraccionar. La solución, como habéis visto, no puede ser media gallina ni 7,3 conejos. Esto, que en principio es un inconveniente, podemos utilizarlo a nuestro favor, como una información muy valiosa; estas ecuaciones, con estas características, con uno o más de un grado de libertad, y con soluciones enteras, son conocidas como *ecuaciones diofánticas*, en honor a Diofanto.

Si $x=\dfrac{87-6y}{5}=17-y+\dfrac{2-y}{5}=17-y+t \qquad t=\dfrac{2-y}{5}$

$y=2-5t \qquad x=15+6t$

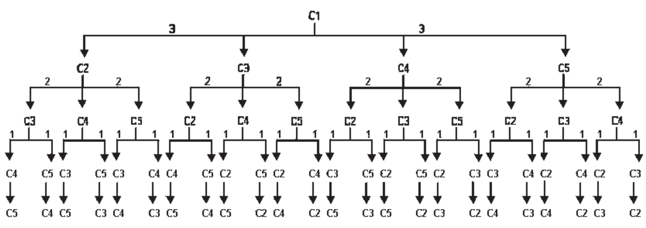
t	x	y
-1	9	7
-2	3	12
-3	negativo	
1		negativo

Tragedia convertida en comedia

> *El material necesario son diez gorros negros y nueve blancos. Diez personas se sientan en corro a la vista del resto de participantes. A cada una de las personas del corro se le pone un gorro en la cabeza. El resto de participantes da una palmada y la persona que concluya que su gorro es negro se pone de pie. Si no se levanta nadie, el resto de participantes da una nueva palmada, y así sucesivamente. Si hay cinco personas que llevan gorro negro, se levantarán las cinco, a una, cuando oigan la quinta palmada. ¿Qué razonamiento les llevará a tal actuación?*

Un razonamiento doble, por arriba y por abajo, deja clara la situación. Supongamos que sólo hay un gorro negro. Todos lo ven salvo quien lo lleva puesto, por lo tanto él no ve ningún gorro negro, pero, sabe que hay al menos uno, de modo que no puede ser otro que el suyo. Al oír la primera palmada, se levanta. Supongamos ahora que sólo hay dos gorros negros A y B, cada uno de ellos ve un gorro negro, por tanto cada cual espera que a la primera palmada se levante. Pero no ocurre así, es decir, su compañero veía otro gorro negro: A veía el de B por eso no se levantó; B veía el de A e hizo lo propio. A la segunda palmada se levantan los dos, pues les quedó claro en la primera que el otro gorro negro lo llevaban puesto ellos.

Razonemos por arriba. A, B, C, D, E, F y G llevan gorro negro. ¿Cómo razonarán? Supongamos que seguimos el pensamiento de G. G ve 6 gorros negros, por lo tanto espera que A, B, C, D, E y F vean 5. De ellos elegimos a F. Si G estuviera en lo cierto, F pensaría que A, B, C, D y E sólo ven 4 gorros negros, puesto que los ven todos salvo el propio. De ellos, por ejemplo D pensará que A, B y C sólo ven dos gorros negros y ello nos lleva a ver que, por ejemplo C cree que A y B sólo ven un gorro negro y por eso no van a levantarse a la primera palmada, como vimos en el párrafo anterior. Tampoco lo harán A, B y C a la segunda, ni A, B, C y D a la tercera, ni A, B, C, D y E a la cuarta y tampoco A, B, C, D, E y F a la quinta. Se levantarán los seis a la sexta, una vez cerciorados todos de que el gorro negro que falta es el que llevan puesto ellos mismos.
El siguiente esquema representa con C_i (i=1, 2, 3, 4 y 5) a cada uno de los 5 compañeros. Es un esquema completo de las relaciones de pensamientos que llevan al resultado visto.



Una variante divertida, introducida por Colera, consiste en dar mensajes secretos a los portadores de gorro negro indicándoles que no cumplan la orden de levantarse al oír la palmada y a los que llevan gorro blanco les dice, también en secreto, que, en caso de tener que levantarse, lo hagan sujetándose el gorro. ¿Qué creéis que pasa con este cambio en las reglas del juego? ¿Qué creéis que piensan los espectadores al ver el resultado?

Trozos de tarta

> *¿Cuántos trozos de tarta podemos obtener como máximo practicándole sólo cuatro cortes?*

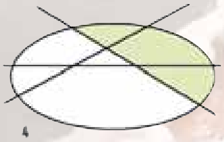
La primera observación a este enunciado está vinculada al pasatiempo mencionado en el número anterior, en el cual existe una premisa, la de la igualdad de las partes, que aquí no existe. Se trata únicamente de ver cuál es el máximo número de porciones obtenidas al realizar 4 cortes. Es decir, cuál es el máximo número de regiones en que se puede dividir el espacio ordinario si lo cortamos mediante 4 planos.

Resolveremos un problema isomorfo: vamos a sustituir la tarta de queso por un queso de bola. Procederemos por inducción: si en lugar de un espacio euclídeo de dimensión 3, empezamos por el de dimensión uno, la recta, y comenzamos por 0, 1, 2, 3, … puntos de corte para la 1ª, 2ª, 3ª partición, vemos que:

Partición	Nº de puntos	Nº de intersecciones con las regiones anteriores	Nº de regiones lineales L(n) determinadas por n puntos
1ª	0	0	1
2ª	1	1	2
3ª	2	1	3
4ª	3	1	4
n	n	1	L(n)= n+1

Seguimos con el espacio R^2, ahora los instrumentos de la partición serán las rectas

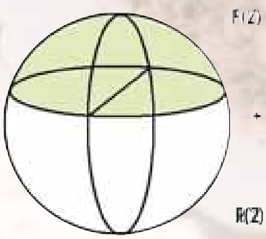
Partición	Nº rectas: n	Nº de intersecciones con las regiones anteriores	Nº de regiones planas determinadas por n rectas: P(n)
1ª	0	0	1
2ª	1	1	1+1=2
3ª	2	2	2+2=4
4ª	3	3	4+3=7
n+1ª	n	n	P(n)= P(n-1) + n = =1+(1+2+3+4+5....+n)



¿Se cumple la misma fórmula en R^3?

Partición	Nº planos: n	Nº de intersecciones con las regiones anteriores	Nº de regiones del espacio determinadas por n planos: R(n)
1ª	0	0	1
2ª	1	1	1+1=2
3ª	2	2	2+2=4
4ª	3	4	4+4=8
5ª	4	7	8+7=15
n+1	n	n	R(n)= R(n-1) + P(n-1)

El queso de bola.



El problema puede generalizarse a hiperesferas de dimensión h y número de cortes n.

Dinamarca

Piensa un número entero comprendido entre 1 y 9, multiplícalo por 9, réstale 5, suma sus cifras hasta obtener un número de una sola cifra, piensa un país europeo que empiece por la letra del alfabeto que ocupa ese lugar, luego, piensa un nombre de gran mamífero que empiece por la siguiente letra del alfabeto.

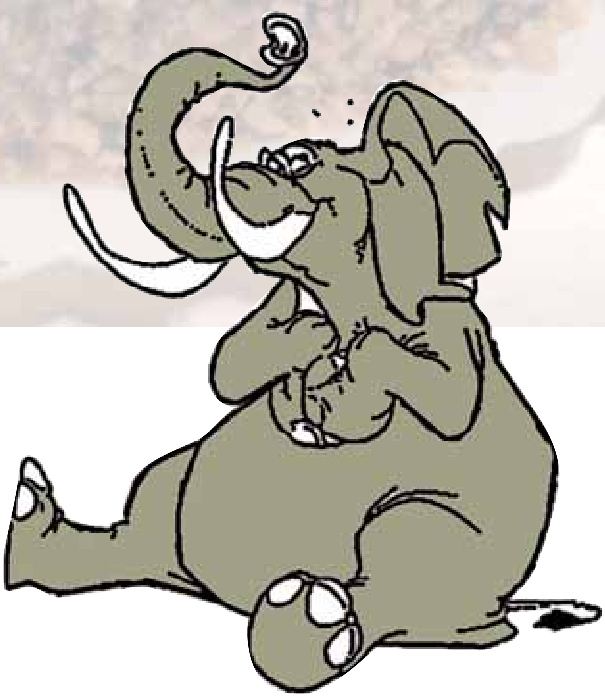
Invariablemente, el país elegido es Dinamarca y el mamífero el elefante. La profesora, sin mirar los cuadernos, dice

¡En Dinamarca no hay elefantes!

La risa de quienes han resuelto correctamente el problema llena la clase. Quienes se equivocaron en los cálculos no entienden la risa, pero, puesto que reír es un placer, se esfuerzan en repetir sus cuentas hasta formar parte de la comunidad carcajeante.

Este divertimento me ha sido proporcionado por un amigo "de letras" convencido de que su aversión a las matemáticas no reside en ellas, puesto que es capaz de disfrutarlas, sino en la imagen que de ellas se hizo en una etapa escolar en que era difícil que el juego entrara en las aulas. Gracias, Miquel Palomero. Actualmente escribe novelas absurdas y tan hilarantes que su carga crítica se filtra entre las carcajadas sin ofrecer resistencia.

EL HILO DE ARIADNA



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORRAS, E., MORENO, P. y NOMDEDEU, X. (2002): *Ritmos. Matemáticas e imágenes*. Nivola, Madrid.

COLERA, J. (1990): "Un problema interesante: maridos engañados en un pueblo integrista". *Suma,* nº 5, pp. 39-43

DE BURGOS, J. (1994): *Los relatos de Gudor Ben Jusá*. Fundación General de la UPM, Madrid.

GARDNER, M. (2002): *Damas, parábolas y más mistificaciones matemáticas.* Gedisa. Barcelona.

SAINT EXUPERY, A. (1983): *El principito*. Alianza/Emece. Madrid.

SUMMERS, G.J. (1988): *Juegos de ingenio 2.* Martínez Roca. Barcelona.

Internet

http://www.math.kth.se/~shapiro/problem.html

http://www.mensa.es/juegosmensa/s176180.html#SOLU178