suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 73-80

En las ciudades invisibles VIII

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

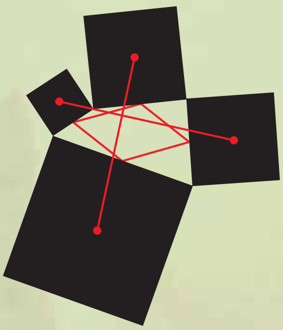
Si cada ciudad es como una partida de ajedrez, el día que llegue a conocer sus leyes poseeré finalmente mi imperio, aunque jamás consiga conocer todas las ciudades que contiene.

Para conocer un todo no es necesario el conocimiento exhaustivo de cada uno de los elementos que lo componen. Basta con determinar sus elementos fundamentales y saber qué leyes determinan la relación entre ellos y los demás. Solamente un todo pequeño (finito) puede conocerse por completo, elemento a elemento. Los todos más vastos (infinitos), jamás. Kublai se da cuenta de que no hay otro modo de conocer conjuntos tan grandes. El conjunto de los números naturales se conoce a partir de un elemento (uno) y de una ley de formación (uno más uno: dos). Un espacio vectorial se conoce a partir de los vectores de su base y del modo en que operan (suman y multiplican) entre ellos y con los escalares de un cuerpo K.

Kublai necesita al viajero Marco Polo. No para llevar a cabo una tarea documental y exhaustiva, sino para extraer de los informes del veneciano tanto la base (prototipos generadores) como las relaciones (operaciones) de su imperio. La tarea de Kublai no es sencilla, pues no construye su imperio de arriba abajo, como es costumbre en Matemáticas, sino de abajo arriba. Partiendo de las ciudades documentadas por Polo el emperador levanta un todo coherente y armonioso del que las ciudades acaban siendo meros casos particulares, reflejos locales, subgrupos o subespacios del grupo o espacio vectorial imperial. De la diversidad de lugares, gentes y costumbres, Kublai sacará una base y las operaciones que le permitirán *poseer finalmente su imperio.*

A veces le parecía que estaba a punto de descubrir un sistema coherente y armonioso por debajo de las infinitas deformidades y desarmonías...

Si las leyes se encuentran en el fondo o en la superficie no importa. Importan la coherencia y armonía que revelan el orden subyacente en el caos. Las *infinitas deformidades y desarmonías*, aunque extraordinarias, acaban siendo previstas. Al final, el caos inicial es tan sólo eso, inicial, aparente. Kublai descubre el orden en el que se sostiene la selva igual que un matemático demuestra un teorema. Transforma en perenne una situación a priori extraordinaria, anecdótica, insólita. Así ocurre en el teorema de *Varignon*, el de *Napoleón* y el que afirma que los centros de los cuadrados construidos sobre los lados de un cuadrilátero cualquiera son perpendiculares.



Confinar el caos y el azar a reductos insignificantes es uno de los objetivos de la Ciencia y de algunas ramas de las Matemáticas. Consiste en buscar *sistemas subyacentes coherentes y armoniosos por debajo de las infinitas deformidades y desarmonías* para, a partir de ahí, establecer los isomorfismos que declararán como iguales cosas aparentemente distintas. Pero una sombra distorsiona el nítido horizonte del pensamiento de Kublai. ¿Descubre órdenes subyacentes o los impone como es propio de un emperador? ■

Diseño y maquetación FMC

Miquel Albertí Palmer
IES Vallés, Sabadell
ciudadesinvisibles@revistasuma.es


Las ciudades y el nombre. 5

Irene

Irene

Desde los confines del Universo la Tierra no existe. Entrando en la galaxia parece un punto. Ya dentro del sistema solar, y una vez superado el anillo de asteroides, el punto se ha agrandado hasta convertirse en un disco. Por fin, aterrizas sobre un plano.

...Irene es un nombre de ciudad desde lejos, y si uno se acerca, cambia.

Así pensaba que sería Irene antes de visitarla, pues *si uno se acerca, cambia*. Mi hipótesis era que la ciudad sería siempre ella misma y que los cambios producidos por la distancia serían tan sólo aparentes, fruto de mi aproximación. Sin embargo, a cada paso más distinta y compleja la veía. Entonces cambié mi modelo por otro más sutil y la concebí como una especie de conjunto de Mandelbrot el cual, pese a su autosemejanza global, presenta detalles invisibles a lo lejos y sólo distinguibles por la proximidad microscópica.

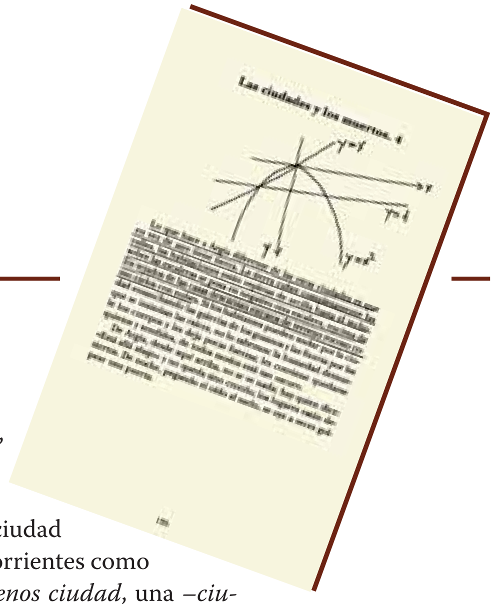
Si Irene cambia según la distancia, debe ser la misma cuando se la contempla desde puntos equidistantes de ella, sus cambios obedeciendo una ley de circunferencias concéntricas extendidas a su alrededor. Acercándote en línea recta siguiendo un radio común a todas ellas ves una ciudad distinta a cada instante. Esto dificulta tus pasos, pues no logras enfocar bien la ciudad. Sientes mareos y te detienes. Durante el reposo te das cuenta de que otros viajeros también se han detenido. Unos más cerca, otros más lejos, de ti y de Irene. Las discrepancias sobre la ciudad desaparecen en cuanto se entra en ella y la distancia se hace nula. Dentro de Irene sólo hay una única Irene.

...quizás de Irene he hablado ya bajo otros nombres; quizás no he hablado sino de Irene.

No resulta fácil hablar de Irene a quien no la ha visitado. Su fórmula no depende sólo del tiempo, también del espacio: $I(x, t)$. ¿Cómo explicar que la ciudad común para todo el mundo y de la única que puedes hablar es un límite: $I(0, t)$? Los límites no se entienden aisladamente, su sentido reside en la aproximación. Y cuando otro día tus pasos levantan unas casas en una colina pensarás que es Irene, pues como ella también cambia a medida que te acercas. Más tarde, al explicar tu viaje, no sabrás si hablas de ella o de Irene y te preguntarás si *no has hablado sino de Irene*. Y es que una vez que has estado en Irene ves que su característica es común a todas las ciudades. Ésa es tu conclusión, que todas las ciudades son Irene. Y cierras tu discurso con un consejo: dirigíos a ella dando un rodeo en espiral para mitigar así el vértigo del viaje. ■

Irene: *función del tiempo y del espacio*

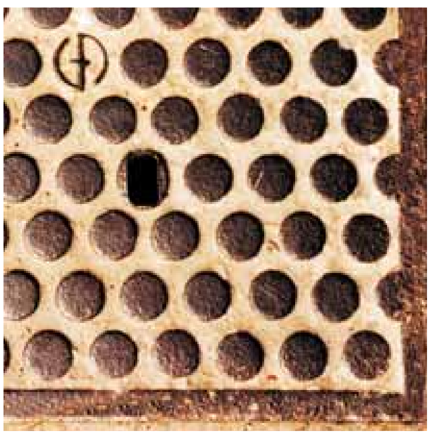
aigrA Argia


Las ciudades y los muertos. 4

> *Lo que hace a Argia diferente de las otras ciudades es que en vez de aire tiene tierra. La tierra cubre completamente las calles, las habitaciones están repletas de arcilla hasta el cielo raso, ... encima de los techos de las casas pesan estratos de terreno rocoso como cielos con nubes.*

> *...sobre las escaleras se posa en negativo otra escalera...*

En lugar de levantar sus edificios hacia el cielo, Argia los hunde en la tierra. Pero no la vacía para llenarla de aire. Para ti, su aire es de tierra. Para un argiano, de aire es la tierra de la ciudad en que tú vives. Con respecto a las ciudades corrientes como la tuya, Argia es una ciudad negativa, una *menos ciudad*, una *–ciudad*, una *civitas minus*. El color de su cielo el marrón terroso. Un cielo cuyos aludes (vientos de tierra) agitan con gran peligro las rocas negras (nubes). Una fotografía de Argia parece la imagen en negativo de una ciudad corriente.



Es verdad que en esa ciudad *sobre las escaleras se posa en negativo otra escalera*, puesto que el complementario de una escalera es otra escalera. En las ciudades normales este complementario sería aéreo, pero en Argia las escaleras complementarias ascienden hacia las entrañas de la Tierra y son tierra pura. Las arquetas que el recién llegado ve en el suelo no cubren accesos a sistemas de alcantarillado, gas, electricidad o cables de TV, sino que cierran las casas de la ciudad negativa. Desconociendo tal característica pisotea esas puertas horizontales para desesperación de los argianos, que acuden corriendo a ver quién llama. Pero no le invitan a entrar. En lugar de eso, le piden a gritos que haga el favor de pasar de puntillas. Y él, no comprendiendo su lengua, confunde la algarabía con el ruido del metro o de los desagües como los que oye a diario en casa.

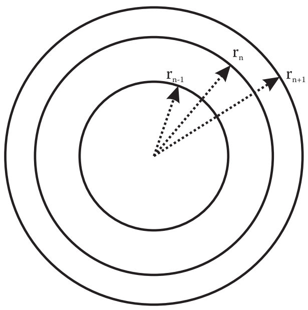
Abandonas Argia sin conocer a nadie de los que viven ahí enterrados, sin saber que también tú vives en una ciudad que los de ahí abajo llamarían *ciudad negativa*, *menos ciudad*, *–ciudad* o *civitas minus*. De saberlo, pensarías que quizá a los pies de tu ciudad también se adentre en la tierra otra ciudad opuesta y, por tanto, simétrica de la tuya con relación al plano en el que ambas se asientan. ■

Argia: *–ciudad: –(–Argia)*

Olinda

Los barrios de Olinda son coronas circulares. En el exterior tienen *mayor perímetro y menor espesor*, aunque *mantienen sus proporciones*. Con eso de que mantienen sus proporciones quizá Calvino quiso decir que las áreas de los barrios deben conservarse. Al ser mayores los perímetros de los barrios exteriores, éstos deben tener *menor espesor* para conservar el área de los interiores, de menor perímetro y mayor espesor. Se trata de un hermoso problema geométrico: ¿qué radios garantizan que las coronas de una serie de círculos concéntricos tengan la misma área?

Sea $\{r_n\}_{n\in \mathrm{N}}$ la sucesión de radios. Las áreas de dos coronas consecutivas son iguales si:



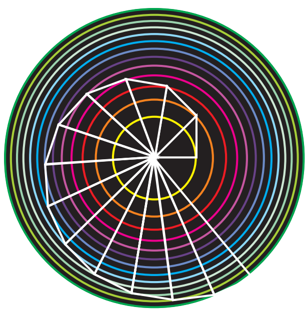
$$\pi\left(r_{n+1}^2 - r_n^2\right) = \pi\left(r_n^2 - r_{n-1}^2\right)$$

$$r_{n+1}^2 - r_n^2 = r_n^2 - r_{n-1}^2$$

$$r_{n+1}^2 = 2r_n^2 - r_{n-1}^2$$

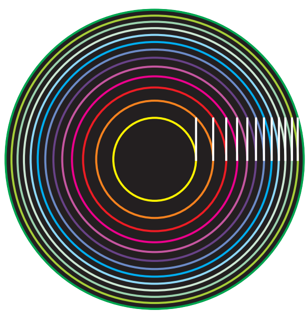
$$r_n^2 = \frac{r_{n+1}^2 + r_{n-1}^2}{2}$$

El cuadrado del radio de una corona tiene que ser la media aritmética de los cuadrados de los radios de sus dos coronas vecinas. La siguiente sucesión de radios cumple esta propiedad:



$$r_n = k\sqrt{n + c_0} \quad \mathrm{k}, \mathrm{c}_0 \in \mathrm{R}^+$$

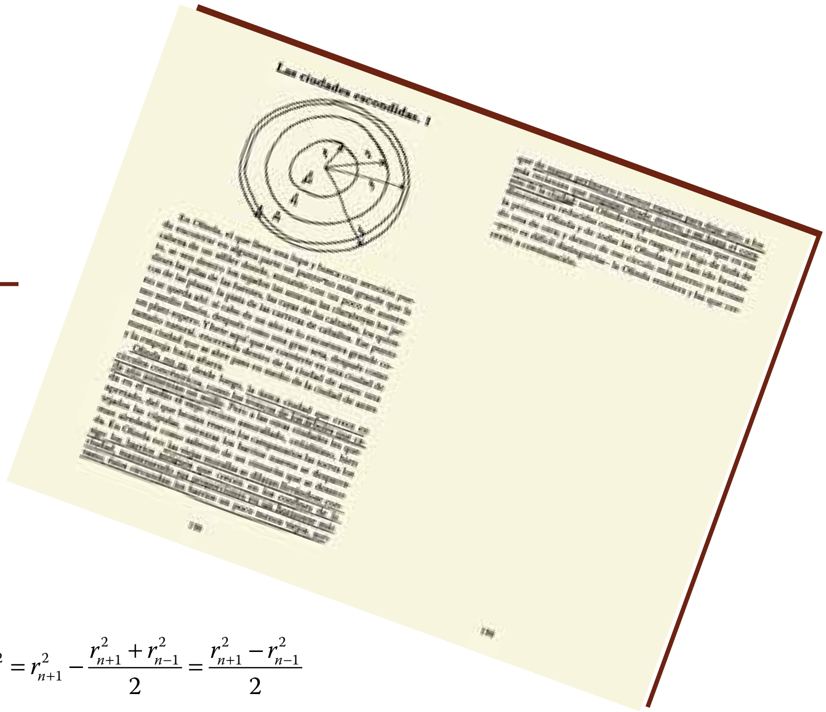
Una configuración plausible para Olinda es la de una serie de coronas circulares cuyos radios son las raíces cuadradas de los números naturales *($r_0=1$, $k=1$, $c_0=0$): $\{\sqrt{n}\}_{n\in \mathrm{N}}$*. El área de cada barrio será π.



Se da la circunstancia de que todas las tangentes a la circunferencia interior de cada corona (de color blanco en la figura al margen) tienen idéntica longitud *c*.

En efecto, sean t_{n-1} y t_n son dos tangentes consecutivas. Entonces, son catetos de triángulos rectángulos de hipotenusas r_n y r_{n+1} respectivamente. Luego:

Olinda no es ... la única ciudad que crece en círculos concéntricos, como los troncos de los árboles que cada año aumentan un anillo...las viejas murallas se dilatan llevándose consigo los barrios antiguos que crecen en los confines de la ciudad, manteniendo sus proporciones en un perímetro más vasto; éstos circundan barrios un poco menos viejos, aunque de mayor perímetro y menor espesor para dejar sitio a los más recientes que empujan desde dentro...


Las ciudades escondidas. 1

$$t_n^2 = r_{n+1}^2 - r_n^2 = r_{n+1}^2 - \frac{r_{n+1}^2 + r_{n-1}^2}{2} = \frac{r_{n+1}^2 - r_{n-1}^2}{2}$$

$$t_{n-1}^2 = r_n^2 - r_{n-1}^2 = \frac{r_{n+1}^2 + r_{n-1}^2}{2} - r_{n-1}^2 = \frac{r_{n+1}^2 - r_{n-1}^2}{2}$$

Aplicando también el teorema de Pitágoras se aprecia que el área de cada corona equivale precisamente al círculo que tiene por radio dicha tangente de longitud t:

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi t^2$$

En Olinda me pregunté cómo sería una Olinda cuya extensión no se desarrollase en el plano, sino en el espacio. Me la imaginé como una ciudad cebolla. Así que cambié coronas circulares por esféricas, perímetros por superficies, áreas por volúmenes y cuadrados por cubos en las fórmulas anteriores:

$$\frac{4}{3}\pi\left(r_{n+1}^3 - r_n^3\right) = \frac{4}{3}\pi\left(r_n^3 - r_{n-1}^3\right)$$

El resultado que obtuve concordaba con la Olinda plana, pues la sucesión de radios más plausible para esa nueva Olinda era la de las raíces cúbicas:

$$r_n^3 = \frac{r_{n+1}^3 + r_{n-1}^3}{2} \Rightarrow r_n = k\sqrt[3]{n + c_0} \quad \mathrm{k}, \mathrm{c}_0 \in \mathrm{R}^+$$

¿Y qué decir de las bolas n-dimensionales que se hinchan empujando los barrios más viejos manteniendo sus proporciones en hiper superficies más vastas? Sus hiper volúmenes se conservarán si se consideran raíces enésimas.

Sin embargo, esas Olindas cúbicas y multidimensionales eran irreales e inventadas, fruto de mis desvaríos geométricos. La Olinda real era la ciudad anillada como el interior de un árbol y sustentada, como los árboles, por raíces. ■

Olinda: *la ciudad que crece como un árbol de raíces cuadradas*

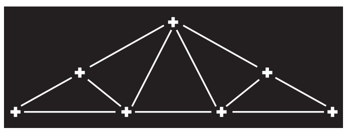
Tecla

...armazones que cubren otras armazones, vigas que apuntalan otras vigas.

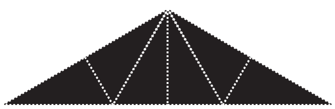
Cae la noche sobre las obras. Es una noche estrellada. – Éste es el proyecto –dicen.

La composición de una función consigo misma, la recurrencia $f \circ f$, también desempeña un papel destacado en la construcción de esta ciudad.

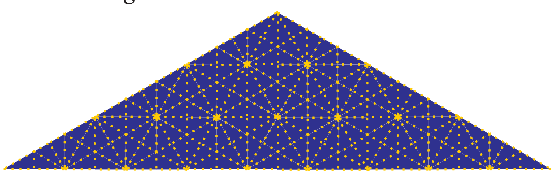
Si, como se afirma, el proyecto de las obras lo dictan las constelaciones, parece lógico que las estructuras arquitectónicas las evoquen con tejados sostenidos por cerchas renovadas según los descubrimientos de los astrónomos. *Éste es el proyecto*, pero las estructuras de Tecla no pueden reproducir fielmente el firmamento. Si lo hiciesen los edificios se derrumbarían. En las constelaciones abundan los cuadriláteros y escasean los triángulos, por lo que usar una constelación como modelo estructural es tan sólo una inspiración romántica inservible como armadura. De ahí que los arquitectos, o bien reinterpreten las constelaciones incorporando en ellas triangulaciones inexistentes, o bien las utilicen únicamente para poner nombres bellos a sus diseños: Pegaso, Casiopea, Hércules, Osa menor, Libra. Bajo esos nombres se ocultan los de quienes crearon tales estructuras: Pratt, Howe, Fink, Warren...



Contemplando las armaduras de Tecla me pregunté sobre la posibilidad de una cercha pitagórica hecha con triángulos rectángulos idénticos. Tras unos momentos de análisis diseñé una con mitades de triángulo equilátero.



Y como en Tecla se realizan *armazones que cubren otras armazones* y *vigas que apuntalan otras vigas*, me permití diseñar una ampliación de dicha cercha pitagórica. Me detuve en el nivel 4. Un armazón de $162=6\cdot 3^3$ triángulos rectángulos en la que se pone de manifiesto la estructura hexagonal subyacente. No sé si podría sostener un techo, pero me parece tan bella que le he puesto nombre: *Hexagonum 306090.*



Trude


Las ciudades continuas. 2

> *Puedes remontar el vuelo cuando quieras, …pero llegarás a otra Trude, igual punto por punto, el mundo está cubierto por una única Trude que no empieza ni termina…*

Calvino habla de Trude bajo el epígrafe de ciudad continua, aunque en el ámbito matemático, el adjetivo apropiado es el de conexa. Una función pueden calificarse como continua o discontinua; un conjunto puede ser conexo o desconexo. La coherencia entre ambos términos está en que la gráfica de una función continua es un conjunto conexo:

$$f \text{ es continua en } X \text{ conexo} \Rightarrow f(X) \text{ es conexo}$$

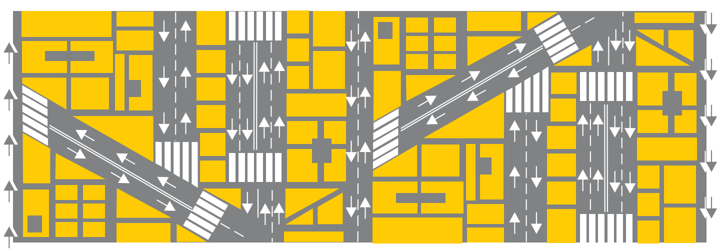
Imaginarse un conjunto conexo es fácil. Puedes recorrerlo sin salirte de él. Está hecho de una sola pieza, sin agujeros ni intervalos. Trude no tiene principio ni fin. Cubre el mundo entero sin interrupciones. Por tanto, Trude no es sólo la imagen conexa de una función continua como es la *función urbana*, Trude es, además, exhaustiva, lo cubre todo. La ciudad superficie del mundo es una esfera carente de referentes donde situar un origen o un fin. Cualquier lugar puede servir a tal propósito. Trude es la aldea global.

Pero no es la ausencia de principio o fin lo que hace a Trude continua, sino la función que la define. Una función $f(x)$ es continua en un punto a si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \ |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Una ciudad es el resultado (imagen) de la aplicación de la función urbana a una parte del espacio llamada suelo (dominio). La función urbana transforma en ciudad aquel punto donde se levanta una casa, se abre un camino, se canaliza el agua de un río, se cava un pozo, se clava un semáforo o donde unos peregrinos extienden una estera para descansar. No sólo el hombre es su agente, también muchos animales.

Puesto que Trude es continua, mejor dicho, conexa, carece de 'puntos ciudad' aislados. Todo entorno, por ínfimo que sea, de un punto urbanizado $f(a)$ contiene otros puntos urbanizados $f(x)$. Esta es la versión en lenguaje corriente de la definición abstracta y simbólica de función continua escrita más arriba. Trude se constituye en racionalización absoluta y exhaustiva del espacio en el que se asienta. Una banda de Möbius urbana le sirve de modelo: ■



diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Saber científico versus saber socio cultural. Un tablero de ajedrez es mucho más que un cuadrado hecho con 32 cuadrados blancos y 32 negros sobre los que 16 piezas blancas y 16 negras trazan paralelas a los lados, diagonales y saltos.

El matemático podría expresar de diversos modos los posibles destinos de cada pieza desde una posición cualquiera en el tablero, ya sea mediante vectores (componentes del movimiento origen-final desde la posición ocupada por la pieza) o mediante coordenadas polares (la distancia d y el ángulo A del movimiento con respecto a la base del tablero):

$0 \leq k \leq 7$, $k \in$ N		$0 \leq k \in$ N
$(0, 1)$	*Peón*	$d=2$, $A=90^o$ / $d=1$, $A=90^o$ / $d=\sqrt{2}$, $A=45^o$, 135^o
$(\pm k, 0)$, $(0, \pm k)$	*Torre*	$d=k \leq 7$, $A=0^o$, $\pm 90^o$, 180^o
$(\pm 2, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm 2)$	*Caballo*	$d=\sqrt{5}$, $A=\pm \mathrm{arctg}(\pm 1/2)$, $\pm \mathrm{arctg}(\pm 2)$
$(\pm k, \pm k)$	*Alfil*	$d=k \cdot \sqrt{2}$ $(k \leq 7)$, $A=\pm 45^o$, $\pm 135^o$
$(\pm k, \pm k)$, $(\pm k, 0)$, $(0, \pm k)$	*Reina*	$d=k \leq 7$, $A=0^o$, $\pm 90^o$, 180^o / $d=k \cdot \sqrt{2}$ $(k \leq 7)$, $A=\pm 45^o$, $\pm 135^o$
$(\pm k, \pm k)$, $k=0,1$	*Rey*	$d=1$, $A=0^o$, $\pm 90^o$, 180^o / $d=\sqrt{2}$, $A=\pm 45^o$, ± 135

Pero eso sería confuso y estúpido. Hoy en día el código que señala la posición de las piezas se basa en una coordenada alfabética horizontal y otra numérica vertical. Dada la inutilidad de las cábalas precedentes, algunos matemáticos se preguntarán por los posibles movimientos de cada pieza, o por el número de posibles movimientos de todas juntas. Incluso por el número de partidas distintas posibles que acaben con la victoria de blancas, negras, o en tablas. Los habrá quienes se creerán matemáticos precisamente porque empiezan a sumar las componentes vectoriales de diversos recorridos y porque se formulan preguntas de ese estilo. Pero nada de eso es *Ajedrez*. Comprender el intríngulis geométrico de algo no significa conocerlo.

Otra cosa es conocer el tablero. Sin conocimiento científico el tablero no existiría tal y como es. ¿Cómo garantizar la perfecta alineación de las casillas, la misma longitud de sus cuatro lados y sus ángulos rectos? ¿Cómo asegurar el plano de la superficie resultante, un gran cuadrado de cuadrados? Tareas imposibles sin Matemáticas, aunque no baste con ellas. Calvino expone un aspecto esencial del conocimiento artesanal. Su descripción del tablero omite cualquier detalle técnico. No es lo importante. Lo que importa es la habilidad y maestría del artesano para aprovechar los defectos y virtudes de la madera, para ajustar perfiles distintos, para casar asperezas. Los defectos no son inútiles ni despreciables. Su utilidad está en complementarlos con otros defectos y virtudes. Quien no sabe aprovecharlos no es artesano ni maestro, tampoco profesor. Si el matemático se limita a lo suyo corre un grave peligro, como señala Kobo Abe (2007) en *El rostro ajeno*, de 'ver el triángulo y no ver el pan' cuando contempla un pan triangular. ¿Tiene sentido hablar del triángulo de un pan triangular sin referirse al pan? ¿Y hablar de los cuadrados del tablero de Ajedrez y de los trayectos geométricos de sus piezas sin considerar la madera ni el juego? No creo que sea éste el sentido de las Matemáticas.

EN LAS CIUDADES INVISIBLES ■

Tu tablero, sire, es una taracea de dos maderas: ébano y arce. La tesela en la que se fija tu mirada luminosa fue tallada en un anillo del tronco que creció durante un año de sequía: ¿ves cómo se disponen las fibras? Aquí protubera un nudo apenas insinuado: una yema trató de despuntar un día de primavera precoz, pero la helada de la noche la obligó a desistir... Aquí hay un poro más grande: tal vez fue el nido de una larva; no de carcoma, porque apenas nacido hubiera seguido excavando, sino de un brugo que royó las hojas y fue la causa de que se eligiera el árbol para talarlo... Este borde lo talló el ebanista con su gubia para que se adhiriera al cuadrado vecino que sobresalía...