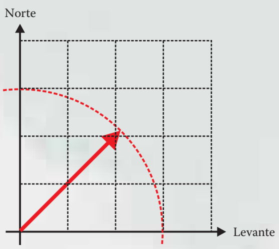
suma+ 58
Junio 2008, pp. 93-100

En las ciudades invisibles VI y VII

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Kublai: –Desde allí parte el hombre y cabalga tres jornadas entre norte y levante...



No es la primera vez que Calvino localiza un lugar mediante un ángulo y una distancia. Unas coordenadas polares referenciadas en los puntos cardinales y una distancia medida con unidad de tiempo.

Según Marco Polo las cualidades de las ciudades se distinguen con relación a una primera ciudad implícita. Lo mismo se diría del número 1 y los demás números naturales. La naturaleza de éstos basada en la reiteración implícita del primero en todos ellos:

$$a=[a] \qquad [a]+a=[aa] \qquad [aa]+a=[aaa] \qquad \ldots \qquad [aa\ldots a]+a=[aaa\ldots a]$$

Polo: –Para distinguir las cualidades de las otras he de partir de una primera ciudad que permanece implícita. Para mí es Venecia.

Pero, ¿no se tratará tan sólo de una apariencia? Si Venecia fuese verdaderamente esa ‘primera ciudad que permanece implícita’, Marco Polo no sólo podría, sino que habría comenzado por describirla antes de esbozar las otras ciudades. De igual modo podríamos construir los números naturales. Describiendo el 1 con detalle y a partir de él esbozar los demás cardinales. Kublai Jan invita a Marco Polo a hacerlo así. Sin embargo, no es este el proceder del veneciano. La realidad es otra. En las ciudades que visita Marco Polo encuentra rasgos de su ciudad natal, pero es justamente entonces, hallando en lo extraño detalles de lo conocido, que lo extraño se le hace próximo, asimilable, comprensible. Es entonces y no antes, que el viajero transforma lo conocido en patrón de contraste, de comparación y de medida con el que valorar lo nuevo. Así es como Venecia se convierte en implícita y entera.

Kublai: –Entonces deberías empezar cada relato de tus viajes por el lugar de partida, describiendo Venecia tal como es, toda entera, sin omitir nada de lo que recuerdas de ella.

Tampoco el 1 es premisa, sino conclusión. El 1 es la entidad mínima común a todas las cantidades, el patrón esencial que permite compararlas y diferenciarlas unas de otras:

$$[aaa\ldots a]=[aa\ldots a]+a \qquad \ldots \qquad [aaa]=[aa]+a \qquad [aa]=[a]+a \qquad [a]=a$$ ■

Diseño y maquetación FMC

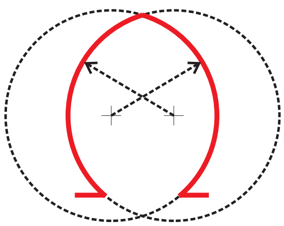
Miquel Albertí Palmer
IES Vallés, Sabadell
ciudadesinvisibles@revistasuma.es


Las ciudades y los ojos. 4

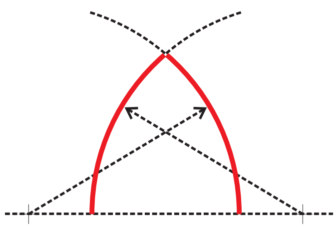
Fílides

La variedad de las ventanas de Fílides incluye las ojivales, hechas con arcos circulares del mismo radio que se cortan volviendo la concavidad el uno al otro. El morisco y el lanceolado son arcos ojivales. Ambos se trazan con dos arcos centrados sobre la misma horizontal. En el primero, los centros son interiores al arco compuesto resultante, el pie del arco por debajo de la horizontal de ambos centros:

...variedades de ventanas se asoman a las calles: en ajimez, moriscas, lanceoladas, ojivales, coronadas por lunetas o por rosetones ...


Arco morisco

En el segundo, el arco lanceolado, los centros son exteriores y se hallan situados en la misma horizontal que los puntos de apoyo:


Arco lanceonado

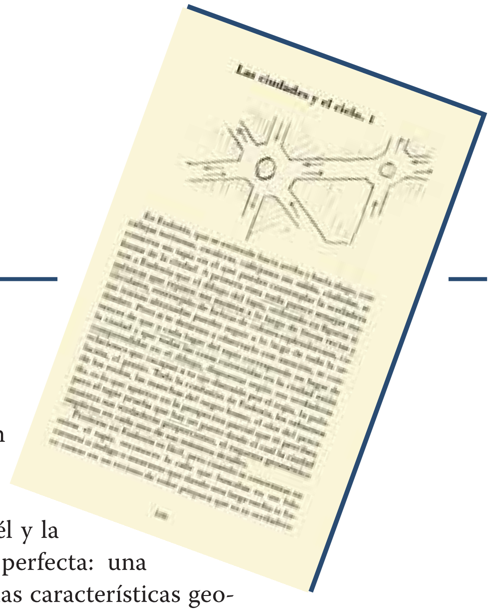
Una ventana en ajimez está dividida en el centro por una columna, formando así un doble arco. El rosetón es un adorno arquitectónico circular, generalmente calado, y que acostumbra a dividirse en 3, 4, 6, 8, ..., 2^m3^n partes iguales. Las lunetas más corrientes son arcos circulares en medialuna o ángulos que a modo de alero o teja cubren la parte superior del rectángulo de un ventanal o se abren en la bóveda de una galería.

Fílides es un espacio donde se dibujan recorridos entre puntos suspendidos en el vacío ...

Pese a toda esa geometría que sorprende al recién llegado, no es la geometría lo que confiere a Fílides su carácter, sino la costumbre que hace invisibles los detalles transformando la ciudad en un *espacio donde se dibujan recorridos entre puntos suspendidos en el vacío*. ■

Fílides: *su geometría es visible, su esencia invisible*

Eudoxia


Las ciudades y el cielo. 1

> *...se conserva un tapiz ...ordenado en figuras simétricas que repiten sus motivos a lo largo de líneas rectas y circulares ...*

> *...a cada lugar del tapiz corresponde un lugar de la ciudad y que todas las cosas contenidas en la ciudad están comprendidas en el dibujo...*

> *...hay un punto desde el cual la ciudad muestra sus verdaderas proporciones, el esquema geométrico implícito en cada uno de sus más mínimos detalles.*

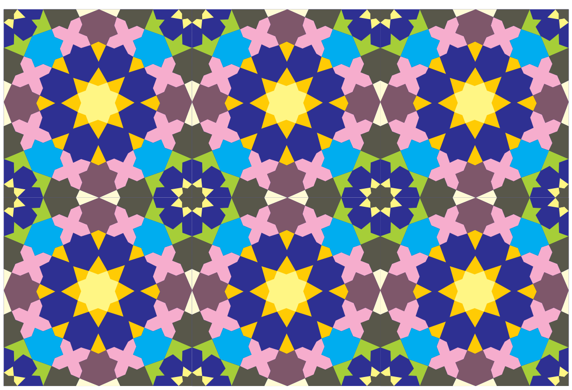
> *Uno de los dos objetos... tiene la forma que los dioses dieron al cielo...; el otro no es más que su reflejo aproximativo... Pero tú puedes sacar la conclusión opuesta: que el verdadero mapa del universo es la ciudad de Eudoxia tal como es...*

El tapiz de Eudoxia desarrolla sus motivos en *lineas rectas y circulares*, esto es, mediante translaciones y giros. El tapiz es un mapa exhaustivo de Eudoxia. La sintonía en entre él y la ciudad, entre la realidad y su modelo, es perfecta: una correspondencia 1-1. En el tapiz se exponen las características geométricas de la ciudad, pues existe un lugar desde el que la ciudad *muestra sus verdaderas proporciones, el esquema geométrico implícito en cada uno de sus más mínimos detalles*.

Si el tapiz es modelo del Cielo y de la ciudad, la ciudad lo es de los otros dos. Ambas interpretaciones tienen sentido, ya que toda correspondencia 1-1 es reversible. Una vez establecida, la imagen y su original se confunden. ¿Cuál es el original y cuál es la imagen? Si un objeto es modelo de una realidad, la realidad es modelo del objeto.

La otra noche soñé con París. Paseaba por una de sus avenidas cuando en un parterre de césped vi algo brillante. Me agaché para cogerlo, pero estaba pegado al suelo. Al acercar más la mirada observé que no era de hojas de hierba de lo que estaba hecho el parterre, sino de hilos de lana y seda. Sorprendido, me incorporé. Toda la avenida estaba tejida de verde. El asfalto había desaparecido. A sus lados se abrían calles de vivos colores. Enfilé una de ellas hacia la plaza del Arco de Triunfo. El suelo era blando y silencioso, los coches pasaban en un susurro. Al llegar rodeé la plaza. Las doce avenidas que desembocan en ella también habían sido tejidas con lana y seda, cada una con un color distinto.

Por la tarde fui a la plaza de Tertre y la encontré vacía. Pregunté por los pintores a un ciudadano y me señaló las fachadas. Todas las ventanas y balcones estaban ocupados por algún artista. Me invitaron a subir. Y fue entonces, mirando París desde arriba, que me di cuenta de la maravilla. El tema de sus obras era el mismo. *Pintamos Paris*, decían entusiasmados. Cierto, pintaban París, el pavimento de París. Un suelo convertido en tapiz de calles rectilíneas y plazas circulares de colores brillantes. ■



Eudoxia*: ciudad real y ciudad modelo*

Esmeraldina

La retícula configura el espacio físico de la ciudad. En Esmeraldina la red reticular es doble; una hecha de calles; la otra, de canales. Ambas se *superponen y entrecruzan* configurando una retícula tridimensional en la que las distancias se salvan con itinerarios zigzagueantes.

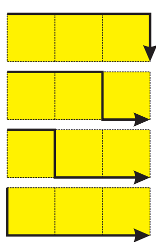
En esa realidad reticular de Esmeraldina Calvino contextualiza una definición tradicional de línea recta. La línea más breve entre dos puntos es una poligonal de segmentos. Y la retícula urbana facilita un sinfín de posibilidades para variar esos zigzagueos, terrestres o acuáticos, entre el origen y el destino de cada trayecto. Y *no son sólo dos, sino muchas* las posibilidades. Pero, ¿de cuántas estamos hablando?

La retícula de Esmerldina no es sólo tridimensional porque se crucen sus calles y canales, como afirmó Calvino antes, sino también porque la *red de pasajes no se organiza en un solo plano*. Calvino explicita así el carácter tridimensional de la retícula urbana de Esmeraldina.

Y volviendo al número de trayectos posibles entre dos puntos, el transeúnte se permite el lujo de variar cada día su itinerario.

Si en cada encrucijada de una retícula plana se citan dos direcciones y cuatro sentidos, en el vértice de una retícula espacial lo hacen tres direcciones y seis sentidos. El paseante del plano puede optar entre ir hacia el Norte-N, hacia el Sur-S, al Este-E o al Oeste-O. En Esmeraldina puede, además, ascender-A o descender-D.

En tales condiciones, el recorrido entre dos puntos P y Q del plano se traduce en una palabra compuesta de dos de las cuatro letras posibles, algo similar a las componentes del vector determinado por los dos puntos, el de origen y el de destino. Por ejemplo, el trayecto desde $P(2, 1)$ hasta $Q(5, 0)$ tiene por componentes $(3, -1)$ y se traduce en la palabra EEES –tres pasos hacia el Este y un paso hacia el Sur. Pero no es ésta la única posibilidad. Cualquier otra versión desordenada de los mismos pasos lleva al mismo lugar:



Disponemos de cuatro maneras distintas de hacerlo (EEES, EESE, ESEE, SEEE):

$$PR_{3+1}^{1,3} = \frac{(3+1)!}{1!3!} = \frac{4!}{3!} = 4$$

...una retícula de canales y una retícula de calles se superponen y se entrecruzan. Para ir de un lugar a otro siempre puedes elegir entre el recorrido terrestre y el recorrido en barca.

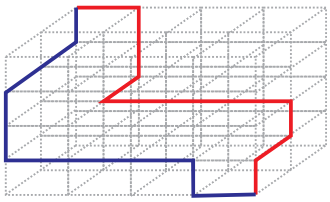
la línea más breve entre dos puntos no es una recta sino un zigzag ramificado en tortuosas variantes, las calles que se abren a cada transeúnte no son sólo dos sino muchas, y aumentan aún más para quien alterna trayectos en barca con transbordos a tierra firme.

la red de pasajes no se organiza en un solo plano, sino que sigue un subir y bajar de escalerillas, galerías, puentes

Un mapa de Esmeraldina debería comprender (...) todos esos trazados, sólidos y líquidos, patentes y ocultos.

Esmeraldina


Las ciudades y los intercambios. 5



En el espacio ocurre igual, sólo que aquí se necesitan, no dos, sino tres letras. Yendo desde $P(1, 2, 3)$ hasta $Q(-1, 3, 6)$ trazamos virtualmente un vector de componentes $(-2, 1, 3)$, cuya versión verbal es OONAAA. Pero cualquier palabra hecha con una N, dos O y tres A nos llevará al mismo destino. No importa la permutación de sus letras. La distancia será la misma si la retícula tridimensional es regular.

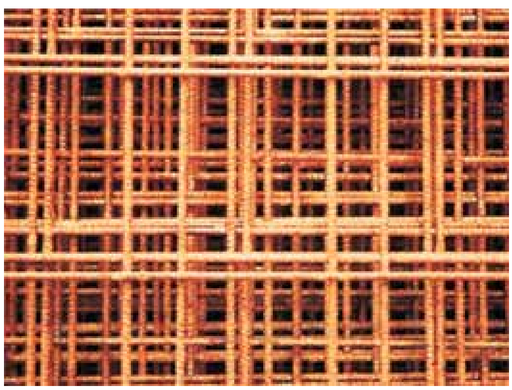
Para calcular cuántas palabras o itinerarios distintos pueden hacerse en el espacio siguiendo las líneas de una retícula tridimensional basta tener en cuenta que cada palabra se hace con tres letras tomadas de {N,S,E,O,A,D}. Puesto que cada una de las tres letras se repite m, n y p veces respectivamente, las posibilidades para ir de un punto a otro sin variar la extensión del recorrido son:

$$PR_{m+n+p}^{m,n,p} = \frac{(m+n+p)\,!}{m!\,n!\,p!}$$

Combinando sectores de los diversos trayectos elevados o de superficie, cada habitante se permite cada día el placer de un nuevo itinerario para ir a los mismos lugares.

A diferencia de lo que ocurre con los vectores numéricos tradicionales en los que interviene el signo, en este contexto el orden de los factores no altera el destino. Dos vectores verbales como [2S, 1N, 4D] y [1N, 4D, 2S] son sinónimos, te llevan al mismo lugar.

Tal y como dice Calvino, y dada su esencia reticular tridimensional, un mapa de la ciudad no debería ser plano, sino espacial. Una red desplegable hecha con alambres parecida a aquéllas con las que muchos jugábamos cuando niños y a las que podías dar la vuelta como a un calcetín. Debido a la humedad de sus canales, esa red estaría siempre oxidada:



Esmeraldina: *la ciudad de mapa tridimensional*


Las ciudades y los ojos. 5

Moriana

Moriana

Algo carente de espesor, que sólo consta de un anverso y un reverso como una hoja de papel, pero que, sin embargo, no es una hoja de papel, con una figura en un lado y otra en el otro que no pueden despegarse. Si no se trata de un plano, se le aproxima mucho. Calvino relata algunas características propias de un objeto bidimensional o casi bidimensional, tal vez consciente de su imposibilidad real en nuestro mundo de tres dimensiones. En cualquier caso no hay duda de que la ciudad de Moriana está inspirada por la bidimensionalidad. Lo reconoce el propio Calvino en su nota preliminar a *Las ciudades invisibles* calificando a Moriana de ciudad bidimensional. Su descripción se basa en la hoja de papel, un modelo físico, literario y real, muy similar al objeto ideal bidimensional del mundo matemático: el plano.

La visita a Moriana evoca en el matemático gratos recuerdos de su visita a la *Flatland* de Abb ott y de su encuentro con *El disco* de Borges. Tanto una como el otro comparten conMoriana su aspecto bidimensional. Para imaginar *Flatland*, Abbott, como Calvino, utiliza también la hoja de papel, pero algo más extensa y recomienda pensar en las sombras creadas encima ella .

El disco borgiano, en cambio, no se inspira en las sombras ni en la hoja de papel, sino en un detalle crucial de la bidimensionalidad como es la inexistencia de dos caras. El propio Borges dijo de su disco que por eso mismo se trataba del círculo euclidiano.

Una terrible catástrofe se encargó de proporcionar una Moriana, una Flatland y un disco de Odín reales. Aparte de la mezquita, así quedó la localidad de Lhongka, al noroeste de Sumatra, tras el devastador tsunami de diciembre de 2004. Reducida a una cara de una hoja de papel, reducida a su propia sombra, reducida a plano de sí misma. ■

...en realidad no tiene espesor, consiste sólo en un anverso y un reverso, como una hoja de papel, con una figura de un lado y otra del otro que no pueden despegarse ni mirarse.

Imagine a vast sheet of paper on which straight Lines, Triangles, Squares, Pentagons, Hexagons, and other figures, instead of remaining fixed in their places, move freely about, on or in the surface, but without the power of rising above or sinking below it, very much like shadows ...

Abbott, 1884

Es el disco de Odín. Tiene un solo lado. En la tierra no hay otra cosa que tenga un solo lado.

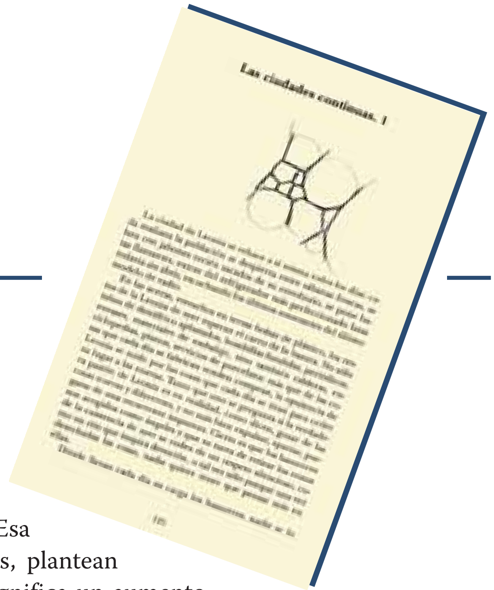
Borges, 1996

...basta recorrer un semicírculo y será visible la faz oculta de Moriana...

Moriana: *la ciudad bidimensional*

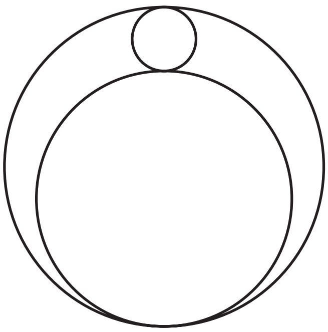
Leonia

Leonia


Las ciudades continuas. 1

> *...de año en año la ciudad se expande y los basurales deben retroceder más lejos; la importancia de los desperdicios aumenta..., se despliegan en un perímetro cada vez más vasto.*

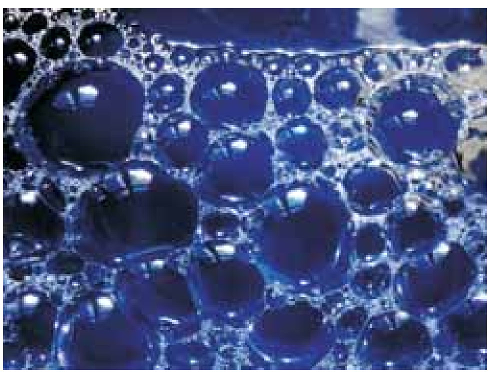
En Leonia los desperdicios rodean la ciudad. El visitante se encuentra en el centro de una circunferencia de inmundicia que se desarrolla de año en año según la ciudad se expande. Y lo hace en un perímetro cada vez más vasto. Esa expansión y ese perímetro cada vez mayores, plantean una cuestión fundamental. Si la expansión significa un aumento del área ocupada por la ciudad, ¿el aumento de ése área implica un aumento de su perímetro?



Supongamos que Leonia es plana y su basural circular. El área A de un círculo puede escribirse como función de su perímetro P: $A=P/(4\pi)$. Y entonces, $A'(P)=P/(2\pi)=r$. Por tanto, el radio mide el cambio de área con respecto al perímetro. Y si el radio r se aumenta en r_0, su perímetro y área aumentan en $2\pi r_0$ y $\pi r_0{}^2+2\pi rr_0$ respectivamente. Es decir, que el aumento del perímetro equivale al perímetro del círculo correspondiente al aumento del radio ($2\pi r_0$), mientras que el aumento de área es mayor que el área del círculo correspondiente a ése aumento. Esto se observa en la figura al margen. El perímetro del círculo mayor, de radio $R=r+r_0$, es la suma de los perímetros de los dos círculos interiores, mientras que su área sobrepasa en mucho la de ambos.

El mundo sobre el que se extiende Leonia no es plano, sino esférico. Si nada limita su expansión, el perímetro y área circulares de Leonia crecerán de la mano, pero sólo hasta que el perímetro iguale el del ecuador terrestre. A partir de ahí el perímetro decrecerá mientras la expansión de la ciudad continúa. Un fenómeno ya señalado por Frabetti (1999) en la *ciudad incontenible*, cuyas murallas crecían hasta un punto en el que con las piedras de la muralla precedente podía construirse un muro que encerraba un área todavía mayor. De ahí en adelante, el perímetro de la ciudad encierra su basural en el polo opuesto al centro de aquella.

> *Los desperdicios de Leonia ... invadirían el mundo si no estuvieran presionando, más allá de la última cresta, basurales de otras ciudades que también rechazan lejos de sí montañas de deshechos.*



Pero los basurales de Leonia están limitados por la presión de los de otras ciudades como las pompas achatadas de la espuma. ■

Leonia *: la ciudad que crece como la espuma*

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

El diálogo reproducido al margen es un fragmento del que abre el capítulo VII. Leonia podría ser la ciudad de la que hablan Marco y Kublai. El diálogo acaba al final del capítulo y lo hace con un juego lógico-verbal que certifica una paradoja.

> Polo: –A menos que sea cierta la hipótesis opuesta: que quienes se afanan en los campamentos y los puertos sólo existen porque los pensamos nosotros dos…
> Kublai: –Que no existan la fatiga, los alaridos, …sino sólo esta azalea.
> Polo: –Que … sólo existan porque nosotros los pensamos.

Sea P la proposición *nosotros los pensamos* y sea Q la preposición *ellos existen*. Si H_0 es la hipótesis original a la que se refiere Marco Polo, la hipótesis opuesta y que se da como cierta es $-H_0$: *sólo existan porque nosotros los pensamos*. El término *sólo* expresa una equivalencia lógica entre ambas proposiciones, *ellos existen* si y sólo si *nosotros los pensamos*. Luego, $-H_0=[Q\Leftrightarrow P]$. Y si ésta es $-H_0$, su opuesta es $H_0=-[Q\Leftrightarrow P]$. Es decir, $H_0=[Q\Leftrightarrow -P]$, o también $H_0=[-Q\Leftrightarrow P]$.

> Kublai: –A decir verdad, yo no los pienso nunca.
> Polo: –Entonces no existen.

Kublai afirma que no los piensa: $K(-P)$. Y si no los piensa, no existen, ya que si Kublai no los piensa, entonces 'nosotros' no los pensamos. Y si nosotros no los pensamos, $-P$, la hipótesis supuesta, $-H_0$, concluye que $-Q$. Esto es, que *ellos no existen*. Resumiéndolo: $K(-P)\Rightarrow -P\Rightarrow[-P\wedge[-H_0=P\Leftrightarrow Q]]\Rightarrow -Q$. Y la proposición $-Q$ es *que ellos no existen*.

> Kublai: –No creo que esa conjetura nos convenga. Sin ellos nunca podríamos estar meciéndonos en el capullo de nuestras hamacas.

Pero si *ellos no existen*, ¿cómo podríamos mecernos en las hamacas? Entonces *no los pensaríamos*. Es decir, $-Q\wedge[-H_0= P\Leftrightarrow Q] \Rightarrow -P$. ¿Qué hacen pues Marco y Kublai tumbados en sus hamacas?

> Polo: –Entonces hay que excluir la hipótesis. Por lo tanto será cierta la otra: que ellos existen y nosotros no.

Se diría que excluyendo la hipótesis Marco Polo vuelve a la original, H_0, lo que significaría dar por buenas las tres equivalencias: $-[Q\Leftrightarrow P]$, $Q\Leftrightarrow -P$ y $-Q\Leftrightarrow P$. Sin embargo, que *ellos existen y nosotros no* puede interpretarse tomando como equivalencia de *nuestra* existencia el hecho de pensar en *ellos*. Así la proposición de Marco Polo se traduciría en $Q\wedge -P$, una afirmación lógicamente equivalente a $-[Q\Rightarrow P]$ puesto que comparte su tabla de verdad.

Por tanto, el error lógico de Marco y Kublai está en haber incluido el adverbio *sólo* en su hipótesis. En realidad, deberían haberlo excluido y decir *existan porque nosotros los pensamos* en lugar de *sólo existan porque nosotros los pensamos*. La inclusión del adverbio transforma una implicación ($Q\Leftarrow P$) en equivalencia ($Q\Leftrightarrow P$). Esto y el hecho de que el diálogo se desarrolle junto a la imprecisa frontera que separa la lógica de la lingüística es lo que llevará a ambos interlocutores a una contradicción.

> Kublai: –Hemos demostrado que si existiéramos no estaríamos aquí.
> Polo: –Y aquí estamos.

Si *existiéramos* pensaríamos. Y entonces, P. Pero como $P\Rightarrow -Q$, entonces *ellos no existen* y *no estaríamos aquí* pensándolos. Por lo que se deduce $-P$. Polo certifica la contradicción: $-P\wedge P$.

Polo: –…Tal vez este jardín sólo exista a la sombra de nuestros párpados …
Kublai: –Tal vez este diálogo nuestro se desenvuelva entre dos miserables apodados Kublai Jan y Marco Polo, que revuelven en un basural …
Polo: –Tal vez del mundo haya quedado un terreno baldío cubierto de inmundicias y el jardín del Gran Jan. Son nuestros párpados los que los separan, pero no se sabe cuál está dentro y cuál fuera.