

Este artículo describe una actividad en la cual los alumnos adquieren algunos conceptos básicos sobre Topología de forma intuitiva. Teniendo en cuenta su principal ventaja, el aprendizaje cooperativo, el puzzle de Aronson es la herramienta que proporciona la metodología más conveniente para desarrollar esta experiencia.

This article describes a learning activity in which students take on some basic topological concepts in an intuitive way. Focussing on its main advantage, the cooperative learning, the Aronson's puzzle is a tool that provides the suitable methodology to develop this experience.

Introducción

Miguel De Guzmán (1992) ya apuntaba una tendencia a recuperar el pensamiento geométrico y la intuición espacial en los contenidos de la programación del área de Matemáticas. Señala, que si bien es evidente el abandono de la geometría intuitiva a favor de un mayor formalismo en los programas actuales, cada vez más, se considera ineludible la recuperación de contenidos espaciales e intuitivos de la Matemática.

En esta línea se desarrolla la asignatura optativa de Estructuras Espaciales que se oferta en el currículo de secundaria de la Comunidad Valenciana (DOGV, Orden del 9 Mayo de 1995).

Esta asignatura completa y amplía el tratamiento matemático del espacio contenido en el currículo de secundaria¹, abarcando el estudio de la evolución de las formas en el espacio, de su papel modular en la composición de estructuras y del desarrollo de la percepción espacial de objetos.

Algunos de los objetivos² generales de esta optativa son (DOGV, Orden del 9 Mayo de 1995):

- Describir el espacio utilizando diferentes lenguajes: geométrico, ordinario, gráfico, numérico, algebraico, etc., y analizarlo desde diferentes ópticas: relaciones, propiedades, secciones, perspectivas, etc.

- Comprender las relaciones entre las formas desde diversas ópticas: regularidad, simetría, proporción, armonía en su disposición, etc. Utilizar la composición, descomposición, movimiento, deformación y desarrollo de configuraciones geométricas para analizarlas y obtener otras nuevas.

- Clasificar figuras y cuerpos atendiendo a distintos criterios.

- Desarrollar el sentido del espacio al construir, dibujar, medir, visualizar, comparar, transformar y clasificar figuras geométricas.

- Valorar la importancia de trabajar en equipo para la discusión de las ideas, para la resolución de los problemas y para la realización de las construcciones, con actitud de cooperación, tolerancia y solidaridad.

- Desarrollar una actitud de curiosidad e interés hacia la investigación de formas y configuraciones geométricas.

Estos objetivos se concretan en los contenidos que se trabajan en esta actividad, concebida para su aplicación en una clase de 2º ESO. Se pueden clasificar en tres tipos: conceptuales, procedimentales y actitudinales.

Elena Thibaut Tadeo

*IES Comarcal Rocafort-Godella-Burjassot
SEMVCV al Khwārizmī*

Los contenidos conceptuales que se trabajan en ella son:

- Conocer intuitivamente algunas características topológicas de superficies
- Conocer lo que es un grafo y el comportamiento de algunos de ellos sobre superficies.
- Calcular la característica de Euler en otras superficies poliédricas.
- Identificar algunas superficies poliédricas mediante su característica de Euler.
- Distinguir entre algunas superficies con bordes y sin bordes.
- Distinguir entre algunas superficies orientables y no orientables.

Los contenidos de tipo procedimental son:

- Realizar figuras poliédricas con papel y acetato.
- Visualizar el espacio tridimensional mediante la manipulación de superficies transparentes

Y los contenidos actitudinales son:

- Favorecer la autonomía en el aprendizaje.
- Aprender a aprender de los compañeros.
- Relacionar a alumnos de edades y precedencia diversa.
- Integrar alumnos de niveles diferentes.
- Fomentar la igualdad de géneros.
- Incitar la curiosidad hacia otras construcciones matemáticas no habituales

Para el desarrollo de esta actividad he escogido la técnica didáctica cooperativa del puzzle de Aronson.

Dinámica de la experiencia

Elemento motivacional

La motivación consiste en suscitar interés hacia la consecución de un objetivo. Existe motivación si existe una necesidad que ha de ser satisfecha. ¿Qué puede crear la necesidad de conocer ciertas superficies en alumnos de 12-13 años? En este caso he elegido como estímulo la película MOEBIUS de Eduardo Mosquera (1996).

En ella se crea una situación dramática sorprendente y surrealista, explicable en cierta medida por las características de una cinta de Moebius. En el metro de Buenos Aires desaparece un tren entero. Los responsables piden ayuda a un matemático para que desentrañe la complejidad de las redes de túneles que puedan haber ocasionado la pérdida. La explicación del matemático sugiere la existencia de una estructura en

forma de cinta de Moebius que con un cambio de vías deja encerrados en un bucle a los trenes que estén recorriendo ese tramo. Se sugiere la existencia de otra dimensión, la existencia de un no-espacio, con lo que otra posible explicación sería la existencia de “túneles” pertenecientes a una superficie como la botella de Klein (Thibaut, 2006). El guión de la película está basado en un relato de A. J. Deutsch titulado *A Subway Named Moebius*, publicado en la revista *Astounding* en diciembre de 1950³, en el que también se pueden consultar los detalles matemáticos de la historia.

Se trata de apelar a la curiosidad de los alumnos en clave de desafío, y proponerles respuestas a sus interrogantes. La película dura 88', por lo que se emplea en ella una sesión y media.

En las dos ocasiones que he puesto en práctica esta actividad, he dedicado media sesión a poner en común sus impresiones sobre la película. En ambos casos, los alumnos mostraron interés por comprender qué ocurría y el porqué. Después de comentarles brevemente cómo se construye una cinta de Moebius, algunos incluso interpretaron que el argumento de la película era recurrente y cíclico, como parece ser que ellos habían entendido que “funcionaba” una cinta de Moebius.

Elemento manipulativo

La utilización de materiales recortables que puedan ser utilizados para experimentar tiene la ventaja de facilitar la visualización de ciertas estructuras y de centrar la atención en los conceptos que se están trabajando.

Para su uso en la actividad cooperativa los alumnos construyeron una cinta de Moebius con acetato transparente y una botella de Klein poliédrica (imagen 1) construida a partir del recortable de la imagen 2.

En la elaboración de la botella de Klein se empleó una sesión.



Imagen 1.-Botella de Klein poliédrica en acetato transparente

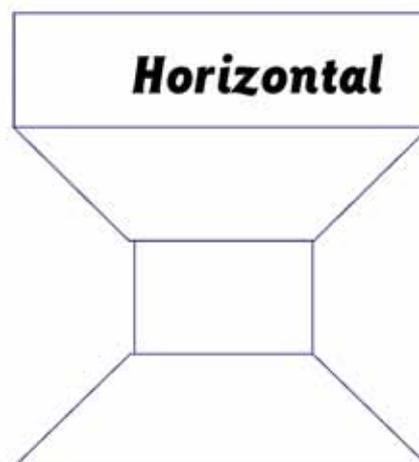
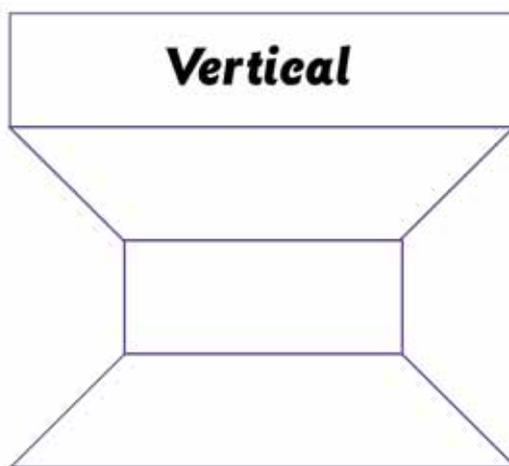
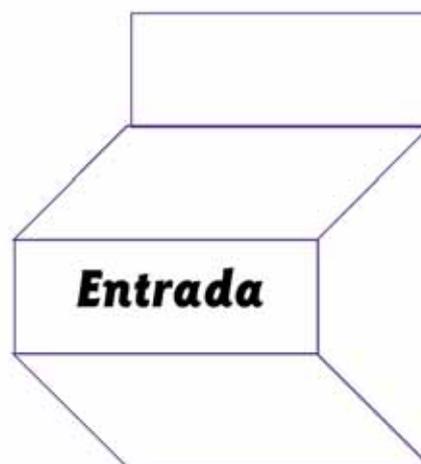
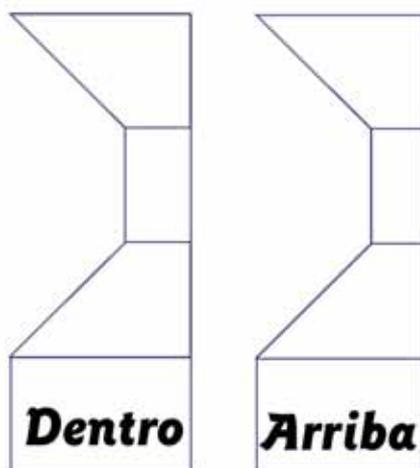
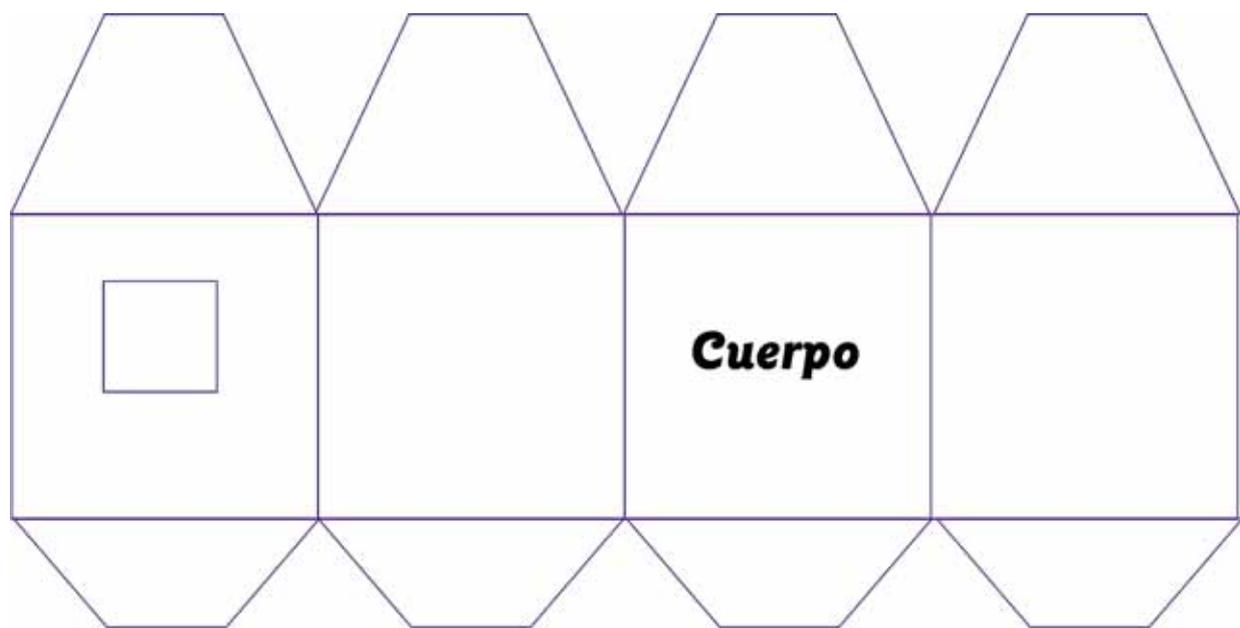


Imagen 2.-Recortable para construir la botella de Klein poliédrica.

Actividad cooperativa: puzzle de Aronson

Las virtudes del puzzle de Aronson no son pocas. Entre ellas destacan las siguientes (García, Traver y Candela, 2001)

- Implica al alumno en el proceso de aprendizaje de forma activa y dinámica
- Le proporciona autonomía y responsabilidad en el aprendizaje propio.
- Le involucra de manera responsable en el aprendizaje del compañero.

El primer grupo de alumnos de Estructuras Espaciales de 2ºESO estaba compuesto por doce alumnos, cuatro chicos y ocho chicas, con los que formé seis grupos de dos alumnos. Cuatro de estos grupos son parejas mixtas. En la elección de las parejas se buscó combinar caracteres relacionales opuestos. Al más extrovertido de cada pareja le asigné el rol de secretario: se encargaría de tomar las notas necesarias que servirán más tarde para su estudio. Y a los más introvertidos los designé como portavoces: se encargarían de exponer las dudas y plantear las cuestiones necesarias en nombre de la pareja.

El segundo grupo de alumnos, también de estructuras espaciales de 2º ESO está formado por dieciséis alumnos, cinco chicos y once chicas, con los que formé cuatro grupos de cuatro alumnos. En este caso se busco que en cada grupo hubiese una persona más extrovertida, otra más aseada en la presentación de los trabajos, otra más creativa y otra con necesidades educativas especiales, cuidando que estuviesen a gusto juntos por su afinidad amistosa. La persona extrovertida se encargaba de moderar, la más creativa de exponer el trabajo en la pizarra, la más aseada fue el portavoz y la persona con necesidades educativas fue el secretario.

En ambos casos he utilizado tres sesiones para el desarrollo completo de esta parte de la actividad. La necesidad de realizar ejercicios manipulativos para la comprensión de los conceptos, que conllevan un tiempo extra en la elaboración de material y su posterior utilización en el grupo, condicionaron la extensión temporal de todo el ejercicio.

La dinámica consiste en entregar a cada componente del grupo, parte del total de los contenidos que han de aprender y desarrollar. El material de trabajo que he utilizado es concreto y breve para que no resulte excesivamente denso en un curso de primer ciclo de la ESO.

En el primer caso repartí el material en dos partes, de forma que cada componente de la pareja debían convertirse en expertos en:

- a. Definición de Topología, característica de Euler y superficie no orientable.
- b. Superficie con bordes, definición de grafo, tipos de grafos.

En el segundo caso, la información la dividí en cuatro partes porque los grupos estaban formados por cuatro alumnos. De forma que cada componente del grupo debía convertirse en expertos en:

- a. Definición de Topología, característica de Euler.
- b. Definición de Topología, superficie no orientable.
- c.- Definición de Topología, Superficie con bordes.
- d.- Definición de grafo, tipos de grafos.

La información completa de la que disponían cada grupo es la siguiente:

De manera informal, la topología se ocupa de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas, de modo que no aparezcan nuevos puntos, o se hagan coincidir puntos diferentes.

El topólogo considera los mismos objetos que el geómetra, pero de modo distinto: no se fija en las distancias o los ángulos, ni siquiera de la alineación de los puntos. Para el topólogo un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo: se dice que la bola y el cubo son objetos topológicamente equivalentes, porque se pasa de uno al otro mediante una transformación continua y reversible. Marta Macho Stadler. Sigma 20, Febrero 2002

 En un poliedro equivalente a una esfera (cubo, pirámide, tetraedro, prisma...) se puede sumar el número de caras y vértices, y al resultado restarle el número de aristas.

$$C + V - A =$$

El resultado siempre te dará dos.

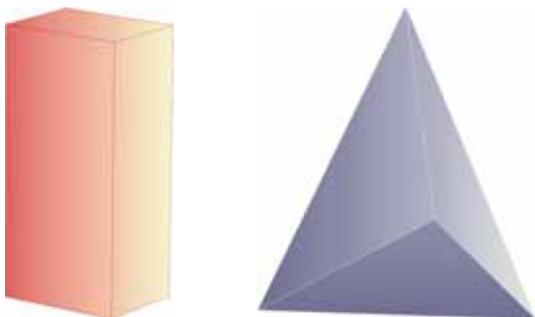
$$C + V - A = 2$$

Puedes comprobarlo con cualquier poliedro.

Durante mucho tiempo se pensó que para cualquier figura tridimensional este resultado sería siempre el mismo. Pero de hecho esto sólo es cierto para figuras equivalentes a una esfera.

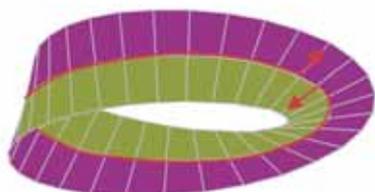
Al resultado de realizar esta operación se le llama *característica de Euler*.

Cuenta el número de aristas de tu botella de Klein y averigua cual es su *característica de Euler*.



La cinta de Moebius tiene una propiedad curiosa. Si coloco dos flechas sobre ella, ambas orientadas hacia arriba, y una de ellas la desplazo por toda la cinta, cuando se encuentra con la anterior, lo hace invertida.

Prueba a hacer el dibujo sobre las cintas de papel transparente.



Esto quiere decir que esta superficie es *no orientable*. Puedes comprobarlo sobre una cinta de Moebius. La botella de Klein, también es *no orientable*.

Un cilindro, ¿será no orientable?



Antiguamente los hombres pensaban que la tierra era

plana. Creían que si viajaban más allá del horizonte caerían en un vacío incomprensible. Pero ahora sabemos que no es así, que la tierra es casi una esfera y que podemos caminar sobre ella sin miedo a encontrarnos con uno de sus bordes⁴.



La esfera es una superficie cerrada, esto es, que no tiene bordes. En cambio un disco plano, es un superficie con bordes.

Fíjate en la cinta de Moebius. Parece una carretera. Si te sales de ella vas a parar a una zona que está en el aire. Esto es que tiene *bordes*. A un cilindro le pasa lo mismo. Desde este punto de vista, tanto el cilindro, como la cinta de Moebius son superficies con bordes al igual que un disco plano.

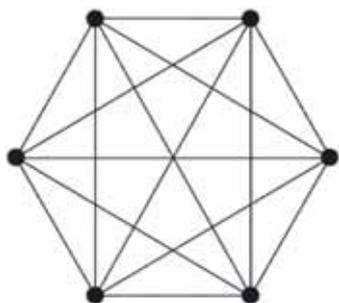
¿Cómo crees que es la botella de Klein?

Una botella de Klein está formada por dos cintas de Moebius. Puedes cortar una de ellas y comprobarlo.



Un grafo es un conjunto de puntos unidos por líneas. Cada punto puede representar una ciudad, una estación o un ordenador de una red. O cualquier conjunto de objetos que se hallen conectados. Las líneas que los conectan pueden representar carreteras, vías o cables. O cualquier elemento físico que conecte ciertos objetos. A los puntos se les llama vértices. Y a las líneas aristas.

Hay muchos tipos de grafos. Un grafo completo será aquel en el que todos sus vértices estén unidos con el resto de vértices por una arista.



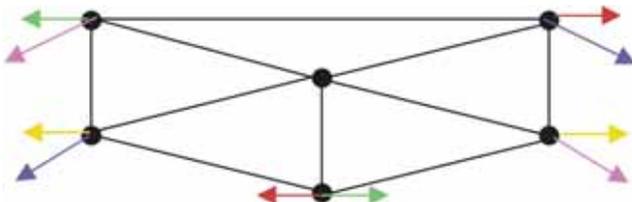
Un grafo conexo será en cambio el que permita recorrer todas sus aristas y sus vértices una sola vez sin levantar el lápiz del papel.



Y por último, un grafo planar será aquel en el que no se cruzan ninguna de sus aristas.

En el plano (o en una esfera), no se puede tener un grafo planar y completo de más de 4 vértices. En cambio en la cinta de Moebius y la botella de Klein sí se puede.

Para convencerte, construye una cinta de Moebius en acetato transparente e intenta unir los 6 puntos según el código de colores. Piensa que la cinta de Moebius tiene una sola cara por tanto basta con que tú veas que se unen.



¿Cómo explicas que sea posible también en la botella de Klein?

Cuando cada alumno tiene la información que va a trabajar, los grupos originales se deshacen para formar los grupos de expertos, que están formados por aquellos alumnos con la misma información asignada.

En estos grupos, los alumnos debatirán, investigarán y desarrollarán los contenidos asignados, ayudados por sus compañeros y por el profesor.

Para orientarles en la comprensión se les plantea a cada grupo preguntas concretas relacionadas con el material que han de trabajar. Las preguntas que utilicé fueron las siguientes

- ¿Qué es la topología?
- ¿Qué es la característica de Euler?
- ¿Cómo es una superficie no orientable?
- ¿Qué significa que una superficie tenga bordes?
- ¿Qué es un grafo?
- ¿En qué superficies se puede dibujar grafos completos y planares?

Dentro de cada grupo deberán llegar a un consenso en sus respuestas y tener claros los conceptos. El profesor juega un papel fundamental, constatando en cada grupo que todos los alumnos saben explicar lo que han aprendido. Durante el desarrollo de esta fase, es necesario orientar a los grupos de expertos incitándoles a utilizar las botellas de Klein y las cintas de Moebius construidas de acetato transparente pintándolas o recortándolas; a contar vértices, aristas y lados de poliedros; a experimentar, en suma, con sus manos los problemas que se plantean en el material escrito. La tendencia del alumno es hacer una primera lectura y contestar las preguntas copiando mecánicamente la respuesta del texto. Como eso no es posible en todos los casos, han de realizar las actividades prácticas y elaborar las respuestas ellos mismos. Si bien este procedimiento es propio del aprendizaje por descubrimiento, no por ello invalida la técnica cooperativa, pues se produce en la fase en la que los grupos de expertos deben elaborar respuestas como resultado de un razonamiento deductivo.

Durante la segunda sesión las parejas o grupos vuelven a reunirse y cada componente le explica al compañero lo que ha aprendido como experto. En este caso también el profesor debe supervisar que se produce un intercambio de conocimiento eficaz.

En la primera experiencia hubo parejas que no se enseñaron todo lo que se había trabajado en el grupo de expertos, por lo que hizo falta revisar en cada pareja si habían puesto en común todo lo aprendido y recordar la necesidad de retomar aquellas cuestiones que no se habían tenido en cuenta.

En la segunda experiencia hubo un grupo que no funcionó correctamente porque no se llevaban bien entre ellos. En los

resultados del examen se constató que al no cooperar no pudieron aprender los contenidos necesarios.

La orientación en la que cada alumno expone su tema al compañero es la contraria a la que se ha realizado en el grupo de expertos. Primero se ponen en común las respuestas a las preguntas y después se razonan dichas respuestas con los resultados de las prácticas. Por ejemplo:

¿En qué superficies se pueden dibujar grafos completos planares? En aquellas como la cinta de Moebius o la botella de Klein que tienen característica de Euler igual a 0. Esto se puede ver en este dibujo que he hecho en la cinta de Moebius. ¿Ves? (Imagen 3)

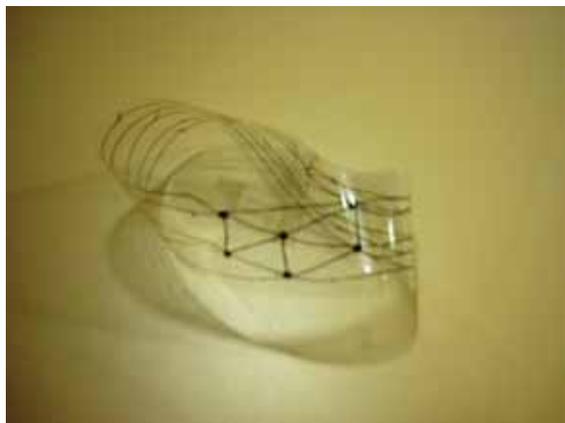


Imagen 3.-Cinta de Moebius con grafo

Algunos alumnos se conformaron en un primer momento con las respuestas dadas sin cuestionarse el porqué de su contestación. De ahí la importancia del profesor para confirmar el aprendizaje, y en caso contrario, redirigir el curso de la conversación de la pareja para retomar aquellos puntos que no han quedado claros.

Evaluación

Para evaluar los contenidos conceptuales opté por una prueba objetiva individual, que constaba de cuestiones directamente relacionadas con las preguntas que planteé a los alumnos en los grupos de expertos.

En el primer año un 75% de alumnos aprobaron la prueba y en el segundo año un 81,25%.

Para evaluar los contenidos procedimentales me basé en la habilidad en la construcción de la botella de Klein y las cintas de Moebius así como en su utilización en los grupos de exper-

tos. Me llamó especialmente la atención un alumno que realizó tres veces el dibujo de los grafos sobre la cinta de Moebius hasta quedar convencido totalmente del resultado.

Para evaluar los contenidos actitudinales me basé en la observación de actitudes positivas mientras trabajaban en grupo y en los comentarios que me hicieron durante una conversación que mantuve con ellos en la que les pregunté sobre el desarrollo de la actividad.

En el primer grupo me dijeron que consideraban que habían aprendido los contenidos bastante bien, que destacaban el hecho de haberse ayudado mutuamente y que se habían sentido igual que siempre. Algunos puntualizaron, cuando les pregunté cómo era eso de “igual que siempre”, que les hubiese gustado trabajar con su grupo habitual, el elegido por ellos, pero reconocieron que al final se habían sentido a gusto, como siempre. También me hicieron notar que la elaboración de la botella de Klein les había resultado muy costosa.

Observé que las tensiones entre los grupos de chicos y chicas habían desaparecido y que no se manifestó la competitividad marcada por la prepotencia masculina y reforzada por el complejo de inferioridad femenino que me encontraba habitualmente.

La segunda vez que realicé la actividad intenté respetar sus amistades y aun así hubo un grupo que no acabó de congeniar. La reflexión fue que deberían haber dejado sus diferencias a un lado y haber trabajado en común.

La integración de tres alumnos con necesidades educativas especiales fue completa y pudieron participar y disfrutar de la ayuda del resto de sus compañeros.

Conclusiones

Viendo los resultados de la evaluación se puede decir que esta es una técnica que resulta eficaz. Además consigue generar ambiente de trabajo e incitar al trabajo. Respecto a los alumnos que no llegaron a adquirir los conocimientos mínimos se puede reflexionar acerca de cuestiones individuales como pueden ser el absentismo o los problemas de aprendizaje a nivel general. Quizás en estos casos se requieran otras técnicas u otros niveles curriculares que no se puedan dilucidar sólo con los resultados de esta actividad. Sería necesario acudir a una evaluación global del alumno y, si la junta evaluadora lo estima conveniente, a un diagnóstico por parte del departamento psicopedagógico.

Esta técnica es susceptible de ser aplicada para el aprendizaje en cualquier área. Las referencias de su aplicación en Matemáticas se encuentran para niveles universitarios (Sanabria, Conejero y Camp, 2004). Para un nivel de secunda-

ria y con contenidos matemáticos que hagan referencias a cuestiones geométricas o topológicas, me parece especialmente adecuada porque permite combinar el aprendizaje por descubrimiento y el trabajo en grupo cooperativo a la vez que se proporciona un texto elaborado que el alumno debe trabajar. Estos conocimientos incipientes sobre Topología requie-

ren para su aprendizaje en un nivel de 2º ESO tanto de manipulaciones deductivas como de definiciones de los nuevos conceptos. La técnica del Puzzle de Aronson permite introducir ambas orientaciones con las ventajas del aprendizaje cooperativo: autonomía, responsabilidad e interacción mutua. ■

NOTAS

1 REAL DECRETO 116/2004, de 23 de enero, del Ministerio de Educación y Cultura y Deporte, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. (BOE nº 35, de 10/2/2004)

2 Orden de 9 de mayo de 1995, de la Conselleria de Educación y Ciencia, por la que se regulan las materias optativas en la Educación Secundaria Obligatoria (DOGV nº 2544, de 5/7/95)

3 Se puede descargar el relato en formato PDF a través de Internet en la siguiente dirección:

http://littera.wikispaces.com/space/showimage/Deutsch_moebius.pdf

4 Imagen de Google Earth, manipulada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Conselleria de Educación y Ciencia (1995). Orden de 9 de mayo de 1995, por la que se regulan las materias optativas en la Educación Secundaria Obligatoria. Diari Oficial de la Generalitat Valenciana. Valencia.

GARCÍA, R. TRAVER, J. A. CANDELA, I. (2001): Aprendizaje cooperativo. Fundamentos, características y técnicas. CCS. Madrid.

GUZMÁN, M. GIL, D (1993): Enseñanza de las Ciencias y la Matemática Tendencias e Innovaciones. Editorial Popular. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura.

MACHO, M. (2002): "¿Qué es la Topología?", Sigma, nº 20, 63-77.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE (2004). Real Decreto 116/2004, de 23 de enero, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Boletín oficial del Estado. Madrid.

SANABRIA, E. CONEJERO, J.A. CAMP, S. (2004): "Organización del trabajo en grupo mediante la técnica del puzzle de Aronson", en Actas del 3er Congreso Internacional de "Docencia Universitaria e Innovación". Universitat de Girona. Girona

THIBAUT, E. (2006): "Una geometría de cine", en Del punto a los espacios multidimensionales. MEC Secretaria General de Educación. Madrid.

En Internet:

IMAGING MATHS. Inside de Klein bottle.

<http://plus.maths.org/issue26/index.html>

MATH WORLD

<http://mathworld.wolfram.com/>

Sobre la película MOEBIUS

<http://www.todocine.com/mov/00216224.htm>

TOPOLOGÍA FICCIÓN Divulgamat

<http://www.divulgamat.net/weborriak/cultura/Paginas/01082006.asp>