

Un estudio del aprendizaje de validación matemática a nivel pre-universitario en relación con distintas interacciones en el aula

En este artículo presentamos los resultados cuantitativos sobre estados y cambios en el aprendizaje de la validación matemática (para los contenidos función de proporcionalidad directa y función cuadrática) en relación con diversas modalidades de enseñanza. En ellas se promovieron diferentes interacciones en el aula: interacciones entre experto y aprendiz (E-A) e interacciones en un grupo de aprendices (G-A). Los datos recabados y procesados, referidos al estado y al cambio producido en el aprendizaje de la validación, son individuales. Esto se ha llevado a cabo en la asignatura Matemática de nivel pre-universitario del Curso de Aprestamiento Universitario (CAU) en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), de la provincia de Buenos Aires.

In this article we present quantitative results on states and changes in the learning of mathematical validation (for the contents function of direct proportionality and quadratic functions) in relation to diverse teaching modalities. In them, different interactions in the classroom were promoted: interactions between expert and apprentice (E-A) and interactions in a group of apprentices (G-A). The obtained and processed data referred to the state and the change produced in the learning of validation, are individual. This study has been carried out in a mathematics pre-university course at the National University of General Sarmiento, Buenos Aires, Argentina.

Introducción

La validación matemática es una actividad reconocida como fundamental en la Matemática científica y su aprendizaje presenta múltiples aristas. Nos proponemos estudiar los resultados en el aprendizaje de la validación en relación con distintas interacciones que se generan en la clase. Más precisamente, estudiamos el estado y los cambios en el aprendizaje de la validación en clases cuya gestión promueve interacciones entre un “experto” y un “aprendiz” o también entre un “grupo de aprendices”.

El contexto en el que se trabaja es el Curso de Aprestamiento Universitario (CAU) de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS) y el aspecto de validación está entonces restringido a los contenidos allí desarrollados, particularmente al tema “funciones numéricas”, relevante tanto en el nivel pre-universitario como en las materias siguientes de Matemática.

Se han implementado modalidades de enseñanza que promueven interacciones muy diferentes entre sí. Bajo estas modalidades estudiamos el estado del aprendizaje de la validación (que llamaremos *estado en validación*) en distintos momentos del curso así como los cambios que se evidencian en el aprendizaje de la validación matemática a lo largo del proceso (que llamaremos *cambios en validación*). Para realizar este estudio, utilizamos un modelo que permite evaluar

estas cuestiones en base a una serie de criterios y mediante un determinado procedimiento. Para obtener información sobre el aprendizaje utilizamos tres evaluaciones de resolución domiciliaria cuyos contenidos fueron: función de proporcionalidad directa, función cuadrática y álgebra básica, este último presente en las tres instancias.

Este artículo se organiza de la siguiente forma:

Marco teórico: se incluyen las cuestiones teóricas referidas a la validación matemática y las interacciones entre sujetos.

Metodología de investigación: se detalla cómo se diseñó la metodología y cómo se recabó información de lo que sucedió en el aula.

Diseño de las evaluaciones: se explica cómo fueron confeccionadas en contenido y formato y se incluyen precisiones sobre el contexto de aplicación (a quiénes fueron aplicadas,

Gustavo Carnelli¹

Marcela Falsetti

Alberto Formica

Mabel Rodríguez

Instituto del Desarrollo Humano.

Universidad Nacional de General Sarmiento

Buenos Aires. Argentina

distribución en el tiempo, condiciones de compromiso de los alumnos, complejidad del contenido, etc.)

Criterios de corrección y procesamiento de datos: se detalla el método con el que se corrigieron las evaluaciones y cómo se obtiene el estado en validación de cada estudiante a partir de los resultados.

Resultados: se incluyen los resultados cuantitativos del estudio realizado referido al estado y a los cambios en el aprendizaje en validación

Consideraciones finales.

Marco teórico

La validación matemática en situación de aprendizaje

En el ámbito de la Matemática científica, la validación es una actividad que se considera fundamental y transversal a cualquier contenido matemático. La validación de un conocimiento va asociada a la “prueba o demostración matemática” que, en su paradigma clásico, se presenta como una sucesión finita de funciones proposicionales (expresiones de lógica cuantificacional) y de proposiciones, encadenadas por inferencias lógicas. Se parte de axiomas, que son los enunciados que se asumen verdaderos sin demostración y se derivan proposiciones que han sido ya deducidas de los axiomas por reglas tautológicas. Los métodos de validación en este paradigma, y por lo tanto de elaboración de las pruebas matemáticas, no son empíricos, ni de observación y dependen de las leyes lógicas que se asuman para el desarrollo de la misma. Por ejemplo, la corriente de creación matemática llamada “intuicionista”, no asume el “principio del tercero excluido” (o bien p es verdadero o bien $\neg p$ lo es) ni las definiciones de objetos que no cumplan propiedades efectivamente verificables. Esto nos sugiere que la validación matemática, al igual que otros tipos de validaciones científicas o tecnológicas, resulta de una serie de tradiciones y “acuerdos” en el seno de una comunidad, en este caso la matemática, sobre lo que es correcto y verdadero, y sobre los medios, lógicos y simbólicos, que permiten aceptarlo. Este carácter “institucional”—nos referimos a la Ciencia Matemática como institución (Godino y Batanero, 1994; Chevallard, 1992)— que tiene la validación le confiere una componente social y comunicativa que se pone en juego al momento de aceptar como matemáticamente válido un cierto conocimiento, pues para ello debe existir una teoría consolidada, comunicada y científicamente aceptada, capaz de explicarlo.

Consideramos que para lograr un aprendizaje significativo en Matemática se debe abordar la validación pues es fundamental en la construcción del conocimiento matemático. Por otro lado, fortalecer este aspecto estimula el aprendizaje autóno-

mo pues el estudiante distingue y discierne aquello que es correcto y válido respecto de lo matemáticamente instituido sin depender del aval de otra persona (el profesor, por ejemplo).

Es posible que durante una situación de aprendizaje un estudiante no esté en condiciones de mostrar que lo que hizo es válido, de acuerdo a lo recién definido, pero sí puede tomar decisiones, seleccionar argumentos y procedimientos que utiliza para elaborar las razones que justifican sus acciones. La validación en el seno de la Matemática es un punto de referencia para lo que llamamos *validación en situación de aprendizaje*, que es el concepto que abordamos en este artículo.

La validación es una actividad que se considera fundamental y transversal a cualquier contenido matemático. La validación de un conocimiento va asociada a la “prueba o demostración matemática”

Entendemos la *validación de un conocimiento matemático en situación de aprendizaje* como el resultado de cualquier proceso del sujeto por el cual éste es capaz de manifestar y sostener en un ámbito social las razones, elaboradas autónomamente, de por qué un enunciado es o no verdadero, un procedimiento es o no correcto o un razonamiento es o no válido. Al manifestar sus razones debe hacer explícitos los sentidos de los objetos matemáticos que manipula y estos sentidos deben corresponderse con los significados aceptados por la Institución Matemática. De ahora en más cuando hablemos de “validación de un conocimiento matemático” nos referimos a este concepto. Para simplificar la redacción, en algunos casos en los que no queremos poner el énfasis en el contenido específico, nos referiremos a esta noción simplemente como “validación” o “validación matemática”.

Para caracterizar el estado en validación de un estudiante analizamos las siguientes cuestiones: a) las acciones del sujeto (qué hace para mostrar que lo que hizo es válido); b) lo que comunica, ya sea en lenguaje simbólico o estándar (cómo explica que lo que hizo es válido, es decir cuáles significantes y sentidos el estudiante utiliza para explicar que lo que hizo es válido); c) el grado de proximidad con lo matemáticamente correcto (es decir, si el sentido asignando por el estudiante se corresponde con el significado matemático). Tomamos de Falsetti, Marino y Rodríguez (2004) un desagregado de la pri-

mera de estas cuestiones en “acciones” (incluimos el listado completo en el apartado sobre criterios de corrección y procesamiento de datos), tales como: Hacer ensayos o intentos / Generalizar inductivamente (observar alguna regularidad) / Enumerar ambigüedades / Anticipar, predecir / Elegir entre varias opciones dadas justificando su elección / Encontrar analogías / Ejemplificar mostrando regularidades / Explicar (dar razones y relaciones) / Formular un razonamiento simple (elaborar las premisas y derivar una conclusión) / Reconocer que las herramientas empleadas no son suficientes para garantizar la validez de un conocimiento (puede no saber cuáles necesita para garantizar la validez), etc. En el mismo trabajo hemos propuesto una tabla de doble entrada en la que pueden verse los cruces posibles entre las tres cuestiones mencionadas de este proceso. La incluimos, para mayor claridad, en el apartado sobre criterios de corrección y procesamiento de datos, mostrando cómo la hemos utilizado.

Para evaluar los aprendizajes referidos a validación es necesario considerar tanto lo que se expresa simbólicamente, que se manifiesta en general en el lenguaje escrito, como así también lo que se explica de esos símbolos, de sus usos, de sus funciones y relaciones. En algunos casos, lo escrito puede estar matemáticamente correcto, pero la forma en que el estudiante manipuló los símbolos no se corresponde con los significados matemáticos que asocia a los mismos, ver análisis de ejemplos en Falsetti, Marino y Rodríguez (2004).

Sobre las interacciones en el aula

Consideramos como *gestión de clase* al conjunto de intervenciones que el docente realiza en la clase con la intencionalidad de orientar y favorecer el aprendizaje de sus estudiantes. Estas intervenciones se refieren a metodología, contenidos, selección de actividades, evaluación, etc., y están reguladas mediante una programación de aula en la que el docente diseña actividades, adecua o selecciona entre ya existentes. Al llevar la propuesta al aula se generan interacciones, pensadas éstas como el intercambio comunicativo, recíproco y voluntario entre quienes participan del acto de enseñar y aprender. Dicho intercambio puede ser de experiencias, interpretaciones, opiniones, conocimientos, actitudes, etc. y conlleva en sí mismo la potencialidad de provocar, entre los sujetos participantes, alguna transformación en lo intelectual o en lo actitudinal.

La atención a las interacciones sobreentiende que damos importancia a la componente social y comunicativa en el aprendizaje de la validación. Por esto es que consideramos un supuesto teórico sobre el aprendizaje del Constructivismo Social que “reconoce que tanto los procesos sociales como la asignación de sentidos individuales juegan un papel central y fundamental en el aprendizaje” (Ernest, 1999). Como parte de la dimensión social se encuentran el aspecto lingüístico, el

cultural y el interpersonal siendo justamente a este último al que nos dedicamos teniendo en cuenta las interacciones en el aula. Los estudios y experimentaciones que se realizan en la presente investigación pueden enmarcarse en la siguiente pregunta que es una de las que define la problemática del Constructivismo Social: “¿cómo dar cuenta, desde el Constructivismo Social, del aprendizaje individual y la construcción de las matemáticas?” (Ernest, 1999) ya que se busca con este trabajo conocer el desempeño de los estudiantes en validación de ciertos contenidos luego de haber vivenciado una situación interpersonal determinada para su aprendizaje, regulada por la gestión de clase. El interés por evaluar los aprendizajes en validación en diferentes contextos interpersonales, y no sólo en contextos sociales de paridad y de grupos de estudiantes, nos sitúa más cerca de la vertiente del Constructivismo Social allegada a la teoría vigotskiana (Pozo, 1994) en la que se asume que el conocimiento individual también es moldeado y potenciado por el contexto social y sus actores, exteriores al sujeto que aprende. En este trabajo nos interesa también saber qué se aprende de validación tanto cuando el contexto está dado por un modelo en el que un experto enseña qué es validar un cierto contenido matemático y cómo se hace, como cuando el contexto es el de un grupo de pares.

Tanto los procesos sociales como la asignación de sentidos individuales juegan un papel central y fundamental en el aprendizaje

Los tipos de interacción que consideramos aquí son *experto-aprendiz* (E-A) y *grupo-aprendiz* (G-A). En *experto-aprendiz*, el profesor, o uno o varios de los alumnos avanzados (los que juegan el papel de “el experto”), toma las decisiones, orientando la acción del individuo o del colectivo, tomando la responsabilidad de la validación y dispensando formas en que se debe validar el conocimiento. Cabe aclarar que esta modalidad no es netamente de tipo expositiva pues en ella se alienta la participación de los estudiantes, aunque siempre en interacción con el experto. En los diseños de clases se utilizan los conceptos de Vigotsky de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) y el de enseñanza recíproca, pues en principio se trabaja con el alumno o grupo de alumnos para realizar un tipo de tarea específica orientando su avance en el conocimiento y luego se asigna una función de “profesor” al alumno más avanzado (rol que puede ir variando a lo largo de la clase) quien debe tomar responsabilidades sobre la forma de validar y de orientar el aprendizaje de otros. El experto manifiesta los siguientes roles:

- **Modélico:** por que manifiesta conductas, formas de pensar un problema y modos de razonar que luego serán imitados o recreados por el sujeto que aprende.
- **Responsable de la validación:** es quien manifiesta expresamente qué es lo correcto o incorrecto y cómo se debe proceder para asegurar que lo hecho es válido.
- **Conductor:** el que responde sobre las dudas o muestra los caminos correctos; es quien posee la fuente del conocimiento válido para la situación planteada.
- **Orientador de la acción.**

En contraposición, en la planificación de la acción didáctica el aprendiz no es responsable de la validación y además no se fomenta el intercambio entre pares. En esta modalidad, también se deja un espacio para la creatividad y las estrategias personales que son supervisadas por el experto quien responde a las dudas directamente.

En cambio, en la interacción *grupo-aprendiz*, el que aprende comparte desde el inicio la responsabilidad de la decisión y de la acción en el grupo de pares del cual forma parte. Las formas de validación surgen de manera consensuada por el grupo y el papel que juega el profesor en la gestión de esta clase es de mediador de discusiones, de organizador del discurso dado por los estudiantes y de las tareas de los distintos grupos, asegurando que no se den casos en que alumnos más avanzados jueguen el papel de expertos para que haya diferencias bien notorias con el tipo de interacción E-A. Se espera que, a partir de esta dinámica, cada individuo progrese en su aprendizaje gracias al vínculo que establece con sus compañeros para lo cual es fundamental garantizar condiciones de paridad de conocimientos entre los integrantes de los grupos. Los estudiantes son organizados en pequeños equipos, o en plenarios (la totalidad de los alumnos de la clase sentados en círculo, intercambiando y defendiendo sus producciones grupales) y, para controlar la aparición de alguno de los actores jugando el papel de “experto”, se evita en un primer momento que los alumnos más avanzados interactúen con los menos avanzados así como el profesor se limita a moderar la dinámica de los grupos y no regula directamente la construcción del conocimiento en los momentos en que las interacciones tienen lugar. En esta modalidad el docente debe realizar la devolución, es decir, pasar al alumno la responsabilidad de construir su conocimiento y decidir cuáles son las acciones que validan el mismo (Brousseau, 1995)³.

Metodología de investigación

La metodología de investigación desarrollada es compleja por cuanto combina métodos corroborativos, de experimentación, comparativos y analíticos.

Para estudiar los estados y cambios logrados en validación cuando en la clase predomina el tipo de interacción E-A o G-A hemos elegido dos contenidos matemáticos del programa de la materia: “función de proporcionalidad directa” y “función cuadrática”, ambos encarados desde la modelización matemática. Para cada tema hemos diseñado las propuestas didácticas de acuerdo con la interacción que quería favorecerse, para un detalle de los diseños de clases ver Carnelli, Falsetti, González y Rodríguez (2005) y Carnelli, Falsetti, Formica y Rodríguez (2006). En la planificación del curso, entre ambos contenidos se intercala el estudio de la “función lineal”, tema durante el cual los cursos siguieron con su metodología habitual.

Los cuatro diseños de clases, E-A y G-A para función de proporcionalidad, E-A y G-A para función cuadrática, se aplicaron en los cursos seleccionados agrupados de la siguiente forma:

- El Grupo 1 (formado por tres cursos) en los que se aplicó la E-A para función de proporcionalidad y la G-A para función cuadrática y
- El Grupo 2 (también formado por tres cursos) en los que se dieron en orden inverso: G-A para función de proporcionalidad y E-A para función cuadrática.

Para cada tema se eligieron los mismos problemas y ejercicios en ambas modalidades de clases aunque las consignas para el trabajo de los alumnos y del profesor fueron diferentes. Se planificaron detalladamente las situaciones a abordar, en qué momentos de la clase, con qué disposición espacial de los actores, etc. Se preparó además un libreto de cuáles deberían ser las intervenciones del docente de acuerdo a conductas previstas o esperadas de los alumnos en relación con la actividad propuesta.

Para obtener información sobre los aprendizajes logrados, se administraron tres evaluaciones sobre los dos temas enseñados durante la experimentación y sobre un tercer tema, Álgebra, enseñado previamente en el curso pero presente en los dos nuevos contenidos, para el que se espera encontrar también avances en validación al término del proceso.

- La evaluación 0 (usamos la notación T0 –de test 0), aplicada antes de la experimentación como evaluación inicial, cuyo contenido estuvo limitado a Álgebra.
- La evaluación 1 (T1), aplicada luego del estudio de función de proporcionalidad, sobre este tema y Álgebra.
- La evaluación 2 (T2), aplicada luego del estudio de la función cuadrática, sobre este tema y Álgebra.

Con el propósito de disponer de información sobre las acciones referidas a la validación que los estudiantes ponen en juego durante los momentos de elaboración en los grupos, diseñamos grillas o tablas de observación para ser utilizadas en cada una de las clases. Pretenden organizar la tarea de seguimiento del trabajo de un grupo a cargo del docente que oficia de observador. Para mayores detalles ver Carnelli, Falsetti, González y Rodríguez (2005).

El siguiente esquema creemos que facilita la lectura del diseño metodológico.

Grupo 1	Grupo 2
Test Álgebra (T0)	
Experimentación Función Prop. Directa Experto - aprendiz	Experimentación Función Prop. Directa Grupo- aprendiz
Test Función Proporcionalidad Directa + Álgebra (T1)	
Experimentación Función Cuadrática Grupo - aprendiz	Experimentación Función Cuadrática Experto - aprendiz
Test Función Cuadrática + Álgebra (T2)	

Diseño de las evaluaciones

Los instrumentos fueron aplicados a la totalidad de los alumnos de los cursos seleccionados, con lo cual cada alumno debía completar cinco entregas (un test sobre la percepción que tienen acerca de las interacciones que favorecen su aprendizaje –que no informamos aquí– junto con el T0, el T1, el T2 y el mismo test de percepción al final). La realización de T0, T1 y T2 fue obligatoria ya que estos trabajos formaron parte de la evaluación del curso. Sin embargo por distintos factores como la deserción de los alumnos, el no cumplimiento con alguna de las entregas, el cambio de profesor en uno de los cursos, etc. reunimos el juego de las cinco entregas sólo para cincuenta y un alumnos.

Las evaluaciones T0, T1 y T2, se confeccionaron con una serie de problemas y ejercicios que puedan ser abordados con lo trabajado en las clases. Uno de los criterios de elaboración fue que se contemplen la mayor cantidad posible de las acciones de validación (el listado completo puede verse en la sección 5) para poder evaluar y tener más y mejores elementos para poder diagnosticar la situación de cada alumno. En cada actividad los estudiantes deben completar tres ítems: resolución, explicación y un tercero, si acaso la entrega del ejercicio es

incompleta. En la resolución hacen el planteo, la manipulación algebraica y expresan claramente el resultado tal como lo presentarían en un examen. En la explicación justifican y explican paso a paso lo realizado, diciendo el porqué del planteo, la resolución y la elección de símbolos tal como lo explicarían oralmente a otra persona. En el último ítem deben indicar las razones por las cuales no pueden resolver la actividad, por ejemplo: falta de claridad del enunciado, no disponibilidad de fórmulas, falta de tiempo, falta de conocimiento, etc. En este ítem se solicita que dejen por escrito todo lo que hayan pensado sobre el ejercicio y su resolución, aunque esté incompleto. El propósito de estas tres partes para cada ejercicio, que resultó sumamente tedioso para algunos de los estudiantes, persigue el objetivo de tener suficiente material para llevar a cabo la evaluación planteada.

Sobre T0 (ver anexo): Los contenidos matemáticos son de Álgebra básica. El primer ejercicio es un planteo coloquial de una ecuación con infinitas soluciones en donde se presentan alternativas de resolución, pensadas por dos personajes ficticios, que el estudiante debe analizar, evaluar y luego aceptar o refutar y explicar la intencionalidad del resolutor en forma argumentada. Hay que realizar también un planteo y resolución propios en los que quedarán explicitadas las diferencias y similitudes con respecto a las resoluciones presentadas. El segundo problema es del campo aritmético en el que se pide probar que la suma de dos números naturales pares es par. El último problema presenta cuatro enunciados, que aparecen formulados con distintos cuantificadores, sobre las posibles soluciones de las ecuaciones cuadráticas para analizar su veracidad y un quinto enunciado para analizarlo como posible negación de alguno de los anteriores. El estudiante debe ejemplificar, contrajemplificar o demostrar en forma general, según corresponda, para justificar la validez o falsedad. Finalmente, se propone sintetizar las condiciones que deben cumplir los coeficientes de una ecuación cuadrática para tener dos soluciones reales distintas.

Sobre el T1 (ver anexo): En la parte que evalúa función de proporcionalidad directa, se pide que expliquen cómo utilizan los datos sobre el fenómeno descrito (llenado de una botella cilíndrica con líquido medido en vasos) para determinar si la variación entre las magnitudes es directamente proporcional. También se formulan preguntas para que, mediante el marco algebraico, interpreten situaciones en lenguaje gráfico y en lenguaje de funciones. Otro de los ejercicios está planteado para que se utilice la propiedad de linealidad respecto al producto por una constante. La parte de Álgebra presente en esta evaluación tiene ejercicios de igual formato y dificultad que los dos primeros descriptos en T0.

Sobre T2 (ver anexo): En la parte que evalúa función cuadrática hay dos actividades. En la primera se piden, en distintos ítems, condiciones sobre algunos de los coeficientes de la fun-

ción cuadrática para que la función cumpla con ciertas características específicas tanto gráficas como numéricas. También se pregunta en dichos casos por la unicidad de los coeficientes. El segundo ejercicio es de optimización, se deben buscar las dimensiones de un rectángulo, tres de cuyos vértices yacen sobre los ejes y el cuarto sobre una recta dada, para maximizar su área. El primer ejercicio de Álgebra de esta evaluación es de contexto aritmético mientras que el segundo plantea una ecuación para decidir sobre cuáles son sus posibles soluciones.

Criterios de corrección y procesamiento de datos

Las tres evaluaciones fueron corregidas siguiendo el modelo cuanti-cualitativo desarrollado en González y Rodríguez (2006) que permite obtener información sobre el estado en validación de los estudiantes. Incluimos a continuación un resumen del mismo.

Resumen del modelo para evaluar el estado en validación de un estudiante

El modelo permite, a partir de valores numéricos, llegar a obtener una caracterización del estado en validación del estudiante que da información sobre cómo simboliza matemáticamente, cómo asigna sentidos a los símbolos y en qué grado de corrección matemática lo hace. El método se inicia analizando la resolución escrita de ejercicios (que atiendan a la validación) conjuntamente con la explicación que el alumno da de su resolución. Dicha explicación evidencia la asignación de sentidos que el estudiante concibe entre los significantes matemáticos que usa y el significado de los conceptos en la ciencia Matemática. Luego de elegidas las actividades a resolver, en nuestro caso T0, T1 y T2, se decide si la explicación exigida será oral o escrita. Como hemos mencionado, en nuestro caso fue escrita. Para determinar el estado en validación de cada estudiante a partir de las evaluaciones se hace un procedimiento complejo, que resumimos a continuación, más detalles en González y Rodríguez (2006). Para cada una de las actividades seleccionadas para las evaluaciones se determina lo que hemos llamado el *umbral de validación*. Para ello hemos tenido en cuenta *acciones* observables que se manifiestan en el aprendizaje de la validación (como por ejemplo, encontrar analogías, explicar, predecir, etc.). Entendemos el *umbral de validación* como las acciones, mínimas, cuya presencia resulta imprescindible en la resolución de la actividad para que ésta se considere matemáticamente correcta. La totalidad de las acciones que hemos tenido en cuenta es la siguiente:

Acciones, tomadas de Falsetti, Marino y Rodríguez (2004):

- A1. Hacer ensayos o intentos
- A2. Usar fórmulas o procedimientos desconectados de la actividad a resolver

- A3. Usar fórmulas o procedimientos conectados a la actividad a resolver
- A4. Generalizar inductivamente (observar alguna regularidad)
- A5. Enumerar ambigüedades
- A6. Ejemplificar
- A7. Anticipar, predecir
- A8. Elegir entre varias opciones dadas justificando su elección.
- A9. Encontrar analogías
- A10. Describir (mostrar pasos y procedimientos)
- A11. Ejemplificar mostrando regularidades
- A12. Imitar (reproducir una estructura de razonamiento o procedimiento)
- A13. Explicar (dar razones y relaciones)
- A14. Comparar (establecer semejanzas y diferencias)
- A15. Justificar por la "autoridad" (libro, docente, par experto)
- A16. Reconocer contradicciones
- A17. Reconocer la adecuación o no del resultado o conclusión respecto del problema o situación de origen.
- A18. Enunciar la negación de una regla, propiedad, etc.
- A19. Identificar condiciones bajo las que ocurren ciertas regularidades ya reconocidas
- A20. Derivar conclusiones con premisas dadas
- A21. Formular un razonamiento simple (elaborar las premisas y derivar una conclusión)
- A22. Reconocer que las herramientas empleadas no son suficientes para garantizar la validez de un conocimiento (puede no saber cuáles necesita para garantizar la validez).

Entendemos el umbral de validación como las acciones, mínimas, cuya presencia resulta imprescindible en la resolución de la actividad para que ésta se considere matemáticamente correcta

A modo de ejemplo, muy sintéticamente, consideremos la actividad "¿Es cierto que si se suman dos números naturales consecutivos siempre se obtiene un número impar? ¿Por qué?". El umbral de validación está dado por la presencia de las acciones A19 y A21. Es decir, si alguna de estas acciones no estuviera presente en la resolución de la actividad, ésta no podrá ser considerada correcta.

Cada actividad de las tres evaluaciones tiene su umbral de validación. En la tabla que sigue se indican, para todas las actividades de las tres evaluaciones, las acciones del umbral mínimo en las celdas que quedan vacías, y que serán llenadas al corregir.

Acción	Presente en el ítem	T0	T1		T2	
		Alg	alg	prop	alg	Cuadr
A17	1)a)		X	X	X	X
	1)b)		X	X	X	X
	4)	X		X	X	X
	4)a)	X	X	X		X
	1)c)	X	X	X	X	
A21	2)		X	X	X	X
	3)	X	X	X		X
	2)	X	X	X	X	
	3)	X		X	X	X
A19	3)c)		X	X	X	X
	2)		X	X	X	X
	3)	X	X	X		X
	2)	X	X	X	X	
	3)	X		X	X	X
A6	3)a.1)		X	X	X	X
	3)a.2)		X	X	X	X
	3)a.3)		X	X	X	X
	3)a.4)		X	X	X	X
	4)	X		X	X	X
	2)b)	X	X		X	X
1)a)	X	X	X	X		
1)a)b)unic	X	X	X	X		
1)b)	X	X	X	X		
	X	X	X	X		
A8 ancho	3)b)		X	X	X	X
A3	1)c)		X	X	X	X
	4)	X	X	X		X
1)b)i)	X	X		X	X	
1)b)ii)	X	X		X	X	
1)b)iii)	X	X		X	X	
2)a)	X	X		X	X	
1)c)	X	X	X	X		
A20	1)a)	X	X		X	X

Tabla 1: “Umbral por evaluación en disposición útil para volcar puntajes”

Pueden verse en González y Rodríguez (2006) ejemplos de la determinación del umbral de varias actividades.

Al corregir cada actividad, el estudiante tendrá un puntaje para cada una de las acciones presentes en el umbral de cada

actividad con un valor entre -10 y 10. Este puntaje se asigna haciendo uso de la siguiente tabla numérica.

<i>Explica</i>	<i>Bien</i>	<i>Regular</i>	<i>Mal</i>	<i>No hace</i>
<i>Escribe</i>				
<i>Bien</i>	10	7	3	-3
<i>Regular</i>	9	5	1	-4
<i>Mal</i>	4	2	-5	-9
<i>No hace</i>	-1	-2	-7	-10

Tabla 2: “tabla numérica usada para puntuar cada resolución en cada acción del umbral”

Los criterios utilizados para la asignación de los valores en cada caso (como la no simetría en la tabla, el rango de valores elegido, etc.) pueden verse en el artículo de referencia.

Al corregir, el llenado de las celdas blancas de la tabla 1 se realiza con valores numéricos de la tabla 2. Luego, estos valores son promediados, obteniéndose un único puntaje, por acción, *por evaluación*. Para facilitar el procesamiento, consideramos la tabla 1 A que adjuntamos a la derecha de la tabla 1

Acción	Presente en el ítem	TO	T1		T2		T1	T2
		Alg	Alg	Prop	Alg	Cuadr		
							Prom	Prom
A17	1)a)		X	X	X	X		
	1)b)		X	X	X	X		
	4)	X		X	X	X		
	4)a)	X	X	X		X		
	1)c)	X	X	X	X			
A21	2)		X	X	X	X		
	3)	X	X	X		X		
	2)	X	X	X	X			
A19	3)c)		X	X	X	X		
	2)		X	X	X	X		
	3)	X	X	X		X		
A6	3)a.1)		X	X	X	X		
	3)a.2)		X	X	X	X		
	3)a.3)		X	X	X	X		
3)a.4)		X	X	X	X			
4)	X		X	X	X			
2)b)	X	X		X	X			

Acción	Presente en el ítem	TO	T1			T2		T1	T2
			Alg	Alg	Prop	Alg	Cuad		
A6	1)a)	X	X	X	X				
	1)a)b)unic	X	X	X	X				
	1)b)	X	X	X	X				
		X	X	X	X				
A8 ancho	3)b)	X	X	X	X				
A3	1)c)		X	X	X	X			
	4)	X	X	X		X			
	1)b)i)	X	X			X	X		
	1)b)ii)	X	X			X	X		
	1)b)iii)	X	X			X	X		
	2)a)	X	X			X	X		
	1)c)	X	X	X	X				
A20	1)a)	X	X			X	X		

Tabla 1

Tabla 1 A

Tabla 1.A: "Puntajes por cada acción de cada evaluación en disposición útil para promediar"

Promediando estos promedios (los valores de cada una de las celdas de la tabla 1.A, por columna) se obtiene finalmente la nota de cada evaluación y su desvío estándar. Este promedio, que puede ser un valor entre -10 y 10, y su desvío se utilizan

para determinar el estado en validación del alumno. Para categorizar dicho estado, definimos distintos niveles que se explican en la tabla 2, pueden verse más detalles en Falsetti, Marino y Rodríguez (2004).

El degradé indica, al tomarse desde el blanco hasta el tono más oscuro, resultados del aprendizaje de la validación desde escasamente logrados hasta acabados. De este modo, el extremo inferior derecho, con un color oscuro, representa un aprendizaje acabado de validación para el contenido evaluado mientras que el blanco es la situación opuesta. Los tonos intermedios, en este esquema, representan las gamas de posibilidades para un estudiante en su aprendizaje de esta noción. Cuando un estudiante escribe y explica regular o bien, consideraremos que está en un *nivel avanzado* de su aprendizaje de validación para el contenido evaluado. Si en cambio, escribe bien o regular pero la explicación que asigna es incorrecta o bien escribe mal, pero explica bien o regular, consideraremos que el estudiante se encuentra en un *nivel intermedio* de su aprendizaje de validación. En otro caso, lo tomaremos como un *nivel inicial*. Para determinar el nivel, se utilizan los promedios y desvíos. Primeramente, el promedio obtenido en la evaluación permite ubicar al estudiante de modo transitorio en un sector de las celdas de la tabla 2, como muestra la tabla 3.

Una vez ubicado en un sector de la celda a partir del promedio, se ajusta la posición utilizando el desvío según el siguiente criterio.

	NIVEL INICIAL (intuiciones, creencias, sospechas, anticipaciones, etc.)		NIVEL INTERMEDIO (primeras concreciones, producción incipiente, incompleta, etc.)		NIVEL TERMINAL (elaboraciones acabadas)	
	Significantes matemáticos (entran en juego los signos, las reglas sintácticas en la escritura matemática)	Explicación (escrita u oral en lengua estándar o lenguaje matemático)	Significantes matemáticos (entran en juego los signos, las reglas sintácticas en la escritura matemática)	Explicación (escrita u oral en lengua estándar o lenguaje matemático)	Significantes matemáticos (entran en juego los signos, las reglas sintácticas en la escritura matemática)	Explicación (escrita u oral en lengua estándar o lenguaje matemático)
Grados de lo matemáticamente correcto	Esta columna, en este nivel inicial, no puede evidenciarse					

Tabla 3: Tabla de doble entrada, extraída de Falsetti, Marino y Rodríguez (2004)

	Nivel inicial		Nivel medio	Nivel avanzado
Características de cada nivel	Escritura o explicación escasa e incorrecta o nula		Registro simbólico regular o correcto y explicación incorrecta o registro simbólico incorrecto pero explicación buena o regular.	Buen manejo tanto de la escritura en símbolos como en la explicación de lo realizado.
Subniveles	Previo $-10 \leq \text{Prom}^4 \leq -5$	Bajo $-5 \leq \text{Prom} \leq 0$	Medio $0 \leq \text{Prom} \leq 5$	Avanzado $5 \leq \text{Prom} \leq 10$
Grados de lo matemáticamente correcto				
Mal	Estar ubicado en esta columna es suficiente información respecto del estado en validación por ello no se hace distinción de rangos.	[-5; -4)	[0; 1)	[5; 6)
Regular		[-4; -3)	[1; 3)	[6; 8)
Aceptable		[-3; -1)	[3; 4)	[8; 9)
Bueno		[-1; 0)	[4; 5)	[9; 10)

Tabla 4: “Tabla de ubicación según el promedio obtenido en la prueba”.

Rango para el desvío	Interpretación: la posición dada por el promedio
[0 ; 4)	es confiable; su ubicación final es la misma celda.
[4 ; 6)	decae en un grado
Más de 6	decae en un subnivel manteniendo el grado

Tabla 5: Criterio para ajustar la posición que determina el estado en validación de un estudiante, en función del desvío obtenido en la prueba

De este modo, podemos determinar para cada estudiante el estado en validación en el que se encuentra en función de los resultados de cada evaluación.

Resultados

Diversos análisis

En este apartado hacemos diversos análisis del estado en validación que surgen de agrupar de diferentes maneras los datos consignados en la siguiente tabla. En ella se señalan las moda-

lidades de enseñanza aplicadas en cada grupo en los contenidos evaluados por cada evaluación.

	T1	T2
GR1	E-A	G-A
GR2	G-A	E-A

En el análisis realizado consideramos que un estudiante presenta un “estado satisfactorio” en su aprendizaje de validación, si ha quedado ubicado en el subnivel “Medio” o “Avanzado” de la escala de la tabla 3.

De los 51 alumnos, 24 de ellos son los que hicieron la modalidad E-A en proporcionalidad y G-A en cuadrática (el grupo 1) y los 27 restantes tuvieron las modalidades invertidas (el grupo 2).

En cada análisis mostramos, resaltando en la tabla, de qué manera se agruparon los datos de la misma de acuerdo a la mirada elegida.

Distintas metodologías aplicadas a un mismo contenido

	T1	T2
GR1	E-A	G-A
GR2	G-A	E-A

En las siguientes tablas, consignamos las cantidades de estudiantes que presentan un estado satisfactorio luego de aplicada la evaluación T1:

GR1	E-A en Proporcionalidad	T1
		15/24 (63 %)

GR2	G-A en Proporcionalidad	T1
		15/27 (56 %)

Para el contenido “proporcionalidad”, si bien los datos indican que hubo mayor aprendizaje en acciones de validación bajo la modalidad E-A que bajo la G-A, un test de diferencia de proporciones indica que esta diferencia no es significativa a niveles bajos de significación (0.05 ó 0.1). De todos modos informamos que el nivel p que surge del test es $p = 0.41$, con lo que puede interpretarse que con una probabilidad de error del 0.41 se rechaza la hipótesis nula, H_0 : “la proporción de estudiantes con estado satisfactorio en validación para el tema “proporcionalidad” es la misma tanto si la modalidad de enseñanza fue E-A ó G-A” (debe tenerse en cuenta que la hipótesis alternativa que se planteó es H_1 : “la proporción de estudiantes con estado satisfactorio en validación para el tema “proporcionalidad” es mayor bajo la modalidad de enseñanza E-A que bajo G-A”).

En el caso del contenido “función cuadrática”, los resultados se dieron en sentido inverso. El análisis para este contenido arroja los siguientes datos:

GR1	G-A en Cuadrática	T2
		8/24 (33%)

GR2	E-A en Cuadrática	T2
		5/27 (19%)

En este caso, los datos indican que un mayor porcentaje de alumnos con estado satisfactorio en validación surgen de la modalidad G-A (33% con G-A y 19% con E-A). El test de diferencia de proporciones indica que esta diferencia es significativa al nivel $p = 0,13$ (las hipótesis en este test son: H_0 : “la proporción de estudiantes con estado satisfactorio en validación para el tema “función cuadrática” es la misma tanto si la modalidad de enseñanza fue E-A ó G-A” y H_1 : “la proporción de estudiantes con estado satisfactorio en validación para el tema “función cuadrática” es mayor bajo la modalidad de enseñanza G-A que bajo E-A”).

El contenido transversal en cada grupo: Álgebra

	T1	T2
GR1	E-A	G-A
GR2	G-A	E-A

Debido a la exigencia de las entregas (T0, T1, T2 y los dos tests de percepción) que se dio en el contexto de un curso en el que los estudiantes deben entregar otras producciones como parte de la evaluación y seguimiento que realizan los docentes, se manifestó hacia el final de la experiencia cierto agotamiento de los alumnos. Esta sensación observada se profundizó al momento de corregir el T2 y quedó expresada en la no resolución de algunos ejercicios o en algunas entregas que parecieron hechas para cumplir con el trabajo. Por estos motivos, para el análisis que sigue, que requiere estudiar cambios comparando situaciones iniciales y posteriores, hemos decidido no incluir los resultados del T2.

Más precisamente, nos proponemos estudiar el estado de los aprendizajes en validación y los cambios en dicho estado a lo largo del proceso. Para estudiar los cambios, comparamos los resultados del T0 y del T1, para Álgebra, contenido común a todas las evaluaciones.

En este análisis, entendemos por “evolución” que el nivel obtenido por el estudiante en el T1 sea mayor que el del T0 o que, si ambos niveles son iguales (pero no “Previo”, según tabla 3), el grado de lo matemáticamente correcto es mayor en el T1. Las tablas que siguen muestran la cantidad de alumnos (en

porcentaje) que han quedado ubicados en un nivel “satisfactorio” y los que han mostrado “evolución”.

Grupo 1	T0	T1
Estado “satisfactorio”	25 %	46 %
Evolución	58 %	

Grupo 2	T0	T1
Estado “satisfactorio”	15 %	48 %
Evolución	56 %	

Si en ambos grupos la cantidad de estudiantes que muestra “evolución” es pareja y la cantidad que muestra estado “satisfactorio” final también, pero el estado inicial es sensiblemente distinto, esto podría interpretarse como que en el Grupo 2 (que tuvo G-A en proporcionalidad) se afianzaron aprendizajes de mayor calidad en validación para el contenido Álgebra que en Grupo 1 (que tuvo E-A en proporcionalidad).

La metodología E-A en ambos grupos

	T1	T2
GR1	E-A	G-A
GR2	G-A	E-A

En Carnelli, Falsetti, Formica, González y Rodríguez (2006), hemos verificado que los alumnos perciben que las interacciones con un experto favorecen mayormente su aprendizaje que las interacciones que se dan con un grupo. Queremos ver ahora si esta percepción se manifiesta en los aprendizajes en validación. Para ello, debemos ubicarnos en los dos grupos cuando predominó la interacción E-A; esto es, en el Grupo 1 en “función proporcional” (con el T1) y en el Grupo 2 en “función cuadrática” (con el T2). Las tablas siguientes muestran las cantidades de alumnos (en porcentaje) que resultaron en un nivel “aceptable” en las evaluaciones mencionadas, acompañadas de los valores obtenidos en el T0 para conocer la situación de partida.

	GR 1 – Estado Satisfactorio
T1	63%
(T0)	(25%)

	GR 2 – Estado Satisfactorio
T2	19%
(T0)	(15%)

Los datos mostrados en la tabla anterior no nos permiten afirmar que haya un aprendizaje significativo en validación cuando predomina la interacción E-A.

Análisis de los resultados luego de las experiencias con ambas interacciones

Nos interesó estudiar los aprendizajes bajo una metodología que combina ambas interacciones, que en nuestro caso, es haber tenido las metodologías E-A y G-A. Para poder estudiar esto, debemos hacer una observación del proceso una vez terminado.

En este sentido, hemos definido cómo analizar los cambios en validación a partir de los resultados de la aplicación del método para evaluar los estados en validación. Para ello hemos determinado, para cada alumno, una “tendencia” en su aprendizaje referido a validación en los temas en cuestión a partir de plasmar una disposición de los cruces entre las evaluaciones T0, T1 y T2 y los estados obtenidos en cada una de ellas. De este modo, dispusimos de tres pares ordenados: (T0; estado en T0), (T1; estado en T1) y (T2; estado en T2) a los que asignamos valores numéricos en cada coordenada y, a partir de ellos pudimos establecer, para cada estudiante, la pendiente de la recta de ajuste de dichos pares ordenados. Pensando en el orden cronológico en que fueron tomadas las evaluaciones, decidimos asignar los valores 0, 1 y 2 a las primeras coordenadas T0, T1 y T2 respectivamente. Con respecto a las segundas coordenadas (estado del alumno en cada evaluación) asignamos valores numéricos a los subniveles Previo, Bajo, Medio y Avanzado, de la siguiente forma: -1 al estado “Previo”, 0 al “Bajo”, 1 al “Medio” y 2 al “Avanzado”. Según el valor obtenido para la pendiente de la recta de ajuste y, en los casos en que este valor dio cero, considerando la información dada por el grado de lo *matemáticamente correcto* del estado, establecimos si hubo cambios en el aprendizaje de la validación del alumno. Así, para este análisis, se consideraron los casos en que la pendiente dio positiva, como correspondientes a estudiantes que *evolucionaron* en su aprendizaje. Además de ello, cuando la pendiente dio cero (lo cual indicaría *igualdad de nivel* en T0 y T2), se tuvo en cuenta el subnivel correspondiente al grado de lo matemáticamente correcto que surge de la tabla 3, considerándose también como casos de progreso a aquellos en los que el grado obtenido en la evaluación T2 superó al de la T0. En estas condiciones, identificando con las letras A al *subnivel Avanzado*, M al *Medio*, B al *Bajo* y P al *Previo*, se observó el grado de lo matemáticamente

te correcto a los alumnos que presentaron las siguientes combinaciones: APA, ABA, AMA, AAA, MPM, MBM, MMM, MAM, BPB, BBB, BMB, BAB, donde cada terna indica el estado que presentó el alumno en las evaluaciones T0, T1 y T2 respectivamente (por ejemplo, un alumno al que se le asocia la terna MPM es un alumno que registró subniveles Medio en T0, Previo en T1 y Medio en T2). Entre las ternas con igual valoración de estado en la primera y tercera posición, no hemos considerado aquellas que corresponden a estudiantes que presentaron estado Previo en las evaluaciones T0 y T2, o sea, no consideramos las ternas de la forma PXP, por que no resulta evidente que el alumno haya tenido evolución favorable en su aprendizaje.

Según el criterio descrito, 25 de los 51 estudiantes mostraron *evolución* a lo largo del proceso. Estos resultados no nos permiten afirmar en forma contundente que una metodología que combina ambas modalidades favorezca el aprendizaje en validación. Sin embargo, creemos que habilitan a la utilización de esta metodología para la gestión de la clase, así como también avanzar en estudios sobre su implementación.

Consideraciones finales

Nos ha resultado muy costoso llevar adelante este estudio por la complejidad de la metodología, de los instrumentos y su evaluación. También somos conscientes de que los resultados cuantitativos obtenidos son relativos por razones de distintos tipos como el tamaño de la muestra, el hecho de aislar variables del contexto que sin duda influyen en el aprendizaje, por mencionar algunas. De todos modos nos ha interesado mucho desarrollar el trabajo pues creemos que el aporte cuantitativo es un elemento importante a tener en cuenta en las investigaciones educativas y no encontramos en la bibliografía referida a los aprendizajes en validación trabajos de este tipo.

Consideramos que algunas de las razones por las que no hemos tenido resultados contundentes en los análisis pueden ser: la dificultad que tuvimos en tener el material completo de los estudiantes; la poca práctica previa de los alumnos en el trabajo en grupo con las características del G-A, etc. Tal vez habría sido conveniente que el estudiante aprendiera a interactuar en ese "medio" antes de aprender a validar en él. Es probable que a un estudiante le resulte más simple formar parte de una clase E-A que de una G-A dado que el trabajo en grupo es más exigente pues se espera de él una participación activa. También ocurre que el trabajo en grupo demanda más tiempo que en este caso no pudimos dispensar por estar insertos en una materia con su programa y cronograma definido para todos los cursos. Cabe mencionar que los estudiantes no han tenido experiencia previa en completar evaluacio-

nes del tipo de la administrada. Sin embargo empezamos a tener evidencias comunicables que nos permiten esbozar algunas afirmaciones y poner en dudas ciertas cuestiones, originadas tanto en estudiantes como en docentes, que a veces están presentes en las clases o en los textos. Para ejemplificar esto último podemos discutir sobre los beneficios del trabajo en grupo. El trabajo en grupo ha sido estudiado por diversos autores, se cuenta con clasificaciones de los tipos de trabajo posibles, hay estudios que informan sobre el comportamiento de los estudiantes en clases donde se pone en práctica esta modalidad, etc. sin embargo en general no hay informes sobre lo que aprende el estudiante en términos de resultados para un contenido dado sino que más bien están centrados en el ambiente de la clase. Hemos visto en las clases de tipo G-A desempeños y participaciones valiosas, con cuestiones matemáticas puestas en juego y defendidas por los estudiantes. Sin embargo, estos aprendizajes dados en el seno del proceso no han sido tan contundentes como para ser captados por el método cuantitativo presentado. Son evidentes las ventajas del trabajo en grupo: aspectos actitudinales de mayor compromiso, la responsabilidad del aprendizaje es compartida, las clases son ricas en interacciones, intervenciones, etc. Tal vez para que el aprendizaje en términos de resultados sea mayor, debiera destinarse más cantidad de tiempo, lo que haría que el método no sea aplicable en cualquier tipo de curso. Queda pendiente avanzar en estudios en este sentido.

Con los contenidos de menor complejidad el experto podría funcionar de modo equivalente al trabajo en grupos, pero en contenidos de mayor complejidad se han manifestado mejores resultados cuando el estudiante aprendió en grupo de pares

A pesar de que el E-A es el favorito de los alumnos, los resultados no están acordes con esa percepción. Esto obliga a trabajar enfáticamente sobre el contrato didáctico con los estudiantes, evidenciando las posiciones de uno y otro y manifestando las razones por las cuales el docente tal vez no lleve adelante una enseñanza que promueva interacciones de tipo E-A en la totalidad del curso. En base a los resultados numéricos podríamos conjeturar que con los contenidos de menor complejidad el experto podría funcionar de modo equivalente al trabajo en grupos, pero en contenidos de mayor complejidad se han manifestado mejores resultados cuando el estudiante aprendió en grupo de pares.

Nos queda clara también la dificultad de estudiar los cambios en el aprendizaje de la validación dado que dichos cambios se darán en el tiempo y esto obliga a evaluar, para comparar, distintos contenidos matemáticos. Tenemos presente que el aprendizaje de la validación siempre está sujeto a un contenido matemático fijado. Tal es así que cualquiera de las acciones que deben estar presentes en el proceso de validación puede ser más simple o más complejo en función del contenido particular que se trabaje.

Consideramos que sería valioso profundizar en estos aspectos de índole cualitativa que han quedado pendientes así como volver a aplicar los instrumentos y los métodos en otros grupos de estudiantes para completar el estudio. ■

Agradecimientos: Queremos agradecer a la Lic. Patricia Barreiro por su generosa disposición a llevar a cabo las ingenierías didácticas en su curso del CAU y al Prof. Víctor González por su dedicada colaboración en la corrección del trabajo de campo y por sus aportes en las discusiones teóricas.

NOTAS

- 1 gcell@ungs.edu.ar, mfalset@ungs.edu.ar, aformica@ungs.edu.ar, mrodri@ungs.edu.ar
- 2 How to give a social constructivist account of the individual's learning and construction of mathematics?
- 3 Se entiende por "devolución" a la actividad mediante la cual el docente logra que el problema o situación planteados se convier-

ta en un problema del alumno para que éste no actúe como consecuencia de la intencionalidad didáctica del maestro sino que asuma la responsabilidad de la construcción de su propio conocimiento.

- 4 Con Prom nos referimos al promedio obtenido en la prueba

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BROUSSEAU, G. (1995): *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publisher.
- CARNELLI, G., FALSETTI, M., FORMICA, A., GONZÁLEZ, V. Y RODRÍGUEZ, M. (2006): "Sobre la percepción de interacciones que favorecen el aprendizaje en Matemática: análisis de una experiencia". Documento de trabajo, UNGS.
- CARNELLI, G., FALSETTI, M., FORMICA, A. Y RODRÍGUEZ, M. (2006): "Validación matemática en clases que promueven distintos tipos de interacciones". Memorias del VIII Simposio de Educación Matemática, Buenos Aires. Formato CD, ISBN: 10: 987-20239-4-8 / ISBN: 13: 978-987-20239-4-2.
- CARNELLI, G., FALSETTI, M., GONZÁLEZ, V. Y RODRÍGUEZ, M. (2005): "Una ingeniería didáctica para el estudio de validación matemática", Memorias del VII Simposio de Educación Matemática, Buenos Aires. Formato CD, ISBN 987-20239-3-X.
- CHEVALLARD, Y. (1992): "Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique". Recherches en Didactique des Mathématiques, 12(1), 73-111.
- ERNEST, P. (1999): "What is Social Constructivism in the Psychology of Mathematics Education?". POME Journal(12). Disponible en <http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome12/article8.htm>
- FALSETTI, M., MARINO, T. Y RODRÍGUEZ, M. (2004): "Validación en Matemática en situación de aprendizaje" Actas del VI Simposio de Educación Matemática, Buenos Aires. Formato CD, ISBN 987-20239-2-1
- GODINO, J. Y BATANERO, C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14, n° 3: 325-355.
- GONZÁLEZ, V. Y RODRÍGUEZ, M. (2006): "Un modelo para evaluar la validación matemática". Educación Matemática, Vol. 18, núm. 3, pp. 103-124. México.
- POZO J. I. (1994): *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Editorial Morata. Madrid.

ANEXO

T0

Apellido y nombre:.....DNI:.....Comisión:.....

Para cada uno de los ejercicios se pide:

(R1) Resuelvelo: Indicá acá cuál sería tu resolución (como si fuera un ejercicio de un parcial, acá va lo que entregarías como resolución con las justificaciones que consideras necesarias). Hacerlo en otra hoja y poné la indicación R1.

(E1) Explicalo. Tratá de explicar lo que hiciste para resolverlo y por qué lo hiciste pensando en que se lo estás explicando a un compañero que no entiende. Hacerlo en otra hoja y poné la indicación E1.

(N1) Si no te salió el ejercicio,

- a) Oor favor indicá las razones: si no te resulta claro el enunciado, si hay alguna fórmula que necesitás y no recordás, etc.
- b) Por favor, escribí lo que pensaste aunque sepas que no es la resolución de ejercicio.

Hacerlo en otra hoja y poné la indicación N1.

1) Un mago realiza el siguiente truco: te dice “pensá un número, sumale 2, multiplicá al resultado por tu número, restale tu número y restale el cuadrado de tu número. Obtendrás el mismo número pensado”. Pensando si contratar a este mago o no, se les preguntó a María y a José si el truco del mago funciona cualquiera sea el número pensado. María dice que es verdad siempre y justificó diciendo: “yo pensé $1/5$ y la cuenta $1/5 - 2 \cdot 1/5 - 1/5 - 1/5^2$ me da $1/5$ ”. José no supo qué responder, entonces revisó la cuenta de María y dijo: “la cuenta que escribiste no da $1/5$, da $9/25$, así que el truco del mago es falso”.

- a) ¿Es correcto el razonamiento de María?
- b) ¿Es correcto el razonamiento de José?
- c) Resolvé el problema como si te hubieran preguntado a vos.

2) Si tenemos dos números naturales pares cualesquiera, ¿podemos asegurar que su suma siempre resulta un número par? Justificar.

3) a) Para cada una de los enunciados del cuadro, indicar cuál es verdadero y cuál es falso justificando adecuadamente.

	¿V ó F?	Justificación (si no cabe acá, seguí en otra hoja)
a.1) <i>Cualquier ecuación cuadrática tiene un conjunto solución formado por dos números reales distintos</i>		
a.2) <i>Existe alguna ecuación cuadrática que no tiene un conjunto solución formado por dos números reales distintos</i>		
a.3) <i>Toda ecuación cuadrática tiene un conjunto solución formado por dos números reales iguales</i>		
a.4) <i>Existe ecuaciones cuadráticas que tienen un conjunto solución formado por dos números reales iguales</i>		

b) Dado el enunciado “Cualquier ecuación cuadrática tiene un conjunto solución formado por dos números reales distintos”, indicar cuál/cuáles de los enunciados anteriores (de la tabla) es/son su negación.

c) Decir qué condición deben cumplir los coeficientes a , b y c de una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ para que su conjunto solución esté formado por dos números reales distintos

T1 Apellido y nombre:.....DNI:.....Comisión:.....

Para cada uno de los ejercicios se pide:

(R1) Resuelvelo: Indicá acá cuál sería tu resolución (como si fuera un ejercicio de un parcial, acá va lo que entregarías como resolución con las justificaciones que consideras necesarias). Hacelo en otra hoja y poné la indicación R1.

(E1) Explicalo. Tratá de explicar lo que hiciste para resolverlo y por qué lo hiciste pensando en que se lo estás explicando a un compañero que no entiende. Hacelo en otra hoja y poné la indicación E1.

(N1) Si no te salió el ejercicio,

- a) Por favor indicá las razones: si no te resulta claro el enunciado, si hay alguna fórmula que necesitás y no recordás, etc.
- b) Por favor, escribí lo que pensaste aunque sepas que no es la resolución de ejercicio.

Hacelo en otra hoja y poné la indicación N1.

1.- Para un recipiente cilíndrico se sabe que por cada dos vasitos de agua la altura asciende 10 cm. Responder:

- a) Las magnitudes *cantidad de vasitos* y *altura del líquido*, ¿son directamente proporcionales? ¿Por qué?
- b) Considerando los pares $(x;y)$, donde x es la cantidad de vasitos e y es la altura del líquido en el recipiente, decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente.
 - i) Al echar medio vaso de agua, la altura del agua en el recipiente asciende 2,5 cm.
 - ii) El par ordenado $(7;35)$ pertenece al gráfico que representa esta situación.
 - iii) Al valor 30 de la variable independiente le corresponde el valor 150 de la variable dependiente.

2.- Responder cada una de las siguientes preguntas justificando adecuadamente.

- a) En una relación de proporcionalidad directa en la que a le corresponde b , ¿se puede asegurar que siempre a le corresponde b ?
- b) ¿Existen relaciones que no son de proporcionalidad directa?

3.- ¿Es cierto que si se suman dos números naturales consecutivos la suma siempre da un número impar? Justificar adecuadamente.

4.- Un mago le hace a Mirta el siguiente truco “pensá un número cualquiera. El cubo de tu número más el duplo de tu número es igual al triple del cuadrado de tu número”. Mirta dice que pensó el 1 y que el truco le funcionó. Ella está dispuesta a invertir 10000\$ en hacer una gira con él mostrando su magia. ¿Qué consejo le darías a Mirta?

T2 Apellido y nombre:.....DNI:.....Comisión:.....

Para cada uno de los ejercicios se pide:

(R3) Resolución: Indicá acá cuál sería tu resolución (como si fuera un ejercicio de un parcial, acá va lo que entregarías como resolución con las justificaciones que consideras necesarias). Hazelo en otra hoja y poné la indicación R1.

(E3) Explicación. Tratá de explicar lo que hiciste para resolverlo y por qué lo hiciste pensando en que se lo estás explicando a un compañero que no entiende. Hazelo en otra hoja y poné la indicación E1.

(N3) Si no te salió el ejercicio,

a) Por favor indicá las razones: si no te resulta claro el enunciado, si hay alguna fórmula que necesitás y no recordás, etc.

b) Por favor, escribí lo que pensaste aunque sepas que no es la resolución de ejercicio.

Hazelo en otra hoja y poné la indicación N1.

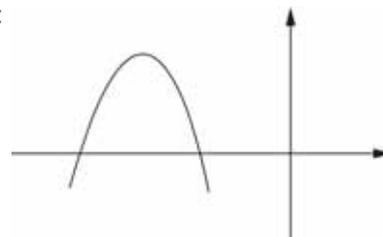
1.- Dada $f(x) = -3x^2 + bx + c$, determinar si existen valores para b y c de forma que:

a) el gráfico de la cuadrática sea de la siguiente forma

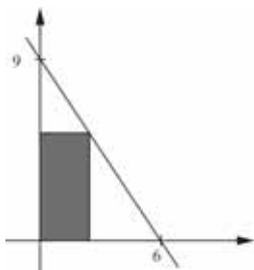
b) $f(0) = f(-4)$

c) Vértice = (1,4) y pasa por (2,6)

En cada caso, los valores b y c , ¿son únicos?



2.- Un rectángulo se apoya sobre los ejes y toca el gráfico de una función lineal como lo muestra la figura. ¿De qué dimensiones debe tomarse un rectángulo que respete esta disposición para que el área del mismo sea máxima?



3.- ¿Es cierto que si se multiplica un número par por un impar siempre se obtiene un número par? Justificar adecuadamente.

4.- Dada la ecuación

$$-3 \cdot \left(x + \frac{1}{2} \right) + \frac{x}{2} = - \left(x + \frac{5}{2} \right) - \frac{3}{2}x + 1$$

decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando adecuadamente.

a) $x=2$ es el único valor que satisface la ecuación.

b) La ecuación tiene más de una solución

c) La ecuación tiene por *conjunto solución* a los números enteros.