

## Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los Números Naturales

*En los planes de formación inicial del profesor de matemáticas de Secundaria actuales se considera la planificación como una competencia principal que debe desarrollarse. Presentamos el Análisis de Contenido como un procedimiento que se ocupa de analizar y organizar los diferentes significados que admiten las matemáticas escolares, de cara a la planificación de unidades didácticas. El profesor en formación desarrolla mediante este análisis diversas capacidades necesarias para la planificación. Ejemplificamos el procedimiento y sus fases mediante el tema Sistema de los Números Naturales.*

*In the current mathematics secondary teacher training syllabi, planning is considered as a main competence that should be emphasized. We introduce content analysis as a procedure for analyzing and organizing the different school mathematics meanings that should be taken into account to plan didactical units. We use the system of whole numbers for exemplifying the phases of this procedure.*

**L**a Ley Orgánica 2/2006 de Educación establece, en su artículo 94, que para impartir las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria y de bachillerato será necesario tener el título de Licenciado, Ingeniero o Arquitecto, además de una formación pedagógica y didáctica de nivel de Postgrado. En el marco de la actual reforma universitaria basada en la convergencia europea, se presentan como finalidades prioritarias la elaboración de nuevas titulaciones, actualización de su orientación profesional y vinculación con el mercado de trabajo.

La noción de competencia resulta central en la nueva orientación de las titulaciones:

El plan de estudios conducente a la obtención de un título debe tener en el centro de sus objetivos la adquisición de competencias por parte de los estudiantes, ampliando por tanto (aunque no excluyendo) el tradicional enfoque basado principalmente en contenidos y horas lectivas. Se deberá hacer énfasis en los métodos de aprendizaje de dichas competencias, así como en los procedimientos para evaluar su adquisición. (...) Se utiliza el término competencia exclusivamente en su acepción académica, y no en su acepción de atribución profesional. Las competencias son una combinación de conocimientos, habilidades (intelectuales, manuales, sociales, etc.), actitudes y valores que capacitarán a un titulado para afrontar con garantías la resolución de problemas o la intervención en un asunto en un contexto académico, profesional o social determinado. (MEC, 2005; p. 14).

En el contexto actual de nuevas estructuras para planes de estudios universitarios, la norma establece la formación inicial del profesorado de Secundaria mediante un título. Esta formación debe centrarse en la adquisición y desarrollo de unas competencias generales y específicas, de carácter profesional propio (Ley Orgánica 2/2006).

El Ministerio de Educación y Ciencia resalta la aproximación a la formación basada en la noción de competencia en un borrador de directrices para los títulos de *Master* que organicen la formación inicial del profesorado de Secundaria (Consejo de Universidades, 2006). La caracterización de las competencias y del conocimiento profesional del profesor de Educación Secundaria ha traspasado el ámbito de la reflexión teórica, limitada a especialistas, para ocupar a los responsables de la política educativa, gestores de centros de formación superior y expertos universitarios. El marco de competencias parece especialmente adecuado para abordar la formación inicial del profesorado de Secundaria mediante titulaciones de postgrado, ya que la docencia es un campo profesional

---

**Luis Rico**  
**Antonio Marín**  
**José Luis Lupiáñez**  
**Pedro Gómez**  
*Universidad de Granada*

prioritario para los licenciados en Ciencias y Humanidades y de otras titulaciones, que corresponden a campos y materias que se estudian en Educación Secundaria.

## Competencias del profesor de matemáticas

Son varios los equipos y grupos de trabajo que, recientemente, vienen estudiando las competencias básicas para estructurar planes de formación, inicial y permanente del profesorado (Oser, Achtenhagen & Renold, 2006; TEDS-M, 2007).

En efecto, la determinación de las competencias asociadas a cada una de las titulaciones universitarias pone el acento en la preparación para el ejercicio de la actividad profesional y su vinculación a la formación universitaria. Distintos documentos, elaborados en España por instituciones o grupos de estudio, han sintetizado las competencias del profesor, necesarias para su desempeño como profesionales autónomos y críticos (Pérez, 2005). Entre esas propuestas destacan competencias relativas a la revisión de significados de los conceptos y a su tratamiento. La propuesta de Directrices para el Máster de Profesor en Secundaria (Consejo de Universidades, 2006) señala, entre las competencias propias de estos profesores, las siguientes:

Conocer los contenidos curriculares de las materias correspondientes a la especialidad cursada, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. (...)

Ser capaz de planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro. (p. 3).

Estos y otros documentos contemplan similares tipos de competencias en el modelo básico de formación y actualización docente para el profesorado de Secundaria. Tales trabajos han tenido especial incidencia en las reflexiones acerca de la formación inicial de profesores de matemáticas de Secundaria. En el momento actual, la formación del profesorado de Educación Secundaria requiere incorporar reflexión teórica e instrumentos técnicos que promuevan la competencia en el proceso de planificación de la enseñanza y aprendizaje en el aula del futuro profesor (Comisión Educación CEMAT, 2004; Campillo, 2004; Rico, 2005).

## Planificación docente

La planificación es una de las competencias profesionales clave para el profesor y que está menos desarrollada en los planes de formación del profesorado. Resulta especialmente

importante para el profesorado de matemáticas, dadas las dificultades inherentes al aprendizaje y enseñanza de esta materia. En este documento se precisan algunas capacidades que contribuyen al desarrollo de esta competencia.

La información que aportan a la planificación docente los currículos de Educación Secundaria establecidos y las secuenciaciones de contenidos que los boletines oficiales publican, se muestran claramente insuficientes para llegar al nivel del aula y decidir acerca de qué debe aprender un alumno o alumna de secundaria en cada tema y cómo hacerlo operativo cada día. Los libros de texto que publican las editoriales y su complemento en forma de libro del profesor ocupan el espacio intermedio entre la secuenciación general del Boletín Oficial del Estado y la planificación diaria de actividades que el profesor debe realizar, ya que responden a preguntas como ¿qué contenidos trabajo con mis alumnos? ¿qué expectativas tengo respecto a su aprendizaje? ¿cómo selecciono y estructuro las clases para que el alumno alcance las expectativas previstas? Sin embargo los libros de texto se redactan para perfiles de alumnos y profesores que no coinciden con la realidad de cada centro y aula. La información que contienen, las estrategias didácticas con las que organizan los contenidos, la selección de tareas que realizan y la limitación de recursos que suponen, obligan, cada vez más, a que el profesor utilice el libro de texto como un apoyo a su trabajo en el aula y no como una guía de actuación para seguir de modo prescriptivo.

*La planificación es una de las competencias profesionales clave para el profesor y que está menos desarrollada en los planes de formación del profesorado.*

La normativa educativa señala la obligatoriedad de elaborar documentos curriculares específicos para cada centro, que contengan instrumentos para tomar decisiones y propuestas para ajustar el contenido oficial del currículo a la realidad del alumnado de cada centro. Igualmente, enfatiza la necesidad de responder a la diversidad del alumnado en sus condiciones de vida, expectativas y conocimientos con variedad de actividades. Estas consideraciones, refuerzan la importancia del trabajo de programación y selección de tareas en la labor del profesor. La planificación, como competencia clave del profesor de matemáticas, demanda el desarrollo de capacidades específicas para identificar, organizar, seleccionar y priorizar los significados de los conceptos matemáticos mediante el análisis cuidadoso de su contenido, análisis necesario para establecer las expectativas de aprendizaje, previo al diseño de tareas y necesario para la elección de secuencias de actividades.

## Matemáticas escolares

Para la formación inicial del profesorado de matemáticas de Secundaria consideramos prioritario el desarrollo de un conocimiento especializado sobre matemáticas escolares, es decir, sobre las matemáticas consideradas como objeto de enseñanza y aprendizaje. Nuestro planteamiento sobre matemáticas escolares postula que ideas, estructuras y conceptos matemáticos se han generado y constituido como herramientas para organizar los fenómenos de los mundos natural, mental y social. Los términos y conceptos matemáticos que se usan y presentan en el sistema educativo corresponden a nociones socialmente útiles y culturalmente relevantes, que se transmiten para la formación de todos los ciudadanos. El sistema educativo organiza y estructura dichos conceptos e ideas a los efectos de su enseñanza, y contribuye a que los ciudadanos lleven a cabo su aprendizaje en el uso de tales herramientas en contexto.

Las matemáticas son un modelo paradigmático de proporcionar significado a relaciones y expresiones abstractas, que no corresponden a objetos o propiedades físicas, pero que satisfacen un marco de experiencias estructuradas, relacionadas con las acciones de clasificar, contar, ordenar, situar, representar, medir, expresar armonía, buscar relaciones y regularidades, jugar y explicar (Devlin, 1994; Steen, 1990).

*Para la formación inicial del profesorado de matemáticas de Secundaria consideramos prioritario el desarrollo de un conocimiento especializado sobre matemáticas escolares, es decir, sobre las matemáticas consideradas como objeto de enseñanza y aprendizaje.*

Las conexiones internas en los sistemas de conceptos matemáticos los constituyen en estructuras; de este modo proporcionan referencia –valor veritativo- a cada noción, por medio de sus vínculos en la estructura conceptual en que se inserta. Un concepto adquiere objetividad y potencial argumentativo cuando forma parte de una estructura. Las conexiones y usos externos aportan sentido, basado en la experiencia propia o en la experiencia culturalmente acumulada; incorporan modos de actuar ante situaciones, contribuyen a resolver problemas, a procesar información y al ajuste a modelos.

Nuestro interés por el significado de los conceptos matemáticos está, pues, centrado en el ámbito de la matemática escolar, en su consideración funcional. En el ámbito escolar, un mismo concepto matemático puede expresar una variedad de

significados. Basándonos en las ideas de sentido y referencia (Frege, 1996), establecemos que los diferentes significados de un concepto matemático vienen dados por las estructuras conceptuales en que se inserta –referencia-, por los sistemas de símbolos que lo representan –signos-, y por los objetos y fenómenos de los que surge –sentido. En la reflexión sobre matemática escolar, que corresponde al estudio curricular, el *significado* de un concepto se establece mediante la terna Estructura Conceptual-Representaciones-Fenómenos. Adecuamos así la terna de Frege: Signo-Sentido-Referencia, con la cual caracterizamos el *significado* de un concepto de las matemáticas escolares.

Hay diferentes significados para un mismo concepto matemático, que vienen dados por las estructuras conceptuales que lo refieren, por los sistemas de símbolos que lo representan, y por los objetos y fenómenos de los que surge y que le dan sentido. Sostenemos que esto es así porque un mismo concepto admite una pluralidad de relaciones internas, de modos de representación y de sentidos, que vienen determinados por las relaciones externas del concepto de referencia (Rico, 1997).

## Análisis de contenido

El Análisis de Contenido, tal y como aquí se presenta, es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares. El Análisis de Contenido es parte del Análisis Didáctico, que configura un conjunto de procedimientos necesarios para llevar a cabo el diseño y planificación de unidades didácticas. Mediante este Análisis se desarrollan las capacidades del profesor de matemáticas para establecer diversos significados de los temas matemáticos escolares, que son conocimientos necesarios para marcar expectativas sobre el aprendizaje de los alumnos y para delimitar y diseñar tareas basadas en la concreción de unas demandas cognitivas. Es decir, el Análisis de Contenido contribuye al desarrollo de capacidades profesionales para la enseñanza vinculadas con la competencia de planificación.

En reiteradas ocasiones hemos subrayado la conveniencia de comenzar las tareas de planificación y diseño de unidades didácticas por medio del Análisis de Contenido, es decir, por medio del estudio de los diversos significados de los conceptos matemáticos, que hemos estructurado mediante diversos organizadores del currículo (Rico, 1997; Segovia y Rico, 2001; Gómez, 2002; Gómez, 2007).

El Análisis de Contenido sobre un tópico se lleva a cabo mediante distintas fases, las cuales desarrollan ciertas capacidades y contribuyen a la competencia de planificación. En este trabajo se muestra una aplicación de las nociones del Análisis de Contenido mediante su ejemplificación con un tema de

Primer Ciclo de Educación Secundaria Obligatoria. El tema elegido como ejemplo es *Sistema de los Números Naturales*.

### Tratamiento curricular

Fijado el nivel en que va a realizarse el Análisis de Contenido de un tópico, en este caso el Primer Ciclo de Secundaria, es obligado acercarse a la normativa curricular y analizar las referencias al tema contenidas en los diferentes niveles. Tanto los Decretos de Enseñanzas como las secuenciacines caracterizan al tema, dando un programa de contenidos organizado en epígrafes, junto con algunas referencias metodológicas que proporcionan información sobre su extensión y aportan especificidad a los contenidos. La referencia básica para el Sistema de los Números Naturales, que se ejemplifica, es:

Primer curso. Contenidos:

1°. Aritmética y álgebra. Números naturales. El sistema de numeración decimal. Divisibilidad. Fracciones y decimales. Operaciones elementales. Redondeos. Potencias de exponente natural. Raíces cuadradas exactas. Las magnitudes y su medida. El sistema métrico decimal. El euro. Magnitudes directamente proporcionales. Porcentajes.

2°. Relación de divisibilidad. M.C.D. y m.c.m. de dos números naturales. Estimaciones, aproximaciones y redondeos. Precisión y estimación en medidas (MEC, 2000; p. 61).

A partir de esta información se abre la posibilidad de:

- Destacar conexiones con otros temas y núcleos temáticos del currículo.
- Establecer una secuenciación de los aspectos del tema que se podrán desarrollar en varios cursos o a lo largo de otros tópicos.
- Delimitar el contenido en un curso en el marco de una programación global.

Pero la información de los documentos curriculares es amplia y genérica, lo suficiente como para admitir una diversidad de interpretaciones. De hecho, los distintos libros de texto y otros desarrollos muestran diferentes aproximaciones que, por razones diversas, se suelen aceptar como modelos de propuestas curriculares. Conviene, pues, destacar algunos instrumentos y técnicas de trabajo para el profesor en formación, que contribuyan al desarrollo de capacidades relativas al diseño de tareas y planificación de unidades didácticas; estas técnicas marcan criterios para organizar y seleccionar contenidos, focalizar prioridades y configurar itinerarios de aprendizaje (Gómez, 2007).

El desarrollo del currículo de matemáticas lo debe establecer, en definitiva, el seminario de profesores de cada centro.

### Tipos de contenido

Para el correcto desarrollo de las tareas docentes y el logro de las expectativas de aprendizaje, el profesor tiene que planificar su trabajo y, como se ha dicho, necesita considerar el significado de conceptos e ideas matemáticas desde una perspectiva más amplia que la de su exclusiva fundamentación formal y axiomática y de su justificación deductiva, superando pretendidas versiones canónicas del currículo que lo estancan y limitan. El análisis de los significados de ideas y conceptos de las matemáticas escolares obliga a revisar los contenidos y las estructuras en las que tales conceptos se insertan.

Por ello el Análisis Didáctico comienza por el Análisis de Contenido, es decir, hace una revisión de las estructuras matemáticas desde la consideración de su aprendizaje y enseñanza, y de ahí la importancia de revisar los contenidos desde una perspectiva cognitiva. Algunos investigadores en educación matemática, expertos en su aprendizaje, han organizado el conocimiento matemático escolar con criterios cognitivos y, para ello, usan la clasificación del contenido de las matemáticas escolares en dos grandes bloques: *conceptual* y *procedimental* (Bell, Costello & Küchemann, 1983; Hiebert y Lefevre, 1986; Rico, 1995). Dentro de estos dos bloques establecen tres niveles de complejidad.

*Para el correcto desarrollo de las tareas docentes y el logro de las expectativas de aprendizaje, el profesor tiene que planificar su trabajo.*

En el campo conceptual se señalan *hechos*, *conceptos* y *estructuras* como los tres tipos de conocimientos que articulan el campo en grado de complejidad creciente. Los hechos constituyen el nivel básico de complejidad conceptual, y se pueden diferenciar en *términos*, *notaciones*, *convenios* o *resultados*. En un nivel medio de complejidad están los *conceptos*, que pueden tener diferentes significados, como es el caso del número natural o la relación de divisibilidad. En un nivel de complejidad superior están las *estructuras*. El conocimiento de la estructura del Sistema de los Números Naturales se inicia con las operaciones internas, relaciones y propiedades características del semianillo arquimediano de los números naturales ( $\mathbb{N}$ , +,  $\times$ ,  $\leq$ ).

En el ámbito de los procedimientos los tres niveles de complejidad que se consideran son: *destrezas*, *razonamientos* y *estrategias*. Por ello, algunos contenidos del Sistema de los



Números Naturales se presentan en este nivel básico como *destrezas* para adquirir o afianzar (es el caso del uso del paréntesis y la jerarquía de operaciones o los algoritmos del producto y la división); otros conocimientos se consideran formas de *razonamiento* (deductivo, o inductivo en el tratamiento de regularidades numéricas); finalmente, otros tienen un mayor nivel de complejidad, que corresponde a las *estrategias* (como son las estrategias de “estimar” o “reconocer patrones numéricos”).

Un profesor en formación ha de ser capaz de discriminar los contenidos matemáticos como objetos de aprendizaje, para lo cual es útil esta clasificación. También ha de tener capacidad para establecer una clasificación detallada de los contenidos que intervienen en un tema concreto, de su tipología y nivel de complejidad.

La Tabla 1 aplica esta clasificación para el *Sistema de los Números Naturales*.

### Focos conceptuales

Para avanzar y profundizar en el proceso de análisis del contenido de un tema conviene que el profesor determine relaciones y prioridades entre conceptos, procedimientos y estrategias. Es fácil observar que dentro de un mismo tema hay conceptos y procedimientos que pueden estar al servicio de una estrategia importante. Desde la perspectiva del tema que se está planificando las estrategias ocupan lugares predominantes y hacen que otros conceptos o procedimientos se supe-  
diten a ellas. Para ello, se requiere capacidad del estudiante para profesor para fijar los conceptos que articulan el tema y mostrar el sistema de relaciones que se generan entre los distintos tipos de contenidos a partir de dichos focos conceptuales.

*Para avanzar y profundizar en el proceso de análisis del contenido de un tema conviene que el profesor determine relaciones y prioridades entre conceptos, procedimientos, estrategias.*

Con estas premisas se habla de *focos conceptuales prioritarios* cuando se propone la organización de los contenidos de un tema a partir de un número reducido de ideas prioritarias. Los focos conceptuales consisten en agrupaciones específicas de conceptos, estrategias y estructuras, que adquieren importancia especial ya que expresan, organizan y resumen agrupa-

mientos coherentes de los contenidos. Los focos conceptuales se identifican porque establecen prioridades sobre las expectativas de aprendizaje del tema y permiten una adecuada secuenciación de tareas para su enseñanza.

<p><b>Términos:</b> cero, uno, dos, tres, ....; igual, mayor/menor que; suma; resta; producto; división; siguiente a; anterior de; ...</p> <p>decena, centena, unidad de millar, millón, decena de millón, ...; billón, trillón, ...;</p> <p><b>Notaciones:</b> 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9;</p> <p>=, &lt;, ≤, +, -, x, ÷; 10, 100, 1000, ...; 102, 103, ...</p> <p><b>Convenios:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Los naturales comienzan en 0</li> <li>• Periodicidad de los órdenes del sistema: [(u, d, c), (um, dm, cm)], [(uM, dM, cM)], ...</li> <li>• Valor posicional de las cifras en un número</li> <li>• Lectura: todo número se lee comenzando por la cifra de mayor orden, con indicación de dicho orden, continúa por...</li> <li>• Colocación de sumandos; de los factores de un producto; de los términos en una resta; de los términos en una división.</li> </ul> <p><b>Resultados:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cada 10 unidades de un orden forman una unidad de orden superior.</li> <li>• Comparación de naturales por tamaño y, en caso de igualdad, por su cifra de mayor orden.</li> <li>• Todo número n tiene un siguiente n+1 y, excepto 0, un anterior n-1.</li> <li>• Tablas de sumar y de multiplicar.</li> <li>• Regularidades numéricas.</li> </ul> <p><b>Conceptos Numéricos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Significados del número.</li> <li>• Diversos conceptos de número natural</li> <li>• Secuencia numérica.</li> <li>• Recta numérica.</li> <li>• Sistema decimal de numeración.</li> <li>• Orden entre naturales.</li> <li>• Suma, resta producto y división de naturales.</li> <li>• Divisibilidad.</li> <li>• Propiedades de las operaciones numéricas.</li> </ul>	<p><b>Estructuras:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• (N, +) y (N, x) Semigrupos conmutativos.</li> <li>• (N, ≤) Orden total y arquimediano.</li> <li>• (N, +, x, ≤) Semianillo arquimediano.</li> </ul> <p><b>Destrezas:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Escritura y lectura de números</li> <li>• Descomposición polinómica de un número</li> <li>• Uso del paréntesis y jerarquía de las operaciones</li> <li>• Algoritmos de la suma y de la resta</li> <li>• Algoritmos del producto; algoritmos de la división.</li> <li>• Expresiones de un mismo número como resultado de distintas operaciones</li> <li>• Diversidad de representaciones de un mismo número.</li> <li>• Orden de magnitud de un número o cantidad.</li> <li>• Usos básicos de la calculadora con naturales.</li> </ul> <p><b>Razonamiento:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Deductivo: propiedades de las operaciones</li> <li>• Inductivo: regularidades numéricas</li> <li>• Recta numérica. Propiedades y operaciones en la recta</li> <li>• Figurativo: estructuras que se expresan gráficamente</li> <li>• Argumentos para justificar propiedades numéricas</li> </ul> <p><b>Estrategias:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Cálculo mental</li> <li>• Estimación de los resultados de una operación</li> <li>• Reconocimiento de patrones numéricos</li> <li>• Reconocimiento de la estructura que comparten dos o más números</li> <li>• Construcción de un conjunto de números con ajuste a una regla</li> <li>• Estrategias de cálculo con la calculadora manual</li> <li>• Resolución de problemas aritméticos y numéricos</li> </ul>
---	---

Tabla 1. Clasificación cognitiva del contenido del Sistema de los Números Naturales.

En nuestro caso, los conceptos que consideramos prioritarios para centrar el aprendizaje y abordar la enseñanza del tema *Sistema de los Números Naturales*, son:

- Nociones sobre significados y usos de los naturales
- Sistema Decimal de Numeración
- Relación de orden
- Suma de naturales
- Producto de naturales
- Divisibilidad. Teorema Fundamental de la Aritmética

Cada uno de estos focos prioritarios incluye una diversidad de hechos, conceptos y procedimientos ligados al mismo. Si combinamos esta elección de focos con la clasificación cognitiva podemos elaborar varios listados que expresan prioridades en la organización de los contenidos del tema *Sistema de los Números Naturales*.

La elaboración de estas listas no tiene un carácter exhaustivo, pero son importantes ya que desarrollan la capacidad del profesor en formación para organizar los contenidos de un tema tomando como base ideas centrales que, de otro modo, se muestran aisladas; también desarrolla la capacidad de usar los tipos y niveles establecidos en la clasificación cognitiva. Así, a partir de los focos antes mencionados, elaboramos los siguientes listados de ideas prioritarias para el Sistema de los Números Naturales:

Significados y usos	Sistema Decimal de Numeración	Suma de naturales	Orden entre naturales	Producto de naturales
*Secuencia/ Contar *Ordinal/ Ordenar *Cardinal/Cuantificar *Signo/ Codificar *Símbolos/ Estructurar *Números/ Operar *Recta/ Visualizar *Nociones y conceptos de número natural *Tipos de números por su tamaño; pequeños, medianos y grandes.	* Símbolos. Cero * Base: principio de agrupamiento * Unidades de orden superior * Escritura y lectura de números * Notación polinómica * Tablas numéricas * Algoritmos de suma y resta * Algoritmos de producto y división	* Símbolos de suma y resta * Noción de suma y resta * Composiciones aditivas de un número * Tabla de sumar * Algoritmos de suma y resta * Suma con la calculadora * Propiedades de la suma * Estructura de $(\mathbb{N} +)$ * Estimación de sumas y restas	* Siguiendo y anterior * Secuencia numérica * Comparar naturales cualesquiera * Relación de orden * Estructura ordinal de $\mathbb{N}$ * Orden de magnitud de un número * Orden de aproximación en una estimación.	* Simbolización del producto * Términos del producto y división. * Notaciones * Tabla de multiplicar * Algoritmos * Productos y divisiones con la calculadora * Divisibilidad. * Factorización * Estructura de $(\mathbb{N}; \times)$ * Estimación de productos y divisiones

Tabla 2: Focos Conceptuales del Sistema de los Números Naturales

Conviene advertir las limitaciones a que puede conducir un énfasis excesivo en la elaboración de listas. Centrar el trabajo del profesor en formación en una actividad exclusivamente analítica plantea diversos interrogantes:

- Grado de precisión: ¿todas las listas dicen lo mismo?
- Desconocimiento de sus límites: ¿hasta donde llega una lista?
- La extensión de una lista: ¿cuándo agotan un tema?

- La definición de una lista: ¿por qué incorporan cuestiones diferentes?

La elección de conceptos prioritarios ha permitido transitar desde un listado a varios listados paralelos, pero no ha producido aún la consideración de conexiones entre diferentes focos, ni tampoco al interior de los focos conceptuales. Surge la necesidad de destacar y reconocer las relaciones dentro de los distintos focos y conceptos que intervienen en una misma estructura.

### Mapa relacional de conceptos y procedimientos

La organización alrededor de conceptos básicos admite una primera representación en modo de mapa conceptual, específico a cada uno de los focos. Con esta representación se establecen nexos entre el conocimiento conceptual y procedimental de un mismo núcleo de conceptos básicos. Entre las ventajas de los mapas conceptuales destacan:

- Establecer una jerarquía de nociones dentro de cada concepto, que se expresa por su ordenación dentro de una lista mediante una representación lineal secuenciada.
- Conectar las nociones de las distintas listas; las relaciones y conexiones se muestran mediante segmentos o posiciones conectadas que, a veces, se identifican mediante etiquetas.
- Mostrar un grafo con nodos y conexiones como producto final; los nodos con mayor número de conexiones son los conceptos principales.
- Considerar distintos recorridos en el grafo; cada recorrido muestra un modo coherente de secuenciar varias nociones centrales en una estructura conceptual.
- El mapa conceptual es, fundamentalmente, un esquema para entender e interpretar una estructura conceptual determinada.

En la Figura 1 vemos la expresión de los conceptos y procedimientos básicos, que corresponden al foco *Sistema Decimal de Numeración* del tema *Sistema de los Números Naturales*, en forma que muestra los conceptos principales de ese foco y nociones básicas asociadas a los correspondientes conceptos.

Por cada uno de los focos prioritarios puede y debe establecerse un sistema de relaciones con el que se articulen las nociones del foco, ya destacadas en la Tabla 2; en cada caso dará lugar a un mapa conceptual. Con este ejercicio se desarrollan las capacidades de síntesis y estructuración, y su logro

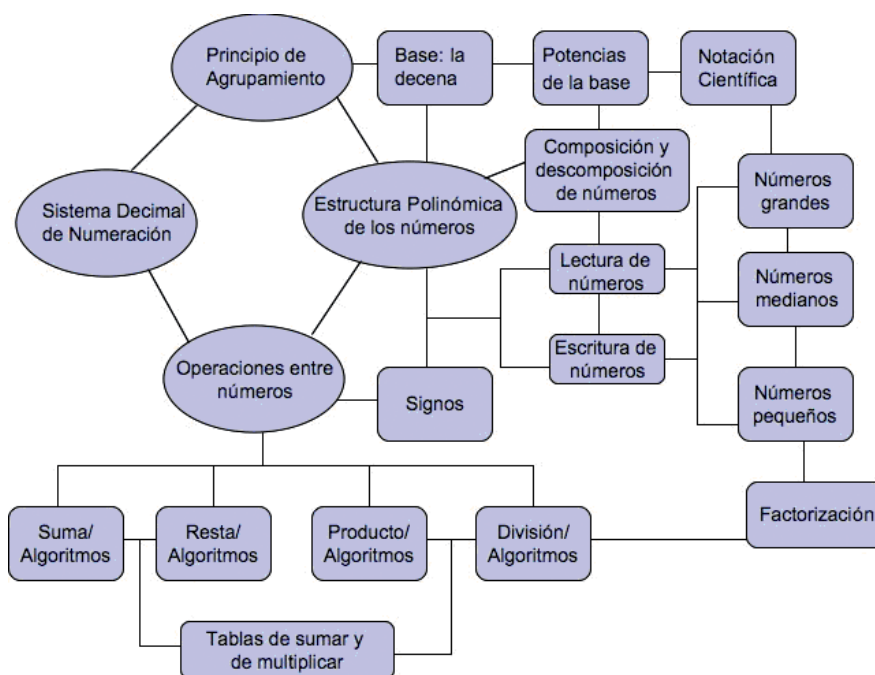


Figura 1: Mapa Conceptual Sistema Decimal de Numeración

se muestra al elaborar la red de nociones básicas mediante el mapa conceptual correspondiente, al conectar y estructurar las nociones centrales de las distintas listas presentadas según los focos señalados.

### Mapas conceptuales: de los focos a la estructura

Ahora bien, consideremos la estructura conceptual *Sistema de los Números Naturales*, que contempla los focos prioritarios mostrados en la Tabla 2. Corresponde al profesor en formación expresar tal estructura mediante un único mapa conceptual, que sintetice las aportaciones de los seis mapas específicos a cada uno de los focos. La capacidad del profesor en formación para sintetizar y estructurar las principales ideas de los distintos focos prioritarios, sus conexiones y las conexiones entre los focos, se intensifica y desarrolla con la realización del mapa conceptual conjunto, que muestra la riqueza de relaciones entre los contenidos y entre los focos conceptuales del tema escogido. Se pueden considerar diferentes criterios a la hora de elaborar un mapa para una estructura conceptual. Ejemplificamos con la estructura *Sistema de los Números Naturales* el paso de mapas conceptuales centrados en focos al mapa de la estructura global completa.

En el esquema de mapa conceptual de la Figura 2 ocupan un lugar central las nociones del Sistema Decimal de Numeración, los tres tipos de números ya mencionados en el primer foco y los sistemas de representación que presentamos más adelante. Dependiendo de la complejidad del patrón del cual proceden, se distinguen los siguientes tipos de números

*pequeños* (números de uno o dos dígitos, números de la vida cotidiana), *medianos* (números que se expresan mediante la totalidad de sus cifras, hasta un orden de magnitud del billón, números usuales de las magnitudes cotidianas) y *grandes* (números que se expresan mediante notación científica, de un orden de magnitud elevado y que corresponden a magnitudes de disciplinas científicas) (Rucker, 1988; pp. 72-73). También destacan, además del Sistema Decimal de Numeración, cuatro grandes sistemas de representación, en la recta o en tablas, mediante configuraciones puntuales, en notación factorizada y en notación científica.

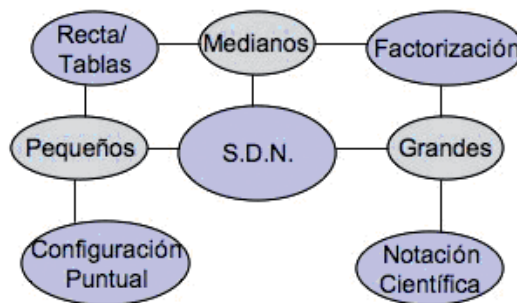


Figura 2: Aproximación al mapa conceptual del Sistema de los Números Naturales

Así, los números pequeños suelen representarse en tablas, en la recta o mediante configuraciones puntuales. Para los

números medianos se maneja la escritura en forma factorizada, además, los números grandes requieren también la notación científica. Por otra parte, todos los números se pueden representar en el Sistema Decimal de Numeración. Ligadas a estas representaciones están la gran mayoría de conceptos y procedimientos ya enumerados anteriormente y que presentan al menos conexiones con ciertos procedimientos a los que se vinculan para su formulación o desarrollo matemático.

Establecer estos nexos conduce a un tipo de mapa más completo. En este caso se incorporan algunos nuevos conceptos y procedimientos ligados a los focos prioritarios tercero, quinto y sexto del Sistema de los Números Naturales y nociones referentes a estrategias de resolución de problemas y otros usos y significados del número, con sus correspondientes conexiones; se obtiene así el mapa conceptual de la Figura 3, que muestra una visión global de los focos considerados prioritarios en el Análisis de Contenido de esta estructura conceptual en Educación Secundaria.

El resultado más importante de esta actividad es la profundidad del análisis de relaciones entre conceptos y procedimientos que el profesor en formación realiza, lo que contribuye al dominio de la estructura en estudio a los efectos de su consideración como objeto de enseñanza y aprendizaje.

## Estructura conceptual y análisis de contenido

Los mapas conceptuales son las herramientas propuestas para llevar a cabo el estudio de la estructura conceptual de un tópico matemático. Con los mapas se inicia el Análisis de Contenido del tema. La delimitación de la estructura conceptual de un tópico matemático ubica los correspondientes conceptos y procedimientos y sus relaciones, establece prioridades, destaca conexiones y muestra las diversas opciones y trayectorias que pueden marcarse para organizar las expectativas sobre su aprendizaje; igualmente, aporta las referencias necesarias para establecer sus significados.

Los mapas conceptuales proporcionan una técnica para mostrar una estructura conceptual; mediante esta técnica se desarrollan las capacidades del profesor que contribuyen a su comprensión de dicha estructura. Como toda técnica tiene diversas vías e interpretaciones, que llevan a una diversidad de mapas conceptuales. Aunque esta técnica es útil, no conviene olvidar que tiene limitaciones ya que los mapas conceptuales son un modo de expresar la estructura conceptual, pero no la sustituyen.

El Análisis de Contenido tiene su primera fase en la consecución de un marco de relaciones que muestre la complejidad

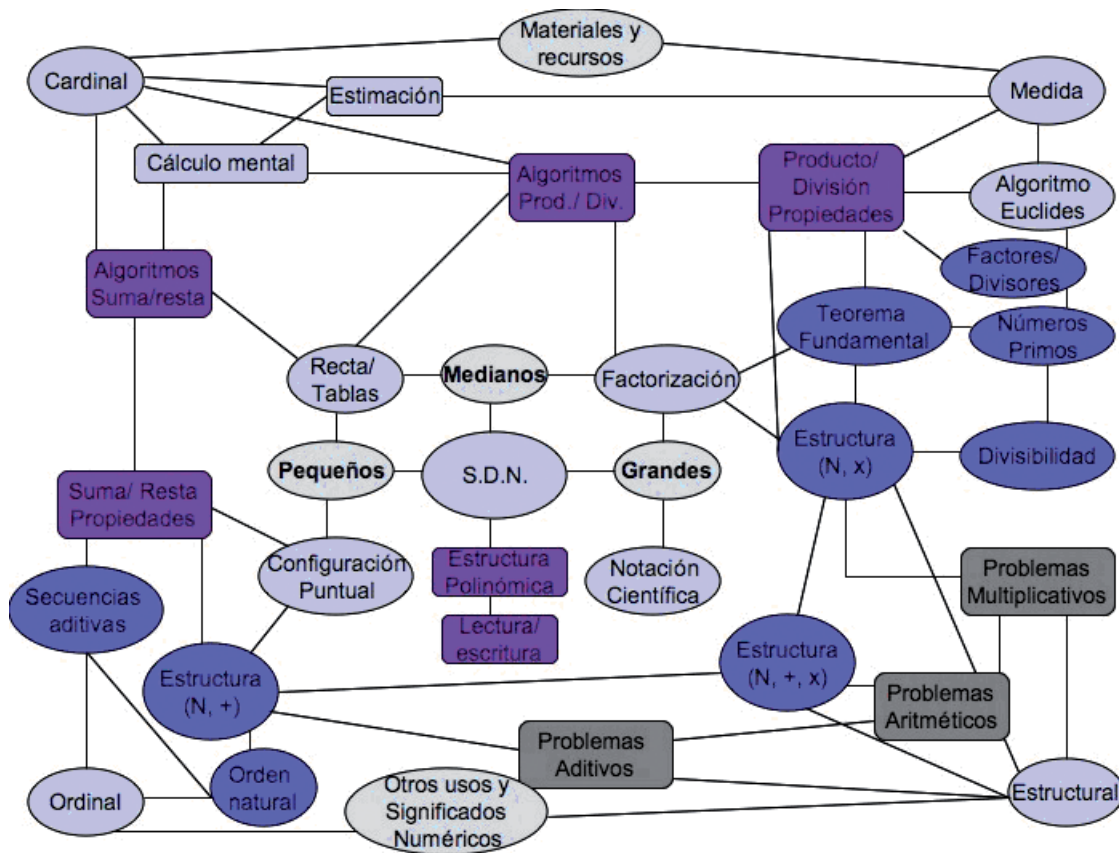


Figura 3: Mapa Conceptual del Sistema de los Números Naturales



de la estructura conceptual en estudio. Adquirir destrezas y desarrollar capacidades para seleccionar focos conceptuales prioritarios para cada uno de los temas del currículo de matemáticas de Secundaria, junto con los conceptos, ideas y procedimientos principales que se articulan en cada foco, permite el desarrollo de un segundo nivel de capacidades, con las que sintetizar y expresar la estructura de un tema. La técnica propuesta muestra una diversidad de mapas que organizan la complejidad. En primer lugar, en cada uno de los focos y, en segundo lugar, para toda la estructura conceptual conjuntamente considerada.

## Sistemas de representación

El estudio y revisión de los sistemas de representación es otra de las componentes del Análisis de Contenido, junto a la estructura conceptual y el Análisis Fenomenológico. Por representación entendemos cualquier modo de hacer presente un objeto, concepto o idea. Conceptos y procedimientos matemáticos se hacen presentes mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos y cada uno de ellos constituye una representación (Castro y Castro, 1997).

Hay diversidad de modos de representar conceptos matemáticos: mediante signos o símbolos especiales, mediante esquemas, gráficos o figuras, principalmente. Lo peculiar de ideas y conceptos matemáticos es que cada uno de ellos admite diversas representaciones. Los modos de representar nociones matemáticas destacan las propiedades de los conceptos y procedimientos. Los modos de representación muestran objetos que forman parte de una estructura, se presentan organizados en sistemas; por ello se habla de sistemas de representación (Janvier, 1987; Kaput 1992).

Cada sistema de representación pone de manifiesto y destaca alguna peculiaridad del concepto que expresa; también permite entender y trabajar algunas de sus propiedades. Así lo vemos con las operaciones dentro de un mismo sistema de representación:

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 3 \cdot 5 = 4^2 - 1 = (4+1) \cdot (4-1)$$

Los sistemas de representación son centrales en la caracterización del significado de las nociones matemática, contribuyen a la comprensión de conceptos y procedimientos. No hay jerarquía entre los sistemas de representación. Cada uno de ellos permite resaltar aspectos particulares de esos conceptos y de sus relaciones, y oculta otros.

Mediante las conexiones entre los sistemas de representación se muestra la riqueza de aspectos y relaciones involucrados en un concepto, como ocurre con las relaciones de la Figura 4 que exploran la igualdad  $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + [2n-1]$ :

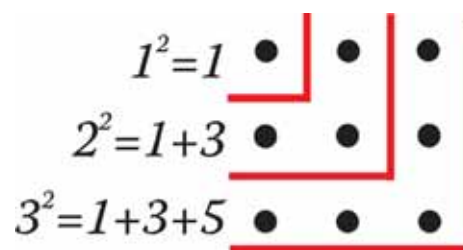


Figura 4: Formación de los números cuadrados con dos sistemas de representación

Toda la complejidad de significados que pone de manifiesto la estructura conceptual de un tema de matemáticas se hace operativa mediante sus diferentes sistemas de representación. Las conexiones entre sistemas de representación contribuyen a plantear nociones convencionales de manera no convencional, destacar alguna propiedad no reconocible en la representación usual de un tema. Conocer un contenido se sustenta en el dominio de sus sistemas de representación y de los modos de expresar una misma propiedad mediante diversos sistemas. Como se ha visto en los mapas conceptuales de las Figuras 2 y 3, los sistemas de representación centran y organizan la estructura conceptual. El estudio de los sistemas de representación de un tema matemático tiene como objeto que los profesores en formación desarrollen su capacidad para analizar diferentes formas de representación de los conceptos matemáticos involucrados en ese tema y explorar y mostrar sus diferentes conexiones.

## Sistemas de representación de los Números Naturales

Al considerar el sistema de los números naturales, desde su estructura conceptual y desde una revisión histórica de su desarrollo (Ifrah, 1997), destacan cuatro modalidades de representación: simbólica, verbal, gráfica, y la que suministran los materiales manipulativos.

La Figura 5 muestra la riqueza de sistemas que surgen del estudio de las diferentes modalidades de representación de los números naturales y los diferentes significados, en cada caso, para este concepto. En la figura hemos señalado con asteriscos una ejemplificación de diferentes modos de representar el natural 4 en esos sistemas. Comentamos las principales características de algunos de los sistemas de representación considerados para los Números Naturales.

### Sistemas de Representación Simbólicos

Dentro de esta modalidad de representación se considera los sistemas para representar naturales dependiendo de si se usa una estructura simple, aditiva o posicional; dentro de ésta última sobresale el sistema decimal de numeración y, a partir de él, las relaciones numéricas y de factorización.

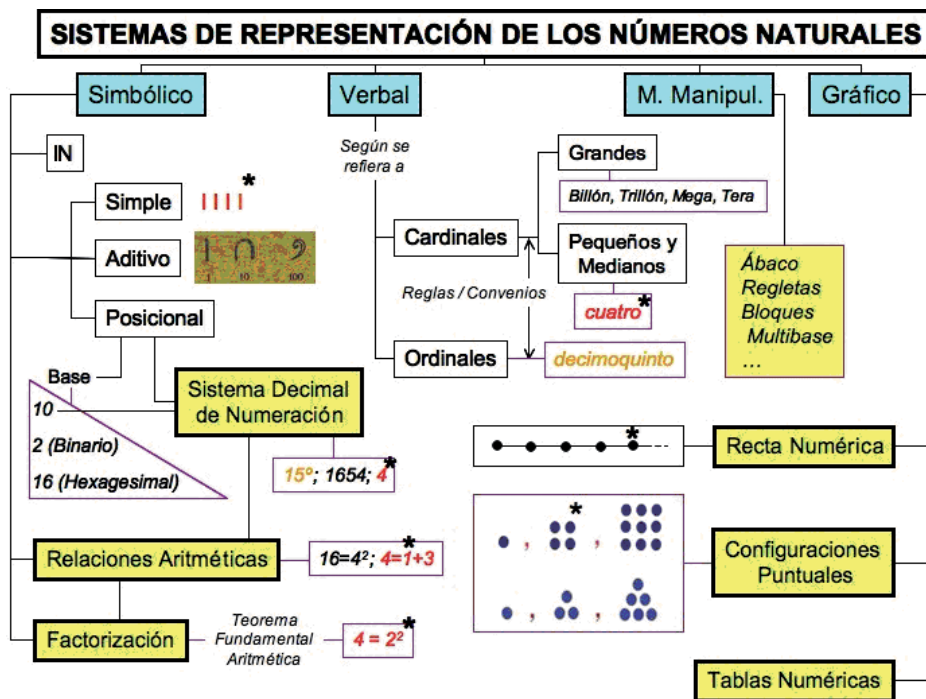


Figura 5: Sistemas de representación en el Sistema de los Números Naturales

En su forma más sencilla, está el *sistema simple*, en el cual los números naturales se emplean para contar cantidades pequeñas tomando como unidad una única marca que se repite tantas veces como sea necesario. Con motivo de utilizar símbolos para designar agrupaciones de la unidad, surgen los *sistemas aditivos*, entre los que destacan los sistemas de numeración egipcio, romano y chino. Estos sistemas permiten escribir números grandes con relativa economía, usando sencillas reglas aditivas.

Finalmente están los *sistemas posicionales*, entre los que destaca el sistema decimal de numeración.

El empleo y estudio de relaciones aritméticas entre números (expresión de un número como suma, resta, producto y división de otros) pone de manifiesto nuevas formas de representar números naturales. Además, el estudio de la estructura multiplicativa muestra otras facetas de esos números. El Teorema Fundamental de la Aritmética establece, igualmente, una única forma de expresión de cada número en función de sus factores y ciertas propiedades multiplicativas.

#### Sistema de Representación Verbal

Vinculado al sistema de representación simbólico está el verbal, en el que las reglas del lenguaje organizan y condicionan la representación de los números naturales. En este caso, nuestro lenguaje impone normas y reglas para representar números que se organizan en torno al uso del significado ordinal o cardinal de los naturales.

En el caso del significado ordinal, también existen un conjunto de reglas nemotécnicas para nombrar los diferentes órdenes

#### Sistemas Gráficos de Representación

Dentro de esta modalidad de sistema de representación destaca la recta numérica, las configuraciones puntuales y la Tabla-100, como se muestra en la Figura 5.

La primera representación gráfica que consideramos es la *recta numérica*. Su significado más inmediato es que los números naturales se pueden construir con regla y compás, usando un sencillo procedimiento que parte de que cualquier número natural  $n$  se obtiene como suma reiterada de la unidad  $n$  veces.

En relación con las *configuraciones puntuales*, en la Figura 5 aparecen los primeros términos de la sucesión de números cuadrados y triangulares. Las configuraciones puntuales, o números figurados, expresan en su estructura propiedades aritméticas que no son visibles en su representación decimal. Por ejemplo, en la Figura 4 observamos que cualquier número cuadrado es suma de impares consecutivos. También existen números pentagonales, hexagonales, etc. En Castro (1995) puede encontrarse un amplio estudio de las configuraciones puntuales y sus propiedades.

Finalmente, destacamos aquellas representaciones de los naturales que se expresan mediante una tabla. Entre ellas des-

taca la Tabla-100, que consiste en representar los naturales del 1 al 100 en una tabla 10 x 10, como se ve en la Figura 6:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 6: La Tabla-100.

Sobre esta tabla se pueden explorar relaciones aritméticas, algebraicas y geométricas entre números, así como estudiar patrones gráficos que siguen determinadas sucesiones numéricas, basadas en estructuras aditivas o multiplicativas. En Rico y Ruiz (2004) se describen, ejemplifican y analizan en detalle estas relaciones.

Las tablas de sumar y de multiplicar son variantes usuales de tablas numéricas. El Triángulo de Pascal es otra representación numérica en forma de tabla, construida sobre relaciones combinatorias.

## Sistemas de representación y análisis de contenido

Los sistemas de representación, como se muestra en la Figura 3, constituyen elementos centrales para organizar la estructura conceptual de un tema. Mediante un trabajo explícito sobre la diversidad de sistemas de representación en una misma estructura y sobre las conexiones entre ellos, se profundiza en el dominio del contenido en estudio. La búsqueda de nuevas o diversas expresiones de una misma propiedad contribuye a clarificar y a profundizar el entramado de conceptos en que se sustenta.

El Análisis de Contenido alcanza una segunda fase cuando logra mostrar la complejidad de la estructura conceptual mediante sus principales sistemas de representación. Adquirir destrezas y desarrollar capacidades para seleccionar relaciones entre distintos sistemas de representación de un mismo concepto, con las cuales traducir sus propiedades y regularidades de un sistema a otro, proporciona una técnica para relacionar distintos conceptos, interpretar propiedades y desarrollar argumentos de prueba y demostración. Estas capacidades, derivadas del estudio de los sistemas de representación enriquecen la competencia de planificación de los profesores.

## Análisis fenomenológico

¿A qué se refiere la fenomenología? Nuestra aproximación a la fenomenología se vincula con un planteamiento funcional de las matemáticas escolares que, como se ha dicho, afirma que las ideas y conceptos son el núcleo de nuestro pensamiento, las herramientas con las que pensamos. Esta aproximación sostiene que el pensamiento matemático surge de los fenómenos y que las estructuras matemáticas abstraen y organizan grandes familias de fenómenos de los mundos natural, social y mental. Ideas, estructuras y conceptos matemáticos se han construido por grupos humanos y se han desarrollado a lo largo de la historia, como herramientas para entender y organizar el mundo de los fenómenos y poder trabajar sobre ellos. En el modelo funcional que seguimos, el significado de los conceptos matemáticos se logra mostrando su conexión con el mundo real, con los fenómenos en cuyo tratamiento se implican tales conceptos. Por ello, cuando se quiere presentar una estructura matemática en toda su plenitud de significados, se considera la conexión de sus diferentes subestructuras con distintas familias de fenómenos y se vincula con aquellos campos del conocimiento donde tiene una utilidad establecida. El Análisis de Contenido necesita del análisis fenomenológico.

El análisis fenomenológico que aquí se presenta aporta una técnica para mostrar cuáles son los sentidos con que se utilizan conceptos y estructuras; pone el acento en el uso y aplicación de los conceptos, en los medios y en los modos en que, con ellos, se abordan distintas tareas y cuestiones cuando dan respuesta a determinados problemas, en definitiva, cuando contribuyen a la comprensión de ciertos fenómenos.

El análisis fenomenológico se propone mostrar la vinculación de conceptos y estructuras matemáticas con ciertos fenómenos que están en su origen, y que los vinculan con los mundos natural, cultural, social y científico. Y esto con la finalidad de dotar de sentido el aprendizaje de tales conceptos y estructuras. Para ello se ayuda de la reflexión sobre situaciones y contextos, con la cual el profesor en formación inicia el análisis fenomenológico.

## Situaciones

El análisis fenomenológico de una estructura matemática comienza por delimitar aquellas situaciones donde tienen uso los conceptos matemáticos involucrados, aquellas en las que éstos muestra su funcionalidad. Las situaciones destacan el medio en el cual una determinada estructura matemática tiene uso regular. Cualquier tarea matemática a la que se enfrenta un individuo viene asociada a una situación, considerando ésta como aquella parte del mundo real en la cual se sitúa la tarea para el individuo. Una situación viene dada por una referencia al medio (natural, cultural, científico y social) en el cual se sitúan tareas y cuestiones matemáticas que pue-

den encontrar los ciudadanos, que se proponen a los estudiantes y que centran su trabajo. Según el medio que destaquen, los expertos consideran distintos tipos de situaciones. Ejemplificamos aquí el caso de los números naturales con las situaciones del estudio PISA: personales, educativas o laborales, públicas y científicas (OCDE, 2005; pp. 41- 42).

*Las situaciones personales* son las relacionadas con las actividades diarias de los alumnos. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema. Estas situaciones se relacionan con prácticas cotidianas y suelen poner en juego los conceptos más básicos. En el caso del Sistema de los Números Naturales, la práctica de la secuencia numérica es el uso cotidiano básico más común y extendido. También el conocimiento de los números pequeños y de sus relaciones aditivas es obligado en la mayor parte de las situaciones personales.

*Situaciones educativas, ocupacionales o laborales* son las que encuentra el alumno en el centro escolar o en un entorno de trabajo. Se refieren al modo en que el centro escolar o el lugar de trabajo propone tareas que necesitan una actividad matemática para encontrar una respuesta. El mundo del trabajo incluye el conocimiento de horarios, retribuciones, manejo de cuentas corrientes, pagos y adquisiciones. La administración del tiempo, del dinero y la gestión de cantidades de determinados materiales forma parte de la práctica usual de la población adulta, en toda la gama de niveles laborales y sociales. El campo de aplicaciones y usos de los números en cada una de las profesiones de nuestra sociedad es objeto de reflexión y de enseñanza en la escuela actual.

*Situaciones públicas* se refieren a la comunidad local u otra más amplia, en la cual los estudiantes observan determinados aspectos sociales de su entorno o que aparezcan en los medios de comunicación. Los estudiantes como ciudadanos deben estar capacitados para interpretar, analizar y evaluar información numérica que se presente en los medios de comunicación, que forme parte de las decisiones que afectan a la vida política y social de una comunidad. También deben dominar las operaciones básicas para seguir argumentos cuantitativos, tener sentido del número, capacidad para hacer estimaciones y dominio de distintos códigos que se emplean en la presentación de datos numéricos.

*Situaciones científicas* son más abstractas e implican la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático. De hecho, cada una de las disciplinas científicas o técnicas hacen cierto uso técnico específico, en ocasiones muy elaborado, de los conceptos y estructuras numéricas. El dominio de los distintos conjuntos numéricos junto con las estructuras matemáticas del Análisis y del Álgebra constituyen el marco conceptual

donde se sitúan las aplicaciones y usos científicos numéricos más avanzados.

Por tanto, un primer paso en el análisis fenomenológico de una estructura o concepto matemático, consiste en la revisión de sus usos según los tipos de situaciones. Esta revisión debe concluir con un conjunto de situaciones en las que los conceptos y estructuras considerados se utilizan, destacando aquellos usos que tienen especial relevancia para la formación del estudiante de Secundaria.

## Contextos numéricos

Un contexto matemático es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimiento. Los contextos de una determinada estructura se reconocen porque muestran posibles respuestas a la pregunta ¿para que se utilizan estas nociones? El contexto refiere el modo en que se usan los conceptos, en una o varias situaciones.

En el Sistema de los Números Naturales son varios los contextos numéricos, ya que los números naturales satisfacen distintas funciones y atienden diferentes necesidades cuando se usan para contar y medir, para ordenar y cuantificar, para operar y simbolizar.

El contexto numérico más sencillo utiliza los números para *contar*; en este caso su utilidad consiste en asignar los términos de la secuencia numérica a los objetos de una colección, bien señalando cada objeto o marcando pautas y realizando espaciamientos temporales. Sin el dominio de la secuencia numérica, que es una función básica de dominio lingüístico, no es posible el uso de los números.

El segundo tipo de contexto es aquel que usa los números como *cardinal*; utilizamos este sentido cuando queremos dar respuesta a la cuestión ¿cuántos hay? ante una colección discreta de objetos distintos. Cuantificar los objetos de un conjunto en el ámbito de la Educación Secundaria aparece en problemas diversos. En algunos casos se determina un cardinal mediante la aplicación de operaciones, cuando se responde a preguntas como el número de objetos que hay en diversos agrupamientos y conviene sumar o multiplicar. En otros casos se determina un cardinal de un conjunto de objetos para cuya construcción se requiere algún procedimiento combinatorio o algoritmo elemental, o bien se aplican fórmulas sumatorias o factoriales.

El contexto de *medida* permite conocer la cantidad de unidades de alguna magnitud continua; en este caso el sentido viene dado porque proporciona respuesta a la pregunta ¿cuánto mide? Un tipo específico de problemas en este contexto surge



cuando se pretende obtener longitudes, superficies u otras magnitudes, o bien valores de magnitud en los que una divide necesariamente a la otra. Todas las aplicaciones del Sistema de los Números Naturales en la Física o la Economía se encuentran en este contexto.

Un cuarto tipo lo constituye el contexto *ordinal*, cuya modalidad propone conocer la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y ordenado; proporciona respuesta a la pregunta ¿qué lugar ocupa?

Los estudios sobre sucesiones numéricas, en particular las progresiones aritméticas y geométricas, incluyen este contexto ya que se refieren al estudio de conjuntos numéricos ordenados. Igualmente, cualquier problema numérico para cuya resolución sea necesario establecer un tipo de orden natural se encuentra dentro de este contexto ya que responde a la misma cuestión de origen.

El contexto *operacional* es el más fecundo, en el que hay que dar respuesta a la cuestión ¿cuál es el resultado? Las acciones de agregar, separar, reiterar y repartir expresan multitud de *acciones sobre y transformaciones con* los objetos; también se pueden establecer relaciones de comparación e igualación. Todas estas acciones tienen su expresión en el sistema de los números naturales mediante las operaciones aritméticas básicas que, a su vez, modelizan y proporcionan respuesta a las cuestiones cuantitativas que se plantean con las acciones mencionadas. La diversidad de problemas aritméticos aditivos y multiplicativos elementales muestran el contexto operacional básico.

También podemos considerar una variante estructural dentro de los contextos operacionales, dada por la pregunta clave ¿cómo se expresa (un número) mediante determinadas operaciones? En este caso se trata de mostrar cuál es la estructura operatoria que tiene un número o que comparten varios números, es decir, de expresar uno o varios números como resultado de las mismas operaciones. La función principal consiste en expresar la estructura de relaciones dentro del Sistema de los Números Naturales. Los diversos desarrollos aditivos y multiplicativos de los números, puestos de manifiesto mediante configuraciones puntuales, también la factorización de números pequeños o medianos, notación científica, u otras son ejemplos de este contexto.

Finalmente, un sexto tipo menos convencional, lo constituye el denominado contexto *simbólico* en el cual los números se utilizan para distinguir y denominar clases de fenómenos o elementos, confundidos a veces con etiquetas; en cualquiera de ellos hay que dar respuesta a la cuestión ¿cuál es el código? Se establecen así diferentes contextos numéricos basados, en las cuestiones planteadas y en los modos de uso de las estructuras numéricas. Conviene subrayar que determinadas tareas y problemas matemáticos pueden proponer, simultánea o

consecutivamente, cuestiones que afectan a más de uno de los contextos considerados.

## Fenómenos y subestructuras

Hemos visto que se puede reconocer el uso de un determinado tema, de hecho de todos los temas matemáticos de la Educación Secundaria, en una variedad de situaciones. También hemos visto que conceptos y estructuras desempeñan diferentes funciones según el marco estructural –el contexto- en que los situemos, y que estos contextos son reconocibles, básicamente, por la cuestión o cuestiones a las que se proponen dar respuesta. Estas cuestiones permiten marcar los principales modalidades de uso y señalan, junto con las situaciones, las principales familias de fenómenos que están en el origen de la estructura conceptual que se considera.

Pero caracterizar la relación de una estructura matemática con los fenómenos sólo por el medio en que se localizan y por los modos en que los trata, es un resultado limitado. Familias de fenómenos y subestructuras se vinculan porque éstas modelizan a aquéllas y, así, expresan su sentido. La Figura 7 muestra esta relación:

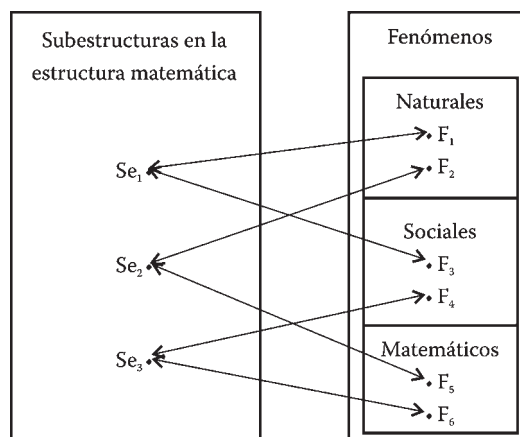


Figura 7: Relaciones entre fenómenos y subestructuras

Sostenemos que es posible establecer relaciones entre fenómenos y subestructuras, donde cada fenómeno conecta con una subestructura que lo expresa matemáticamente mediante su modelización, con la cual contribuye a plantear y resolver cuestiones y problemas vinculados a tales fenómenos o familias de fenómenos. Se pueden establecer parejas (Subestructura, Fenómeno), en las que la subestructura ofrece un modelo para el fenómeno. Nuestra técnica para el análisis fenomenológico concluye cuando vincula las familias de fenómenos con las subestructuras detectadas. Consideremos este tercer paso para el *Sistema de los Números Naturales*.

## Análisis fenomenológico de los Números Naturales

El sistema de los números naturales tiene un amplio campo de subestructuras, ya consideradas en el estudio de su Estructura Conceptual, que ofrecen distintos modelos para las acciones reales sobre objetos y cantidades. Entre las diferentes subestructuras destacan las establecidas inicialmente en los focos prioritarios:

1. El Sistema Decimal de Numeración, como subestructura orientada a representar verbal y simbólicamente los términos numéricos; la simbolizamos por S.D.N.
2. La subestructura de Orden de los números naturales, basada en la relación “siguiente de” o “sucesor de”, con sus propiedades; la simbolizamos por  $(\mathbb{N}, \leq)$ .
3. La subestructura Aditiva de los números naturales, basada en las relaciones aditivas (suma y resta) y en sus propiedades, que simbolizamos por  $(\mathbb{N}, +)$ .
4. La subestructura Multiplicativa de los números naturales, subestructura basada en las relaciones multiplicativas (producto y división entera) y en sus propiedades; la simbolizamos por  $(\mathbb{N}, \times)$ .
5. La subestructura Factorial de los números naturales, basada en el teorema fundamental de la aritmética, la relación de divisibilidad y sus propiedades.

Ejemplificamos con la subestructura cuarta el tercer paso del análisis fenomenológico, ya que las operaciones numéricas dotan al Sistema de los Números Naturales de su gran poder modelizador y contribuyen a su uso dinámico (Freudenthal 1983).

Los fenómenos que están en la base del Sistema Multiplicativo son aquellos que se basan en la consideración de la reiteración de colecciones, en las acciones de repetir/repartir una cantidad, formar una cantidad varias veces mayor que otra/ o hacer un número dado de partes de una cantidad, en las comparaciones multiplicativas basadas en las relaciones tantas veces más que/ tantas veces menos que, en los emparejamientos de los elementos de dos colecciones y otras variantes similares; el listado de fenómenos multiplicativos puede ampliarse si se contemplan otras condiciones dadas por la situación concreta que se considere y otras variables. Según sus modos de uso, tenemos que la Subestructura  $(\mathbb{N}, \times)$  se vincula con los contextos cardinal, de medida y operacional, fundamentalmente, dando lugar a tres tipos de modelos o relaciones entre las subestructuras y los fenómenos, que en la literatura especializada (Castro, 2001) se presentan como Problemas Aritméticos Multiplicativos:

- Problemas Multiplicativos de Proporcionalidad Simple,
- Problemas Multiplicativos de Producto Cartesiano, y
- Problemas Multiplicativos de Comparación.

Otra familia de fenómenos específicamente matemáticos, consistente en las relaciones multiplicativas entre números y su estudio, conecta con la subestructura  $(\mathbb{N}, \times)$ .

## Análisis fenomenológico y análisis de contenido

El primer paso que proponemos para el Análisis Fenomenológico consiste en el estudio de las situaciones vinculadas a la estructura en estudio; seguimos en este caso los tipos propuestos en el estudio PISA 2003. La delimitación de los distintos contextos es el segundo paso en el Análisis Fenomenológico de un tema. Subrayamos que un contexto es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, es decir, responden a unas determinadas necesidades como instrumentos de conocimiento.

*Un contexto es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, es decir, responden a unas determinadas necesidades como instrumentos de conocimiento.*

Este segundo paso del Análisis Fenomenológico de un tema delimita los contextos de uso, las demandas cognitivas a las que atienden tales conceptos y, por ello, las funciones cognitivas que satisfacen. Para llevarlo a cabo conviene enunciar las cuestiones o interrogantes a los que da respuesta la estructura conceptual considerada: ¿Cuáles son los usos principales de los conceptos y estructuras considerados? ¿A qué cuestiones e interrogantes dan respuesta?

El Análisis Fenomenológico de una estructura matemática incluye un tercer paso, que consiste en identificar las relaciones entre subestructuras y fenómenos, dentro de una misma Estructura Conceptual.

La fenomenología de un concepto matemático la componen los fenómenos para los cuales dicho concepto constituye un medio de representación y organización. (...) Un análisis fenomenológico consiste en describir fenómenos asociados a los conceptos matemáticos así como la relación que existe entre ellos (Segovia y Rico, 2001; p. 89).

A los efectos del Análisis de Contenido que venimos desarrollando, el Análisis Fenomenológico culmina cuando se establecen asociaciones entre las distintas familias de fenómenos detectados y las subestructuras y conceptos que conforman la Estructura Conceptual en estudio. En la realización del Análisis Fenomenológico se desarrollan capacidades tales como tipificar diferentes medios en los que se usan los conocimientos matemáticos; conectar las matemáticas con las ciencias experimentales, con el arte, la economía y otras ramas del conocimiento; atender distintos modos de uso de los conceptos, es decir, precisar las funciones que se llevan a cabo mediante la estructura contemplada, enunciar las cuestiones y familias de problemas a las que dan respuesta; finalmente, establecer relaciones entre fenómenos y subestructuras en tanto las segundas modelizan a los primeros.

Todas estas capacidades contribuyen a la competencia de planificación del profesor en formación, ya que son otros tantos datos que conviene considerar en el momento de establecer las expectativas de aprendizaje para los alumnos, seleccionar y organizar los contenidos y diseñar secuencias metodológicas, ejemplos, motivaciones y materiales para su transmisión.

## Conclusiones

Este trabajo está centrado en una de las competencias profesionales básicas para el profesor, considerada en un contexto de formación inicial de profesores de matemáticas de Educación Secundaria: la planificación. Para determinar y establecer un conjunto de capacidades que contribuyen al desarrollo de esa competencia en el contexto considerado, se explicita qué se entiende por Matemáticas Escolares, Significado de un Concepto y Análisis de Contenido, así como la complementariedad de estas ideas. Se ha disertado con cierto detalle sobre la complejidad detectada por estas nociones y se ha realizado un estudio sobre la diversidad de significados de una estructura matemática, las fases para su tratamiento técnico y las capacidades que se impulsan.

En este marco las decisiones basadas en el Análisis de Contenido se centran, en primer lugar, sobre la noción de Estructura Conceptual, en segundo lugar sobre los Sistemas de Representación y, en tercer lugar, sobre el Análisis Fenomenológico. En cada una de estas fases hay una serie de pasos y técnicas que organizan el Análisis de Contenido, que se han detallado y ejemplificado para el tema Sistema de los Números Naturales en Educación Secundaria. Subrayamos algunas ideas que se desprenden de este estudio:

La clasificación cognitiva de los contenidos los organiza en destrezas, hechos, conceptos, razonamientos, estructuras y estrategias. Esta clasificación orienta al profesor en su formulación específica sobre las expectativas de aprendizaje de los

escolares de Secundaria mediante capacidades, referidas a demandas cognitivas tales como identificar, reconocer, calcular, aplicar, justificar, y otras. Las capacidades de los escolares están ligadas a tipos de contenidos, según los criterios contemplados.

El análisis de los sistemas de representación contribuye a facilitar la toma de, al menos, dos importantes decisiones:

- Una vez analizado qué significados y aplicaciones del tema están ligados a cada sistema de representación es posible decidir qué significados y aplicaciones van a ser objeto de planificación en un curso o nivel concreto.
- Los diferentes sistemas de representación, que muestran los significados de un concepto, actúan a modo de valores de una variable de tarea. Las decisiones tomadas para seleccionar tareas escolares ligadas a una misma capacidad deberán de tener en cuenta que el alumno puede y debe activar la capacidad o desarrollarla, utilizando representaciones diferentes.

*Las conexiones entre conceptos y procedimientos, sentidos y representaciones en un mismo mapa conceptual facilita la definición de las secuencias de tareas que el profesor elabora para provocar el aprendizaje*

Las conexiones entre conceptos y procedimientos, sentidos y representaciones en un mismo mapa conceptual facilita la definición de las secuencias de tareas que el profesor elabora para provocar el aprendizaje. En la planificación del trabajo en el aula, las tareas no son agentes de acción aislados. Están conectadas mediante una lógica que las encadena a las capacidades, a los contenidos y entre ellas. En las decisiones que toma el profesor para elaborar estas secuencias, se manejan criterios de coherencia en el ámbito de las matemáticas escolares, como el de combinar tareas de contenido conceptual, con otras de tipo procedimental, o de aplicaciones según distintos contextos. Realizar una caracterización de conexiones entre estos ámbitos en un mapa conceptual facilita una elección del itinerario, buscando la complementariedad de tareas y previniendo exclusiones u olvidos.

Finalmente, el análisis fenomenológico muestra el o los medios en que conceptos y subestructuras se usan, los modos

de uso y la potencialidad modelizadora de las subestructuras para dar respuesta a los problemas que en cada contexto se plantean. En la planificación de tareas deben considerarse, pues, las situaciones y contextos en que se aplican los conceptos y en los que reciben respuesta cuestiones y problemas relevantes.

*El análisis fenomenológico muestra el o los medios en que conceptos y subestructuras se usan, los modos de uso y la potencialidad modelizadora de las subestructuras para dar respuesta a los problemas que en cada contexto se plantean*

En todo este trabajo la principal finalidad ha ido orientada a mostrar el dominio sobre el contenido y desarrollo de capacidades que contribuyen a la planificación del profesor competente. Entre ellas hemos destacado las siguientes:

- seleccionar focos conceptuales prioritarios en cada uno de los temas del currículo de matemáticas de Secundaria;
- establecer los conceptos y procedimientos que se articulan en cada foco;
- sintetizar y expresar la estructura de un tema mediante diversos mapas que organicen su complejidad,
- relacionar distintos sistemas de representación de un mismo concepto y traducir sus propiedades y regularidades de un sistema a otro,
- relacionar mediante distintos sistemas de representación los conceptos y propiedades así como desarrollar argumentos de prueba y demostración;
- tipificar diversos medios en los que se usan unos determinados conocimientos matemáticos;
- conectar las matemáticas con las ciencias experimentales, con el arte, la economía y otras ramas del conocimiento;

- atender distintos modos de uso de los conceptos y precisar las funciones que se llevan a cabo mediante la estructura contemplada,
- establecer relaciones entre fenómenos y subestructuras en tanto las segundas modelizan a los primeros;
- enunciar cuestiones y familias de problemas a los que las subestructuras dan respuesta.

El adiestramiento sobre estas capacidades viene dado mediante diversas técnicas, que contribuyen a su ejercicio, desarrollo y perfeccionamiento. El Análisis de Contenido proporciona un marco conceptual en que estas capacidades se articulan y complementan. Las capacidades contempladas constituyen, conjuntamente, un marco de destrezas y habilidades, necesarias para el dominio del contenido matemático a los efectos de planificar las expectativas e itinerarios de aprendizaje de los alumnos, las demandas cognitivas que se les plantean expresadas en términos de tareas, y la organización de su enseñanza mediante secuencias de instrucción.

El Análisis Cognitivo, centrado en los procesos de planificación del aprendizaje (Lupiáñez y Rico, 2006) y el Análisis de Instrucción, centrado en el proceso de planificación de la enseñanza (Marín, 2005), siguen al Análisis de Contenido, que se centra en los procesos de planificación de la materia. Conjuntamente, estos tres tipos de análisis forman parte del Análisis Didáctico. Por razones de extensión no hemos desarrollado las otras componentes del Análisis Didáctico, procedimiento cuyo dominio resulta imprescindible para planificar las unidades didácticas de matemáticas en Secundaria (Gómez, 2007).

Planificar el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares no es tarea trivial, se trata de una competencia profesional importante que supone el dominio de diversos campos y el desarrollo de ciertas capacidades para interpretar y organizar el conocimiento de las matemáticas escolares. La formación profesional del profesor de matemáticas de Secundaria debe incluir una preparación didáctica específica sobre planificación, de la cual el Análisis de Contenido es sólo un primer paso para interpretar el conocimiento matemático en términos de las matemáticas escolares, al que hemos dedicado este trabajo. ■



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BELL A., COSTELLO J. & KÜCHEMANN D. (1983). *Research on learning and teaching. A Review of Research in Mathematical Education*. NFER- Nelson. Windsor .
- CAMPILLO, A. (Coord.) (2004). *Título de Grado en Matemáticas*. Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación. Madrid.
- CASTRO, E. (1995). *Exploración de Patrones Numéricos Mediante Configuraciones Puntuales*. Comares. Granada.
- CASTRO, E. (2001). Multiplicación y división. En E. Castro (Ed.) *Didáctica de la matemática en Educación Primaria*. Síntesis. Madrid.
- CASTRO, E. Y CASTRO E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Horsori. Barcelona.
- COMISIÓN DE EDUCACIÓN DE CEMAT (2004). *Itinerario Educativo de la Licenciatura de Matemáticas* ITERMAT. Descargado de el 08/01/07 de [http://www.ugr.es/~vic\\_plan/formacion/itermat/](http://www.ugr.es/~vic_plan/formacion/itermat/).
- CONSEJO DE UNIVERSIDADES (2006). *Propuesta de Título Universitario Oficial de Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria* según RD 56/2005. Descargado de <http://www.mec.es/educa/jsp/plantilla.jsp?area=ccuniv&id=840> el 08/01/07.
- DEVLIN, K. (1994). *Mathematics: The Science of Patterns*. Scientific American Library. New York.
- FREGE, G. (1996). *Escritos filosóficos*. Crítica. Barcelona.
- FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematics Structures*. Reidel. Dordrecht
- GÓMEZ, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.
- GÓMEZ, P. (2007). *Desarrollo del Conocimiento Didáctico en un Plan de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Granada.
- HIEBERT, J. & LEFEBRE, P. (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge: the case of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, NJ.
- IFRAH, G. (1997). *Historia Universal de las Cifras*. Espasa Calpe. Madrid.
- JANVIER, C. (Ed.) (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, NJ.
- KAPUT, J. (1992). Technology and Mathematics Education. En D. A. Grouws (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). Macmillan. New York.
- LUPIÁÑEZ, J. L. y RICO, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.): *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 225-236). Instituto de Estudios Aragoneses. Huesca
- MARÍN, A. (2005). *Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: organización y secuenciación*. Trabajo presentado en el Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2005). *Real Decreto 55/2005, de 21 de enero, por el que se establecen la estructura de las enseñanzas universitarias*. Boletín Oficial del Estado. Madrid.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2000). *Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre que modifica el Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Boletín Oficial del Estado. Madrid.
- OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Santillana.
- OSER, F., ACHTENHAGEN, F. & RENOLD, U. (2006). *Competence Oriented Teacher Training. Old Research Demands and New Pathways*. Sense Publishers. Rotterdam.
- PÉREZ, A. (Coord.) (2005). *Informe sobre Innovación de la Docencia en las Universidades Andaluzas (CIDUA)*. Dirección General de Universidades de la Junta de Andalucía.
- RICO, L. (2005). Reflexiones sobre la Formación Inicial del Profesorado de Matemáticas de Secundaria. *Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado* 1, 8, 1-15. Sevilla.
- RICO, L. (1997). Los Organizadores del Currículo de Matemáticas. En Rico, L. (Coord.): *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 39- 59). Horsori. Barcelona.
- RICO, L. (1995). Consideraciones sobre el Currículo Escolar de Matemáticas. *Revista EMA*, 1, 4-24.
- RICO, L. y RUIZ, F. (2004). Geometric Visualization of Additive Operators. En B. Clarcks y cols. (Eds.): *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 351-362). National Center for Mathematical Education. Goteborg.
- RUCKER, R. (1988). *Mind Tools. The Mathematics of information*. Penguin Books. London.
- SEGOVIA, I. y RICO, L. (2001). Unidades Didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.): *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 83- 104). Síntesis. Madrid.
- STEEN, L. (Ed.) (1990). *On the shoulders of Giants*. National Academy Press. Washington D. F.
- TEDS-M (2007). *Teacher Education Study in Mathematics*. Descargado el 08/01/07 de <https://teds.educ.msu.edu/>.