# suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

57

**Febrero 2008**

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas


**Edita**
*FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS (FESPM)*
**Web**
*Antonio Alamillo Sánchez*
***www.revistasuma.es***

**Diseño de la portada y fotografía**
*Onofre Monzó*
**Maquetación**
*T. Queralt y O. Monzó*
**Revista Suma**
*Apartado 498*
*E-46900-Torrent*
*España*
**Fax:** *+(34) 912 911 879*
**Tirada:** *6700 ejemplares*
**Deposito legal:** *Gr 752-1988*
**ISSN:** *1130-488X*

**57** *Febrero 2008*

**Editorial** 3-4

**Plus** 5-6

## *artículos*

**Sobre el exilio matemático de la Guerra Civil española (II)**
*Javier Peralta* 9-22

**Intercambio de información secreta con la Transformada Discreta de Fourier**
*Ángela Rojas* 23-29

**Matemática y lenguaje y matemática constructora de lenguaje**
*Pedro M. Gonzalez* 31-42

**Códigos numéricos para la vida**
*Jesús Beato* 43-54

**Los números mórficos**
*Antonia Redondo* 55-64

**De SUMA a clase y de vuelta a SUMA**
*Guido Ramellini* 65-72

## *poliedro*


JUEGOS: Las cifras del calendario
*Grupo Alquerque de Sevilla* 75-78

EL CLIP: Una resolución, un crédito europeo y la cuenta de un restaurante japonés
*Claudi Alsina* 79-80

MATEMASTIC: Tuxmath: un juego para el cálculo mental
*Mariano Real Pérez* 81-84

ARTE CON OJOS MATEMÁTICOS: Ha vuelto para mirarnos
*Francisco Martín Casalderrey* 85-88

HACE...: Robert Recorde: el creador del signo igual
*Santiago Gutiérrez* 89-95

EN LAS CIUDADES INVISIBLES IV y V
*Miquel Albertí* 97-104

DE CABEZA: Ramanujan y el número π
*Antonio Pérez Sanz* 105-109

BIBLIOTECA: Mi biblioteca particular.
Escaparate 1: En campo ajeno
Escaparate 2: Las funciones. Un paseo por su historia
*F. Corbalán (Coord.), F. Fouz* 111-116

EL HILO DE ARIADNA: Un problema es un laberinto
*Xaro Nomdedeu Moreno* 117-122

LITERATURA Y MATEMÁTICAS: Crímenes imperceptibles
*Constantino de la Fuente* 123-129


## *actividades de la FESPM*


Crónica de las XIII JAEM de Granada
*L. Berenguer* 131-132

XVIII Olimpiada Matemática Nacional
*Julian Pérez y Marilo Eraso* 133-138

Relación de Sociedades federadas 141
Normas de Publicación 143
Boletín de suscripción 144





SUMA es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral, cuyo objetivo es tratar sobre aquellos aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje, destinada al profesorado que trabaja en infantil, primaria, secundaria y universidad.

La revista SUMA se edita en Torrent (Valencia) - ESPAÑA

suma+ 57
Febrero 2008, pp. 3-4

# SUMA y sigue

*Cuando emprendas tu viaje hacia Ítaca*
*debes rogar que el viaje sea largo,*
*lleno de peripecias, lleno de experiencias.*
*No has de temer ni a los lestrigones ni a los cíclopes,*
*ni la cólera del airado Posidón.*
*Nunca tales monstruos hallarás en tu ruta*
*si tu pensamiento es elevado, si una exquisita*
*emoción penetra en tu alma y en tu cuerpo.*

*Constantínos Kaváfis*

*Estamos seguros que cuando se gestó la revista SUMA y salió por primera vez allá por el año 1988, nadie pensaba que llegaría a ocupar el lugar que hoy en día ha alcanzado dentro del mundo de la Educación Matemática. Sin embargo, gracias al esfuerzo de los equipos que la dirigieron anteriormente, encabezados por Rafael Pérez en Granada, Sixto Romero en Huelva, Julio Sancho y Emilio Palacián en Zaragoza, y nuestros antecesores Francisco Martín e Inmaculada Fuentes en Madrid, con el apoyo de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, SUMA goza de una presencia y un prestigio de primer orden. Y esto, que se podría intuir a partir de la calidad del contenido y su cuidada presentación, se puede contrastar con indicadores objetivos que nos lo demuestran: su índice de valoración actual es de 70'25 sobre 100, valoración en función de su contenido científico a juicio del profesorado universitario y personal investigador del área, según datos del Instituto de Estudios Documentales sobre Ciencia y Tecnología del CSIC. Por ello estamos orgullosos y agradecidos a la FESPM por la confianza depositada en nosotros al nombrarnos directores de SUMA, y esperamos incrementar la calidad y los resultados hasta ahora alcanzados.*

*El equipo que ahora inicia esta aventura está compuesto por Tomás Queralt y Onofre Monzó como directores y Gregori Garcia como administrador. Queremos agradecer a Inmaculada Fuentes, Francisco Martín, Cristina Torcal y Antonio Alamillo su absoluta predisposión y ayuda en la transferencia de información* *para iniciar nuestra tarea. Sin su colaboración hubiera sido imposible emprender esta travesía. Debemos mencionar la buena disposición de Antonio a continuar con la gestión de la web, actividad que realiza con excelente resultado y de la que nos sentimos todos satisfechos.*

*Nuestro proyecto de revista parte de la distribución actual, por lo que el lector no apreciará grandes cambios, más bien algunas variaciones que permitan observar la incorporación de un nuevo equipo: cambio del logotipo de la revista, inicio de nuevas secciones y desaparición de otras, cambio del consejo de redacción y del consejo editorial. Pensamos que la estructura actual sigue siendo válida para un proyecto futuro de cuatro años, por lo que mantendremos los apartados en los que últimamente estaba dividida la revista:*

*•Artículos, con las aportaciones de nuestros lectores, que esperamos sean cada vez más y sin las que la revista no tendría sentido.*

*•Poliedro, con diferentes secciones a cargo de autores de reconocido prestigio. Nos gusta la perspectiva de ofrecer diferentes enfoques a todo lo que tiene que ver con las matemáticas, con el ánimo de ampliar la posibilidad de relacionarlas con otros campos de conocimiento.*

*•Las actividades de la Federación, de las que daremos debida cuenta mediante las convocatorias e informes de los distintos actos que la Federación lleva a cabo. La revista SUMA constituye la mejor carta de presentación de nuestra Federación, y seguirá siendo su máximo órgano de expresión a través de la cual se emitirán las opiniones y posicionamientos que pensemos deban adoptarse respecto de cualquier cuestión que tenga que ver con la Educación Matemática en nuestro país.*

*No queremos perder de vista la potencia que supone disponer de una página web cuya accesibilidad permite que nuestra revista esté presente en cualquier parte del mundo de manera inmediata. Pretendemos mantener el nivel de calidad alcanzado, e intentar mejorarlo incorporando paulatinamente opciones y servicios que faciliten el acceso a la información de nuestros usuarios.*

*La revista SUMA es una revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, tal y como indica su título, con el que se quiere plasmar la misión que tiene encomendada. Se trata de una revista de carácter científico aunque también hay una vertiente divulgativa a la que pretendemos contribuir, puesto que pensamos que los profesores de matemáticas estamos obligados a dar a conocer lo que sabemos. Nuestro deseo es que la revista mantenga este equilibrio, siempre con la finalidad de enriquecer a nuestros lectores tanto personal como profesionalmente.*

*Hemos izado nuestras velas y orientado nuestra nave hacia un horizonte desconocido, ilusionados en la aventura que supone lanzarse al océano, cuando nosotros solamente habíamos navegado por nuestro pequeño mar. Este mar Mediterráneo que nos acompaña, y esta luz de Valencia que por intensa algunos dicen que deslumbra, os llegue a todos vosotros, lectores, a través de nuestra revista SUMA.* ■

suma+ 57
Febrero 2008, pp. 5-6

# Plus



*Los hados han querido que mi primera actividad pública como nuevo Secretario General de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas sea precisamente escribir este editorial de SUMA, nuestra revista y la de todos sus lectores, a la que junto a Inma Fuentes, he dedicado unos cuantos años. Ningún lugar podía resultarme más grato para este estreno.*

*Un proyecto deja de serlo cuando se institucionaliza. Todas las actividades que promovemos comienzan siendo eso: un proyecto; pero sólo unas pocas llegan a la fase de consolidación, de institucionalización. Y la prueba que certifica que esa fase se ha superado, es sin duda, la normalidad con la que se producen los relevos de personas, de equipos responsables y, en nuestro caso, dado nuestro carácter federal, de lugares de edición.*

*En ese sentido SUMA hace mucho tiempo que dejó de ser un proyecto para pasar a ser una institución en el ámbito de la educación matemática en España y más allá.*

*Tomás Queralt y Onofre Monzó nos presentan con este número la primera de las entregas de lo que va a ser su trabajo al frente de SUMA. Decíamos Inma y yo en el editorial del número anterior que sabíamos con conocimiento de causa lo que les esperaba. SUMA supone un gran esfuerzo para mucha gente que colabora escibiendo su contenido, pero también una gran* *cantidad de trabajo de coordinación, de administración, de maquetación, de aporte de ideas, de trabajo de dirección. Es necesario para ello un derroche de ilusión y robarle tiempo a las noches y a los fines de semana.*

*La compensación de todo esto es el momento en que tienes un nuevo número en las manos y ves cómo ha quedado, cuando te llegan mensajes de los lectores que te dicen que lo que has hecho les ha gustado. Escasa satisfacción pensarán algunos, pero más que sobrada hemos pensado todos los que hemos estado al frente de esta tarea. Sé que es esto también lo que estan pensando ahora, con este número 57 en las manos, Tomás y Onofre.*

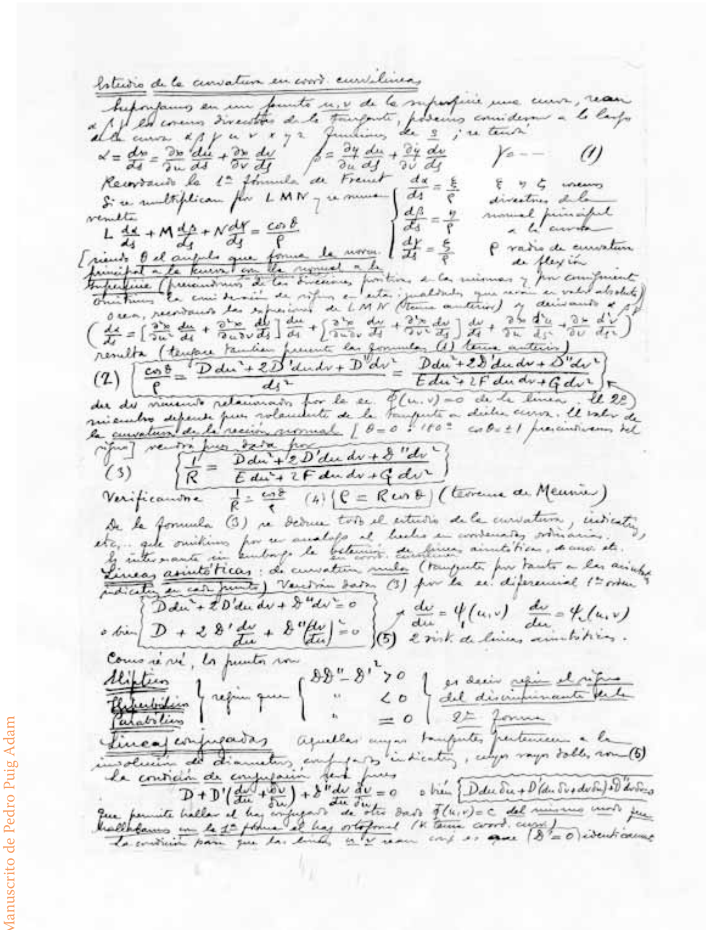
*Los cambios de personas no son nunca meros relevos. Los nuevos equipos tratan de consolidar lo que se hacía, pero también de incorporar nuevas ideas, de renovar y de innovar a partes iguales.*

*Deciamos que SUMA llega más allá* –plus ultra– *de nuestras propias fronteras. Desde la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, como editores de la revista, estamos convencidos de que SUMA con este nuevo equipo también irá más allá de lo que ha llegado nunca.*

*Tomás y Onofre quizás aún no lo saben, pero el subsconciente les ha delatado. Fijaos en el nuevo logotipo que han diseñado: SUMA⁺.*

*Demos pues la bienvenida a esta SUMA Plus.* ■

Francisco Martín Casalderrey
*Secretario General de la Federación Española*
*de Sociedades de Profesores de Matemáticas*



Manuscrito de Pedro Puig Adam

# artículos


| | |
|---|---|
| Sobre el exilio matemático de la guerra civil española (II) | *J. Peralta* |
| Intercambio de información secreta mediante la transformada Discreta de Fourier | *A. Rojas* |
| Matemática y lenguaje y matemática constructura de lenguje | *P.M. González* |
| Códigos numéricos para la vida | *J. Beato* |
| Los números mórficos | *A. Redondo* |
| De SUMA a clase y de clase a SUMA | *G. Ramellini* |

suma+ 57
*Febrero 2008, pp. 9-22*

# Sobre el exilio matemático de la guerra civil española (y II)

*En el presente artículo se realiza un estudio sobre los matemáticos que emigraron de España a consecuencia de la guerra civil, que va acompañado de pequeñas biografías de la mayoría de ellos, y de un comentario sobre las razones que motivaron su marcha. El trabajo, centrado principalmente en los profesores de la Universidad de Madrid –entonces la más importante y con mayor poder de decisión–, se completa con un análisis de la situación matemática en las décadas anteriores, y con unas notas acerca de las depuraciones y cambios estructurales realizados al finalizar la contienda.*

*This article presents a study on the emigration of the Spanish mathematicians because of the civil war. Short biographies of most of these mathematicians are written explaining the reasons why they left. This work, focusing specially on the professors of the University of Madrid –the most important and influential at that time– also analyzes the situation of Spanish mathematics in previous decades, with some comments on the depurations and structural changes by the end of the conflict.*

## El exilio a Argentina

La mayoría de los intelectuales españoles exiliados se estableció en distintos países americanos; buena parte de los ellos lo hizo en México, y el resto en Argentina, Chile, Colombia, Cuba, República Dominicana, Venezuela y Estados Unidos. Y la acogida de unos y otros generalmente estuvo propiciada por el prestigio particular del personaje, por conexiones profesionales creadas antes de la contienda, por relaciones personales con otros intelectuales ya instalados en esos países o, cuando menos, fue amparada por la mediación de instituciones especialmente creadas con ese objetivo.

A Argentina, en concreto, se desplazó un número considerable de científicos, humanistas y, en fin, diversas personalidades del mundo de la cultura o la política, algunos de ellos de gran relevancia. Por ejemplo, Luis Jiménez de Asúa o Francisco de Ayala, catedráticos de Derecho; el historiador Claudio Sánchez-Albornoz, ex-rector de la Universidad de Madrid y ministro republicano; Niceto Alcalá-Zamora, ex-presidente de la República; Felipe Jiménez de Asúa, catedrático de Medicina; Ángel Ossorio y Gallardo, presidente de la Academia de Jurisprudencia y del Ateneo de Madrid; etc.

El número de matemáticos que emigró a Argentina no parece que haya sido muy elevado, aunque en torno a Rey Pastor se reunió un grupo muy brillante de jóvenes matemáticos que ya

> *El número de matemáticos que emigró a Argentina no parece que haya sido muy elevado, aunque en torno a Rey Pastor se reunió un grupo muy brillante de jóvenes matemáticos que ya despuntaban en España.*

Nota de la Redacción: Este artículo reproduce el publicado en la revista *Hispania Nova* y con el permiso de ésta:

"Sobre el exilio matemático de la guerra civil española" en Gálvez, Sergio (Coord.), *Generaciones y memoria de la represión franquista: un balance de los movimientos por la memoria.* Dossier monográfico *Revista de Historia Contemporánea Hispania Nova*, ISBN: 1138-7319 *http://hispanianova.rediris.es/6/dossier/6d026.pdf*

La pimera parte apareció en el número 56, de noviembre de 2007.

**Javier Peralta**
*Universidad Autónoma de Madrid*

despuntaban en España; alguno de los cuales alcanzaría más tarde renombre internacional. Me refiero en particular a Lluis Santaló, Manuel Balanzat, Ernest Corminas y Pere Pi Calleja, de los que Rey ya conocía su valía matemática; aquéllos, bajo la dirección del maestro, crearían en los años siguientes una auténtica escuela matemática de gran influjo en la matemática argentina. Conviene precisar además que fue Rey Pastor quien propició el viaje a Buenos Aires, parece ser que corrió con los gastos del mismo e incluso les ayudó a buscar puestos de profesor en distintas universidades argentinas.

También emigraría a Argentina otro ilustre matemático del que más tarde hablaré: Francisco Vera, que asimismo sería ayudado por Rey Pastor. Sin embargo, por su edad –llegaría con más de cincuenta años–, su situación científica –desembarcó siendo ya una figura consagrada– y su especialización –destacó fundamentalmente en historia de la ciencia–, su caso es muy diferente al de los anteriores, y no parece deba ser incluido en el mismo grupo.

*También emigró a Argentina otro ilustre matemático Francisco Vera que destacó fundamentalmente en historia de la ciencia.*

El primero en marchar fue **Manuel Balanzat de los Santos**. Nacido en Bargas (Toledo) en 1912, Balanzat estudia Ciencias Exactas en la Universidad de Madrid y obtiene una beca durante los últimos cursos de licenciatura y los años de realización del doctorado en el Laboratorio Seminario Matemático. Se traslada a París, también con una beca de posgrado de la JAE, en donde trabaja con Fréchet en 1934 y 1935 en la teoría de espacios topológicos.

Durante la guerra civil combate en el frente, en el bando republicano, en diferentes batallas, y finalizada la contienda se exilia a París. Con la ayuda de Rey Pastor marcha a Buenos Aires, y se incorpora unos meses a su Universidad en el Seminario de Matemáticas que dirige aquél. En 1940 se establece en la Universidad Nacional de Cuyo, y es uno de los fundadores del Instituto Nacional del Profesorado, en donde imparte cursos dirigidos a profesores de enseñanza secundaria.

Desde entonces hasta prácticamente el final de sus días publica numerosos artículos de investigación y diversos libros, como *Introducción a la Matemática Moderna*, editado en 1946 (se adelanta en unos quince años a la tendencia de la denominada Matemática moderna, que se extenderá por todo el mundo) o *El número natural y sus generalizaciones* (1953). En 1955 inicia un recorrido que le llevará a trabajar en distintos centros: primero, como profesor y jefe de la sección de Matemáticas del Instituto de Física de San Carlos de Bariloche; después, de 1960 a 1962, es invitado por la Universidad de Caracas, donde imparte cursos de Análisis matemático, Análisis funcional y Teoría de distribuciones; más tarde, de 1962 a 1966, se traslada a Francia y es profesor de la Universidad de Clermont-Ferrand; y finalmente regresa a Argentina y toma posesión de la cátedra de Análisis matemático de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Buenos Aires para trabajar en ella hasta su jubilación, en la que continúa después en activo como profesor emérito.

Balanzat fue también miembro de la Academia de Ciencias de Buenos Aires y ocupó diversos cargos de representación, como los de secretario y vicepresidente de la Unión Matemática Argentina. Falleció en Buenos Aires en 1994.

El siguiente matemático en llegar a Argentina de los más arriba citados, y con toda seguridad el de mayor relieve, es Luis **Antonio Santaló Sors**, de quien a continuación haré una breve semblanza[1].

Luis Antonio Santaló (1911-2001)

Santaló nace en Gerona en 1911 y después de cursar la educación preuniversitaria en su ciudad natal se traslada a Madrid y estudia Ciencias Exactas, que finaliza en 1934. En la capital se instala en la Residencia de Estudiantes, en donde participa de su ambiente cultural, y entra en contacto con Rey

Pastor, quien jugará un papel importante en su vida futura. Trabaja en el Laboratorio Seminario Matemático, y en pocos meses se irá haciendo patente su valía; así, a pesar de su juventud, es vocal del Comité de Redacción de la *Revista Matemática Hispano-Americana*, junto a R. San Juan, S. Ríos, P. Puig Adam y T. Rodríguez Bachiller.

Al acabar la licenciatura había entrado como profesor en el Instituto Lope de Vega de Madrid pero, aconsejado por Rey Pastor, deja el Instituto y se traslada a Hamburgo, pensionado por la Junta, para trabajar con Blaschke. Bajo la dirección de este último, y avalada por Pedro Pineda, catedrático de Geometría diferencial, presenta la tesis en la Universidad Central, que trata de Geometría integral, y en cuyo campo Santaló sería más tarde una de las mayores autoridades mundiales (según Chern fue el líder de la Geometría integral desde 1950).

Poco después estalla la guerra civil, es reclutado en la Aviación y da clases de Matemáticas para la formación de nuevos mandos en la Aviación republicana. Más tarde se exilia a Francia y es internado en un campo de concentración, de donde se escapa, y finalmente llega a París con la ayuda de sus dos maestros: Rey y Blaschke, así como de Cartan. Luego se embarcará en Burdeos con rumbo a Argentina, y el 12 de octubre de 1939 es recibido en Buenos Aires por Balanzat, con quien establecería una gran amistad a lo largo de su vida.

Rey Pastor le había buscado el puesto de investigador principal en el recién creado Instituto de Matemática de la Universidad Nacional de Litoral, en Rosario, del que es subdirector bajo la dirección de Beppo Levi, y allí continuará hasta 1949. En 1948 visita con una beca Chicago y el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, donde coincide con Einstein, Gödel, Weyl… Aprovecha al máximo las oportunidades que se le brindan y escribe artículos de investigación de gran impacto.

Aunque recibe varias ofertas para quedarse en EEUU, vuelve a Argentina para trabajar en la Facultad Físico-Matemática de la Universidad Nacional de la Plata como profesor de Matemáticas superiores. En 1957 se traslada a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Buenos Aires, en donde realiza una importante labor docente e investigadora, y en 1976, a su jubilación, es nombrado profesor emérito; situación en la que continúa dirigiendo trabajos de investigación y dando conferencias y cursos a profesores.

Su impresionante producción científica abarca –según él mismo afirma– los siguientes campos: Geometría integral, Geometría diferencial, Geometría de los cuerpos convexos, Teoría de números, Probabilidades geométricas y Teoría del campo unificado; a los que habría que añadir Educación matemática, así como otros diversos trabajos de divulgación matemática de gran interés. En total, escribió casi doscientos cincuenta artículos; veinticinco libros (*Introduction to Integral Geometry*, *Geometrías no euclidianas*, *Geometría Proyectiva*, *Geometría Espinorial*, *Integral Geometry and Geometric Probability*…), algunos de ellos traducidos a varios idiomas, y dirigió doce tesis doctorales.

Fue académico titular de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y de la Academia Nacional de Educación, ambas de Buenos Aires; académico correspondiente de las Academias de Ciencias y Artes de Barcelona, Córdoba (Argentina), Lima (Perú) y Madrid y Miembro honorario de la Academia de Ciencias de América Latina; y ocupó la vicepresidencia y presidencia de la Unión Matemática Argentina y de la Academia de Ciencias Argentina. Fue investido doctor honoris causa por diez universidades: Buenos Aires, Politécnica y Autónoma de Barcelona, Sevilla… y un largo etcétera.

> *Su producción científica abarca: Geometría integral, Geometría diferencial, Geometría de los cuerpos convexos, Teoría de números, Probabilidades geométricas y Teoría del campo unificado; a los que habría que añadir Educación matemática.*

Aunque se ubicó definitivamente en Argentina, en donde se casó y tuvo tres hijas, es de destacar su añoranza por España, que se pone de manifiesto, por ejemplo, con motivo del regreso de Terradas de Argentina a España –de ello se hablará en páginas posteriores–; hecho sobre el que dirá años después[2]:

> En aquellos momentos envidié su suerte. Pensé que nos veríamos allí al cabo de poco. Pero el destino fue otro. No lo volví a ver… (Terradas falleció en 1950).

En cualquier caso, volvió algunas veces a su país para impartir distintas conferencias y asistir a diferentes congresos.

El 22 de noviembre de 2001, a los 90 años de edad, fallecería en Argentina *un hombre extraordinariamente afable, sencillo, caballeroso y delicado en su trato y nos distinguió a todos con una amabilidad nada forzada ni artificial*[3]; *de verdadero prestigio internacional y sin duda el matemático hispano más conocido en el mundo matemático extranjero.* (Rey Pastor, Álvaro Ude y José M.ª Torroja)[4]; *(…) un gran geómetra, una gran persona, un gran matemático (...)* (W. Benz), en quien se encuentra *(…) la conjunción del genio y el trabajador, el poeta y el científico, en un gran espíritu humano inigualable (…)*[5]. Así fue Luis Santaló.

**Ernesto Corominas Vigneaux** nace en Barcelona en 1913, en cuya Universidad estudia la licenciatura en Matemáticas y la carrera de Arquitectura. Al acabar los estudios comienza la guerra civil y se incorpora como oficial de zapadores el Ejército republicano; motivo por el cual tiene que exiliarse al acabar la contienda. Pasa primero a Francia, luego a Chile y más tarde, en 1941, a Argentina. Allí es contratado como profesor de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Cuyo, con sede en Mendoza, de reciente creación, en donde da clase de Estadística.

De 1941 a 1946 permanece en Mendoza, y luego se incorpora durante un año al Instituto de Matemática de Rosario. A continuación es contratado como *attaché de recherches* en el CNRS de Francia y pasa a trabajar en París con A. Denjoy, quien le dirige la tesis, que trata de teoría de la derivación y conjuntos ordenados. Más tarde, está un año en la Fundación Guggenheim en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton (1958) y luego se traslada a Venezuela, en donde trabaja cinco años como profesor de la Universidad Central de Caracas[6]. En 1964 se le nombra profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Lyon, en cuyo destino permanece como profesor emérito después de su jubilación en 1982; y acaba sus días en esa misma ciudad en 1992.

Corominas colabora activamente en el seno de la Unión Matemática Argentina, y su labor en Venezuela y Argentina, y también en la Universidad de Lyon, es pionera en algunos aspectos. Su obra, no muy extensa, versa principalmente sobre conjuntos ordenados y teoría de la derivación, y completa en cierta medida la debida a su maestro Denjoy[7].

Me ocuparé a continuación del último en llegar a Argentina, bajo el patrocinio de Rey Pastor, de aquel grupo de jóvenes matemáticos al que me referí con anterioridad[8].

**Pedro Pi Calleja** nace en Barcelona en 1907, y estudia Ciencias Matemáticas y Arquitectura en su ciudad natal. A continuación marcha a la Universidad de Berlín, en donde permanece los años 1933-1935 con una beca de la JAE, y recibe cursos de matemáticas de Schur y Bierberbach y cursos de arquitectura en la Technische Hochschule. Regresa a España, presenta su tesis doctoral, titulada *Convergencia de integrales dependientes de un módulo variable*, que es publicada en la Academia de Ciencias de Barcelona, y es nombrado profesor encargado de curso de la Universidad de Barcelona, y director de la sección de Matemáticas del Instituto de Estudios Catalanes a propuesta de Esteban Terradas. En estos años colabora con la Sociedad Matemática Española como vocal de su *Revista* –junto a Antonio Torroja Miret– en la ciudad de Barcelona[9].

Al comenzar la guerra civil coopera con el bando republicano como técnico de construcciones, y al finalizar la contienda se exilia a París y trabaja con Lebesgue en el Instituto Henri Poincaré. Luego contacta con Rey Pastor, y se embarca hacia Argentina en un accidentado viaje que dura más de un año, para llegar al fin a Buenos Aires en 1942. Con la ayuda de su maestro se le nombra profesor de Análisis matemático y Geometría descriptiva de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Cuyo, con sede en San Juan, en donde realiza una meritoria labor, que es resaltada en la *Revista de la Unión Matemática Argentina.* En esos años escribe algunos artículos en dicha publicación y en la *Revista de Matemáticas y Física Teórica de la Universidad Nacional de Tucumán*; así como varios libros, el más interesante de los cuales probablemente sea *Introducción al Álgebra vectorial* (1945).

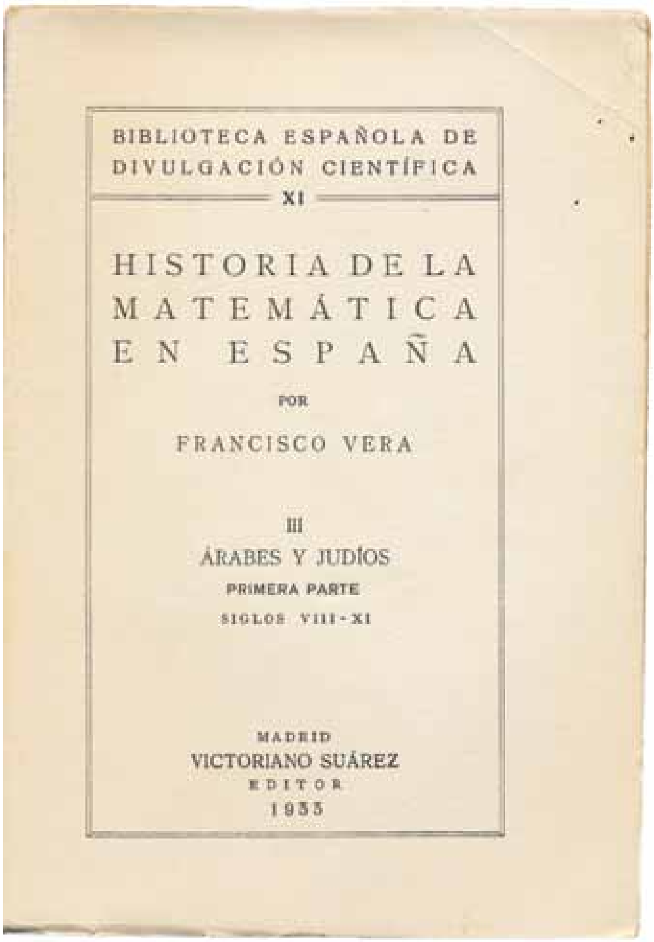
En 1949 se traslada a la ciudad de La Plata para trabajar en la Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas de su Universidad, en donde imparte los dos cursos de Introducción a la Matemática Superior (doctorado en Matemáticas) que desarrolla con gran competencia. Permanece allí siete años y escribe en ese periodo, en colaboración con Rey Pastor y César Trejo, su obra más importante: *Análisis matemático* I, II y III; texto y a su vez enciclopedia en el que se trata todo el Análisis matemático, clásico y moderno, desde una perspectiva muy actual. También durante ese tiempo tiene una destacada participación con la *Revista de la UMA*, y de 1953 a 1956 es secretario de la Unión Matemática Argentina.

En 1956 regresa a España y se presenta a diversas oposiciones. En 1958 es catedrático de la Universidad de Murcia de Análisis matemático I y II para desempeñar Matemáticas especiales; poco después es catedrático de Análisis matemático I y II de la Universidad de Zaragoza y, finalmente, catedrático de la Escuela Superior de Arquitectura de Barcelona, hasta su jubilación en 1970. Fallece en la Ciudad Condal en 1986.

En este entusiasta profesor habría que resaltar, a modo de resumen, no solo su faceta de matemático profundo, sus colaboraciones con distintas instituciones o su presencia en prestigiosos foros científicos (por ejemplo, desde 1974 era académico correspondiente de la Real Academia de Ciencias de Madrid). También son de subrayar sus excelentes dotes didácticas, de las que dejó constancia tanto en sus clases como en sus magníficos tratados matemáticos universitarios.

A continuación haré un breve apunte biográfico de **Francisco Vera Fernández de Córdoba**[10].

Francisco Vera, nacido en Alconchel (Badajoz) en 1888, fue matemático, periodista, filósofo y, principalmente, historiador de la ciencia. Pero antes de nada, posiblemente proceda señalar en relación con esa última faceta, que nunca escribió sobre historia sin contrastar la información, acudiendo constantemente a las fuentes iniciales; razón por la cual llegó a contrariar a otros autores no tan bien documentados [el caso más destacado a este respecto seguramente sea el de su conferencia, pronunciada en el Ateneo de Madrid, titulada *Los historiadores de la Matemática Española*, como réplica al discurso de recepción de Echegaray en la Real Academia de Ciencias: *De las Matemáticas puras en España* (1866), en el que este último afirmaba la inexistencia de matemáticos españoles de un cierto relieve; si bien asimismo intervino en alguna otra polémica desde las páginas del diario *El Liberal*].




*Historia de la Matemática en España*, de Francisco Vera

Vera era republicano, masón, teósofo, antifranquista y profundamente liberal, y fue condenado a muerte, entre otros motivos, por haber escrito el código criptográfico del Ejército republicano. Tenía razones por tanto para exiliarse, y así lo hizo a finales de enero de 1939, cuando se vislumbraba claramente la victoria de Franco. Su primer destino, como el de casi todos los emigrantes republicanos, fue Francia (en su caso, probablemente influyera asimismo en esta decisión el hecho de haber estado trabajando en París anteriormente, de 1912 a 1914, en la editorial Hispano-Americana); y de allí se trasladó a la República Dominicana, en algunos de cuyos periódicos (*La Opinión*, *Listín Diario*…) existen testimonios de la buena acogida que se le dispensó.

A su esposa, sin embargo, no le iba bien la altura de ese país, motivo por el cual decide marchar en 1941 a Colombia, en donde trabaja como profesor de la Universidad Nacional y la Escuela Normal Superior, ambas de Bogotá, además de impartir numerosos cursos y conferencias. De allí se desplaza a Cuba, Brasil y otras naciones iberoamericanas, hasta que en 1943 se instala en Argentina, donde es recibido y ayudado por Rey Pastor. Es entonces profesor de la Universidad de La Plata y del Colegio de Estudios Superiores, y poco después profesor de la Universidad de Buenos Aires, ciudad en que ya fija su residencia hasta su fallecimiento en 1967.

*Vera era republicano, masón, teósofo, antifranquista y profundamente liberal, y fue condenado a muerte, entre otros motivos, por haber escrito el código criptográfico del Ejército republicano.*

Antes de su exilio Vera había sido director de *Anales de la Universidad de Madrid*, y a lo largo de su vida escribe más de treinta y cinco obras sobre Matemáticas, Historia de la Ciencia y Filosofía científica; labor que, como se ha dicho, se extiende también como periodista y articulista (son de mencionar, por ejemplo, sus interesantes crónicas en relación con la estancia de Einstein en Madrid en 1923 y la teoría de la relatividad); además de como divulgador científico y excelente conferenciante. De su inmensa producción científica destacaré lo que me parecen sus cuatro contribuciones más destacables: su tesis, debidamente argumentada, de la existencia de matemáticos españoles de algún relieve a lo largo de la historia; el haber descubierto que Fibonacci podría haber copiado diversas ideas y ejemplos del judío catalán Savasorda; la lucidez con que vislumbró la importancia futura de la Topología –materia que sólo desde 1942 había tomado carta de naturaleza– al incluir un capítulo sobre esta materia en su *Breve historia de la Geometría* (1948); y, por último, sus excelentes tratados sobre Historia de la Ciencia.

## El exilio a otros países

Como de algún modo ya se ha dicho, la mayoría de los matemáticos que emigraron a causa de la guerra civil se marchó en un primer momento a Francia; sin embargo, más tarde casi todos se trasladarían a América. De estos últimos, el exilio más importante se localizó en México y, en menor parte –si bien, muy cualificado–, lo hizo en Argentina. Aunque también hubo algunos que se refugiaron en otros países americanos, principalmente en la República Dominicana.

Uno de los que se quedaron en Francia fue un interesante personaje que, al menos institucionalmente, estuvo muy vinculado a nuestra comunidad matemática: el general **Emilio Herrera Linares**. Nacido en Granada en 1879, estuvo estrechamente ligado al inicio de la aeronáutica española; así, fue jefe del aeródromo de Cuatro Vientos y director de la Escuela Superior Aerotécnica, y a él se debe el proyecto e instalación del primer túnel aerodinámico existente en España, en el que Juan de la Cierva estudió los rotores de sus primeros autogiros.

El general Herrera también fue miembro de la Real Academia de Ciencias de Madrid, y uno de los personajes destacados de nuestra vida matemática, pues ocupó una de las vicepresidencias de la Real Sociedad Matemática Española bajo el mandato de Octavio de Toledo. [Hay por cierto un hecho curioso en relación con su actividad en la Sociedad que no me resisto a contar, y es el siguiente: en la sesión del 14 de abril de 1928, Herrera comunica que la sección de Aeronaútica (?), *a través de los señores Herrera y Kindelán, ha puesto a disposición de la Sociedad un globo libre para la realización de pruebas científicas*[11]; recurso que sin duda debió de ser utilizado a suma satisfacción, puesto que en el acta del 5 de mayo de ese año se da cuenta del cumplimiento de esa extraña actividad matemática en estos términos[12]: *Se comunica a la Sociedad que (...) se realizó con toda felicidad la excursión en globo libre (…) y se acordó dar las gracias al coronel Kindelán y al General Director de Preparación en campaña por las facilidades que dieron y la acogida que dispensaron a los expedicionarios*].

En el inicio de la guerra civil Herrera se encontraba en Santander dictando el curso *Aerodinámica y Aviación* en la Universidad Internacional de Verano, y acompañó a su rector Blas Cabrera en la evacuación del personal de la misma[13]. Aunque monárquico –había sido gentilhombre de cámara del rey Alfonso XIII–, permaneció fiel a la República y se incorporó en los primeros meses de la contienda a su destino en Madrid. Al finalizar la guerra se exilió en París y colaboró activamente en el seno de la Unión de Intelectuales Españoles, con el Instituto de Estudios Hispánicos de la Sorbona, con las revistas *L'Espagne Républicaine* e *Independencia*[14]… Nombrado socio de honor del Ateneo Español de México, en los últimos años de su vida fue jefe del Gobierno republicano en el exilio, y falleció en Ginebra en 1967.

Retomando el asunto planteado en esta sección, me ocuparé ahora de los refugiados en la República Dominicana; de los que hay que decir en primer lugar que la mayoría de ellos llegaron en expediciones colectivas sufragadas por el Servicio de Evacuación de Republicanos Españoles. En total, los emigrados a este país debieron ser del orden de unos cuatro mil; número muy elevado si se tiene en cuenta que allí estaba implantado un régimen dictatorial, encabezado por Trujillo (nótese a este respecto que, sin embargo, otros Gobiernos iberoamericanos más o menos democráticos impidieron la entrada de exiliados republicanos o la limitaron a casos individuales). No obstante, conviene precisar que la emigración a la República Dominicana fue muchas veces pasajera, dada la escasez de recursos del país y la consiguiente dificultad para encontrar trabajo[15].

Posiblemente el matemático más importante de los que se refugiaron inicialmente en esa nación haya sido Francisco Vera; si bien estuvo además en otros países, especialmente en Argentina, en donde pasaría la mayor parte del exilio; razón por la cual ha sido incluido en la sección precedente. El resto de los emigrados a la República Dominicana tienen una menor proyección científica; además, en general, no destacaron estrictamente en Matemáticas, sino en áreas colindantes, como Astronomía, Topografía o Cartografía.

*El general Herrera también fue miembro de la Real Academia de Ciencias de Madrid, y uno de los personajes destacados de nuestra vida matemática, pues ocupó una de las vicepresidencias de la Real Sociedad Matemática Española bajo el mandato de Octavio de Toledo.*

El más sobresaliente de esos últimos es **Amós Sabrás Gurrea**, nacido en Logroño en 1890 y fallecido en Santo Domingo en 1967. Sabrás fue catedrático de Matemáticas de Instituto, en Huelva, Madrid y Barcelona, siendo elegido en 1933, precisamente, presidente de la Asociación de Catedráticos de Instituto. También fue vocal y, desde principios de 1935 hasta el comienzo de la guerra, vicepresidente de la Sociedad Matemática Española bajo la presidencia de López Soler.

Tuvo cierta relevancia política, pues en las elecciones municipales del 12 de abril del 31 que trajeron la República, fue elegido concejal de Huelva, y luego alcalde de la ciudad, cargo del que dimitió para presentarse a diputado por Logroño por el PSOE. Resultó elegido, y en 1933 cambió esa circunscripción por la de la provincia de Huelva.

Después de la guerra civil emigró a la República Dominicana, y trabajó como profesor de Matemáticas y de Astronomía en la Universidad de Santo Domingo, y como profesor de la Escuela Superior de Peritos Contadores de esa ciudad. Fundó el laboratorio de Astronomía de la Universidad y desempeñó la jefatura del departamento de Astronomía y Geofísica del Instituto Geográfico de Santo Domingo[16].

Ese último Instituto había sido creado en 1940 por otro matemático e ingeniero militar español: **Ramón Martorell Otzet**, también exiliado a la República Dominicana. Nacido en Barcelona en 1901, se dedicó principalmente a la Cartografía, y falleció en México en 1967.

En la fundación del anterior Instituto colaboraron con Martorell otros dos refugiados: el teniente coronel de Estado Mayor Aurelio Matilla y el matemático **Domingo Martínez Barrio**[17]. El segundo, nacido en Madrid en el año 1900, sobresale principalmente en el campo de la Topografía; de él hay que decir que además de su trabajo en el Instituto Geográfico, fue profesor de Matemáticas en la Escuela Superior de Ciencias Económicas de Santo Domingo[18].

El último matemático emigrado a la República Dominicana del que tengo referencia es **José V. Montesino Samperio**, quien más tarde se trasladaría a Venezuela. Nacido en León en 1913, trabajó fundamentalmente en Estadística[19].

A Venezuela también se exilió **Ángel Palacio Gros**, matemático y profesor de la Universidad de Madrid, que fue condenado a varios años de cárcel por su participación militar al lado de la República. Al salir de la cárcel se marchó de España y fue profesor del Instituto Pedagógico Nacional y de la Universidad Central de Caracas, así como de la Universidad de Maracaibo. En su destierro escribió tres libros: *Apuntes de geometría del espacio y teoría geométrica de las secciones cónicas*, *Curvas planas y alabeadas y teoría de superficies* y *Ejercicios de Análisis matemático*; y los últimos años de su vida los pasó en España[20].

En otras naciones americanas distintas a las ya mencionadas no es fácil hallar matemáticos exiliados de la guerra civil. Tan solo he encontrado a estos dos: **José Riera Fernández**[21], nacido en la ciudad asturiana de Langreo en 1911 y emigrado a Bolivia, en donde fue profesor de la Universidad de San Andrés, en La Paz, y director del Instituto Español de Bolivia; y el también ingeniero **Juan Serrallos**, nacido en 1896 en Barcelona y exiliado a Estados Unidos[22].

Por último, acaso debieran citarse asimismo dos personajes muy significados en el campo de la Filosofía: **José Ferrater Mora** y **Juan David García Bacca**, por sus aportaciones a la Lógica matemática, disciplina sobre la que prácticamente no se había investigado en España desde su introducción por Ventura Reyes y Prósper a finales del siglo XIX[23]. El primero de los anteriores, nacido en Barcelona en 1912, finalizaba sus estudios de Filosofía cuando estalló la guerra civil, y se exilió a Cuba (1939), Chile (1941) y Estados Unidos (1947)[24], y finalmente regresó a nuestro país; posiblemente su trabajo más conocido en el área mencionada sea el libro *Lógica matemática*, escrita en colaboración con Huges Leblanc. De García Bacca[25], nacido en Pamplona en 1901 y exiliado a Ecuador (1939), México (1942) y Venezuela (1947), hay que destacar sus dos obras: *Historia filosófica de las Ciencias* e *Introducción a la lógica matemática.*

> *Además de los aproximadamente cien catedráticos que se exiliaron, unos cien, que permanecieron en España, fueron sancionados o sujetos a proceso. Parece evidente que la Universidad española quedó en una triste situación y que el Gobierno franquista hubo de acometer una importante reorganización, que asimismo se extendió a la mayoría de las restantes instituciones científicas.*

## Termina la guerra

Pedro Sáinz Rodríguez había sido nombrado ministro de Instrucción Pública del primer Gobierno franquista el 17 de febrero de 1938, y duró en el cargo hasta el 28 de abril de 1939, en que se hizo cargo del Ministerio Tomás Domínguez Arévalo, conde de Rodezno, a la sazón primer ministro de Justicia de Franco. Al abandonar este último el Ministerio, el 9 de agosto de 1939, el departamento pasó a llamarse Ministerio de Educación Nacional, y se puso a su frente, hasta el 19 de julio de 1951, a José Ibáñez Martín, catedrático de Geografía e Historia del Instituto San Isidro de Madrid.

Sobre las normas legislativas al finalizar la guerra civil y durante los meses posteriores, referentes a los profesores, hay que decir que en el BOE del 3 de febrero de 1939 se disponía que los funcionarios del Ministerio de Instrucción Pública que hasta ese momento no hubieran pedido su rehabilitación o no se hubiera resuelto su expediente, debían pedir su reingreso antes del 18 de julio. Además, por Órdenes del 4 y 22 de febrero de 1939, no pocos catedráticos que se habían ido exiliando desde el comienzo de la guerra son expulsados, y también un número respetable de aquellos que se quedaron en España son encarcelados o apartados del servicio. A todo ello habría que añadir que en la Ley de 10 de febrero y en la Orden de 18 de marzo de 1939 se especificaba igualmente que la pasividad de quienes no hubieran colaborado con la victoria de los vencedores, pudiéndolo haber hecho, sobrellevaría una sanción grave; asimismo, el ministro de Instrucción Pública creaba la Comisión Superior Dictaminadora de los expedientes de depuración y se precisaba el procedimiento para tales depuraciones.

Para hacerse una idea de cuál era el número de catedráticos existentes al finalizar el conflicto armado, habría que tener en cuenta entonces, además de los aproximadamente cien que se exiliaron, cuántos fueron separados de su cátedra. Según manifiesta el doctor José Puche Álvarez –catedrático de Medicina y exrector de la Universidad de Valencia, separado del servicio el 29 de junio de 1939 y emigrado a México– en una carta a Ernesto García Camarero[26], del total de catedráticos de Universidad que permanecieron en España, unos cien fueron sancionados o sujetos a proceso; y estas cifras no varían sustancialmente en otros autores. Así, por ejemplo, J. Claret[27] considera que los aproximadamente 600 catedráticos (entre activos y excedentes) que había antes de la contienda se quedaron en 1940 en poco más de 380; y el mismo autor recoge otras opiniones parecidas[28] como las de S. Riera quien afirma[29] que de 575 catedráticos en activo y 40 excedentes en 1935 se habría pasado, respectivamente, a 319 y 20 en 1940; etc. V. Lloréns, por su parte, estima que la cifra inicial estaría comprendida entre 500 y 575, y que después de la guerra, a consecuencia de la emigración, la jubilación, la destitución o la defunción por muerte natural o violenta –especialmente significativos son los fusilamientos de los rectores de Oviedo: Leopoldo Alas (hijo de Clarín) y de Granada: Salvador Vila-, la cantidad se habría reducido aproximadamente a la mitad[30].

En cualquier caso, parece evidente que la Universidad española quedó en una triste situación y que el Gobierno franquista hubo de acometer una importante reorganización, que asimismo se extendió a la mayoría de las restantes instituciones científicas.

Por si fuera poco lo anterior, hay que añadir a todo ello que además pudo adoptarse alguna otra medida represiva particular contra aquellos profesores que estuvieran sometidos a sospecha. Tal es, por ejemplo, la decisión de la primera Junta de Gobierno de la Universidad de Madrid, que después de felicitar *al Ejército Nacional y a su Invicto Caudillo* y recordar a los docentes *fallecidos durante la dominación del Gobierno rojo*, acuerda la reducción del cincuenta por ciento de los haberes a los profesores con expedientes abiertos aún sin resolver[31]. (He de advertir que buena parte de los datos de los que dispongo se refieren a la Universidad Central y otras instituciones madrileñas –por otro lado, las de mayor significación científica de España–; razón por la cual es probable que las omisiones que pudieran producirse en el futuro afecten prioritariamente a universidades y corporaciones correspondientes a otras provincias.)

En algunas áreas, como Físicas, tales medidas produjeron un cambio radical en las instituciones dedicadas a su estudio e investigación. Así por ejemplo, en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid, en donde residía en mayor medida su poder científico, el único catedrático de la sección de Físicas que colaboró con los vencedores fue Julio Palacios Martínez (1891-1970), catedrático de Termología. De los cuatro restantes de esta sección, Blas Cabrera, Arturo Duperier, Miguel Catalán y Esteban Terradas, los dos primeros se habían exiliado y fueron expulsados, Catalán colaboró con el bando nacional en tareas humanitarias, pero al final de la guerra fue sancionado, y Terradas se encontraba fuera de España y, como enseguida se verá, tardaría alrededor de un año en volver.

> *El general Herrera también fue miembro de la Real Academia de Ciencias de Madrid, y uno de los personajes destacados de nuestra vida matemática, pues ocupó una de las vicepresidencias de la Real Sociedad Matemática Española bajo el mandato de Octavio de Toledo.*

Entre los matemáticos, sin embargo, la represión y sus efectos derivados en las instituciones correspondientes no fueron tan importantes; acaso porque la mayoría de sus personajes más ilustres, al menos en la Universidad de Madrid, no parece que se significara social ni políticamente. Pero comencemos recordando quiénes eran los catedráticos de la sección de Matemáticas de su Facultad de Ciencias[32]: Faustino Archilla y Salido, Geometría de la posición; José Gabriel Álvarez Ude, Geometría descriptiva; Sixto Cámara Tecedor, Geometría analítica; Daniel Marín Toyos, Análisis matemático 3º: Ecuaciones diferenciales), José Barinaga Mata (Análisis matemático), Pedro Carrasco Garrorena (Física matemática), Francisco de Asís Navarro Borrás (Mecánica racional), Pedro Pineda Gutiérrez (Geometría diferencial), Olegario Fernández Baños (Estadística matemática), Tomás Rodríguez Bachiller (Análisis matemático 4º: Teoría de las funciones) y Ricardo San Juan Llosá (Análisis matemático).

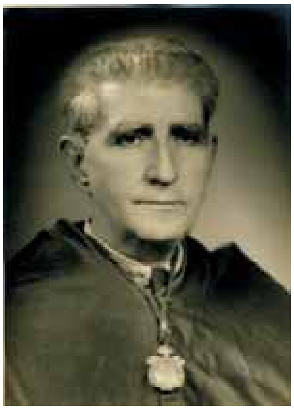
De todos los anteriores sólo se exilió Pedro Carrasco, que fue separado del servicio, junto a Honorato de Castro –y otros científicos como Moles o Bolívar– el 4 de febrero de 1939 (BOE del 7 de febrero), por los *antecedentes completamente desfavorables y en abierta oposición con el espíritu de la nueva España* de los encausados[33]; y expulsado, en compañía de Honorato de Castro y otros profesores universitarios el 29 de julio de 1939, por su *desafección al nuevo Régimen* y por la *pertinaz política antinacional y antiespañola en los tiempos precedentes al Glorioso Alzamiento Nacional*[34].

Respecto de los catedráticos universitarios de Matemáticas que se quedaron en España, el que considero caso más significativo de los que tengo información es el de Roberto Araujo García, catedrático de Análisis matemático de la Universidad de Valencia, parece ser que comprometido con el bando republicano[35], y uno de los diecinueve profesores sancionados –doce de ellos catedráticos– de esa Universidad. Así, aunque el 11 de junio de 1939 la Auditoría del Ejército no encuentra en su caso *materia delictiva*, el 7 de diciembre se le abre expediente, y el 4 de julio de 1940 (BOE del 16 de julio) se le separa del servicio y se le condena a seis años y un día de prisión[36] por *auxilio a la rebelión* y por haber ocupado el cargo de interventor del Patronato universitario el 5 de marzo de 1938. El juez instructor le acusa entonces de vinculación con el Partido Radical Socialista, de colaboración con las izquierdas en general y de ser protestante; argumentos que Araujo contesta desde la prisión, aduciendo que las imputaciones corresponderían más bien a *una apreciación puramente subjetiva del Juzgado*. En definitiva, no se le reintegrará al servicio hasta el 17 de julio de 1946, una vez finalizada la condena[37].

Araujo, que había trabajado con Rey Pastor en la Laboratorio Seminario Matemático, es una de las jóvenes promesas de nuestra vida matemática[38] cuando nace la Sociedad Matemática Española (escribe, por ejemplo, “Homología de superficies de segundo orden” en el primer número de su *Revista*[39]). Había obtenido la cátedra del Instituto de Granada en 1921, antes de ser catedrático de la Universidad de Valencia y, desde ésta, se trasladó a la Universidad de Zaragoza una vez terminada la sanción impuesta al acabar la guerra. Sobre él se pronunciaba entrañablemente el Prof. J. J. Etayo, alumno suyo en Zaragoza:

> ¡Qué excelente persona D. Roberto! Hombre bondadoso, entregado a nosotros y a quien seguramente no supimos aprovechar bien. Todavía, de tarde en tarde, me obsequiaba con su visita en la Facultad de Madrid, a donde solía ir para hurgar con su inveterada costumbre en la biblioteca, y así se me une ahora al primero este último recuerdo, en que le veo viejecito, fallándole a veces la memoria, pero interesado y cariñoso y con una suerte de halo poético que nunca le faltó. Algún día desapareció suavemente, como siempre hacía, y nadie supimos cuándo ni cómo. Quede para él este recuerdo profundo y vivamente afectuoso[40].

Otro de los relevantes matemáticos sancionados es el vallisoletano José Barinaga Mata (1890-1965), sucesor de Octavio de Toledo, desde 1931, en la cátedra de Análisis matemático de la Universidad Central. Barinaga, de quien ya se ha hablado, pasó toda la guerra en Madrid; fiel al Gobierno de la República fue separado del servicio y su expediente se trasladó al Tribunal de Responsabilidades Políticas correspondiente[41]. Había sido por ejemplo secretario general de la Universidad de Madrid desde septiembre de 1938, y profesor del Instituto Obrero de Madrid[42]; y es definido por sus acusadores como *uno de los más exaltados revolucionarios*[43]. En consecuencia, fue separado del servicio durante una larga etapa, por lo que tuvo que volver *(...) a sus 49 años (...) a ganarse la vida en las academias preparatorias de su juventud, y así durante casi siete años, hasta su rehabilitación en 1946*[44].



José Barinaga Mata

Menos grave, sin duda, fue la sanción impuesta al madrileño José Gabriel Álvarez Ude (1876-1958), catedrático de Geometría descriptiva de la Universidad Central, acusado de haber sido de izquierdas en su juventud y amigo íntimo de Ángel Ossorio y Gallardo (que había pasado del conservadurismo monárquico a embajador durante la República, exiliado a Argentina). Sin embargo, aunque el imputado negó los cargos, se definió como persona de derechas y católica y refirió la

*Barinaga pasó toda la guerra civil en Madrid; fiel al Gobierno de la República, fue separado del servicio y su expediente se trasladó al Tribunal de Responsabilidades Políticas correspondiente. Había sido secretario general de la Universidad de Madrid desde septiembre de 1938, y profesor del Instituto Obrero de Madrid; sus acusadores lo definen como uno de los más exaltados revolucionarios.*

relación con Ossorio a los años de su juventud anteriores a la Dictadura de Primo de Rivera en que ambos militaban en el Partido de Acción Social Popular, se le suspendió de empleo y no se le reintegró a su cátedra hasta el 14 de mayo de 1941 (la resolución apareció en el BOE del 14 de junio[45]).

Álvarez Ude, *la mejor cabeza matemática que en mi larga vida he conocido*[46], según dice Rey Pastor, tiene sin embargo una escasa producción científica, debida *al horror a la publicidad y a sus impresionantes rigor matemático y sentido autocrítico, que le hacen infravalorar la originalidad y profundidad de sus ideas*[47]. Aunque no tiene reparos algunas veces en expresar sus ideas fuera de España, y así, por ejemplo, corrige en una ocasión la solución que Barisien dio a un problema de Brocard (finalmente ambos, aconsejados por Retali, más tarde le darían la razón[48]).

Pero volvamos ahora a un planteamiento más general, no circunscrito exclusivamente al caso de los matemáticos. El ministro Sáinz Rodríguez nombra decano de la Facultad de Ciencias de Madrid al catedrático de la sección de Químicas Luis Bermejo Vida (antes de la guerra, como se ha visto, el cargo lo ocupaba Pedro Carrasco). Y los cambios afectarán a la mayoría de las Facultades y Universidades; como la Universidad Central, cuyo rector José Gaos –autor del término *transterrados* para designar a lo exiliados–, emigrado a México, fue sustituido por Pío Zabala.

En fin, no me entretendré más en las variaciones en la cúpula de buena parte de las instituciones científicas, y me referiré únicamente a dos de las mencionadas en páginas anteriores: la Escuela Superior Aerotécnica, regida por el luego exiliado Emilio Herrera -y cuyo profesorado, generalmente compuesto por militares de Aviación, había quedado casi en su totalidad fiel a la República-, y para cuya dirección fue nombrado el general Vicente Roa Miranda; y la Real Academia de Ciencias, de la que fue despojado de su puesto el anterior presidente, Blas Cabrera y, junto a él, otros académicos, como Emilio Herrera o Enrique Moles.

Otras corporaciones sufrieron alteraciones más profundas, como la JAE, que el 24 de noviembre de 1939 fue disuelta y también creado su heredero: el Consejo Superior de Investigaciones Científicas (dos días después se nombró al personal directivo de su Instituto Jorge Juan de Matemáticas, con Rey Pastor como director; José María Orts Aracil, catedrático de la Universidad de Barcelona, como vicedirector; Francisco Navarro Borrás, catedrático de la Universidad Central, como secretario y Ernesto de Cañedo-Argüelles, catedrático de la Escuela de Ingenieros de Montes de Madrid, como vicesecretario). Asimismo, el 8 de diciembre de 1937, fecha elegida para colocar *la vida doctoral bajo los auspicios de la Inmaculada Concepción de María*[49], fue vuelto a crear por el Gobierno de Burgos el Instituto de España.

Igualmente cambió la presidencia de la Sociedad Matemática Española, que Barinaga había ocupado durante la contienda, y pasó a dirigirla López Soler, su anterior presidente. Por cierto, probablemente sea oportuno hacer constar a este respecto, tanto el acierto y el pundonor de Barinaga en el mantenimiento de la Sociedad mientras duró la guerra, como la importante labor desarrollada por López Soler, que supo conducirla en épocas políticamente muy inestables: antes y después del conflicto armado, defendiendo la institución por encima de los serios avatares que acontecieron[50].

> *La Junta de Apliación de Estudios, fue disuelta el 24 de noviembre de 1939 . Su heredero: el Consejo Superior de Investigaciones Científicas fue creado el mismo día. Para su Instituto Jorge Juan de Matemáticas, fue nombrado Rey Pastor como director y José María Orts Aracil, catedrático de la Universidad de Barcelona, como vicedirector.*

Pese a todo lo dicho anteriormente, a lo que quizás cabría agregar algún otro caso de importancia menor, como el de Ricardo San Juan, catedrático de Análisis matemático de la Universidad Central, a quien el Tribunal de Responsabilidades Políticas de Madrid le abre expediente, que finalmente se resuelve con sentencia absolutoria; creo poder afirmar a modo de resumen que, salvo algunas situaciones aisladas, la gran mayoría de los catedráticos universitarios de Matemáticas que permaneció en España pasaría su depuración sin mayores problemas. En particular, la rehabilitación fue inmediata para aquellos que habían sufrido sanciones republicanas o tenían un pasado conservador. Tales son los casos de Daniel Marín Toyos, catedrático de Ecuaciones diferenciales de la Universidad Central, que es cesado por la República el 24 de septiembre de 1937 y readmitido el 28 de octubre de 1939; o, por ejemplo, de Pedro Pineda Gutiérrez y Sixto Cámara Tecedor, catedráticos, respectivamente de Geometría diferencial y Geometría analítica de esa Universidad, que son confirmados en sus cátedras el 4 de septiembre de 1939 (BOE del 18 de septiembre); etc.

Terminaré este apartado haciendo una breve mención a la situación después de la contienda de dos ilustres personajes: Esteban Terradas y Julio Rey Pastor, que pasaron la guerra civil en Argentina.

Ambos profesores, como era preceptivo, elevaron los correspondientes escritos al ministro de Instrucción Pública, explicando su actuación durante la guerra y solicitando su reingreso en los puestos que ocupaban anteriormente; aunque la situación de ambos, a tenor de lo prescrito por la Ley de Responsabilidades Públicas, podría ser delicada, pues ninguno de ellos hizo intento alguno por volver a la España Nacional para contribuir al desarrollo del Movimiento. No obstante, gracias en buena medida a las gestiones de Julio Palacios –que en marzo de 1939 había sido recompensado por su actitud durante el conflicto armado con el vicerrectorado de la Universidad de Madrid, y en julio con la vicepresidencia del Instituto de España; si bien en 1944 sería cesado en todos sus cargos y confinado a Almansa por firmar, junto con otros intelectuales, el *Manifiesto de Lausanne* en apoyo de Don Juan–, y a la conveniencia de su regreso para la reorganización de la vida científica, son rehabilitados sin mayores dificultades a sus respectivas cátedras (en el caso de Terradas, el 3 de febrero de 1940 se reincorpora a su cátedra de Madrid, de la que el 23 de septiembre de 1931 había sido desposeído por la República por *influencias de elementos políticos de extrema izquierda*[51]).

Tras una breve estancia en Madrid en 1940, Terradas se establece definitivamente en 1941 aunque, no obstante las promesas recibidas, no se le autorizaría a partir de entonces simultanear las estancias y docencia en España y Argentina. Rey Pastor, sin embargo, no se decidirá todavía a regresar, pero se le permite seguir ausente hasta que finalmente vuelve en 1948, a su edad de jubilación; entonces, *como si no hubiera pasado nada, pondrán a su disposición Facultades, Escuelas de Ingenieros, Instituto de Investigación, etc.*[52].

## Nota final

Si bien no tengo suficiente información sobre la existencia de reconocimientos académicos o sociales a los matemáticos exiliados, no querría terminar este trabajo sin exponer los datos de los que dispongo relativos a varios de los personajes más importantes de la emigración aquí citados. He de advertir, sin embargo, que no me parece probable que todos ellos hayan recibido un merecido homenaje.

Diré en primer lugar que no voy a incluir los casos de Terradas ni Rey Pastor ya que, como se ha visto, no pueden ser considerados como exiliados republicanos; además, los dos regresaron en plena dictadura, y se reintegraron a su vida académica en España con relativa normalidad.

Comenzaré con el físico Blas Cabrera y con alguno de los actos en su honor de los que ha sido objeto; aunque me centraré en aquellos –posiblemente los más emotivos– celebrados en Canarias[53]. Así, por ejemplo, Arrecife, su ciudad natal, además de erigir un monumento en su memoria, puso el nombre de *Blas Cabrera Felipe* a un instituto (1974); la Universidad Internacional de las Palmas *Pérez Galdós* le rindió un sentido homenaje en el primer centenario de su nacimiento (1978); etc.

Pero acaso los acontecimientos más relevantes hayan sido los dos siguientes. El primero de ellos tuvo lugar con ocasión del cincuenta aniversario de su muerte (1995), en cuya conmemoración se realizó la exposición *Blas Cabrera: vida y obra de un científico* y se celebró el Congreso *Blas Cabrera: su vida, su tiempo, su obra*. Como fruto de esta última iniciativa, la sociedad *Amigos de la Cultura Científica* ha editado su obra completa (alguno de sus tomos en colaboración con otras corporacio-

Albert Einstein en su visita a Madrid, es recibido por el Rey Alfonso XII.
Blas Cabrera es el segundo por la izquierda.

nes canarias o la Universidad Internacional Menéndez Pelayo) y ha propiciado la creación en Arrecife del Centro científico-cultural Blas Cabrera, auspiciado por el Cabildo de Lanzarote.

El segundo homenaje al que me refería es el realizado en 2002 en La Laguna por la cátedra *Blas Cabrera* (creada en el año 2000 en la Universidad de La Laguna), el Instituto "Cabrera Pinto" de esa ciudad (en donde estudió nuestro protagonista), junto a otras instituciones. En ese acto se erigió una escultura con su busto, se le nombró hijo adoptivo de la ciudad, se dedicó una calle a su nombre y la cátedra constituida en su memoria adoptó la decisión de organizar anualmente actividades culturales para mantener vigentes los valores defendidos por el padre de nuestra física.

Otro de los personajes no exactamente matemático, pero que mantuvo una estrecha relación con nuestra vida matemática, el general Emilio Herrera, también recibió un reconocimiento público de Granada, su ciudad natal, que se encargó de la repatriación y sepelio de sus restos mortales y le nombró Hijo Predilecto de la ciudad. Asimismo, para dar a conocer tanto su persona como su obra, en 1994, se constituyó la Fundación Emilio Herrera Linares, hoy consolidada gracias a la ayuda prestada por la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos de la Universidad Politécnica de Madrid, el Colegio de Ingenieros Aeronáuticos y la Fundación AENA, y cuyos fondos están actualmente en depósito en una exposición ubicada en la biblioteca de la citada Escuela de Ingenieros.

Refiriéndose ya a las personalidades matemáticas mencionadas en las páginas precedentes, hay que hablar en especial de Luis Santaló, quien fue objeto de numerosos reconocimientos[54] a lo largo de su vida. Limitándose a las distinciones efectuadas por instituciones españolas, son de resaltar la concesión de la Medalla de la Universidad de Valencia (1993), la designación de Socio de Honor de la Real Sociedad Matemática Española en visita que su presidente le hizo en 1999, etc.; aunque sin duda han sido las universidades y corporaciones catalanas quines le han rendido un mayor número de homenajes. Así, por ejemplo, fue nombrado Miembro correspondiente del Instituto de Estudios Catalanes y Socio de Honor de la Sociedad Catalana de Matemáticas, ha recibido la Medalla Narcis Monturiol a la Ciencia y Tecnología y la Cruz de San Jordi (ambas de la Generalitat de Catalunya), ha sido creada una cátedra con su nombre en la Universitat de Girona…

En cualquier caso, posiblemente los dos galardones más importantes recibidos por Santaló sean el Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica (1983) y la Encomienda de la Orden de Alfonso X el Sabio, otorgada por el Rey Juan Carlos y entregada por el embajador de España en Argentina en 1996.

Del resto de los matemáticos exiliados a este último país no tengo referencias de cierta significación, salvo del homenaje realizado a todos ellos en el seno de las XI Jornadas sobre el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas, que convoca-

Luis Santaló

das por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas se celebraron en el año 2003 en las Palmas de Gran Canaria. En dicho congreso se inauguró una escultura matemática denominada "Esponja de Menger" erigida en su honor en el Museo Elder de la Ciencia y la Tecnología de aquella ciudad, y se escribió un libro en su reconocimiento, titulado *Argentina, España y las Matemáticas*, en el que figuran distintos artículos dedicados a Santaló, Pi Calleja, Balanzat…

Para finalizar, me referiré a los refugiados en México, a todos los cuales -matemáticos y no matemáticos-, junto a la figura del presidente Lázaro Cárdenas, se les rindió un homenaje académico en la Universidad Complutense de Madrid el 3 de octubre de 2005[55]. El acto, que marca un buen camino en la recuperación de la memoria histórica, estuvo presidido por la ministra de Cultura, Carmen Calvo, y el rector de esa universidad, Carlos Berzosa, quien puso como ejemplo de eminentes exiliados a Pedro Carrasco, catedrático de Física Matemática, junto a otros catedráticos.

Volviendo al terreno de las matemáticas, y con independencia del desgarro humano sufrido por sus exiliados y represaliados, quisiera concluir subrayando que la guerra y sus años posteriores trajeron consigo una ralentización, si no paralización, de la vida matemática española; mientras que, como ya se ha dicho, en los primeros años de la década de los treinta se había acortado en buena medida nuestro retraso secular. Ese parón, que equivale a retroceso, supuso el tener prácticamente que volver a empezar de nuevo, como otras tantas veces sucedió antes en la historia de España. ■

## NOTAS

1 Los datos han sido tomados principalmente de ALSINA, C.: *Lluis A. Santaló: la lección de su vida, un recuerdo para siempre* (Discurso pronunciado en el Acto de Homenaje a la Memoria de D. Luis A. Santaló). Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 20 de Mayo de 2002; BIRMAN, G. S.: "Luis A. Santaló en Argentina", *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 7, nº 2 (2004), pp. 567-578; ETAYO, J. J.: "Desde esta orilla (A la memoria del Profesor Santaló)", *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, nº 61 (2002), pp. 16-21; REVENTÓS, A.: "Lluis Antoni Santaló y Sors", *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 5, nº 1 (2002), pp. 73-106.

2 Citado en ETAYO, J. J.: "Desde esta orilla …", *op. cit.*, pág. 16.

3 ETAYO, J. J.: "Desde esta orilla …", *op. cit.*, pág. 20.

4 Citado en ETAYO, J. J.: "Desde esta orilla …", *op. cit.*, pág. 20.

5 BIRMAN, G. S.: "Luis A. Santaló …", *op. cit.*, pp. 573-574.

6 GARCÍA CAMARERO, E.: "La ciencia española …", *op. cit.*, pág. 222.

7 SANTALÓ, L. A.: "Ernest Corominas (1913-1992)", *Revista de la Unión Matemática Argentina*, Vol. 38, nº 1-2 (1992), pp. 157-158.

8 Los datos los he tomado fundamentalmente de GARCÍA CAMARERO, E.: "La ciencia española …", *op. cit.*, pp. 191-243; *Revista de la Unión Matemática Argentina*, "Necrológicas: Pedro Pi Calleja (1907-1986)", Vol. 32, nº 3 (1986), pp. 217-219.

9 GONZÁLEZ REDONDO, F. A.: "La vida institucional…", *op, cit.*, pág. 238.

10 Me basaré fundamentalmente en COBOS, J.: "Francisco Vera Fernández de Córdoba. Matemático humanista (humanista matemático) extremeño", *Suma*, n.º 14/15 (1998), pp. 98-100; COBOS, J. y LUENGO, R. (eds.): *Los historiadores de la Matemática Española, por Francisco Vera.* Badajoz, FESPM (Colección Recuperación del Patrimonio Matemático Español, n.º 1), 2000, pp. 17-43; PELLECÍN, M.: *Francisco Vera*. Badajoz, Dpto. de Publicaciones de la Diputación de Badajoz (Biografías extremeñas), 1988.

11 Citado en PERALTA, J.: "Octavio de Toledo …", *op. cit.* pág. 532.

12 *ibídem*.

13 SÁNCHEZ RON, J. M.: *Cincel, martillo y …*, *op. cit.*, pp. 312-314.

14 RISCO, A.: "Las revistas culturales y literarias de los exiliados españoles en Francia", en ABELLÁN J. L. (dir.): *El exilio español en 1939*, Tomo 3. Madrid, Taurus, 1976, pp. 121-124.

15 LLORÉNS, V.: "La emigración republicana …", *op. cit.*, pp. 152-153.

16 SÁENZ DE LA CALZADA, C.: "Educación y Pedagogía …", *op. cit.*, pág. 264.

17 LLORÉNS, V.: "La emigración republicana …", *op. cit.*, pág. 156.

18 SÁENZ DE LA CALZADA, C.: "Educación y Pedagogía …", *op. cit.*, pág. 263.

19 GARCÍA CAMARERO, E.: "La ciencia española …", *op. cit.*, pág. 236.

20 SÁENZ DE LA CALZADA, C.: "Educación y Pedagogía …", *op. cit.*, pp. 269-270.

21 *ibídem*, pág. 271; GARCÍA CAMARERO, E.: "La ciencia española …", *op. cit.*, pág. 238.

22 *ibídem*, pág. 239.

23 PERALTA, J.: *La matemática española y …* , *op. cit.*, pp. 106 y 118.

24 GARCÍA CAMARERO, E.: "La ciencia española …", *op. cit.*, pág. 233.

25 *ibídem*; MALAGÓN, J.: "Los historiadores y la Historia en el exilio", en ABELLÁN, J. L. (dir.), *El exilio español de 1939*, Tomo 5. Madrid, Taurus, 1978, pág. 281.

26 GARCÍA CAMARERO, E.: "La ciencia española …", *op. cit.*, pág. 199.

27 CLARET, J.: *La repressió franquista …*, *op. cit.*, pág. 10.

28 *ibídem*, pp. 372-374.

29 RIERA, S. , *Història de la ciència a la Catalunya moderna.* Vic i Lleida, Eumo i Pagès, 2003, pág. 206.

30 LLORÉNS, V.: "La emigración republicana …", *op. cit.*, pág. 104.

31 ARCHIVO DE LA UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE

MADRID, SG, caja 1, libro nº 19. Libro de su Junta de Gobierno, sesión de 24 de mayo de 1939.

32 GONZÁLEZ REDONDO, F. A.: "La Matemática en el panorama de la Ciencia Española, 1852-1945. (En el 150 Aniversario del nacimiento de Santiago Ramón y Cajal y Leonardo Torres Quevedo)", *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 5, nº 3 (2002), pág. 808.

33 Citado en ALTED, A.: *Política del nuevo estado sobre el patrimonio cultural y la educación durante la Guerra Civil*. Madrid, Ministerio de Cultura (Dirección General de Bellas Artes y Archivo; Centro Nacional de Información artística, arqueológica y etnológica), 1984, pp. 174-175.

34 Citado en HORMIGÓN, M.: "Ciencia y fascismo en la posguerra española", en GONZÁLEZ DE POSADA, F.: GONZÁLEZ REDONDO F. A. y TRUJILLO D. (eds.), *Actas del IV Simposio "Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1945: Cabrera, Cajal, Torres Quevedo"*. Lanzarote, Academia de Ciencias e Ingenierías de Lanzarote y Amigos de la Cultura Científica, 2004, pág. 135.

35 GARCÍA, S. y SALAVERT, V. LL.: "L'ocupació de la Universitat de València el 1939 pel quintacolumnista Manuel Batlle, catedràtic de Múrcia", en *Guerra Civil* I:3. Catarroja, Afers, 1986, pp. 169-176.

36 MANCEBO, M. F.: *La Universidad de Valencia en guerra. La FUE (1936-1939)*. Valencia, Ayuntamiento de Valencia, 1988, pág. 175.

37 ARCHIVO GENERAL DE LA ADMINISTRACIÓN, sección Educación, IDD 1.08, legajo 32/45/15046, expediente personal de Roberto Araujo García.

38 PERALTA, J.: *La matemática española y ... , op. cit.*, pág. 71.

39 PERALTA, J.: "La Matemática madrileña en el panorama español de 1800 a 1936", en Escribano M. C. (coord.), *Matemáticos madrileños*. Madrid, Anaya educación, 2000, pág. 212.

40 ETAYO, J. J.: "75 años de vida ...", *op. cit.*, pág. 41.

41 ARCHIVO GENERAL DE LA ADMINISTRACIÓN, sección Educación, IDD 1.03, legajo 32/45/15047, expediente personal de José Barinaga Mata.

42 GONZÁLEZ REDONDO, F. A.: "La actividad del *Laboratorio Seminario Matemático* de la Junta para Ampliación de Estudios durante la Guerra Civil", *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 4, nº 3 (2001), pág. 680.

43 ARCHIVO GENERAL DE LA ADMINISTRACIÓN ..., expediente personal de José Barinaga Mata, *op. cit*.

44 AUSEJO, E.: *DivulgaMAT*, *http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/MateEspainiolak/Barinaga1.asp*

45 ARCHIVO GENERAL DE LA ADMINISTRACIÓN, sección Educación, IDD 1.03, expediente personal de José Gabriel Álvarez Ude.

46 Citado en PERALTA, J.: "Sobre los maestros de ..." *op. cit.*, pág. 47.

47 *ibídem*.

48 Para una mayor información sobre este problema y, más en general, sobre la figura de J. G. Álvarez Ude, puede consultarse ANUARIO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS, "Don José Gabriel Álvarez Ude". Madrid, Real Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, 1953, págs. 315-324.

49 Citado en SÁNCHEZ RON, J. M.: *Cincel, martillo y ..., op. cit.*, pág. 335. Para ampliar estos hechos pueden consultarse las páginas 329-346, de esta misma obra.

50 ESCRIBANO, M. C.: *DivulgaMAT*, *http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/MateEspainiolak/JuanLopezSoler3.asp*

51 ARCHIVO GENERAL DE LA ADMINISTRACIÓN, sección Educación, IDD 1.03, caja 31/4001, expediente personal de Esteban Terradas Illa.

52 GONZÁLEZ REDONDO, F. A.: "La reorganización de la Matemática en España tras la Guerra Civil. La posibilitación del retorno de Esteban Terradas y Julio Rey Pastor", *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 5, nº 2 (2002), pág. 490.

53 La mayor parte de los datos relativos a Blas Cabrera han sido tomados de TRUJILLO, L.: "Blas Cabrera Felipe y ...," *op. cit.*, pp. 71-73.

54 ALSINA, C.: "*Lluis A. Santaló ..., op. cit.*, pp. 5-6; ETAYO, J. J.: "Desde esta orilla ...", *op. cit.* , pág. 21.

55 Noticia recogida en la sección de Cultura del diario *El País* en su edición de 4 de octubre de 2005.

57
Febrero 2008, pp. 23-29

# Intercambio de información secreta con la Transformada Discreta de Fourier

*Existen ocasiones donde se desea mantener secreta alguna información: transacciones bancarias, secretos militares, comercio electrónico, etc. Pero esta información viajará probablemente por canales inseguros como Internet y podrá ser interceptada por algún intruso no autorizado. Por lo tanto, es muy importante estudiar formas de intercambiar información de forma segura entre dos usuarios. En este trabajo se describe una forma de transmitir información de forma segura que usa la transformada discreta de Fourier.*

*Sometimes, it is necessary to keep certain information hidden: bank transactions, military secrets, electronic commerce, etc. This information may be sent by means of insecure channels, such as the Internet, and it can be intercepted by some unauthorized person. Hence, it is worth studying a way to interchange information between two users in a safe way. In this article a method to transmit information safely is described, using the Fourier's discrete transformed.*

Desde que comenzaron las experiencias sobre implantación experimental del sistema ECTS en nuestra Escuela, nos planteamos qué tipo de actividades académicas dirigidas íbamos a proponer a nuestros alumnos en clase de Matemáticas de primer y segundo curso de Ingeniería Técnica Informática. No queríamos que estas actividades se redujeran a la realización de colecciones de problemas, sino que existieran otro tipo de actividades. Éstas no debían tener una dificultad matemática excesiva para que el alumno pudiese trabajar de forma autónoma y, por otro lado, debían ser atractivas y útiles para el alumno. Con esto perseguimos que los alumnos aprendan Matemáticas sabiendo para qué sirven en la vida real y, concretamente, en qué áreas relacionadas con sus estudios se utilizan, para que así valoren más los conocimientos que están adquiriendo. Con este tipo de actividades pretendemos conseguir los siguientes objetivos:

- Un proceso de enseñanza-aprendizaje más motivador para los alumnos.
- Integrar los contenidos matemáticos de nuestras asignaturas en áreas de interés para la titulación.
- Incentivar la búsqueda de información y la investigación.

Las actividades propuestas han abordado los siguientes temas: métodos de esteganografía digital, técnicas de compresión de imágenes digitales, métodos criptográficos, curvas de Bézier, diseño de fractales, introducción a los códigos detectores y correctores de errores, algoritmo PageRank de Google, etc. En este artículo se desarrolla una de estas actividades: Intercambio de información secreta con la transformada discreta de Fourier.

En el momento actual viaja por Internet una gran cantidad de información que, en ocasiones, debe ser secreta por motivos de seguridad. Por lo tanto, está claro que es muy importante la codificación de esta información pensando siempre en que ésta puede ser interceptada por un intruso malicioso.

*En el momento actual viaja por Internet una gran cantidad de información que, en ocasiones, debe ser secreta por motivos de seguridad.*

Supongamos que tenemos una imagen digital que representa un punto estratégico dentro de un mapa y queremos enviarla por un canal inseguro como Internet. Podemos enviarla codificada de modo que un intruso sólo vea una imagen "extraña"

**Ángela Rojas Matas**
*Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales*
*Universidad de Córdoba*

y sólo el verdadero receptor sea capaz de decodificar dicha imagen y recuperar la imagen original tal como era en principio. Una situación similar podemos trasladarla a un fichero de audio, por ejemplo una grabación de voz con unas instrucciones secretas se puede codificar de forma que un intruso sólo oiga algo ininteligible.

A continuación se define la transformada discreta de Fourier y un par de propiedades elementales de dicha transformada. Veremos en este mismo apartado cómo usar esta transformada para codificar una imagen. La misma idea se aplicará a un fichero de audio para codificarlo.

Sin embargo puede resultar mucho más interesante que la información que se desea mantener secreta viaje oculta en un fichero digital de cobertura totalmente "inocente" (una imagen de unas vacaciones familiares en la playa, por ejemplo) que no levante sospechas. Si un intruso intercepta una imagen de este tipo probablemente no sospeche nada y, sin embargo, oculta en la imagen puede haber información secreta. De esto se ocupa la esteganografía digital. En el siguiente apartado, se hace una introducción al método más simple y utilizado de la esteganografía digital: el método del bit menos significativo. Posteriormente se describe otro método de esteganografía digital más sofisticado que el anterior, que usa la transformada discreta de Fourier.

La transformada de Fourier es una herramienta matemática compleja y con una gran cantidad de aplicaciones en el tratamiento de señales digitales. Sin embargo, para poder realizar la actividad aquí propuesta, sólo es necesario una breve introducción a dicha transformada.

## Transformada Discreta de Fourier: codificación de un fichero de audio o una imagen

Se llama Transformada Discreta de Fourier de un vector

$$Y = (y_0, y_1, \ldots, y_{N-1})$$

de N componentes al vector:

$$\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{N-1})$$

obtenido de la siguiente forma:

$$TDF[Y] = \beta \Rightarrow \beta_n = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{-n\,k} y_k \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

siendo $\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$

Esta transformación se puede llevar a cabo mediante un producto matricial:

$$F = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \omega^{-n\,k} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{n,\,k\,=\,0,\,1,\,\ldots,\,N-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

Esta matriz F es inversible y además:

$$F^{-1} = \frac{1}{N}\bar{F}$$

siendo $\bar{F}$ la matriz conjugada de F.

Por lo tanto, esta transformación se puede invertir y esto nos conduce a la definición de la transformada inversa:

$$\beta = F\,Y \Rightarrow Y = F^{-1}\beta \Rightarrow Y = \frac{1}{N}\bar{F}\,\beta$$

siendo:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = F^{-1} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{N-1} \end{pmatrix}$$

siendo:

$$F^{-1} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \omega^{n\,k} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{n,\,k\,=\,0,\,1,\,\ldots,\,N-1}$$

La *transformada discreta inversa de Fourier* vendrá dada por:

$$ITDF[\beta] = Y \Rightarrow y_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\beta_n\,\omega^{nk} \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Si Y es un vector real con N par, puede demostrarse fácilmente que:

1) $\beta_0$ y $\beta_M$ son números reales, siendo:

$$M = N/2$$

2) Los coeficientes:

$$\{\beta_{M+1}, \beta_{M+2}, \ldots, \beta_{N-1}\}$$

no tienen mucho interés ya que son los complejos conjugados y en orden inverso de los coeficientes:

$$\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{M-1}\}$$

ya que: $\beta_{M+1} = \overline{\beta_{M-1}}$ , $\beta_{M+2} = \overline{\beta_{M-2}}$ , …, $\beta_{N-1} = \overline{\beta_1}$

Como hemos dicho antes, la TDF se puede calcular mediante un producto matricial, pero si el vector es de gran tamaño, serán muchos los cálculos necesarios. El comando *Fourier* de Mathematica nos permite calcular rápidamente la TDF ya que aplica la llamada *transformada rápida de Fourier*, que es simplemente una forma de disponer los cálculos de modo que se reducen drásticamente el número de operaciones que hay que efectuar. El comando *InverseFourier* nos devuelve la transformada inversa de Fourier.

Ahora vamos a ver cómo podemos conseguir una codificación de un fichero digital de un modo muy simple. Supongamos, por ejemplo, que tenemos una grabación de audio con una información secreta. Queremos codificar el fichero de audio de modo que si alguien no autorizado lo escucha sólo oiga cosas ininteligibles y sólo el receptor autorizado sea capaz de decodificar el fichero.

Una grabación de audio digital es un vector:

$$Y=(y_0, y_1, \ldots , y_{N-1})$$

de datos reales (supondremos que tiene un número par de componentes, si no es así añadiremos un cero). Con la orden ListPlay de Mathematica podemos oír la señal original almacenada en dicho vector. La codificación se puede conseguir de muchísimas formas, por ejemplo la siguiente:

- Se escriben los datos en orden inverso: .

$$(y_{N-1}, \ldots , y_1, y_0)$$

- Calculamos la transformada discreta de Fourier de la lista anterior, obteniendo el vector $\beta$ .

- Las componentes $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{M-1}\}$ se dividen en cuatro bloques a, b, c y d que se intercambian entre sí, por ejemplo d, c, b y a, obteniendo la lista:

$$\{\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_{M-1}\}$$

- Se construye el vector:

$$\beta' = \{\beta_0, \beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_{M-1}, \beta_M, \overline{\beta'_{M-1}}, \overline{\beta'_{M-2}}, \overline{\beta'_1}\}$$

- Se calcula la transformada inversa del vector anterior, obteniendo el vector Y’.

Si oímos el vector Y’ con la orden ListPlay, el resultado será ininteligible. Sin embargo, el receptor autorizado que recibe el vector Y’ podrá seguir los pasos inversos de los descritos anteriormente para lograr recolocar los coeficientes en su sitio original. En definitiva, será capaz de recuperar el vector original . Lógicamente, no podemos proporcionar en estas páginas un ejemplo de codificación de un fichero de audio.

Sin embargo, esta misma idea podríamos aplicarla a una imagen que queremos enviar codificada. En el ejemplo que presentamos a continuación, una imagen de tamaño 256X256 fue convertida a un vector de 65536 componentes, escribiendo los niveles de gris de los píxeles uno detrás de otro. A este vector se le aplicaron todos los pasos descritos anteriormente, obteniendo un vector Y’ de 65536 componentes que volvió a convertirse en matriz de tamaño 256X256. El resultado es la imagen codificada que se muestra en la figura 1.

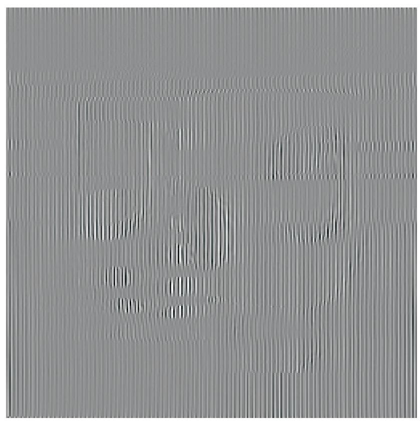


Figura 1

Esta imagen viajará probablemente por un canal inseguro a un usuario autorizado que, conocedor de los pasos seguidos en su codificación, será capaz de recuperar la imagen original. La imagen que se recupera es la representada en la figura 2.

Figura 2

## Introducción a la esteganografía digital

En la sección anterior hemos visto cómo codificar una imagen digital (o un fichero de audio). Pero si ésta es interceptada por un intruso malicioso, consciente de que se trata de una imagen codificada, podría intentar decodificarla para ver qué información se intenta ocultar. Existe otra forma de ocultar información de modo que no levante sospechas, de esto se ocupa la esteganografía digital.

La esteganografía digital (Provos, 2003) se ocupa de la ocultación de información que se desea mantener secreta en un objeto de cobertura "inocente" como puede ser una imagen digital o un fichero de audio. La información a ocultar puede ser de distinto tipo:

- un mensaje de texto: un usuario envía a otro unas instrucciones secretas en un mensaje de texto.
- una imagen: un usuario puede enviar a otro una fotografía secreta con la localización concreta de un punto estratégico dentro de un mapa.
- una grabación de audio: donde se hace una grabación de voz con instrucciones secretas.

En los tres casos, la información secreta a ocultar se convertirá en una secuencia de bits: ceros y unos. Esta secuencia de bits será almacenada en un fichero digital que nos va servir de cobertura.

Nos vamos a ocupar de cómo ocultar información concretamente en una imagen digital. Para ocultar la información secreta, la imagen original será ligeramente modificada por el algoritmo de ocultación utilizado obteniendo una nueva imagen que se conoce con el nombre de estego-imagen. Comenzamos comentando en qué consiste el método esteganográfico más usado: el método LSB (**L**east **S**ignificative **B**it), o método del bit menos significativo.

Una imagen digital en escala de grises (o como decimos vulgarmente, una imagen en blanco y negro) es una matriz de números, donde cada número indica el nivel de gris de cada píxel, habitualmente entre 0 (negro) y 255 (blanco). Para almacenar un nivel de gris necesitamos 8 bits, siendo el último bit el menos significativo. Por ejemplo, una imagen 256×256 se compone de 65536 niveles de gris. Si usamos solamente el último bit, es decir, el bit menos significativo, el número máximo de bits que se pueden ocultar en dicha imagen sería: 256×256 = 65536.

Vamos a tomar una imagen en blanco y negro de tamaño como imagen de cobertura. Por otro lado, supongamos que tenemos un mensaje de texto a ocultar: mensaje = " La criptografía..." que convertiremos a código ANSI: {76, 97, 32, ...} y que después pasaremos a binario (8 bits), obteniendo una ristra de bits a ocultar. En nuestro ejemplo el mensaje estaba compuesto por 6584 caracteres , lo que nos proporciona una ristra de 6584×8 = 52672 bits a ocultar.

> *La esteganografía digital (Provos, 2003) se ocupa de la ocultación de información que se desea mantener secreta en un objeto de cobertura "inocente" como puede ser una imagen digital o un fichero de audio.*

Supongamos que deseamos almacenar un bit secreto en el bit menos significativo del nivel de gris de un pixel. Por ejemplo, si el nivel de gris es 112, que en binario es 01110000, entonces la forma de proceder sería como sigue:

- si el bit a ocultar es 0, no hacer nada ⇒ nivel_gris_modificado = $01110000_{\,2)}$ = 112

- si el bit a ocultar es 1, modificar bit menos significativo ⇒ nivel_gris_modificado = $01110001_{\,2)}$ = 113

Esto se puede implementar de una forma muy sencilla en la práctica:

Imagen Original

Estego-Imagen

Figura 3

• Si el bit a ocultar es 0 y el nivel de gris del píxel es impar entonces decrementar el nivel de gris en 1.
• Si el bit a ocultar es 1 y el nivel de gris del píxel es par entonces aumentar el nivel de gris en 1.

Razonando de esta forma se obtiene el resultado mostrado en la Figura 3.

En este caso hemos ido ocultando un bit en cada pixel de forma secuencial a la largo de la imagen de cobertura. Como vemos, no es apreciable a simple vista ninguna modificación. Ése es el objetivo de la esteganografía, la ocultación de un mensaje secreto en una fichero digital pero de tal forma que no se haga patente la manipulación a la que ha sido sometido dicho fichero. Para recuperar el mensaje oculto bastará con leer los píxeles de la estego-imagen de forma secuencial: si el nivel de gris es par, el bit oculto es un cero, en caso contrario, el bit oculto es un uno.

Si usamos los dos últimos bits (los dos bits menos significativos) para ocultar información en esa misma imagen, el número máximo de bits que podremos ocultar será:
256×256×2=131072. No se recomienda usar más de dos bits, por el deterioro que se produce en la estego-imagen.
Una imagen en color en formato RGB (**R**ed **G**reen **B**lue), se compone de tres capas o planos de color: rojo, verde y azul. Cada capa es una imagen del mismo tamaño que la original donde cada dato se interpreta como la cantidad de rojo, verde o azul presente en el píxel de la imagen en color. Los datos de cada capa de color ocupan un byte (8 bits): desde el 0 hasta el 255. Una imagen en color va a tener el triple de capacidad para ocultar información que una imagen en blanco y negro. Así, por ejemplo para una imagen en color de tamaño 256×256 tendríamos: 256×256×3=196608 si usamos sólo 1 bit de cada píxel para ocultar información secreta.

En el ejemplo mostrado en la Figura 4 se oculta un mensaje de 79008 caracteres que equivale a 79008×8=632064 bits en los tres planos de color usando el método LSB y el bit menos significativo de cada píxel en las tres capas de color.

Imagen Original

Estego-Imagen

Figura 4

La información secreta a ocultar en el caso anterior era un mensaje de texto. Pero el tipo de información puede ser de cualquier tipo: en todos los casos dará lugar a una cadena de bits, ceros y unos, que se almacenarán en la imagen de cobertura. En la Figura 5, tenemos a la izquierda una estego-imagen de un cuadro de Vincent Van Gogh, una imagen en color de 500×396 píxeles donde se ha ocultado una imagen en blanco y negro de tamaño 249×266 píxeles usando el bit menos significativo. La imagen oculta extraída se presenta a la derecha de la Figura 5.

El método LSB es sencillo de implementar y muy usado en la práctica. Además admite múltiples variaciones: los píxeles se pueden escoger de forma pseudoaleatoria, se puede cifrar antes la información secreta a ocultar, etc.. Sin embargo, tiene un inconveniente importante: la estego-imagen no se debe alterar en absoluto porque si ésta se modifica se destruye el mensaje oculto. Si cogemos la estego-imagen y la comprimimos usando el formato JPEG, aunque sea ligeramente, se destruye totalmente el mensaje oculto. En resumen, este método no es resistente a una compresión JPEG. En la siguiente sección se describe un método esteganográfico que se basa en la transformada discreta de Fourier y que tiene la ventaja de ser resistente a ligeras compresiones JPEG.

Estego-Imagen

Imagen secreta oculta

Figura 5

## Esteganografía digital con la Transformada Discreta de Fourier

Ahora vamos a usar una idea diferente, vamos a aplicar una transformada discreta, por ejemplo la transformada de Fourier (Alturki, 2001), y a continuación vamos a manipular los coeficientes de la transformada para ocultar la información secreta. Resumiendo, los cambios se van a efectuar en el dominio de la transformada. Por supuesto, se pueden usar otras transformadas: la transformada discreta del coseno, la transformada wavelet de Haar, etc.. La ventaja de este nuevo método es que la estego-imagen es resistente a ligeras compresiones JPEG, es decir, que a pesar de la pérdida de información que supone una compresión JPEG, la información secreta se puede recuperar.

Para ello, la imagen de entrada se convertirá en una lista 1D. Si la imagen es 256×256, esta lista unidimensional tendrá 65536 datos. Este vector lo indicaremos como *Y*. A continuación calcularemos la TDF de dicho vector, usando el comando *Fourier* de Mathematica, obteniendo un vector β también con 65536 componentes complejas. Usaremos tanto la parte real como la parte imaginaria de algunos coeficientes del vector β para ocultar los bits de la información secreta de una forma similar a la comentada en el método LSB.

Supongamos que una de las componentes de β es el número complejo $a+bi$, tanto en la parte real como en la imaginaria ocultaremos un bit. Nos fijaremos en la parte real (igual se razona con la parte imaginaria) que hemos llamado $a$. Se calculan los números:

$$\text{signo} = \begin{cases} 1 & a >= 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases} \qquad q = \text{Abs}\left[\text{Round}\left[\frac{a}{\Delta}\right]\right]$$

donde Δ es una constante fija, *Abs* es la función valor absoluto y *Round* es la función que nos devuelve el entero más cercano. En la paridad de q es donde se guarda el bit secreto, igual que con el método LSB, es decir, lo haremos par si el bit que toca ocultar es un cero y lo haremos impar si el bit que toca ocultar es un uno. Después de esto el valor de $q$ modificado, lo indicamos por $q'$ . Entonces calculamos:

$$a' = signo \cdot q' \cdot \Delta$$

Lógicamente no se obtiene exactamente el número original $a$. De la misma forma se modifica la parte imaginaria $b$ para ocultar otro bit de información obteniendo $b'$. Después de la ocultación de los dos bits, la componente de Fourier que originalmente era $a+bi$ será sustituida por $a'+b'i$.

*La ventaja de este nuevo método es que la estego-imagen es resistente a ligeras compresiones JPEG, es decir, que a pesar de la pérdida de información que supone una compresión JPEG, la información secreta se puede recuperar.*

Razonando de esta forma, se irán modificando los coeficientes del vector β, obteniendo otro vector distinto β', donde se habrán ocultado los bits secretos. No hemos usado todas las componentes de  para ocultar bits sino sólo los coeficientes

$$\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{M-1}\}$$

siendo M = N/2.

A continuación, se calcula la transformada inversa de Fourier. Lógicamente no se recupera el vector $Y$ original, sino otro vector $Y'$. Este vector $Y'$ se volverá a escribir en formato matricial, obteniendo la estego-imagen.

En la Figura 6 mostramos la imagen original y la estego-imagen creada usando el método de la transformada discreta de Fourier. Hemos usado una imagen en blanco y negro de tamaño 256×256 como imagen de cobertura donde hemos ocultado un mensaje compuesto por 6584 caracteres. En este caso, la ventaja frente al método LSB es que, si la estego-imagen se comprime ligeramente, se puede seguir recuperando el mensaje oculto. Por supuesto, el método descrito en esta sección admite multitud de variaciones. ■

Imagen Original

Estego-Imagen

Figura 6

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALTURKI, F., MERSEREAU, R. (2001): "Secure blind image steganographic technique using discrete Fourier transformation". Proceedings of 2001 International Conference on Image Processing. Greece, pp. 542-545.

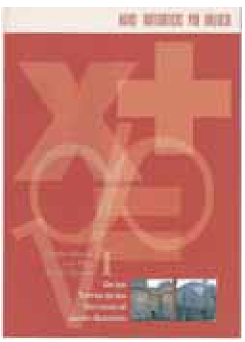
PROVOS, N. (2003): "Hide and Seek: An Introduction to Steganography". IEEE Security & Privacy. IEEE Computer Society, June 2003, pp. 32-44.

# Libros recibidos

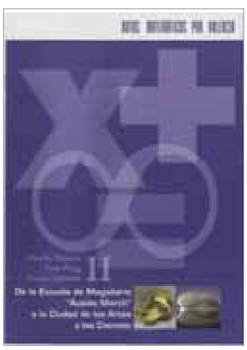
**ANÁLISIS CIENTIMÉTRICO, CONCEPTUAL Y METODOLÓGICO DE LAS TESIS DOCTORALES ESPAÑOLAS EN EDUCACICÓN MATEMÁTICA (1976-1998)**
**Manuel Torralbo Rodríguez**
*Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba*
*Córdoba, 2002*
*ISBN: 84-7801-638-4*
*375 páginas*


**LA GEOMETRÍA DEL AZAR.**
**LA CORRESPONDENCIA ENTRE: PIERRE DE FERMAT Y BLAISE PASCAL**
**Jesús Basulto Santos y José Antonio Camúñez Ruiz**
*Epistéme 5*
*Nivola*
*Madrid, 2007*
*ISBN: 978-84-965666-54-5*
*302 páginas*


**CIENCIA Y TEOLOGÍA**
**FISICA, MATEMÁTICAS Y TEOLOGÍA EN LOS ORÍGENES DE LA CIENCIA MODERNA**
**José L. Montesinos**
*Ediciones Idea*
*Santa Cruz de Tenerife, 2007*
*ISBN: 978-84-8382-258-6*
*147 páginas*



**RUTAS MATEMÁTICAS POR VALENCIA. I DE LAS TORRES DE LOS SERRANOS AL JARDÍN BOTÁNICO**
**Onofre Monzó, Luis Puig y Tomás Queralt**
*Universitat de València*
*Valencia, 2007*
*ISBN: 978-84-370-6665-3*
*27 páginas*



**RUTAS MATEMÁTICAS POR VALENCIA. II DE LA ESCUELA DE MAGISTERIO "AUSIÀS MARCH" A LA CIUDAD DE LAS ARTES Y LAS CIENCIAS**
**Onofre Monzó, Luis Puig y Tomás Queralt**
*Universitat de València*
*Valencia, 2007*
*ISBN: 978-84-370-6926-5*
*31 páginas*

suma+ 57
Febrero 2008, pp. 31-42

# Matemática y lenguaje y matemática constructora de lenguaje

*Con inspiración en un artículo del académico Lázaro Carreter titulado Espíritu de geometría y en una emblemática frase del filósofo Alain sobre Geometría y Poesía, y con numerosos argumentos de matemáticos y escritores, se analiza la relación entre Matemática y Lenguaje a través de los íntimos vínculos entre Poesía y Matemática, Literatura y Matemática, Lenguaje matemático y Educación; pero sobre todo se describen, con múltiples ejemplos, la función y la misión que la Matemática cumple en la propia construcción del lenguaje. Gran parte de este artículo es el contenido de la Lección Inaugural del Curso Académico 2005/06 impartida por el autor a los Alumnos de Bachillerato y Profesores del IES Sant Josep de Calassanç de Barcelona*

*This article analyzes the relation between Mathematics and Language (Poetry and Mathematics, Literature and Mathematics, Mathematical language and Education). But it mainly describes the function and role of Mathematics in the construction of language itself. It was inspired by Spirit of Geometry, an article written by the academic Lázaro Carreter, and by an emblematic phrase of the philosopher Alain about Geometry and Poetry. Most of this article is based on the Inaugural Lecture of the Academic Year 2005-2006 read by the author to both secondary school students and teachers at IES Sant Josep the Calassanç of Barcelona.*

La Geometría se nos cuela por todas las costuras del idioma.
Lázaro Carreter, F. Espíritu de Geometría (en EL DARDO EN LA PALABRA). EL PAÍS, 5/12/99.

El momento en que comienza la comprensión del número y del idioma se caracteriza por una profunda experiencia íntima, verdadero despertar del yo, que de un niño hace un hombre, un miembro de una cultura. [...]. En ese momento se produce un sentimiento súbito y casi metafísico de temor y respeto a lo que significan profundamente las palabras "medir", "contar", "dibujar", "formar".
O.Spengler. La decadencia de Occidente, Austral, cap.I.1, pp.141–142).

La primera vez que asistí a la demostración de un teorema, sentí que entraba en un universo perfecto y transparente; del Caos ingresaba al Orden. Aunque no lo podía saber entonces, acababa de descubrir el universo platónico, perfecto, incorruptible y eterno, ajeno a los horrores de la condición humana; e intuí que esos teoremas eran como majestuosas catedrales, bellas estatuas en medio de las derruidas torres de mi adolescencia.
E.Sábato. El último grande de una Argentina grande. Buenos Aires Times, July/Aug, 2005, p.11.

Vais paralelos Lenguaje y Geometría
Con un punto supremo de armonía
Juntas están Matemática y Poesía.
Gonzalo Sánchez Vázquez. Matemática y Poesía (en el Gancho matemático, p.208).

Algunos dicen que la ciencia matemática es prosaica
Pero nada hay tan bello como la fórmula algebraica.
Pareado anónimo.

Oswald Spengler 1880-1936

**Pedro Miguel González Urbaneja**
*I.E.S "Sant Josep de Calassanç"*
*Barcelona*

## Matemática y Lenguaje[1] .

Al acompañar de forma *paralela* a toda civilización, las *Matemáticas* constituyen una de las grandes manifestaciones del pensamiento con un desarrollo milenario estrechamente relacionado con los grandes hitos de la Cultura. Conocida es la implicación de la *Matemática* con las Ciencias de la Naturaleza y la Tecnología; pero sus vínculos con la Filosofía, la Educación, el Lenguaje, la Poesía, la Literatura, las Artes, la Belleza, la Religión, la Mística, la Política, la Magia, etc., hacen de ella una manifestación de la racionalidad humana que, navegando a lo largo de la Historia en todos los confines del Pensamiento, vertebra la Cultura, desde las más remotas civilizaciones hasta la inexorable informatización del mundo actual.

De toda esta *poliédrica dimensión* cultural de la *Matemática* vamos a tratar acerca de los vínculos de la **Matemática** y el **Lenguaje**, pero sobre todo de la **Matemática como creadora de lenguaje**.

Ojeando y hojeando un libro del pensador y profesor de Filosofía francés **Alain** (seudónimo de **Emile Chartier**) titulado "**Charlas sobre Educación. Pedagogía infantil"** (Losada, Madrid, 2002) encontré una afirmación muy audaz:

> En la Educación infantil bastaría con enseñar Geometría y Poesía.

Emile Chartier 1868-1951

Para muchas personas, la Poesía es la más refinada manifestación del pensamiento para expresar ideas y sentimientos, es decir, para indagar en el mundo espiritual –intelectual y emocional– de la interioridad humana. Para muchos matemáticos, la Geometría como ciencia de la forma y la extensión es la más refinada manifestación del pensamiento, para expresar en leyes lo que percibimos del mundo natural a través de los sentidos, y hacerlo inteligible, en un lenguaje universal, tras una reversión hacia la interioridad de lo intelectual. He aquí, pues, para empezar una primera vinculación entre **Matemática** y **Lenguaje** como instrumentos de expresión de elementos genuinamente humanos: las ideas, los sentimientos y las percepciones. La poesía coadyuva a conocer e interpretar las verdades profundas del mundo interior, la *Matemática* con sus objetos, lenguajes y modelos coadyuva a conocer e interpretar el mundo exterior, pero en la interioridad personal de cada sujeto que contempla el mundo con ansias de inteligibilidad.

Siempre que se comenta la influencia recíproca de la *Matemática* con los diversos aspectos de la cultura resultan muy oportunas las reflexiones de **O.Spengler** –a quien citamos con frecuencia–, matemático y ensayista de éxito, de los años veinte del siglo pasado, en su libro **La decadencia de Occidente** (Colección Austral, Madrid, 1998) donde desarrolla su teoría de la Historia como una sucesión de ciclos culturales. Spengler escribe (pp. 144, 145):

> El sentimiento de la forma en el escultor, pintor, poeta, y músico es esencialmente matemático.
>
> La matemática traspasa los linderos de la observación y del análisis y, en sus momentos supremos, procede por intuición, no por abstracción. [...] Bien se comprende que el enigma del número está muy próximo al misterio de la forma artística. El matemático genial tiene su puesto junto a los grandes maestros del verso, de la fuga, del cincel y del pincel, que aspiran también a comunicar, a realizar, a revestir de símbolos ese gran orden de todas las cosas que el hombre vulgar de cada cultura lleva consigo [...]. Así el reino de los números es como el de las armonías, el de las líneas y colores, una reproducción de la forma cósmica. Por eso la voz "creador" significa en la matemática algo más que en las simples ciencias. Newton, Gauss, Riemann fueron de naturalezas artísticas. Léanse sus obras y se verá que sus grandes concepciones les vinieron de repente.

De **Goethe** son estas profundas palabras (Spengler, 1998, p.145):

> El matemático no es perfecto sino cuando siente la belleza de la verdad.

El brillante matemático **K.Weierstrass** escribía (Spengler, 1998, p.145):

> Un matemático que no tenga también algo de poeta no será nunca un matemático completo.


Johan Wolfgan von Goethe 1749-1832

El gran poeta portugués **Fernando Pessoa** escribe en sus *Poesías de Álvaro de Campos*[2]:

> El binomio de Newton es tan bello como la Venus de Milo.
> Lo que hay es poca gente que lo vea así.

P.Valery se explaya en "*La carta al Autor*" con que se abre el famoso texto de M.Ghyca, *El número de oro* (Poseidón, Barcelona, 1978, p.9]:

> El eterno deseo de encadenar la morfología física y biológica, ... a la ciencia de las formas creadas por la sensibilidad ...la Matemática que aparece o que asoma en ellas y las fórmulas que sirven en las Artes es el tema que ha explorado este libro. [Ghyca. El número de oro, Poseidón, Barcelona, 1978, pág.9], ¡Qué poema el análisis del número de oro, Φ! .

**Poesía y Matemática** comparten no sólo la medida (en el caso de los versos rimados) sino en todo caso armonía, belleza, juego, artificio y creatividad. Son elementos comunes, plenos de analogías y *paralelismos* que como expresa **Solà** (2005, p.64) conforman lo que podríamos llamar la topología de un territorio común. Por eso muchos poetas y matemáticos han comparado la experiencia de demostrar un teorema con la de construir un poema. En ambas se puede alcanzar un sublime estado casi místico que irradia la armonía y la belleza. En su artículo "*Escriptura y Combinatòria*" (BIAIX, nº1, abril de 1994, p.24), el matemático y filólogo **S.Serrano**, especialista en lingüística matemática (1992) abunda en argumentos sobre analogías entre Poesía y Matemáticas, que le permiten afirmar: «*... si hay algún lenguaje comparable al lenguaje poético es el de la Matemática*». Lo mismo hace **Hardy** (1999, p.85) a propósito de la belleza de ambas creaciones humanas:

> Un matemático, lo mismo que un pintor o un poeta es un constructor de modelos. Si éstos son más permanentes que otros es porque están hechos con ideas [...], y éstas envejecen más lentamente que las palabras. [...]. Los modelos de un matemático, al igual que los de un pintor o un poeta deben ser hermosos; las ideas, como los colores o las palabras, deben ensamblarse de una forma armoniosa, la belleza es la primera señal, pues en el mundo no hay un lugar permanente para las matemáticas feas.

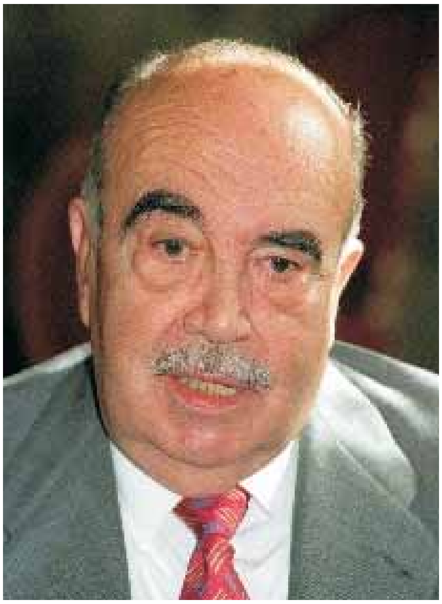

Fernando Pessoa 1888-1935

En algunos matemáticos como los **Pitagóricos** –cuya doctrina moral está plasmada en los ***Versos Dorados***– (González Urbaneja, 2001a), **Platón, Kayyan, Luca Pacioli, Descartes, Boole, Hamilton, Weierstrass, L.Carroll, Hausdorff, Poincaré, Hardy** y otros, encontramos una gran dosis de poesía; mientras que en poetas como **Dante, Novalis, Goethe, Pessoa, P.Valery, R.Alberti, G.Ferrater, W.Szymborska** y otros, hallamos un complaciente acercamiento a la *Matemática*.

## La Matemática constructora de Lenguaje.

Vamos a hablar ahora de la *Matemática* como creadora de lenguaje[3]. Parte de lo que voy a escribir sobre este tema está inspirado en un artículo del académico **F.Lázaro Carreter** titulado «***Espíritu de geometría***» (EL PAÍS, 5/12/99), que pertenece a la serie "***El dardo en la palabra***" que comienza con estas frases:

> ¿Podríamos hablar sin la Geometría? Se nos cuela por todas las costuras del idioma, sin casi darnos cuenta...



Fernando Lázaro Carreter 1923-2004

Mencionemos algunas de esta perlas del lenguaje, frecuentes en los medios de comunicación o en conversaciones informales, en las que podremos apreciar que el mundo social y sobre todo el universo mediático, ha entrado a saco, a veces sin ningún respeto, en el santuario de **Pitágoras, Platón, Euclides y Descartes**. Como dice el autor del artículo, se trata de expresiones geométricas que unas veces son metáforas perfectamente válidas e idiomáticamente bellas pero que otras son ridículas cornadas a la lengua y tópicos tropos geométricos que sirven de muletillas del lenguaje. Veamos:

***Girar* en torno al *eje*. *Radio* de acción. *Infinito*. *Inconmensurable*. *Proyección*. *Espiral* de violencia. *Medio*. *Recta* final. *Perspectiva*. Cerrar el *círculo*.**

La política mundial *gira* en torno al *eje* del Pentágono americano cuyo *radio* de acción ha alcanzado una infinita *proyección* que provoca a veces una *inconmensurable espiral* de violencia. Esperemos que la situación en Oriente Medio entre en una *recta* final dentro de una *perspectiva* democrática cuando se *cierre el círculo* de negociaciones.

Señalemos frente a la *espiral*, la *recta*; mientras la *espiral* se vuelve y revuelve sin saber hasta dónde, la *recta* lleva como una sombra el adjetivo *final.* Cuando falta ya poco para que algo acabe (el curso, un partido de fútbol, un proceso...), dicen de ese algo que ha entrado *en su recta* final, aunque, paradójicamente, a veces termina en curva, como ocurre con frecuencia en el remate de un curso escolar o de un partido de fútbol que suelen estar cargados de sobresaltos; y alumnos o futbolistas lo recorren por *curvas sinusoides* durante los últimos días del curso y en prórrogas, respectivamente.

Así que de *recta* final, nada. En sentido matemático estricto está clara la incorrección semántica, porque una *recta final* sería algo tan imposible como un *círculo cuadrado*. Lo correcto sería hablar de *segmento final* y aún así habría que aclarar que nos referimos a la *longitud del segmento* y no al *número de puntos* que hay en él, i*nfinitos* como en la *recta*, *paradojas del infinito*, con el que también se juega muy incorrectamente en el lenguaje ordinario, llamando infinito a lo que concebimos como muy grande o muy numeroso. A hablar, pues, de *recta final* se comete un grave error de bulto: se confunde *segmento* con *recta*, es decir: «*se confunde el todo con la parte*» atentando contra el octavo y último *axioma* de ***Los Elementos de* Euclides**. Lo mismo sucede con la expresión «*cerrar el círculo*» frase absurda o redundante en sí misma ya que el *círculo* es ya una *curva cerrada*; si acaso habría que decir *cerrar el arco.*

Errores similares se cometen al llamar *redondo* a lo que es *circular*, como por ejemplo una copa o un vaso. Más fortuna tiene la frase «*me ha salido redondo*» que implícitamente alude a la perfección mayestática de la *simetría esférica* como superficie cerrada que encierra un *volumen* determinado con la *mínima superficie*, por eso cumple una función esencial en la naturaleza, que sabe muy bien *optimizar* los recursos.


Primera edición en castellano de Los Elementos de Euclides. Sevilla 1576

También son muy afortunados, por su carácter descriptivo, los términos siguientes:

**Conducta *recta*. *Trayectoria rectilínea*. Comportamiento *sinuoso*. *Salirse por la tangente*.**

El Profesor A tiene una conducta muy *recta* lo que nos obliga a una *trayectoria* escolar muy *rectilínea.* En cambio, el Profesor B muestra un discurso muy *sinuoso* por eso cuando le preguntamos suele *salirse por la tangente.*

**Ver las cosas bajo un *prisma* de..., o desde un *ángulo* de.... Tener una visión *poliédrica* de.... *Múltiple*. *Entorno*.**

Los prejuicios nos hacen ver las cosas bajo un *prisma* subjetivo que nos condena a una sesgada percepción de la realidad desde un único *ángulo.* Debemos *desarrollar* una *múltiple* visión *poliédrica* de nuestro *entorno.*

**Altas *esferas*. *Sectores* afectados. *Segmento* de jóvenes. *Punto de inflexión*. *Giro de 180º*.**

Tras las decisiones políticas que se toman en las altas *esferas* siempre hay *sectores* afectados del que no se libra el *segmento* de jóvenes, cuya situación experimenta un *punto de inflexión* y a veces un *giro de 180º*.

Aunque, con alguna frecuencia, un excesivo abuso de la metáfora matemática conduce al ridículo cuando en alguna campaña electoral se habla de «*dar un giro de* 360º » a tal o cual situación.

***Círculos* de empresarios. *Polígonos* de desarrollo. *Curvas* de crecimiento.**

El gobierno ha negociado con los *círculos* de empresarios nuevos *polígonos* de desarrollo para hacer *decrecer la curva* del paro.

**Aumento *lineal*. Asunto *central*. Situación *puntual*. *Cero* a la izquierda.**

La empresa ha concedido un aumento *lineal* a los trabajadores. Siendo el salario un asunto *central,* esperamos que sea una situación *puntual,* ya que el sindicato ha sido un *cero* a la izquierda.

Así pues, vemos como en el lenguaje ordinario y coloquial se alude a las altas *esferas*, a los *sectores* afectados, al *segmento* de jóvenes, al *radio* de acción, a la *proyección*, a lo *infinito* o *inconmensurable*, a la *espiral* de violencia, a la *recta* final, a la *perspectiva* de visión, al *prisma* o el *ángulo* bajo el que se divisa un *entorno* que suele ser *poliédrico*. Y además de *círculos* de empresarios (o de labradores o de artistas) hay *polígonos* de desarrollo, *curvas* de crecimiento, conductas *rectas* o *sinuosas* que determinan *trayectorias rectilíneas* o se salen por la *tangente*. También hay *incrementos lineales*, asuntos *centrales* y situaciones *puntuales* que afectan, aunque uno sea un *cero a la izquierda*, y de vez en cuando nuestra situación sufre un *punto de inflexión* o un *giro de 180º*.

Pero la cuestión no queda aquí, porque en la vida hay situaciones *semejantes* que se describen como un *paralelismo* entre ellas. Incluso también hay vidas *paralelas* en la Literatura clásica, como en la famosa obra de **Plutarco**. En cambio otras veces, sobre todo entre algunos partidos del *arco* parlamentario, se habla de *posiciones convergentes*, como indicando que tienden cada vez más a ser *iguales* –tan iguales, tan iguales, que parece imponerse en la Política el Pensamiento *único*–, mientras que si las posturas son *divergentes* cada vez *distarán* más.

> «*Cerrar el círculo*» frase absurda o redundante en sí misma ya que el *círculo* es ya una *curva cerrada*; si acaso habría que decir *cerrar el arco.*

También se indica que algo está *proporcionado* o *dimensionado* como bien *medido* o ajustado para su *función*. Al situar la sensatez en el *centro*, a partir de **Aristóteles**, se identifica la *mitad* o el *medio* con lo virtuoso. Y cuando se plantea resolver algo imposible se habla de que «es tan difícil como la *cuadratura del círculo*» –uno de los problemas históricos más importantes de la *Matemática*–, interpretando de forma incorrecta esta quimera matemática, porque la *cuadratura del círculo* no es que sea difícil, sino que simplemente es imposible. A veces, la torcida utilización del lenguaje matemático alcanza el paroxismo, como cuando, según una moda reciente, algunos tertulianos hablan de la *primera derivada* o la *segunda derivada* de esta posición, esa cuestión o aquella situación. Aquí sencillamente no hay ninguna analogía que sugiera una inducción lingüística entre lo que se trata y el concepto matemático que conduce a la *tangente* de una *curva* en un *punto*.

Como broche de oro, a veces se dice, de forma vehemente y enfática, que algo es *matemático* al querer indicar que es absolutamente cierto, indudable, ineludible, inexorable, infalible, incontrovertible, etc. aunque nadie lo haya *demostrado*. En parte, el autoritarismo de la expresión se basa en arbitrarias *premisas*, que se toman como *postulados*, cuya reiteración mediática redundante convierte en *axiomas* para un amplio público poco crítico.

Parece, pues, que no podríamos hablar sin *Geometría*, pero deberíamos utilizarla para hacerlo con más rigor y precisión que permitan *incrementar* la calidad de la comunicación, aunque a veces, como se ha visto, se hace lo contrario. Aún así, comparando estas cornadas a la lengua con las del simple lenguaje de los móviles y los chats de Internet hay una gran *diferencia*.

Por fortuna, algunas locuciones de origen *matemático* especialmente ridículas han desaparecido; por ejemplo, en mi niñez algunos cursis decían que fumaban *cilindrines*. También han desaparecido, en el lenguaje del sexo o del amor algunas frases *geométricas* de tinte ofensivo. En la literatura erótica de principios del siglo XX se llamaban *horizontales* a las mujeres que con grosera expresión se describían como de "cama fácil". Sin embargo en la literatura y en el cine, tanto de calidad como en los bodrios televisivos abundan los *triángulos* amorosos. Curiosamente, en el lenguaje ordinario, se habla de *triángulo* como colección de *tres elementos*, con independencia de su situación o posición relativa. No así en *Geometría* que se exige que no estén alineados. ¡Cuidado no confundir con alienados! Aunque los *puntos alineados* bien alienados están por ser ajenos al disfrute de total libertad de movimiento; tienen sólo un grado de libertad.

Pero en el lenguaje del amor parece que no rigen las leyes universales del *Álgebra* y de la *Aritmética*, ya que en el amor 1+1 es *infinito* mientras que 2−1 es *cero*, la nada más absoluta, el que ha amado y ha sufrido la pérdida de su amor lo sabe. Y si hay hijos 1+1=3, 4, 5. Y es que el amor es inefable y no sólo está más allá del *Álgebra* y de la *Aritmética*, sino que, parafraseando a **Nietzche** está incluso más allá del bien y del mal.

Fiedrich Wilhelm Nietzche 1844-1900

Procedente del lenguaje *matemático* también tenemos tanto en la literatura como en el lenguaje ordinario las expresiones *circulares*, los *círculos* viciosos, la figura del *circunloquio* o *circunlocución*, que es un rodeo redundante de palabras. También abundan las expresiones *elípticas* (una *elipsis* es hecho sintáctico o estilístico que suprime o elude palabras que se sobreentienden), las expresiones *hiperbólicas* (que son exageraciones) y las expresiones *parabólicas* (que ilustran una historia con comparaciones, alegorías o metáforas). Aunque justo es reconocer, aludiendo a la Historia de las Matemáticas, en particular a la Historia de las *Secciones Cónicas* (González Urbaneja, 2004d), que en este caso, primero fue la semántica de los vocablos en el lenguaje ordinario y después la acuñación por parte de **Apolonio** «*El Gran Geómetra*» de los términos en el ámbito geométrico. Efectivamente, el nombre dado a las Cónicas por el eximio *matemático* griego, tiene su origen en el lenguaje pitagórico del *Método de Aplicación de las Áreas* para la solución geométrica de ecuaciones cuadráticas que emulaba el significado lingüístico de *elíptico* como *deficiencia*, de *hiperbólico* como *excesivo* y de *parabólico* como *equiparable* (González Urbaneja, 2003a, cap.4, p.43).

En el espectáculo de masas por excelencia, el fútbol, tal vez para darle prestigio a algo tan trivial como la disputa de un objeto casi *esférico* por parte de dos grupos de personas, para introducirlo en una red de forma casi *prismática*, en los medios se dice que el jugador ha perdido la *verticalidad* al disparar el balón que ha pasado precisamente a llamarse de forma ridícula y ñoña como el *esférico*, aunque en modo alguno sea una *esfera*. Para poner una nota de erudición sobre una afición tan sana cuando se practica y a veces tan alienante cuando sólo se contempla, digamos que según el *Fedón* (110b) de Platón (1969, p.647) los griegos jugaban con balones de doce pieles en forma de *dodecaedro* que al hincharse se aproximaban a la forma *esférica*, lo que constituía un antecedente de nuestro balón de fútbol (González Urbaneja, 2003b). Sin embargo, el *sólido platónico* que más se aproxima a la forma de una *esfera* es el *icosaedro* formado por 20 triángulos regulares. De hecho un balón de fútbol es un *icosaedro truncado* que se forma al cortar las esquinas, a una distancia del *vértice igual* a un *tercio* del valor de la *arista*, *por planos perpendiculares* al *eje de rotación* del *poliedro* que pasa por el correspondiente *vértice*. El resultado es un *poliedro arquimediano* (es decir, un *poliedro inscriptible* en una *esfera* cuyas *caras* son *polígonos regulares* de dos o tres tipos, aunque con la misma *arista*, siendo i*guales* todos los *vértices* del *poliedro*) que tiene 12 *pentágonos* y 20 *hexágonos*. Construido con un material deformable se cubre el 86.74% de la *esfera circunscrita*, y al inflarlo la *superficie* se *curva* hasta llenar el 95%. Este poliedro es muy fácil de construir pero no es el más eficiente. La *forma poliédrica* más *redondeada* (que más se aproxima a una *forma esférica*) es el *poliedro arquimediano* llamado *RombIcosi-*

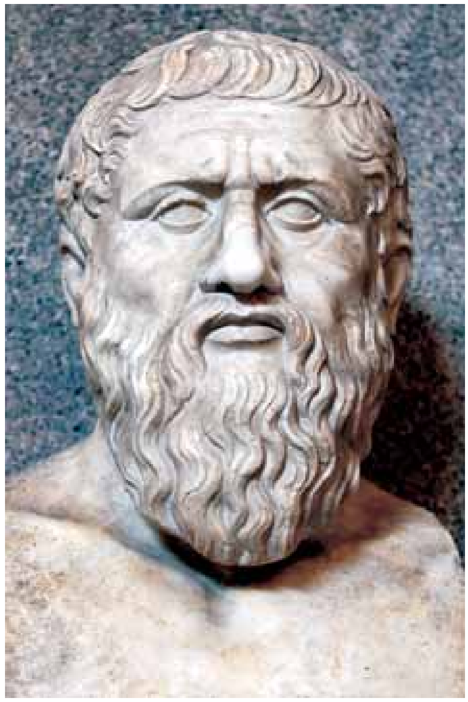
*Dodecaedro menor*, formado por 20 *triángulos*, 30 *cuadrados* y 12 *pentágonos* que sin inflar puede llenar hasta el 93.32% de una *esfera*.

## Matemática, Lenguaje y Educación.

Una de las características del lenguaje *matemático* es su univocidad y ausencia total de ambigüedad. Toda sintaxis *matemática* se aplica a objetos y entidades perfectamente definidos sin ningún tipo de duda sobre su esencia ontológica, porque previamente se han sometido a una férrea definición que precisa, determina, concreta, especifica, delimita, e individualiza las características del objeto en cuestión.

Además, los argumentos *matemáticos* se establecen con la *demostración*, que los convierte en incontrovertibles, en verdades eternas y universales. Con la emergencia de la *demostración* como exigencia intelectual, aparece la Matemática racional en el horizonte del siglo VI a.C., siendo este fenómeno cultural un hito esencial en el tránsito del mito al logos que tiene lugar en la cultura griega (González Urbaneja, 2006, cap.1), por eso la *demostración* se considera la aportación fundamental del **Pitagorismo** a la Matemática, lo que se ha valorado siempre muy por encima de sus magníficas contribuciones particulares en ámbitos concretos de esta ciencia que todavía hoy nutren el currículum de los libros de Matemáticas elementales. La *demostración* va mucho más allá de la mera persuasión de la Retórica como brillante manejo del Lenguaje, en la que los griegos eran grandes maestros, pues, es posible con persuasión argüir lo falso contra lo verdadero como hacen habitualmente los políticos, que según la coyuntura de gobierno o de oposición se atreven a defender un argumento y su contrario (de ahí los reproches de **Sócrates** hacia los sofistas). La *demostración matemática* convence por la ilación argumental irrefutable que alcanza algo legítimo conforme a las leyes de la Lógica. Por eso a partir de **Pitágoras** la Matemática es universalmente considerada como un manantial primario de verdad objetiva.

Definición y Demostración caracterizan y singularizan la actividad *matemática* frente al resto de todas las demás actividades humanas. En ellas se basa la importancia de la *Matemática* en la Educación, más allá de su carácter instrumental como lenguaje de las ciencias, las técnicas y las artes. El lenguaje *matemático* que tiene como núcleo la definición y la demostración es la fuente generadora de los instrumentos intelectuales básicos con los que debe de funcionar cualquier persona a lo largo de su vida, es decir, las facultades humanas vinculadas a la precisión y la exactitud, la lógica y la intuición, la inducción y la deducción, la observación y la imaginación, el análisis y la síntesis, la generalidad y la particularidad, la abstracción y la concreción, la interpolación y la extrapolación, etc. En ello se fundamenta el prestigio general que tiene la ciencia *matemática* en todo tipo de público frente a la argumentación retórica falaz que desprestigia a la Política, por ejemplo. Por eso, es frecuente, como ya hemos apuntado antes, escuchar la expresión ¡*Esto es matemático*! como una enfática, solemne, ampulosa y apasionada afirmación de que estamos hablando de algo que es una verdad absoluta e incontestable.



Platón 427-28 AC-347AC

Y esto es así, por lo menos desde **Platón** (González Urbaneja, 2001b), para quien la Matemática es un instrumento esencial para la educación e instrucción de la juventud como propedéutica ineludible del acceso a cualquier otro saber (*República*, VII, 521-527). Su maestro de *Geometría* en la Magna Grecia, **Arquitas de Tarento**, como brillante político y audaz reformador, había establecido la Matemática como componente esencial del currículum escolar, instituyendo las cuatro Ciencias de lo que después sería las cuatro *Artes Liberales* del *Quadrivium pitagórico* medieval –Aritmética, Geometría, Música y Astronomía–, sancionado por **Platón** en ***La República*** y de vigencia secular casi hasta nuestros días. Casi dos siglos antes, y en el origen, **Pitágoras**, acuña, como se sabe, el término Filosofía –*amor a la sabiduría*– y también –lo que no se conoce tanto–, el término *Mathema* vinculado al significado de conocer o aprender, pero no a un ámbito específico del saber, sino al *saber en sí* mismo, es decir, *Mathema* es «*lo que se puede aprender*», lo formativo, «*lo enseñable por antonomasia*» (González Urbaneja, 2004a, p.26). A partir de entonces, en el mundo griego, la *Matemática* es la encarnación del conocimiento, según **Platón** mediante reminiscencia –el aprendizaje es un recuerdo promovido por la Educación, que fructifica cuando el Profesor alumbra el conocimiento en el alumno mediante una serie de cuestiones y preguntas bien hilvanadas de forma heurística (*Menón*, 82b-85b)–. Así pues, la Matemática sería una actividad intelectual no vinculada a un espacio cultural concreto y particular del saber, sino al conocimiento en sí mismo, y anterior, como base, a todo otro conocimiento, de ahí los estrechos vínculos primigenios de la Matemática con la Filosofía. En toda época el Lenguaje *matemático* es la clave de la explicación de los fenómenos naturales y se arroga una función de dar *cuenta* –aspira a «*dar razón*» en sentido filosófico– del orden natural, en un proceso que se inicia con **Pitágoras**, se afianza con **Platón**, se consolida con **Descartes** y desemboca en la Física de **Galileo**, **Newton** y **Einstein.** Precisamente «*dar cuenta*» *y* «*dar razón*» son términos *matemáticos*.

## Matemática, Lenguaje y Literatura.

A lo largo de la Historia muchos *matemáticos* han realizado notables aportaciones a la Literatura, algunas de ellas de primera categoría. Muchos de los ***Diálogos*** **de Platón** (la ***República***, el ***Timeo***, el ***Menón***, el ***Fedón***...) y varias obras de **Descartes** (***El Discurso del Método, Las Reglas para la Dirección del Espíritu, La Geometría...***) que sitúan a la Matemática en el centro de atención, son auténticas joyas de la Literatura universal.

Según **Platón** (***República*, Libro VII,** 525d, 526e, 532c):

> La Aritmética conduce el alma hacia lo alto y la obliga a razonar sobre los números, sin permitir de ningún modo que nadie presente un ejemplo de números corpóreos y tangibles. [...] Esta ciencia se nos presenta con visos de necesaria, puesto que parece forzar al alma a servirse de la inteligencia pura para alcanzar la verdad en sí.
>
> La parte más elevada de la Geometría nos conduce a una contemplación más factible de la idea de bien. [....] La Geometría nos obliga a contemplar la esencia. [...] Es una ciencia del conocimiento del ser, no de lo que está sujeto al cambio o desaparición. [...] Conducirá al alma hacia la verdad y dispondrá la mente del filósofo para que eleve su mirada hacia arriba.
>
> Conferimos a las ciencias matemáticas el poder dialéctico de ascender de la caverna a la luz, de lo visible a lo inteligible, de los sentidos a la esencia, por medio de la inteligencia. Por ellas puede elevarse la mejor parte del alma a la contemplación del mejor de los seres: el Bien.

René Descartes 1596-1650

**Descartes** escribe (González Urbaneja, 2003a, cap.8):

> Esas largas cadenas trabadas de razones muy simples y fáciles, que los geómetras acostumbran a emplear para llegar a sus más difíciles demostraciones, me habían dado ocasión para imaginar que todas las cosas que entran en la esfera del conocimiento humano se encadenan de la misma manera. Discurso del Método (DM.AT.VI.19).
>
> No sé que tiene la mente humana de divino, donde yacen las primeras simientes de los pensamientos útiles que, por más olvidadas y asfixiadas que estén por estudios desencaminados, producen espontáneamente frutos. Reglas para la dirección del espíritu (RIV. AT.X 373).
>
> Pero no me detengo a explicar esto [la resolución geométrica de ecuaciones] con más detalle para no privar a cada uno del placer de aprenderlo por sí mismo, ni impedir el cultivo útil del propio espíritu ejercitándolo, que es, a mi parecer, la principal utilidad que puede obtenerse de esta ciencia. La Geometría (G. AT.VI.374).
>
> [...] Y yo espero que nuestros descendientes me estarán agradecidos no sólo por las cosas que aquí he explicado, sino también por aquellas que he omitido voluntariamente a fin de dejarles el placer de descubrirlas. La Geometría (G. AT.VI. 485).

Según **D'Alembert** (***Discurso preliminar de la Enciclopedia***. Orbis, Barcelona, 1984. p.63)

> La imaginación no actúa menos en un geómetra que crea que en un poeta que inventa, aunque operan de manera diferente sobre su objeto: el primero lo desnuda y analiza,

el segundo lo compone y embellece. [...]. De todos los grandes hombres de la antigüedad, es acaso Arquímedes el que más merece figurar al lado de Homero.

**Spengler** (***La decadencia de Occidente,*** Austral, cap.I.1, pp.138, 148,152) escribe:

En el número, como signo de la total limitación extensiva, reside, como lo comprendió Pitágoras, con la íntima certidumbre de una sublime intuición religiosa, la esencia de todo lo real, esto es, de lo producido, de lo conocido y, al mismo tiempo limitado

La afirmación pitagórica de que el número es la esencia de todas las cosas aprehensibles por los sentidos sigue siendo la más valiosa proposición de la Matemática antigua.

Para el alma antigua el principio de lo irracional, esto es, la destrucción de la serie estatuaria de los números enteros, representantes de un orden perfecto del mundo, fue como un criminal atentado a la divinidad misma. Este sentimiento se percibe claramente en el Timeo de Platón. La transformación de la serie discontinua de los números en una serie continua, pone en cuestión no sólo el concepto antiguo del número, sino hasta el concepto del mundo antiguo.

En los tiempos modernos excelentes escritores, que también han sido filósofos o *matemáticos*, como el famoso político y literato, **José Echegaray** (Premio Nobel de Literatura, 1904), **Bertrand Russell** (Premio Nobel de Literatura, 1950) y **O.Spengler** (al que citamos reiteradamente), ponderan el argumento matemático en sus escritos. Las famosas obras: ***Historia de la Filosofía Occidental*** de **B.Russell** (recientemente reeditaba en 2005, por RBA) y ***La decadencia de Occidente*** de **O.Spengler** realizan una rigurosa incardinación de la *Matemática* en la Historia de la Cultura, con profundas reflexiones sobre la incidencia de las *Ciencias Matemáticas* en la propia forja de la Cultura y el Pensamiento.

Digno es de mencionar, entre otras muchas, interesantes obras literarias escritas por *matemáticos*, por ejemplo: *De propria vita* de **Cardano**, *Harmonices Mundi* de Kepler, *Pensamientos* de **B.Pascal**, *Alicia en el País de las Maravillas* de **L.Carroll**, *Una infancia rusa* de **S.Kovaleskaya**, *Apología de un matemático* de **G.H.Hardy**.

También podemos citar obras no escritas por *matemáticos* donde la *Matemática* juega un cierto papel como *Planilandia de* **E.Abbott**, *El Aleph* de **J.L.Borges**, *Kepler* de **A.Koestler**, *Congreso en Estocolmo* de **J.L. Sanpedro**, ... .

Un paso más allá, en los últimos tiempos, es el ensayo o la novela donde la Matemática es protagonista o al menos un personaje importante, por ejemplo: *El hombre que calculaba* de **M.Tahan**, *El tío Petros y la conjetura de Goldbach* de **A.Doxiadis**, *El teorema del loro* de **D.Guedj**, *El diablo de los números* de **H.M.Enzensberger**, *El enigma de Fermat* de **S.Singh**, *El sueño de Descartes* de **P.J.Davis**, *Érase una vez un número* de **A.Paulos**, *La medida del mundo* de **D.Guedj**, *Damunt les espatlles dels gegants* de **Josep Pla**, ...

## Matemáticas en *El Quijote.*

Recién celebrado el cuarto centenario de la publicación de la primera parte de *El* ***Quijote***, debemos citar la *Matemática* presente en la obra de Cervantes. La hay, en efecto, en cuestiones de cálculo, números, medidas y proporciones, problemas e incluso Astronomía, así como alusiones a la utilidad de las diversas *ciencias matemáticas*. Veamos algunos textos indicativos:

**2ª Parte, Cap. XVIII. Referente a la ciencia de la Caballería:**

El caballero andante entre otras muchas cosas «ha de saber matemáticas, porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad de ellas».

**2ª Parte, Cap. XX. Confrontación del Licenciado de Salamanca y el Bachiller Corchuelo:**

El Bachiller al Licenciado: «Apearos y usad de vuestro compás de pies, de vuestros círculos y vuestros ángulos y ciencia, que yo espero haceros ver estrellas con mi destreza».

**Texto**: «En lo que faltaba del camino les fue contando el licenciado las excelencias de la espada con tantas razones demostrativas y con tantas figuras y demostraciones matemáticas, que todos quedaron enterados de la bondad de la ciencia [...]».

**1ª Parte, Cap. XXXIII. Orientaciones metodológicas para la conversión de infieles:**

«Les han de traer ejemplos palpables, fáciles, inteligibles, demostrativos, indubitables, con demostraciones matemáticas que no se pueden negar, como cuando dicen: “Si de dos partes iguales quitamos partes iguales, las que quedan son iguales” [Euclides, Axioma 3]; y, cuando esto no entiendan de palabra, como en efecto, no lo entienden, háseles de mostrar con las manos [...]».

Quijote de Gustave Doré

Lo de «*mostrar con las manos*» no sabemos si se refiere a la utilización de técnicas docentes más activas, más prácticas con recursos manuales experimentales y manipulativos, o si más bien tiene que ver con los tradicionales métodos inductivos y deductivos de las Matemáticas, de modo que habría que añadir el "*método de demostración por coacción*".

## Matemática, Lenguaje y Humor.

Vamos ahora a introducir un *punto* de humor con algunas paradojas lógico-semánticas y expresiones inducidas por términos *matemáticos* aplicados en el lenguaje coloquial. No me atrevería a llamarlos chistes, pero se acercan a ellos por su carácter sintético, enfático y lapidario; por la ambigüedad de los términos (en este caso *matemáticos*) y el *doble* sentido de ellos. También recuerdo famosos disparates de exámenes de Matemáticas y juegos de palabras a modo de acertijos, enseñanzas, sentencias o citas que juegan con *números* y elementos *matemáticos.*

Como cualquier escolar sabe ¼+¼=½ . Pues bien, he aquí la «*demostración*» más rigurosa de que «*para tener medios hacen falta cuartos*».

Decía **B.Franklin**:

> Si el hombre pudiera alcanzar la mitad de sus deseos, duplicaría sus problemas.

Entre la clase política que nos gobierna está muy extendida la creencia de que: «*9 de cada 10 políticos están de acuerdo en que 1 de cada 10 políticos es un corrupto*».

Paradojas en la naturaleza: «*Las bacterias se multiplican dividiéndose*».

Conversación en clase de Matemáticas: «*Me gustan los polinomios, pero solo hasta cierto grado*».

Conversación entre *matemáticos*: «*Hay tres clases de matemáticos, los que se equivocan al contar y los que no*».

Un cubo a una esfera: «*Nunca tendrás una esquina donde caerte muerta*».

¿Cuál es animal con más de 2 patas y menos de 3?: «*El pollo porque tiene dos y pico*».

¿Cuál es animal con más de 3 ojos y menos de 4?: «El $\pi$–ojo (piojo) $3<\pi<4$».

Las cuatro reglas en el matrimonio: «*Suma de obligaciones, resta de libertades, multiplicación de responsabilidades y división de bienes*».

Las progresiones y la evolución: «Si todos tenemos 2 padres, 4 abuelos, 8 bisabuelos, 16 tatarabuelos, 32 tata tatarabuelos ... ¿cómo es posible que procedamos sólo de Adán y Eva?»

Quijote de Honoré Daumier

Perlas estadísticas:

Todos los políticos prometen antes de salir elegidos subir los sueldos, de forma que nadie cobre por debajo de la *media* nacional.

La tasa de natalidad es *doble* de la tasa de mortalidad; por lo tanto, una de cada dos personas es inmortal.

El 20 por ciento de las personas muere a causa del tabaco. Por lo tanto, el 80 por ciento de las personas muere por no fumar.

Así queda demostrado que no fumar es peor que fumar.

La probabilidad de tener un accidente de tráfico aumenta con el tiempo que te pases en la calle. Por tanto, cuanto más rápido circules, menor es la probabilidad de que tengas un accidente.

El 33 % de los accidentes mortales involucran a alguien que ha bebido. Por tanto, el 67 % restante ha sido causado por alguien que no había bebido. A la vista de esto, esta claro que la forma más segura de conducir es ir borracho y –según el punto anterior– a toda velocidad.

Disparates en exámenes:

¿Qué es un Polígono?: *«Hombre que anda con muchas mujeres».*

¿Qué es un círculo? *«Un polígono de dos lados: el de dentro y el de fuera».*

Área del triángulo: *«Es igual a la cuarta parte de la mitad de su lado por la semisuma de la raíz cuadrada de tres».*

*«Los cuatro evangelistas son tres: San Pedro y San Pablo».*

Refrán sobre el valor posicional de las cifras: *«Cifra eres y nada más, según donde estés, así valdrás».*


EL INGENIOSO
HIDALGO DON QVIXOTE DE LA MANCHA
Compuesto por Miguel de Ceruantes Saauedra.
DIRIGIDO AL DVQVE DE BEIAR, Marques de Gibraleon, Conde de Barcelona, y Bañares, Vizconde de la Puebla de Alcozer, Señor de las villas de Capilla, Curiel, y Burgillos.
Ano, 1605.
Con priuilegio de Castilla, Aragon, y Portugal.
EN MADRID, Por Iuan de la Cuesta.
Vendese en casa de Francisco de Robles, librero del Rey nro señor.

## NOTAS

[1] A lo largo de todo el artículo se señala en letra cursiva además de las citas y textos de autores, los términos específicamente matemáticos o derivados de ellos.

[2] Álvaro de Campos es uno de los heterónimos de Fernando Pessoa

[3] Tal como se ha hecho hasta ahora, señalaremos en cursiva los términos específicamente matemáticos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LÁZARO CARRETER, F.: Espíritu de Geometría (en EL DARDO EN LA PALABRA). EL PAÍS, 5/12/99.

AMSTER,P. (2004): La Matemática como una de las Bellas Artes. SigloXXI. Buenos Aires, Cap.1.

ANDRADAS, C. (2000): Póngame un Kilo de Matemáticas. Editorial S.M. Madrid.

BALBUENA,L. ; GARCÍA JIMÉNEZ,J.E. (2005): El Quijote y las Matemáticas (en el Día Escolar de las Matemáticas). Servicio de Publicaciones de la FESPM. Badajoz.

BALBUENA,L. ; GARCÍA JIMÉNEZ,J.E. (2005): El Quijote y las Matemáticas. Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Comunidades de Castilla–La Mancha.

BRACHO,R. (2000): El gancho matemático. Port-Royal Ediciones. Granada. Sección 2.7.

CHAMOSO,J. (2006): Idees per treballar Matemàtiques i Literatura. BIAIX (FEEMCAT). Barcelona.

CHARTIER, E. (2002): Charlas sobre Educación. Pedagogía infantil. Editorial Losada. Madrid.

DAVIS, P.J. (1989): El sueño de Descartes. Labor. MEC. Madrid.

DESCARTES,R. (1983): Discurso del Método / Reglas para la dirección de la mente. Orbis. Barcelona.

EUCLIDES (1996): Elementos. Traducción y notas de M.L.Puertas. Gredos. Madrid.

DIVERSOS AUTORES (1983): Historia del Pensamiento. Orbis, Barcelona. Vol.1. Cap.1 ; Vol.2. Cap.3.

EGGERS,C. (1995): El nacimiento de la Matemática en Grecia. Eudeba, B. Aires. Caps. 1, 2.

GONZÁLEZ URBANEJA,P.M. (2000): Matemáticas y matemáticos en el mundo griego (en El legado de las Matemáticas: de Euclides a Newton). pp.24-75. Universidad de Sevilla. Cap.1.

GONZÁLEZ URBANEJA,P.M. (2001a): Pitágoras, el filósofo del número. Nivola, Madrid. Caps.1,2,7,8.

GONZÁLEZ URBANEJA,P.M. (2001b): La implicació de la matemàtica en l'educació, segons Plató. Bulletí 10 de ABEAM, 13-15.

GONZÁLEZ URBANEJA,P.M. (2003a): Los orígenes de la Geometría Analítica. Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, Tenerife. Caps. 4, 8.

GONZÁLEZ URBANEJA,P.M. (2003b): Els sòlids pitagòricoplatònics. Geometria, Art, Mística i Filosofia. BIAIX, nº 21, 10-24.

GONZÁLEZ URBANEJA,P.M. (2003c): Legado y herencia de Pitágoras. Apuntes de CPR, nº10. 6-21. CPR Palencia. Consejería de Educación y Cultura. Junta de Castilla y León.

GONZÁLEZ URBANEJA,P.M. (2004a): La Historia de la Matemática como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. Revista SUMA, nº45, 17–28.

GONZÁLEZ URBANEJA,P.M. (2004b): Pitágoras.

http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Pitagoras.asp.

GONZÁLEZ URBANEJA,P.M. (2004c): Platón. Matemática en la Filosofía y Filosofía en la Matemática.

http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Inprimaketak/Platon.asp.

GONZÁLEZ URBANEJA,P.M. (2004d): Apolonio.

http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Apolonio.asp

GONZÁLEZ URBANEJA,P.M. (2006): Platón y a Academia de Atenas. Nivola. Madrid. Caps. 1,6,7,8,9.

HARDY,G. (1981): Apología de un matemático. Nivola. Madrid, 1999. Ariel. Barcelona. Cap.10.

LEVI.B. (2001): Leyendo a Euclides. Zorzal, Buenos Aires. Cap.1

MONTESINOS,J. (2000): Historia de las Matemáticas en la Enseñanza Secundaria. Síntesis. Madrid. Cap. 1.3.

MORENO,R. (2002): Omar Jayyam. Poeta y matemático. Nivola. Madrid.

PESSOA,F. (1998): No, no es cansancio y otros poemas sin fecha. Hiperión, Madrid.

PLATÓN (1969): Diálogos: Menón, República, Timeo Fedón, (en Obras Completas). Aguilar. Madrid.

RODRÍGUEZ,R. (1987): Cuentos y cuentas de los matemáticos. Editorial Reverté. Barcelona.

RUSSELL,B. (1995): Historia de la Filosofía Occidental. Austral. Madrid. Vol.1. Lib.1. Caps. 3,15,18.

SÁBATO,E. (2005): El último grande de una Argentina grande. Buenos Aires Times, July/Aug, 11.

SANTALÓ,L. (1993): La matemàtica: una filosofia i una tècnica. Eumo, Vic- Girona. Caps.1, 2.

SERRANO,S. (1992): Escriptura y Combinatòria. BIAIX, nº1, 23–26). Reus.

SOLÀ,J. (2005): Poesia i matemàtiques; descripció d'un territori compartit. BIAIX, nº 23, 63-72. Barcelona.

SPENGLER,O. (1998): El sentido de los números (en La decadencia de Occidente. Cap.I.1). pp.129–193. Austral, Madrid.

VALERY, P. (1978): Carta al Autor (en El número de oro, Poseidón, Barcelona, pp.9–11).

VITRAC,B. (1989): La odisea de la razón (en Viaje al país de las Matemáticas). El Correo de la Unesco, nº11. 29–35.

57
Febrero 2008, pp. 43-54

# Códigos numéricos para la vida

*Es un hecho indudable que vivimos en una sociedad que nos requiere, cada vez más, interactuar con una serie de códigos numéricos. En este trabajo se pretende analizar las características de algunos de estos códigos -DNI-NIF, códigos de barras, códigos ISBN, códigos ISSN, códigos de tarjetas de crédito, de cuentas bancarias, de cheques bancarios- haciendo especial hincapié en los algoritmos que permiten calcular su carácter de control a partir de los demás elementos del código y en la forma que tienen estos códigos de hacer frente a los errores más frecuentes en la transmisión de los mismos. Además se estudian sus posibilidades didácticas y se ofrece una aplicación informática al aula de Secundaria a través de una WebQuest, creada por el autor, sobre el tema.*

*It is unquestionable that we all live in a society which increasingly requires us to cope with a whole range of numerical codes. This essay aims to analyze the main features of some of these codes, such as, national identity cards, social security cards, credit cards, current accounts, bank documents, etc., paying special attention to two aspects; on the one hand to the algorithms that allow to calculate their control feature starting from the other elements of the code itself. And on the other hand, to the way in which these codes face the most frequent mistakes concerning their transmission. Besides, their didactic possibilities are also dealt with, including a computer application to the curricula for secondary education by means of a webquest entirely created by the author of this essay.*

## Una sociedad codificada

¡Códigos de barras, ISBN, ISSN, cuentas bancarias, DNI-NIF, tarjetas de crédito, claves para todo...! ¿Quién no ha observado alguna vez con curiosidad los dígitos que acompañan a los códigos de barras y se ha preguntado por su significado? ¿Quién no ha tenido que anotar alguna vez los veinte dígitos de una cuenta bancaria? ¿Quién no se ha interrogado nunca sobre la letra que acompaña al DNI? ¿Hay alguien que no haya observado que las tarjetas de crédito tienen dieciséis dígitos taladrados en ellas?

SUMA.
REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.
ISSN 1130-488X
9 771130 488006 00057

Sin duda estamos invadidos por una cantidad creciente de códigos numéricos que regulan nuestras interacciones con la sociedad. Pero… ¿qué hay detrás de estos códigos?

Como ya manifesté en otros trabajos léase (Beato, 2001) y (Beato, 2004)), mi campo de estudio en Didáctica de las Matemáticas lleva varios años dirigido a encontrar temas de interés para los alumnos, que acerquen su realidad cotidiana a las Matemáticas. Estoy convencido de que es el mejor camino para acercar las Matemáticas a su realidad cotidiana. Entiendo que en lugar de ejemplificar los contenidos con aplicaciones matemáticas, es mejor partir de situaciones atractivas de su entorno inmediato, que les motiven para el estudio y profundización posterior en los contenidos de Matemáticas propios de su nivel. Soy consciente de que entrar en el terre-

**Jesús Beato Sirvent**
*IES Bahía de Cádiz.*
*Cádiz*
*Facultad de Ciencias de la Universidad de Cádiz.*
*Campus de Puerto Real.*

no de la motivación del alumnado es pisar arenas movedizas, ya que hoy en día, como afirma el filósofo José Antonio Marina en (Marina, 2005), uno de los problemas de la juventud estudiante o de la juventud en general es que ha sustituido voluntad por motivación y eso le proporciona la coartada necesaria y suficiente para sus actos.

Dado que, sin duda, el bloque temático dedicado a la Aritmética es el de mayor peso en la Enseñanza Secundaria, es este bloque el que centra mi atención. Ya presenté en (Beato, 2003) un trabajo sobre relaciones numéricas en algunos conceptos musicales que fue muy bien acogido por los alumnos. Ahora con este trabajo pretendo:

- Analizar varios códigos numéricos. Para ello, estudiaremos el significado de sus dígitos, profundizaremos en sus diferencias y semejanzas. Como aspecto aritmético fundamental, constataremos que todos los códigos analizados tienen en común la existencia de un elemento de control alfanumérico, que depende de los demás dígitos del código.

- Explicar los algoritmos que permiten calcular el elemento de control de cada código a partir del resto de dígitos.

- Analizar cómo la existencia del elemento de control de cada código permite detectar ciertos errores cometidos en la transferencia de información. En este sentido estudiaremos los dos errores más frecuentes: un error en un sólo dígito y el intercambio de dos dígitos consecutivos.

- Presentar una WebQuest de elaboración propia sobre el tema, como forma de desarrollar estos contenidos en el aula de Secundaria.

- Hacer reflexionar tanto a alumnos como a profesores sobre un campo de trabajo matemático no docente: la codificación comercial.

## *Algunos ejemplos de códigos numéricos: algoritmos de cálculo del elemento de control*

### Cheques bancarios

El código numérico de un cheque bancario, se expresa **N-c**, siendo N un número natural cualquiera y $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Al dígito c se le denomina dígito de control.

#### Algoritmo para el cálculo del dígito de control

Para calcular el dígito de control c a partir de N basta con realizar la división entera $N \div 7$. Entonces c no es más que el resto de esta división. A este tipo de algoritmos se les denomina modular, en este caso de módulo 7, pues simplemente se trata de expresar el número N módulo 7. El dígito de control es, pues, el elemento de $Z_7$ equivalente a N según la relación de congruencia.

**Ejemplo**: *En el código 2481057-c, se tiene* $2481057=7\times354436+5 \Rightarrow c=5$*. Luego el código completo es 2481057-5.*

### DNI-NIF

Es sin duda el código alfanumérico más conocido y usado. En este caso, el elemento de control es un carácter alfabético. La estructura es **N-c**, con N un número natural cualquiera y $c \in \{0,1, 2,\ldots,22\}$.

#### Algoritmo para el cálculo de la letra de control

En este caso se trata de un algoritmo modular, con módulo 23, pues son 23 la letras del alfabeto usadas para hacer la identificación con el resto, una vez eliminadas aquellas que podrían presentar algún equívoco con un dígito (como por ejemplo I,O), las que no existen en el alfabeto internacional (como Ñ) o aquellas que ocupan más de una posición (como Ll o Ch). Se trata pues de hallar el resto de la división de N entre 23 y asignar al resto una letra, según la tabla:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Resto** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| **Letra** | T | R | W | A | G | M |
| **Resto** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| **Letra** | Y | F | P | D | X | B |
| **Resto** | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| **Letra** | N | J | Z | S | Q | V |
| **Resto** | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | |
| **Letra** | H | L | C | K | E | |

En (Yagüez, 1990) puede verse una primera introducción al tratamiento didáctico de este tipo de códigos.

### Códigos de barras

El código de barras más usado en la actualidad es el EAN-13, ya que contiene 13 dígitos. (EAN≡***E****uropean* ***A****rticle* ***N****umbering*). Este código se expresa:

$$a_1\text{-}a_2a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\text{-}a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\text{-}c$$

siendo $a_i, c \in \{0, 1, 2,\ldots, 9\}, \forall\ i=1, 2,\ldots, 12$


El significado de los dígitos es:

**$a_1$ $a_2$** indican el país donde el productor ha solicitado este código. En España, este prefijo es 84. Este prefijo no indica, pues, la procedencia del producto ni el país de producción, ni el de la elaboración. Tan sólo indica el país donde el productor ha decidido solicitar el código.

**$a_3$ $a_4$ $a_5$ $a_6$ $a_7$** representan el código asignado a la empresa.
**$a_8$ $a_9$ $a_{10}$ $a_{11}$ $a_{12}$** representan el código asignado al producto. En España, el organismo encargado de asignar estos códigos es la AECOC (Agencia Española de Codificación Comercial).
**c** es el dígito de control.

Dado lo extendido del uso del código de barras, merece la pena hacer algunas anotaciones de carácter histórico:

- En 1948, el propietario de una tienda de comestibles acude a la Facultad de Tecnología de Drexel (Filadelfia) en busca de una solución automática que le ayudase a gestionar su almacén. Allí entra en contacto con Joseph Woodland y Bernard Silver, por aquel entonces estudiantes.

- El 7 de Octubre de 1952, Woodland y Silver patentan el primer código de barras.

- Mientras, en Europa, unos doce países y diversos organismos de numeración trabajan durante tres años aproximadamente para alumbrar el sistema de codificación europeo, hasta crear en 1997 EAN Internacional.

- En 1977 se funda en España la AECOC.

- El 3 de Octubre de 1977, en un supermercado de la cadena Mercadona en Valencia se pasaba por un escáner el primer producto identificado con un código de barras. Como curiosidad, se trataba de un estropajo de la marca 3M.

- El uso de los códigos de barras se estima que ha ahorrado a cada español unas 24 horas anuales de espera en cola de los supermercados.

## Algoritmo para el cálculo del dígito de control

El algoritmo de cálculo del dígito de control c a partir de los doce dígitos anteriores es:

- Sea:

$$S=\sum_{k=1}^{k=6} a_{2k-1}+3\sum_{k=1}^{k=6} a_{2k}$$

- Llamemos R al resto de dividir S entre 10.
- Entonces:

$$c=\begin{cases} 0 & si\ R=0 \\ 10-R & si\ R\neq 0 \end{cases}$$

Llamaremos a estos coeficientes {1,3} que multiplican a las cifras que ocupan un lugar impar o par respectivamente, pesos del algoritmo. Denominaremos también divisor al número por el que dividimos la cantidad S. De esta forma, podemos calificar a este algoritmo como un algoritmo de pesos y divisor. Como veremos, es el tipo de algoritmo más extendido para el cálculo del elemento de control de un código numérico. La diferencia entre un código y otro será pues, esencialmente, los pesos y los divisores utilizados. En la práctica, en una versión más didáctica, este tipo de algoritmos se puede desarrollar en forma de tabla, como en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo**: *Calculemos el dígito de control del código de barras de la imagen, cuyas primeras doce cifras son: 8 410090 83931. Se pueden disponer los datos así:*

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *8* | *4* | *1* | *0* | *0* | *9* | *0* | *8* | *3* | *9* | *3* | *1* | |
| *1* | *3* | *1* | *3* | *1* | *3* | *1* | *3* | *1* | *3* | *1* | *3* | |
| *8* | *+12* | *+1* | *+0* | *+0* | *+27* | *+0* | *+24* | *+3* | *+27* | *+3* | *+3* | *=108* |
| *S=108=10×10+8* | | | | | | | *R=8* | | | | | |
| *Dígito de control: c=10-8=2* | | | | | | | | | | | | |

*Luego el código completo -se puede comprobar en la imagen- es: 8 410090 839312*

En algunos productos, fundamentalmente motivado por problemas de espacio -es muy frecuente en las cajetillas de tabaco-, se suele usar una versión más breve del código de barras: el código EAN-8, llamado así porque sólo emplea 8 cifras, de las cuales la última es el dígito de control. Se expresa, por tanto:

$$a_1 a_2\ a_3\ a_4\ \text{-} a_5\ a_6\ a_7\ c$$

y el algoritmo para el cálculo del dígito de control es el correspondiente al código EAN-13, truncando los cinco primeros dígitos, y sus pesos correspondientes.


## Códigos ISBN

Los libros incluyen en la parte superior de su código de barras, otro código específico. Es el ISBN (***I**nternational **S**tandard **B**ook **N**umber*; en español Número Internacional Estándar del Libro). Se trata de un código de diez dígitos, en los que el último actúa como dígito de control, en este caso alfanumérico. Su formato es:

$$a_1 a_2\ \text{-} a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ \text{-} a_7\ a_8\ a_9\ \text{-}\ c$$

con $a_i \in \{0, 1, 2,..., 9\}, \forall i=1, 2,..., 9; c \in \{0, 1, 2,..., 9, X\}$


### Algoritmo para el cálculo del dígito de control

Se trata de un algoritmo de pesos y divisores, que utiliza la secuencia decreciente de pesos {10, 9,…, 2} y el 11 como divisor.

Sea

$$S = \sum_{k=1}^{k=9} (11-k) a_k$$

Llamemos R al resto de dividir S entre 11.

Entonces:

$$c = \begin{cases} 0 & si\ R = 0 \\ X & si\ R = 1 \\ 11 - R & si\ R \neq 0,1 \end{cases}$$

A diferencia con el código de barras usual, ahora la división se realiza entre 11. Esto ofrece ciertas garantías de unicidad, en un sentido que más tarde precisaremos, debido al carácter primo de 11, pero hace aparecer 11 restos posibles y con ello, la necesidad de incorporar una letra -X- para que la longitud del dígito de control no sobrepase a la unidad.

Este código de barras especial que presentan los libros, es en realidad un doble código numérico, ya que, a poco que observemos, notaremos que el código ISBN superior -salvo su dígito de control- aparece incrustado el código de barras usual inferior. Por tanto, deben verificarse simultáneamente los dos algoritmos de cálculo del dígito de control, para el código superior y para el inferior. Esto hace que en el caso de los libros, el significado de los dígitos del código de barras EAN-13 inferior sea diferente al usual. Su estructura para los libros es:

$$a_1\text{-}a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\text{-}a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\text{-}c$$

con:

**$a_1$-$a_2$ $a_3$**=978 fijo para España.

**$a_4\ a_5\ a_6\ a_7\text{-}a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}$** es el código ISBN, sin su dígito de control.
**c** es el dígito de control, calculado con el algoritmo EAN-13.

## Códigos ISSN

En las producciones seriadas, fundamentalmente revistas, aparece un doble código numérico como en los libros. En este caso, se trata del código ISSN (***I**nternational **S**tandard **S**erial **N**umber*; en español Número Internacional de Publicaciones Seriadas). Es un código de ocho dígitos en el que también el último actúa como dígito de control, también en este caso alfanumérico. Su estructura es:

$$a_1 a_2\ a_3\ a_4\ \text{-} a_5\ a_6\ a_7\ c$$

con $a_i \in \{0, 1, 2,..., 9\}, \forall i=1, 2 ,..., 7; c \in \{0, 1, 2,..., 9, X\}$

SUMA.
REVISTA SOBRE LA
ENSEÑANZA Y EL
APRENDIZAJE DE
LAS MATEMÁTICAS.

ISSN 1130-488X

9 771130 488006 00057

### Algoritmo para el cálculo del dígito de control

Se trata del algoritmo de pesos y divisores correspondiente al ISBN, truncado en sus dos primeros pesos. Los pesos son, por tanto, la secuencia decreciente {8,7,…,2} y el divisor 11. En definitiva:

Sea

$$S=\sum_{k=1}^{k=7}(9-k)a_k$$

Llamemos R al resto de dividir S entre 11.

Entonces:

$$c=\begin{cases} 0 & si\ R=0 \\ X & si\ R=1 \\ 11-R & si\ R\neq 0,1 \end{cases}$$

Al igual que en el caso de los libros, las revistas también poseen un doble código numérico. En este caso, el código inferior que aparece en su código de barras tiene un significado diferente al usual, pues incrusta, de manera análoga al ISBN, en su interior al código ISSN. La estructura de este código inferior es, pues, para las revistas:

$$\mathbf{a_1\text{-}a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\text{-}a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\text{-}c}$$

con:
$\mathbf{a_1\text{-}a_2\ a_3}$=977 fijo para España.

$\mathbf{a_4\ a_5\ a_6\ a_7\text{-}a_8\ a_9\ a_{10}}$ es el código ISSN, sin su dígito de control.

$\mathbf{a_{11}\ a_{12}}$ es un código para el precio (00 para las revistas que, como en el caso de SUMA, no se comercializan, sólo se distribuyen).
**c** es el dígito de control, calculado con el algoritmo EAN-13.

Además de este doble código numérico, las producciones seriadas suelen presentar, a la derecha del doble código de barras que hemos descrito anteriormente, un código de barras de tamaño inferior que hace referencia el número de serie de la publicación.

## Códigos de las tarjetas de crédito (CODABAR)

Las tarjetas de crédito contienen un código numérico, llamado CODABAR. Se trata de un código de 16 dígitos, distribuidos en cuatro grupos de cuatro, cuyo último dígito actúa también como dígito de control. Su estructura es:

$$\mathbf{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ \text{-}a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ \text{-}a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\text{-}\ a_{13}\ a_{14}\ a_{15}c}$$

con $a_i$, $c \in \{0, 1, 2,..., 9\}$, $\forall i=1, 2,..., 15$

### Algoritmo para el cálculo del dígito de control

Esencialmente, se trata de un algoritmo de pesos y divisores, que utiliza como pesos la secuencia alternada {2,1} para las cifras que ocupan un lugar impar o par respectivamente, y como divisor el 10. Sin embargo, para garantizar un mejor comportamiento antes los errores más frecuentes en la transmisión de datos, cuestión ésta que analizaremos más tarde, este código incorpora un suplemento antes de hallar la suma S. En definitiva, el algoritmo es:

Sea:

$$S=2\sum_{k=1}^{k=8}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{k=7}a_{2k}+$$ (nº de dígitos >4 en posición impar).

R= resto de dividir S entre 10.

Entonces:

$$c=\begin{cases} 0 & si\ R=0 \\ 10-R & si\ R\neq 0 \end{cases}$$

Estudiemos la disposición en forma de tabla del desarrollo de este algoritmo en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo**: *Calculemos el dígito de control del código numérico de una tarjeta de crédito cuyas primeras quince cifras son: 5020 2400 0082 348. Se pueden disponer los dígitos así (en negrita y subrayadas, las cifras mayores que 4 que ocupan una posición impar):*

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *5* | *0* | *2* | *0* | *2* | *4* | *0* | *0* | *0* | *0* | *8* | *2* | *3* | *4* | *8* | |
| *2* | *1* | *2* | *1* | *2* | *1* | *2* | *1* | *2* | *1* | *2* | *1* | *2* | *1* | *2* | |
| *10* | *+0* | *+4* | *+0* | *+4* | *+4* | *+0* | *+0* | *+0* | *+0* | *+16* | *+2* | *+6* | *+4* | *+16* | *=66* |
| *3 dígitos >4 en posición impar* | | | | | | | *S=66+3=69=10×6+9* | | | | | | *R=9* | | |
| *Dígito de control: c=10-9=1* | | | | | | | | | | | | | | | |

*Luego el código completo de la tarjeta de crédito es: 5020 2400 0082 3481*

## Códigos de cuentas bancarias

Es un código de veinte dígitos con la peculiaridad de tener dos dígitos de control. Su estructura es:

$$\mathbf{a_3\, a_4\, a_5\, a_6 - a_7\, a_8\, a_9\, a_{10} - a_0\, b_0 - b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7\, b_8\, b_9\, b_{10}}$$

con: $a_i, b_i \in \{0, 1, 2,..., 9\}, \forall i=0, 1, 2,..., 10$

El significado de estos dígitos es relevante:

$\mathbf{a_3\, a_4\, a_5\, a_6}$ representa el código de la entidad bancaria.

$\mathbf{a_7\, a_8\, a_9\, a_{10}}$ representa el código asignado a la sucursal donde se gestiona la cuenta.

$\mathbf{a_0\, b_0}$ son dos dígitos de control. Como veremos al desarrollar el algoritmo de cálculo, el primero –$a_0$- controla la primera parte del código, dedicada a la entidad y a la sucursal, mientras que el segundo –$b_0$- controla la segunda parte del código, la dedicada a la cuenta.

$\mathbf{b_1\, b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6\, b_7\, b_8\, b_9\, b_{10}}$ es el código de la cuenta bancaria en cuestión.

### Algoritmo para el cálculo de los dígitos de control

Se trata de un algoritmo doble porque calcula dos dígitos de control. Son dos algoritmos de pesos y divisores. En realidad los dos algoritmos son el mismo, a diferencia de que los pesos para el primer algoritmo son el resultado de truncar la cadena de pesos del segundo sus dos primeros elementos. En ambos casos el divisor es 11. En definitiva:

$S_a=4\, a_3+8\, a_4+5\, a_5+10\, a_6+9\, a_7+7\, a_8+3\, a_9+6\, a_{10}$

$R_a$= resto de dividir $S_a$ entre 11.

Entonces:

$$a_0 = \begin{cases} 0 & si\ R_a = 0 \\ 1 & si\ R_a = 1 \\ 11 - R_a & si\ R_a \neq 0,1 \end{cases}$$

Análogamente:

$S_b=b_1+2\, b_2+4\, b_3+8\, b_4+5\, b_5+10\, b_6+9\, b_7+7\, b_8+3\, b_9+6\, b_{10}$

$R_b$= resto de dividir $S_b$ entre 11.

Entonces:

$$b_0 = \begin{cases} 0 & si\ R_b = 0 \\ 1 & si\ R_b = 1 \\ 11 - R_b & si\ R_b \neq 0,1 \end{cases}$$

Es necesario observar que en el cálculo de los dígitos de control se produce una ambigüedad. Tanto si $R_a$ y $R_b$ son 1 como si son 10, se utiliza como dígito de control el 1. Esto viene motivado por el hecho que ya pusimos de manifiesto al calcular el elemento del control de los códigos ISBN e ISSN, que al usar también como divisor el 11 producían 11 restos posibles. Por tanto no es suficiente con los diez dígitos de nuestro sistema decimal. En el caso de aquellos códigos se resolvía asignando la letra X en caso de resto 1. En este caso, al no poder utilizar caracteres alfabéticos se opta por admitir la duplicidad del dígito.

## *Comportamiento de los códigos numéricos frente a los errores más frecuentes en la transferencia de datos.*

Los dos errores más frecuentes al transmitir códigos numéricos o al introducir códigos numéricos en un ordenador son:

**Errores tipo I:** Errores en un sólo dígito. Estudiar este tipo de errores es equivalente a plantearse la siguiente pregunta: ¿Pueden existir dos códigos que tengan todas las cifras (previas al elemento de control) iguales, salvo una de ellas y compartan el mismo dígito de control?

**Errores tipo II**: Errores de intercambio de dos dígitos consecutivos. Se trata ahora de estudiar la respuesta a la cuestión: ¿Pueden existir dos códigos que tengan todas las cifras (previas al elemento de control de control) iguales, salvo dos de ellas que están intercambiadas y compartan el mismo dígito de control?

No se pretende en este artículo hacer un análisis exhaustivo de los comportamientos ante estos dos tipos de errores de todos los códigos descritos en el mismo. Al respecto, hay un estudio interesante en (Escudero, 1990). Aunque centrado en el algoritmo de obtención de la letra de control en el NIF, presentan unas tablas y gráficos comparativos muy ilustrativos de cómo soporta este algoritmo los distintos tipos de errores. Además introducen de manera somera algunos otros ejemplos de códigos.

Vamos analizar aquí, a modo de ejemplo, el comportamiento de un código modular -el de los cheques bancarios- y de un código de pesos y divisores -el de las tarjetas de crédito- para poder comparar.

## Gestión de errores en el código de los cheques bancarios

### Errores tipo I

Sean:

$$N=\sum_{k=1}^{k=r} a_k 10^k \text{ y } N'=\sum_{k=1}^{k=r} b_k 10^k$$

dos números iguales en todos sus dígitos salvo 1, que ocupa el lugar i-ésimo, para algún i=0, 1, 2,…, r. Entonces, $a_k = b_k$, $\forall k \neq i$ y $a_i \neq b_i$ . En estas condiciones:

$$N-N' = (a_i-b_i)10^i = (a_i-b_i)2^i5^i$$

Como 2, 5, 7 son números primos, se tiene:

N-N' es múltiplo de 7 $\Rightarrow$ $(a_i-b_i)$ es múltiplo de 7

En definitiva:

$$N \equiv N' \pmod{7} \Rightarrow a_i \equiv b_i \pmod{7}$$

de donde se obtiene que la condición necesaria y suficiente para que N y N' compartan el mismo dígito de control es que $a_i$ y $b_i$ sean congruentes módulo 7. Ahora bien, los únicos pares de dígitos congruentes módulo 7 son: {0,7}, {1,8}, {2,9}, quedando los restantes dígitos {3,4,5,6} sin pareja congruente módulo 7.

*El código de los cheques bancarios detecta el error tipo I si y sólo si la cifra equivocada es 3,4,5,6. En otro caso, se produce una ambigüedad por duplicación..*

### Errores tipo II

Sean:

$$N=\sum_{k=1}^{k=r} a_k 10^k \text{ y } N'=\sum_{k=1}^{k=r} b_k 10^k$$

dos números iguales en todos sus dígitos salvo en dos cifras consecutivas, que aparecen intercambiadas entre sí, y ocupan los lugares i, i+1 para algún i=0, 1, 2,…, r-1. Esto es:

$$\begin{cases} a_k = b_k & si\ k \neq i \\ a_i = b_{i+1} & \\ a_{i+1} = b_i & \end{cases}$$

además supongamos, sin que ésto suponga ninguna pérdida de generalidad, que $a_{i+1} > a_i$. Con estas notaciones, se tiene:

$$N-N' = (a_i-b_i)10^i + (a_{i+1}-b_{i+1})10^{i+1} =$$

$$= (a_i-a_{i+1})10^i + (a_{i+1}-a_i)10^{i+1} = (a_{i+1}-a_i)3^2 2^i 5^i$$

Como 3,2,5,7 son números primos, se tiene:

N-N' es múltiplo de 7 $\Rightarrow$ $(a_{i+1}-a_i)$ es múltiplo de 7

En definitiva:

N\equiv N' (mod.7) $\Rightarrow a_{i+1} \equiv a_i \pmod{7}$

de donde se obtiene que la condición necesaria y suficiente para que N y N' compartan el mismo dígito de control es que $a_{i+1}$ y $a_i$ sean congruentes módulo 7. En resumen:

*El código de los cheques bancarios sólo detecta los errores tipo II si las cifras intercambiadas no son congruentes entre sí módulo 7.*

## Gestión de errores en el código CODABAR

### Errores tipo I

Sean $N=(a_1,\ldots, a_k,\ldots, a_{15})$; $a_i \in \{0,1,\ldots,9\}$ $\forall i=1, 2\ldots, 15$ y $N'=(a_1,\ldots, b_k,\ldots, a_{15})$; $a_i, b_k \in \{0, 1,\ldots, 9\}$ $\forall i=1,2\ldots, 15$ los vectores que recogen las primeras quince cifras de dos códigos CODABAR que comparten el mismo dígito de control. Llamemos n,n' al número de dígitos mayores que 4 en posición impar de N y N' respectivamente.

Distinguimos los dos siguientes casos:

- Caso k par: Como en este caso la diferencia está en un dígito que ocupa un lugar par, se tiene n=n'. Utilizando las mismas notaciones que en el apartado anterior:

$$\left.\begin{aligned} S &= \tilde{S} + a_k + n \\ S' &= \tilde{S} + b_k + n \end{aligned}\right\} \Rightarrow S - S' = a_k - b_k$$

Ahora bien como ambos códigos comparten el mismo dígito de control, S-S' debe ser un múltiplo de 10. Pero como todos los números que forman N y N' son dígitos, sólo es posible si $a_k - b_k = 0$, es decir, si $a_k = b_k$, luego en este caso el código detectaría todos los errores de una sola cifra.

- Caso k impar: Como en este tipo de códigos juegan un papel especial las cifras que ocupan un lugar impar, nos vemos obligados a distinguir ahora, a su vez, los siguientes subcasos:

  º Caso $a_k, b_k > 4$ ó $a_k - b_k \leq 4$: En este caso, n=n'. Se cumple entonces:

$$\left.\begin{aligned} S &= \tilde{S} + 2a_k + n \\ S' &= \tilde{S} + 2b_k + n \end{aligned}\right\} \Rightarrow S - S' = 2(a_k - b_k)$$

  Como ambos códigos tienen el mimo dígito de control, se tiene que S-S' ha de ser un múltiplo de 10. Pero eso sólo es posible si $a_k - b_k = 0$ o si $|a_k - b_k| = 5$. Pero esta última posibilidad no se puede dar ya que la elección de los dígitos $a_k, b_k$ en este caso, hace descartar una diferencia de 5 unidades entre ellos.

  º Caso ($a_k > 4$ y $b_k \leq 4$) ó ($a_k \leq 4$ y $b_k > 4$): Sin pérdida de generalidad y por fijar ideas, supondremos que se verifica la primera situación. Eso supone que n'=n-1. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} S &= \tilde{S} + 2a_k + n \\ S' &= \tilde{S} + 2b_k + n - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S - S' = 2(a_k - b_k) + 1$$

  pero en este caso |S-S'| no puede ser múltiplo de 10 porque es un impar, luego detectaría también todos los errores de tipo I posibles.

*El código CODABAR detecta todos los errores tipo I*

### Errores tipo II

Sean $N=(a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_{15})$ y $N'=(a_1,\ldots,a_{k+1},a_k,\ldots,a_{15})$ con $a_i \in \{0,1,\ldots,9\}$ $\forall$ i=1,2...,15. El intercambio es tal si $a_k \neq a_{k+1}$. Evidentemente, ahora no tenemos que distinguir entre casos k par y k impar ya que k y k+1 siempre tienen distinta paridad y la situación entre N y N' sería totalmente simétrica. Por tanto, sin pérdida de generalidad, supondremos k par y por tanto k+1 impar. Tenemos necesidad de distinguir casos según los valores de $a_k$ y $a_{k+1}$.

- Caso $a_k, a_{k+1} > 4$ ó $a_k - a_{k+1} \leq 4$. Se tiene:

$$\left.\begin{aligned} S &= \tilde{S} + a_k + 2a_{k+1} + n \\ S' &= \tilde{S} + a_{k+1} + 2a_k + n - 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S - S' = (a_{k+1} - a_k)$$

  por tanto, S-S' no podrá ser nunca un múltiplo de 10 ya que en cualquier caso

$$0 < |a_{k+1} - a_k| \leq 5 < 10$$

  y por tanto, el código siempre detectará el error.

- Caso ($a_k > 4$ y $a_{k+1} \leq 4$) ó ($a_k \leq 4$ y $a_{k+1} > 4$): Sin pérdida de generalidad y por fijar ideas, supondremos que se verifica la primera situación. Entonces:

$$\left.\begin{aligned} S &= \tilde{S} + a_k + 2a_{k+1} + n \\ S' &= \tilde{S} + a_{k+1} + 2a_k + n + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S - S' = (a_{k+1} - a_k) - 1$$

  Por tanto, S-S' es múltiplo de 10 si y sólo si $a_k = 9$ y $a_{k+1} = 0$, que es una posibilidad factible con el rango que estamos considerando en esta opción. En este caso, el código no detectaría el error.

*El código CODABAR detecta todos los errores tipo II salvo que las cifras intercambiadas sean 9 y 0*

## *Aplicación al aula: una WebQuest sobre códigos numéricos.*

La aplicación al aula de los códigos numéricos es, en principio inmediata, ya que la carga matemática es elemental, fundamentalmente teoría de la divisibilidad. Hay una línea editorial (consúltese (Pérez, 1996)) que incluye en su desarrollo algunas prácticas con el algoritmo de cálculo del dígito de control de un código de barras.

Algunas actividades recomendables podrían ser:

- En un primer nivel de dificultad se pueden proponer ejercicios de verificación del cálculo de elementos de control correspondientes a diversos códigos numéricos. Como ocurre siempre, son más interesantes los más cercanos al alumno, a saber: el DNI, los códigos de barras o el ISBN. Este tipo de ejercicios es muy útil para reflexionar sobre el algoritmo de la división entera, en particular, sobre cómo calcular el resto con una calculadora.

Ejemplo: *Halla los dígitos de control de las códigos de barras siguientes:*

*1. Leche Lauki entera: 8-414700-01101c*
*2. Leche Lauki semidesnatada: 8-414700-01102c*
*3. Nestea: 5-449000-02086c*

Ejemplo: *¿Es correcto el código de barras 9-788748-290208?*

- En un nivel un poco superior son adecuados, porque permiten profundizar en conceptos propios de divisibilidad, los ejercicios que suponen calcular una cifra escondida en un código, conocido el código completo -incluido su elemento de control-.

Ejemplo: *Halla el número borrado en los siguientes códigos de barras.*

*1. Vichy catalán: 8-410?49-001107*
*2. Zumo Minute Made: 5-449000-033?95*

- Por último, se puede profundizar en la creación, invención y manipulación de códigos por parte de los alumnos.

Ejemplo: *Un código de identificación tiene tres dígitos abc y un dígito de control d; se forma por tanto el número abc-d. El dígito de control se elige de tal manera que la suma de los dígitos que ocupan los lugares pares, más el doble de la suma de los que ocupan los lugares impares, más el número de dígitos mayores que 4 que están en lugares impares sea múltiplo de 10.*

*1. Calcula el dígito de control para el número de identificación 834.*
*2. Se sabe que hay un error en el segundo dígito de 486-4. ¿Puedes corregirlo?*
*3. Estudia si este código detecta todos los errores de un sólo dígito.*

Ejemplo: *El ISBN 0-669-03925-4 es el producto de la transposición de dos dígitos adyacentes que no son ni el primero ni el último. Determina el ISBN correcto.*

Al margen de esta forma de incorporar el tema al currículo, basada en el trabajo con lápiz, papel y a lo sumo calculadora -nada desdeñable desde mi punto de vista-, propongo otra forma de abordar el tema. Se trata de trabajar con una WebQuest sobre códigos numéricos que he elaborado pensando en alumnos de Secundaria. Una WebQuest es una unidad didáctica interactiva que mediante una metodología dirigida de trabajo escolar con Internet, y basándose en un protocolo definido -introducción, tarea, proceso, recursos, evaluación, conclusión y guía didáctica- pretende conjugar el aprendizaje de nuevas tecnologías en contextos de uso real, con una forma de búsqueda eficiente de información curricular en la red. De esta forma, se minimizan los posibles defectos que podría tener una búsqueda libre en Internet sobre un tema prefijado:

- Exceso de información.
- Errores conceptuales, posibles manipulaciones intencionadas de los contenidos.
- Fines espurios de muchas páginas.
- Falta de adecuación de la mayoría de las páginas a los niveles de escolarización primaria y secundaria.
- Falta de interactividad.
- Distracción en la búsqueda.

En esencia, hay dos formas de usar una WebQuest en el aula: hacer uso de una WebQuest ya elaborada que se ajuste a nuestras necesidades o fabricar una propia.

Para manejar una WebQuest ya existente, existen en la red bibliotecas sobre WebQuest de Matemáticas. Algunas direcciones interesantes son:

http://platea.pntic.mec.es/~erodri1/BIBLIOTECA.htm

http://roble.cnice.mecd.es/jarran2/enlaces/webquest.htm

http://www.estadisticaparatodos.es/webquest/w_matematicas.html

La dirección donde está alojada la WebQuest que he construido sobre el tema que nos ocupa es:

www.iesbahiacadiz.net/departamentos/matematicas/jesusbeato


Si se opta por fabricar una WebQuest, fundamentalmente, el trabajo del profesor incluye dos tareas:

- Por un lado, realizar él la búsqueda previa de información en la red, seleccionando las páginas que el alumno tendrá que visitar de manera obligatoria. Esta selección ha de estar basada en criterios que midan tanto la calidad de la información contenida en la página, como la adecuación al nivel del alumno y al tema a tratar, así como la estabilidad de la página (algunas veces ocurre que varios links se han perdido cuando el alumno va a realizar la actividad pues la página con la que enlazaban ya no existe).

- Una vez realizada la tarea anterior, el profesor debe confeccionar la página web que constituye el material con el que el alumno debe trabajar. Esto no debe ser un obstáculo para ningún profesor, pensando en tener que aprender a manejar programas de edición de páginas web. Con un procesador de textos como Word se puede realizar la página (así está hecha la que presento), teniendo la precaución de guardar el archivo como Página web.

Ya sólo queda el último paso: subirla a Internet. Tampoco hay que asustarse. Siempre está la opción de pedir ayuda al webmaster de la página web del instituto (que es lo que hago yo) para que la aloje en ella.

Como ya comenté anteriormente, una WebQuest tiene una estructura definida. A continuación explicitaré el contenido de cada una de las partes que la forman

### *Introducción*

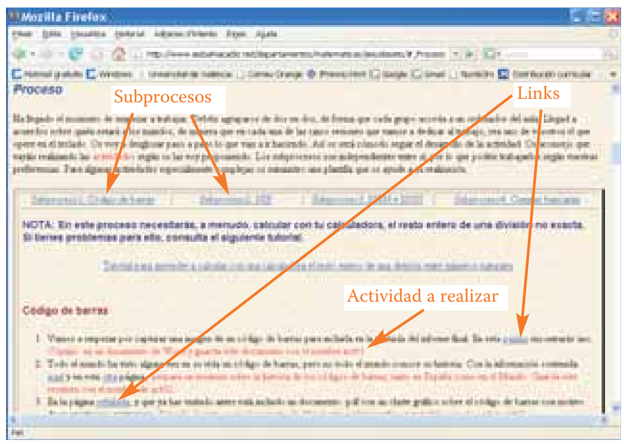
En este apartado se motiva, en pocas líneas, a la realización de las actividades que después se propondrán.

### *Tarea*

Se pretende que quede muy claro en este apartado en qué va a consistir el trabajo que se les va a pedir. El esquema más simple de  trabajo consiste en realizar una serie de visitas a ciertas páginas, realizar actividades relacionadas con la información contenida en las páginas visitadas  y elaborar un informe final. Además, se debe especificar en este apartado que vías y que formato de entrega al profesor va a tener el trabajo (en papel, en disco, por e-mail...)

### *Proceso*

Es la parte donde se especifican, a través de links las páginas a visitar y lo que tienen  que ir haciendo en cada visita. Como se trata de una actividad muy dirigida, la forma de interactuar con el alumno debe ser muy directa, concisa, sencilla y clara. Se puede a su vez dividir en subprocesos si el tema lo requiere. Se pueden, asimismo, incluir en este apartado tutoriales para realizar algunas de las misiones encomendadas, tanto propias del tema como informáticas (por ejemplo, en la que propongo para este tema, se incluye un tutorial para aprender a calcular el resto de una división entera con una calculadora, o se puede incluir un tutorial para aprender a comprimir archivos).




### *Recursos*

En este apartado, se proporcionan al alumno algunos sitios donde poder consultar, al margen de las páginas webs visitadas, informaciones concretas. Se pueden dar recursos tanto de otras páginas como bibliográficos.

### *Evaluación*

Como casi siempre ocurre, este apartado es el más interesante (o al menos a mí me lo parece). Para evaluar WebQuest se suelen usar matrices de evaluación como la siguiente, acompañada de una tabla de estimación.

| | Escasa consolidación<br>1 | Aprendizaje medio<br>2 | Buen aprendizaje<br>3 | Excelencia en el aprendizaje<br>4 | Notación Numérica |
|---|---|---|---|---|---|
| **Utilización de las TICs (Procesado de textos, escaneado de imágenes, inserción de documentos y captación de imágenes)** | No ha utilizado alguna de las tecnologías requeridas.<br>Algún fallo técnico por parte del grupo impide que el informe llegue completo al profesor | Usa todas las tecnologías requeridas.<br>El informe llega al profesor por correo electrónico.<br>El aspecto del informe final no es agradable: faltan las sangrías oportunas, los centrados, la diferenciación entre títulos y subtítulos, las partes del mismo no se distinguen, los tipos de letra elegidos y sus tamaños no son atractivos, las tablas no están bien confeccionadas | Usa todas las tecnologías requeridas.<br>El informe llega al profesor por correo electrónico.<br>El aspecto del informe final es correcto. Se puede leer. | Usa todas las tecnologías requeridas.<br>El informe llega al profesor por correo electrónico.<br>El aspecto del informe final es correcto. Se puede leer.<br>El informe final es técnicamente de gran calidad: El tipo de letra y su tamaño es coherente con la partición del documento. Los gráficos son de calidad y están insertados en su correspondiente lugar, las tablas son atractivas. | |
| **Cálculos aritméticos** | No ha incluido en el trabajo los cálculos aritméticos. | Ha incluido los cálculos aritméticos.<br>Ha necesitado aclaraciones del profesor para comprender las explicaciones de los algoritmos que se exponían en las páginas correspondientes.<br>Ha tenido algunos errores aritméticos | Ha incluido los cálculos aritméticos.<br>Se ha mostrado independiente en la comprensión de los algoritmos de cálculo correspondientes a cada subproceso.<br>Ha tenido algunos errores aritméticos | Ha incluido los cálculos aritméticos.<br>Se ha mostrado independiente en la comprensión de los algoritmos de cálculo correspondientes a cada subproceso.<br>No ha tenido errores aritméticos. | |
| **Informe final** | No ha comprendido bien las informaciones suministradas en las páginas visitadas.<br>El informe es inconexo entre secciones. | Ha comprendido las informaciones suministradas por las páginas.<br>El informe es inconexo entre secciones.<br>Los resúmenes no son correctos: contienen datos superfluos e irrelevantes, son demasiado extenso | Ha comprendido las informaciones suministradas por las páginas.<br>El informe mantiene una adecuada conexión entre secciones.<br>Los resúmenes son correctos: breves y con los datos fundamentales.<br>Los esquemas y las tablas no están bien planteados, ni se han usado con la asiduidad requerida | Ha comprendido las informaciones suministradas por las páginas.<br>El informe mantiene una adecuada conexión entre secciones.<br>Los resúmenes son correctos: breves y con los datos fundamentales.<br>Los esquemas y las tablas están bien planteados y se han usado en cantidad adecuada. | |
| **Expresión oral** | No realiza una verdadera exposición oral, sino necesita constantemente leer las conclusiones | Realiza una expresión oral, sin necesidad de leer todo lo que expresa, aunque manteniendo un guión de lo que va a decir.<br>La expresión es poco fluida, muy automática.<br>Pareciera que lo ha aprendido todo de memoria. | Realiza una expresión oral, sin necesidad de leer todo lo que expresa, aunque manteniendo un guión de lo que va a decir.<br>La expresión poco fluida.<br>No hay capacidad de debate y argumentación. | Realiza una expresión oral, sin necesidad de leer todo lo que expresa, aunque manteniendo un guión de lo que va a decir.<br>La expresión poco fluida.<br>En el debate se expresa claramente sus argumentos y muestra flexibilidad y rigor. | |

### Escala de estimación:

| | Escasa consolidación | Aprendizaje medio | Buen aprendizaje | Excelencia en el aprendizaje |
|---|---|---|---|---|
| PUNTUACIÓN | 4-7 | 8-11 | 12-15 | 16 |

### *Conclusiones*

Se plantean al alumno algunas cuestiones que le puedan ayudar a elaborar el informe final pedido o a debatir en clase sobre el uso de la herramienta. En resumen, a que reflexione sobre el trabajo realizado.

### *Guía didáctica*

En el último apartado de la WebQuest aparece una pequeña guía didáctica que incluye:

- Autor
- Correo electrónico
- Nivel académico y curso al que va dirigida
- Materia en la que se puede encuadrar
- Duración prevista (en sesiones de 1 hora)
- Observaciones
- Fecha

Mi experiencia con el trabajo en esta WebQuest es claramente satisfactoria y ha tenido entre los alumnos una gran acogida. Los resultados han sido excelentes y los trabajos finales, fruto de su trabajo con la página, han merecido una alta calificación por mi parte. Creo que en el momento educativo en que nos encontramos, cada vez más tendente a que los centros utilicen las tecnologías de la información y la comunicación en todas sus aulas, estas herramientas WebQuest van a jugar, o están jugando ya un papel fundamental.

Sólo me queda animar a todos al uso de esta herramienta. ■

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEATO SIRVENT, JESÚS (2003) "Sonidos, fracciones, medias, potencias y funciones exponenciales". Revista SUMA, de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, nº 44, 39-44.

BEATO SIRVENT, JESÚS (2001) "¿Está justificada la Enseñanza de los algoritmos de cálculo?". Revista Sema. Boletín de la Sociedad Española de Matemática aplicada, nº 18, 115-138.

ESCUDERO BAYLIN, MÓNICA ET AL (1990) "Algunas consideraciones sobre la letra de control del NIF". Revista Epsilon, de la SAEM Thales, nº 18, 31-42.

MARINA, JOSÉ ANTONIO (2005) "Aprender a vivir". 4ª edición. Barcelona. Ariel.

MATERIALES DEL CURSO: WEBQUEST (2005-2006) Organizado por el Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa.

PÉREZ, RAFAEL (Coordinador) (1996) "Construir las Matemáticas (1º ESO)". 1ª edición. Granada. Proyecto Sur.

PRINTSOFT PRODUCTS PTY LTD (ED) (1995) "Printsoft Barcode Toolkit Software"

YAGÜEZ CASTILLO, JAIME (1990) "El NIF". Revista Epsilon, de la SAEM Thales, nº 17, 35-38.

***Referencias en Internet***

http://www.belt.es/noticias/2005/marzo/15/tags.htm.

http://www.el-mundo.es/sudinero/99/SD160/SD160-06.html

http://ciberconta.unizar.es/LECCION/INTRODUC/435.HTM http://www.monografias.com/trabajos11/yantucod/yantucod.shtml http://www.udem.edu.mx/paso/academico/profesorado/m_avalos/fd_codigodebarras.jpg http://empresadigital.bitacoras.com/archivos/2005/07/01/iniciacion-a-los-codigos-de-barras

http://www.iese.edu/es/files/5_11041.pdf
http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ehernan/Talento/EugenioHernandez/Codigos.doc

http://www.ondasalud.com/edicion/noticia/0,2458,5276,00.html

http://www.proamazonia.gob.pe/bpa/codigo_de_barras.htm
http://www.el-mundo.es/sudinero/noticias/act-79-3.html
http://www.bne.es/esp/labiesissninf01.htm.
http://es.wikipedia.org/wiki/ISO_2108
http://descartes.cnice.mecd.es/m_Numeros/NIF2/NIF.htm.
http://club.telepolis.com/jagar1/Cnif.htm.

http://www.fiscal-impuestos.com/El-numero-de-identificacion-fiscal—NIF—P126.htm

http://www.usolab.com/articulos/septiembre2_03.php

http://www.antonioburgos.com/antologia/40sevillas/40joselon.html

http://www.abcdatos.com/programas/programa/l497.html

http://www.cajaespana.com/corporativo/empresas/pyme/serviciosonline/informacioniban/index.jsp

http://platea.pntic.mec.es/~jescuder/excel-1.htm

suma+ 57
Febrero 2008, pp. 55-64

# Los números mórficos en secundaria

*El número de oro y el número plástico pertenecen a la clase de los números mórficos. En este artículo revisamos algunos aspectos históricos, presentamos algunas de sus propiedades y proponemos actividades sobre ellos, que permitirán trabajar transversalmente Álgebra y Geometría. Usando el lenguaje funcional como modelo de representación, los alumnos podrán conjeturar, de forma intuitiva, un resultado fundamental: "Solo existen dos números mórficos, el número de oro y el número plástico".*

*The golden mean and the plastic number belong to the class of morphic numbers. In this paper we recall some historical aspects and we show some properties of them and we present some activities, which will allow us to work transversely Algebra and Geometry. By means of use of the functional language as a representational model, our students will can to conjecture the most fundamental result: "There exist only two morphic numbers, namely the golden mean and the plastic number".*

Una de las manifestaciones más fructíferas de la actividad matemática es la *generalización*. Cuando generalizamos construimos matemáticas, pues definimos y relacionamos conceptos, descubrimos propiedades, confirmamos intuiciones,… y tanto en el "resultado final", como en el "camino recorrido", encontraremos siempre belleza y armonía. Un claro ejemplo de bella generalización es la familia de los *números metálicos*, (Spinadel, 1998). Esta familia está formada por el conjunto de las soluciones positivas de las ecuaciones de la forma :

$$x^2\text{-}mx\text{-}n=0,\ m=1, 2, 3, \ldots$$

Una subfamilia relevante de ella se obtiene al considerar $n$=1 y $m$=1, 2, 3,... Todos sus elementos comparten propiedades que son generalización de las que cumple el *número de oro* $\phi$ (Spinadel, 1999; Redondo, 2006; Spinadel y Redondo, 2007) y representan la extensión natural del concepto de *proporción áurea* en el plano. Pero la *divina proporción*, puede extenderse al espacio de tres dimensiones, también de forma natural, en *número plástico* $\psi$ (Van der Laan, 1960; Alsina y García-Roig 2001; Alsina, 2007), y éste, junto con el *número de oro*, pertenece a la familia de los *números mórficos*, que aparece al considerar la posibilidad de seguir extendiendo aún más las propiedades que comparten. Este artículo está dedicado en esencia a ese proceso de generalización. La idea que organiza esta primera parte es la extensión de la "noción plana" de la *proporción áurea* $\phi$ al espacio de tres dimensiones, en conexión con el problema de la búsqueda de un "sólido armonioso".

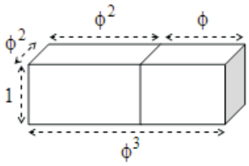
Como sabemos que el estudio de la belleza y armonía en las formas geométricas fue abordado en la antigüedad por los griegos, será inevitable empezar con un poco de historia (Ghyka, 1978, 1979). En el plano el elemento ortogonal de superficie es el rectángulo $a\times b$, Platón y sus contemporáneos encontraron en las propiedades matemáticas y estéticas de la *proporción áurea* $\phi$ motivos suficientes para considerar el rectángulo áureo, de razón b:a igual a $\phi$, con $b>a$ como el elemento de armonía en el plano.

El mismo Platón consideró el concepto de proporción en los sólidos. En el espacio, el elemento ortogonal de volumen es el paralelepípedo recto rectángulo $a\times b\times c$. Los griegos daban nombres especiales a las diferentes formas de volumen, le llamaban *altar* cuando $a<b<c$, *ladrillo* si $a=b>c$, *viga* en el caso $a=b<c$, y por supuesto, *cubo* cuando $a=b=c$. Nosotros no usaremos esta nomenclatura, y siguiendo el ejemplo de C. Alsina[1]

**Antonia Redondo Buitrago**
*IES Bachiller Sabuco.Albacete*
*Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas*
*Asociación Internacional de Matemática y Diseño, M&D*

nos permitiremos la libertad de llamarles a todas *cajas*.

Para poder hablar de proporción en el espacio, es necesario determinar con precisión la forma de la *caja* y observamos enseguida que aunque el volumen $a\times b\times c$ está determinado por los tres rectángulos, $a\times b$, $a\times c$, $b\times c$, en general diferentes, la caracterización de dos de ellos determina las proporciones del tercero. Por tanto la proporción en el espacio se establecerá con las razones de dos rectángulos, ya que la tercera proporción se deduce de las dos anteriores. Este hecho sugiere que para que un sólido $a\times b\times c$ fuera *armonioso* sería suficiente con que dos de los rectángulos, $a\times b$, $a\times c$, $b\times c$, lo fueran. Esto sucede en los llamados *volúmenes egipcios* emparentados con el *número de oro*: $1\times 1\times\phi$, $1\times\phi\times\phi$, $1\times\phi\times\phi^2$ y $1\times\phi^2\times\phi^3$. El segundo aparece a menudo en las construcciones del antiguo Egipto con las aproximaciones  y  para la proporción áurea[2]. El tercero, con notables propiedades geométricas, se conoce como el *sólido de oro* de Samuel Colman (Colman, 1920). El cuarto, Figura 1, tiene la propiedad de que se puede dividir en un sólido $\phi^2\times\phi^2\times 1$ y un *sólido de oro*.




$$\phi^2 = \phi + 1 \Rightarrow \phi^3 = \phi^2 + \phi$$

Figura 1

Ciertamente, todos estos sólidos pueden considerarse *armoniosos*, pero no puede decirse que representen una verdadera generalización, pues ninguna de las propiedades geométricas intrínsecas que caracterizan al *rectángulo de oro*, se cumplen en ellos. Tuvieron que pasar muchos siglos hasta que dicha generalización fuera descubierta o reconocida, y llegaría en relación con el estudio de determinadas sucesiones recurrentes y de la mano de los trabajos del arquitecto holandés Hans Van der Laan (1904-1991).

Los conceptos y resultados que vamos a considerar tienen una corta historia que revisaremos brevemente en esta propuesta, donde el hilo conductor será el estudio de los *números mórficos* y sus propiedades fundamentales, y el objetivo la presentación de originales actividades "ecológicas" en el entorno del Bachillerato. El estudio se ubicaría de forma natural en el marco de la formulación de conjeturas y de la generalización y podría ser un recurso didáctico más a tener en cuenta para trabajar de forma transversal contenidos de Álgebra y Geometría, considerando de forma globalizada conceptos y procedimientos tan diversos como la noción de número irracional, la resolución de ecuaciones, la proporción y la semejanza, la convergencia de sucesiones de números reales… y nos daría ocasión de ir introduciendo poco a poco a nuestros alumnos en el razonamiento por recurrencia y la demostración por el método de inducción.

En muchas ocasiones trabajaremos en el espacio de tres dimensiones y por tanto los cálculos y procedimientos serán algo más complejos que cuando nos restringíamos al rectángulo de oro en el plano, pero en modo alguno en ningún caso serán más complicados. De forma intencionada las actividades *aparecen* en el texto del artículo, en el momento en que el contexto lo sugiere, numeradas según la secuencia en que deben ser propuestas, diseñadas para que cualquier alumno de Bachillerato pueda realizarlas con autonomía sin dificultad.

Antes de empezar convendrá que recordemos algunos resultados sobre los *números metálicos*. Una colección de actividades para Secundaria sobre estos números fueron presentadas en el nº 50 de esta revista (Redondo y Haro, 2005).

El *número metálico* $\sigma_m$ es un número mayor que 1 que se define como la solución positiva de la ecuación:

$$x^2\text{-}mx\text{-}1=0,\ m=1, 2, 3, \ldots \qquad (1)$$

El primero de ellos $\sigma_1$ es, en efecto, el *número de oro* $\phi$. El segundo $\sigma_2$ es conocido como *número de plata* $\theta$, y el tercero que corresponde al caso $m$=3 , es el *número de bronce.* Los restantes no tienen nombre propio, simplemente se nombran $\sigma_m$.

La ecuación (1) puede expresarse equivalentemente de la forma $x=m+1/x$ por tanto reemplazando iterativamente el valor de $x$ en el segundo término de la igualdad, obtenemos la expansión en fracción continua simple del número metálico $\sigma_m$ considerado:

$$x^2 - mx - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad \sigma_m = \frac{m+\sqrt{m^2+4}}{2} = m + \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cdots}} = [m; m, m, \ldots]$$

Una de las propiedades que caracteriza a los *números metálicos* $\sigma_m$, es que son límite de las razones de términos consecutivos de la sucesión recurrente:

$$a_1=a_2=1 \qquad a_n=ma_{n-1}+a_{n-2},\ n=3, 4, 5, \ldots \qquad (2)$$

Esto se debe a que la sucesión de razones verifica la igualdad

$$a_{n+1}/a_n=(ma_n+a_{n-1})/a_n=m+(a_n/a_{n-1})^{-1}$$

y por ser de Cauchy converge a un cierto número $L$ y de esta manera se debe cumplir

$$L=m+L^{-1} \Leftrightarrow L^2\text{-}mL^{-1}= 0 \Rightarrow L=\sigma_m$$

En este razonamiento solo es relevante la relación de recurrencia, el valor de las condiciones iniciales no influye para nada en el resultado obtenido. Podríamos considerar diferentes valores para $a_1$ y $a_2$ y obtendríamos diferentes sucesiones, pero el límite de sus razones sería siempre el mismo. Por ejemplo, en el caso $m$=1, considerando $a_1 = a_2 = 1$ la relación de recurrencia origina la clásica sucesión de los *números de Fibonacci*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Pero si elegimos $a_1$=1 y $a_2$=3 obtenemos la sucesión de los *números de Lucas*: 1, 3, 4. 7, 11, 18, ... que también origina el *número de oro*. En el caso $m$=2, las condiciones iniciales $a_1$=1 y $a_2$=1 generan la sucesión de los *números de Pell*:

1, 2, 5, 12, 29, 70, ...

De la ecuación (1) se deducen dos consecuencias inmediatas. La primera es que los *números metálicos* $\sigma_m$ generan la progresión geométrica de razón $\sigma_m$

$$..., (\sigma_m)^{-3}, (\sigma_m)^{-2}, (\sigma_m)^{-1}, 1, \sigma_m, (\sigma_m)^2, (\sigma_m)^3, ...$$

que cumple también la relación de recurrencia (2).

La segunda es que el *gnomon*[3] de un *rectángulo metálico* $a \times b$, $b:a = \sigma_m$ es el rectángulo $a \times ma$ formado por la unión de $m$ cuadrados de lado $a$, Figura 2:

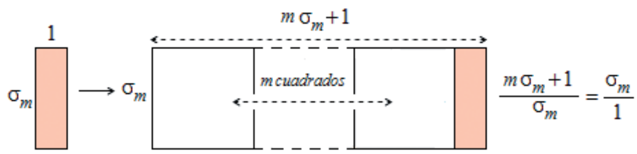



Figura 2

En consecuencia, el crecimiento *pseudo-gnomónico por m cuadrados* derivado de la relación de recurrencia (2) origina una sucesión de rectángulos cuyas razones tienden rápidamente a $\sigma_m$. La Figura 3 muestra el proceso que genera el *rectángulo de plata*.

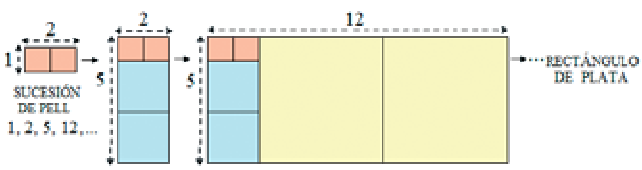



Figura 3

La siguiente actividad será el comienzo de nuestra búsqueda del paralelepípedo que sea una generalización satisfactoria de los *rectángulos metálicos* $\sigma_m$.

## Actividad 1

***Objetivos:*** Reconocer sucesiones de números naturales definidas por recurrencia y conjeturar relaciones de recurrencia. Construir la *sucesión de Padovan.*
***Conocimientos previos:*** Concepto de sucesión. Término general de una sucesión.
***Materiales:*** Trama de puntos.

En la Figura 4 el triángulo inicial es equilátero y de lado 1. Le añadimos otro igual en la parte de abajo. Luego otro igual hacia la izquierda, siguiendo el sentido de las agujas del reloj.

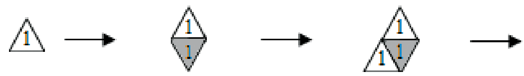


Figura 4

Seguimos girando y añadimos un triángulo equilátero de lado 2, y luego otro igual en la parte superior. Después otro de lado 3, de la forma que se ve en la Figura 5.

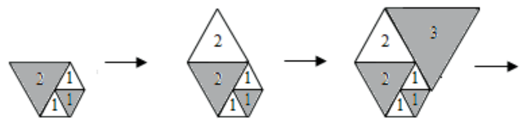


Figura 5

Girando siempre en el sentido de las agujas del reloj, añadimos un triángulo blanco de lado 4 que coincida con los de los dos sombreados de lado 1 y 3, Figura 6. Luego uno sombreado de lado 5 que coincida con los de los dos blancos de lado 1 y 4, y así sucesivamente…

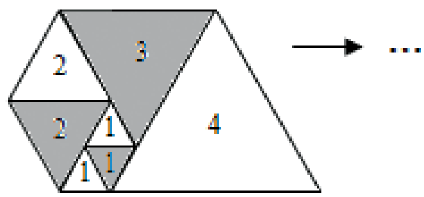


Figura 6

Continúa con el proceso y dibuja más triángulos de esta *espiral de triángulos.*

a) Escribe ahora las longitudes de los lados de los triángulos en el orden en que los has obtenido ¿qué relación existe entre los lados de los triángulos? Exprésala algebraicamente.
b) Si continuaras indefinidamente obtendrías una sucesión. ¿Sabrías hallar su término general?

La sucesión de los lados de los triángulos es 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16,…, la *sucesión de Padovan*. Es una sucesión definida por tres condiciones iniciales, $a_1$, $a_2$, $a_3$ y una relación de recurrencia que permite obtener los términos $a_4$, $a_5$, $a_6$, ...

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1 \qquad a_n = a_{n-3} + a_{n-2} \quad n = 4, 5, 6, \ldots \tag{3}$$

La utilización de una trama triangular como material facilita reconocer la relación de recurrencia que la define (Figura 7) y otras como:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-5} \quad n = 6, 7, 8, \ldots \tag{4}$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-5} + a_{n-6} \quad n = 7, 8, 9, \ldots$$

$$a_n = a_{n-4} + a_{n-5} + a_{n-6} + a_{n-7} + a_{n-8} \quad n = 9, 10, 11, \ldots$$

que podrían demostrarse por inducción. La relación (4) desempeñará, como veremos más adelante, un papel fundamental.

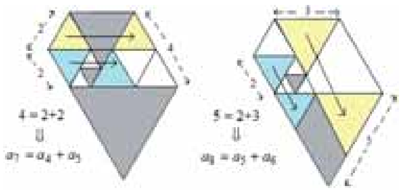



Figura 7

Al igual que los números de Fibonacci, los números de Padovan también aparecen al sumar "líneas" del triángulo de Pascal, Figura 8.

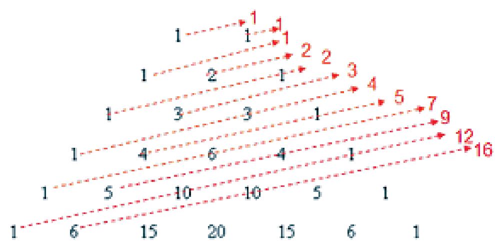



Figura 8

Sabemos que los *números metálicos* son límite de razones de términos consecutivos de ciertas sucesiones recurrentes. Parece lógico preguntarse qué ocurre con la sucesión de las razones de la sucesión de Padovan. La siguiente actividad contesta a esta pregunta y será una ocasión para resolver ecuaciones polinómicas por diferentes métodos.

## Actividad 2

***Objetivos***: Encontrar el *número plástico*, reconociendo que es un número irracional y obtener una aproximación racional de él por diferentes procedimientos.
***Conocimientos previos:*** Relación entre la *sucesión de Fibonacci* y el *número de oro.* Límite de una sucesión. Resolución de ecuaciones polinómicas. Representación gráfica de funciones.
***Materiales:*** Calculadora gráfica y ordenador (programa Derive).

En la Actividad 1 has encontrado una sucesión que se define de forma parecida a la *sucesión de Fibonacci*. Era la *sucesión Padovan*: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, …
a) Utiliza la calculadora para construir la sucesión de las primeras razones de dos términos consecutivos de ella y estudia su convergencia.
b) Razona ahora de forma general teniendo en cuenta que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{a_n} = \frac{a_{n-1}/a_{n-2} + 1}{a_n/a_{n-2}} = \frac{a_{n-1}/a_{n-2} + 1}{\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$$

La calculadora ayuda a conjeturar que la sucesión $a_2/a_1$, $a_2/a_3$, $a_4/a_3$, ... es convergente. Una demostración rigurosa no sobraría, pero quizás no sea necesaria, pues nuestros objetivos son otros. Si admitimos que la sucesión es convergente a un cierto número $L$, evidentemente tiene que cumplir:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{L+1}{L^2} \Leftrightarrow L^3 - L - 1 = 0$$

Una primera aproximación al valor del límite pedido se puede hallar fácilmente utilizando una tabla que también servirá para descubrir la igualdad de los tres límites de la izquierda:

| $n$ | $a_{n+1}/a_n$ | $a_n/a_{n-1}$ | $a_{n-1}/a_{n-2}$ |
|---|---|---|---|
| **1** | 1/1 | | |
| **2** | 1/1 | 1/1 | |
| **3** | 2/1 | 1/1 | 1/1 |
| **4** | 2/2 | 2/1 | 1/1 |
| **5** | 3/2 | 2/2 | 2/1 |
| **⋮** | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

El límite L es por tanto solución de la ecuación $x^3 - x -1 =0$. El polinomio que aparece en el miembro de la izquierda es irreducible en el cuerpo de los números racionales. Pero como es de grado impar sabemos que por lo menos tiene una raíz real, que será única, pues la gráfica de la función $y=x^3 - x -1$ sólo corta en un punto al eje de abcisas, Figura 9. Esa solución es ψ, el *número plástico*[4] de Hans van der Laan.

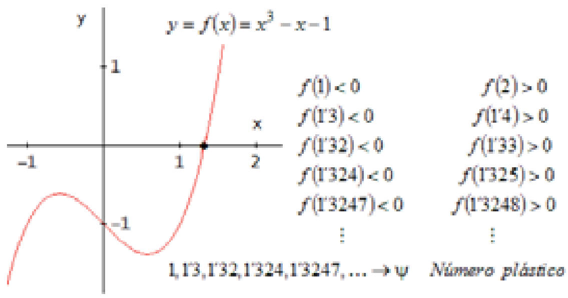



Figura 9

Van der Laan empieza sus estudios de arquitectura en 1923 y los abandona en 1927 para ingresar en la orden benedictina. En 1938 proyecta y construye una nueva ala de la abadía de Oosterhout y retoma su actividad como arquitecto, aunque realiza muy pocas obras, casi todas ellas de carácter religioso (tres conventos, un monasterio, una capilla y una casa privada). Sus estudios sobre las proporciones en las iglesias del Románico, le conducen al descubrimiento de que muchas de ellas aparecen relacionadas con la sucesión de Padovan y desarrolla un sistema de proporciones basado en el número plástico que utiliza en sus construcciones.

La sucesión de Padovan recibe este nombre por el arquitecto inglés Richard Padovan (1935-), responsable en gran medida de la difusión de su obra, al traducir en 1983 al inglés su tratados de arquitectura, "Architectonic space" en 1983 y "Modern Primitive" en 1994 (Padovan, 2002). Ian Stewart contribuyó también a su divulgación y popularidad, dedicándole en 1996 una de sus columnas de Mathematical Recreations de Scientific American, a la sucesión de Padovan (Stewart, 1996).

El *número plástico* es un número irracional, cuyo valor exacto se puede hallar aplicando la fórmula clásica de Cardano para la ecuación cúbica $x^3 + px = q$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

tomando $p= -1$ y $q = 1$

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1'3247179572447460\ldots$$

Es una buena ocasión para invitar a los alumnos a que busquen información en los libros de Historia para encontrar la fórmula, la apliquen y comparen la solución que proporciona, con las aproximaciones que han obtenido utilizando el modelo funcional.

Observemos las analogías entre el *número plástico* y los *números metálicos* $\sigma_m$. Son evidentes. En efecto, todos ellos son números irracionales mayores que uno, soluciones de ecuaciones que son generalización de la que satisface el número ϕ. Por supuesto, todos admiten expansión en fracción continua simple, pero aquí encontramos una diferencia esencial. Las fracciones continuas simples de los números $\sigma_m$ son muy sencillas y sus coeficientes son verdaderamente fáciles de recordar pues son todos iguales al correspondiente *m*, es decir, son periódicas puras de periodo *m*. Sin embargo con la fracción continua simple del *número plástico* la cosa cambia, pues no es periódica[5] y no parece que exista ninguna forma de predecir sus coeficientes. Como muestra, estos son los primeros 80 coeficientes:

1, 3, 12, 1, 1, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 141, 80, 2, 5, 1, 2 , 8, 2, 1, 1, 3, 1, 8, 2, 1, 1, 14, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 10, 4, 40, 1, 1, 2, 4, 9, 1, 1, 3, 3, 3, 2, 1, 17, 7, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 3, 5, 1, 2, 6, 2, 2, 1, 1, 1, 4, 1, 3, 1, 2, 6, 5, 6, 49, 3, 7.

Pero podemos obtener dos expresiones infinitas diferentes para aproximar ψ:

$$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \Rightarrow \psi = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1+\cdots}}}$$

$$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 + x \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1+x} \Rightarrow \psi = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1+\cdots}}$$

Continuando con las analogías, de la ecuación $x^3 - x -1 =0$ se deduce que el número y define una progresión geométrica de razón ψ: ..., $\psi^{-3}$, $\psi^{-2}$, $\psi^{-1}$, 1, ψ, $\psi^2$, $\psi^3$, ...,que también cumple la relación de recurrencia correspondiente, (3).

Más analogías. En la tercera actividad, al generalizar al espacio el *crecimiento pseudo-gnomónico* asociado a los números metálicos $\sigma_m$ (ver Figura 3) nos encontraremos con el número plástico y conseguiremos el deseado *"sólido armonioso"*, ¡la caja plástica! (Alsina, 2007). Utilizaremos para ello un modelo geométrico que proporcionará una interpretación geométrica de la sucesión de Padovan y de la sucesión que se origina al considerar las razones de los términos consecutivos.

## Actividad 3

***Objetivos***: Obtener una sucesión de cajas que "*tiende*" a una caja de dimensiones $1\times\psi\times\psi^2$. Establecer el concepto de *caja plástica*.

***Conocimientos previos***: Sucesión de Padovan, número plástico y la relación entre ellos.

***Materiales***: Policubos. Imaginación espacial.

A partir de un cubo $1\times1\times1$ construimos una sucesión de cajas por el procedimiento que muestra la Figura 10. Añade algunas cajas más a la sucesión.

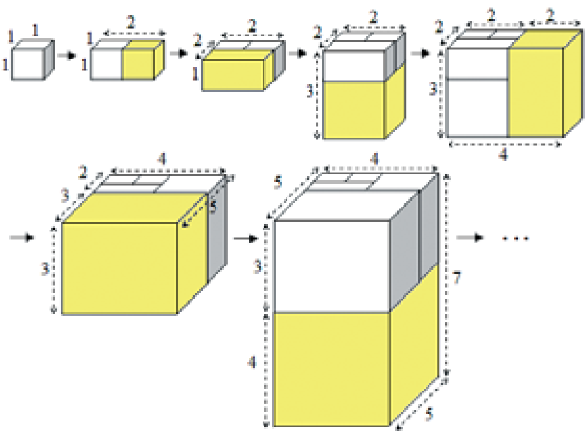


Figura 10

a) Describe con precisión el procedimiento seguido en cada una de las iteraciones.

b) Observa como varían las dimensiones *a, b, c de* las cajas que vamos obteniendo y como influye en la "*forma de la caja*" (la primera es un cubo, la segunda es "muy alargada", la tercera es "muy ancha",...). Describe esta variación. Te ayudará utilizar una tabla como esta:

| caja inicial | caja añadida | caja final |
|---|---|---|
| 1×1×1 | 1×1×1 | 1×1×2 |
| 1×1×2 | ¿? | ¿? |
| ¿? | ⋮ | ⋮ |

Figura 11

c) Si el proceso pudiera repetirse indefinidamente, ¿qué dimensiones tendría la caja final?

La utilización del material facilita la representación mental en las primeras iteraciones, pero estamos trabajando en el espacio y el número necesario de piezas necesarias para construir la figura que se añade crece con gran rapidez y esto "afortunadamente" obligará al alumno a utilizar como recurso representaciones gráficas en el plano que pondrán a prueba su imaginación espacial. Describir la variación de la forma de la caja conduce a reconocer que la idea de "alargada", "ancha",...solo puede precisarse comparando las razones *b/a* y *c/b*.

Lo primero que observamos es que las cajas se añaden siguiendo la secuencia: "*a la derecha*", "*por delante*", "*por abajo*", "*a la derecha*", "*por delante*", "... Empezamos con un cubo. Añadimos otro cubo a la derecha y obtenemos una caja 1×1×2. A éste le añadimos por delante otra 1×1×2 y obtenemos una caja 1×2×1.Y así sucesivamente...

El enunciado sugiere describir las cajas ordenando sus dimensiones en orden creciente, es decir de la forma $a\times b\times c$ con, $a\leq b\leq c$ independientemente de su disposición. Es imprescindible admitir este convenio si queremos descubrir el patrón seguido en las sucesivas transformaciones. Esta actividad es un claro ejemplo de la relevancia en Matemáticas de la elección de una notación y codificación apropiada (Figura 12).

| caja inicial | caja añadida | caja final | *b/a* | *c/b* |
|---|---|---|---|---|
| 1×1×1 | 1×1×1 | 1×1×2 | 1/1 | 2/1 |
| 1×1×2 | 1×1×2 | 1×2×2 | 2/1 | 2/2 |
| 1×2×2 | 2×2×2 | 2×2×3 | 2/2 | 3/2 |
| 2×2×3 | 2×2×3 | 2×3×4 | 3/2 | 4/3 |
| 2×3×4 | 3×3×4 | 3×4×5 | 4/3 | 5/4 |
| 3×4×5 | 4×4×5 | 4×5×7 | 5/4 | 7/5 |
| ¿? | ¿? | ¿? | ⋮ | ⋮ |

Figura 12

La tabla ayuda a reconocer lo que sucede y descubrir la ley de recurrencia: "*Con excepción de las 4 primeras, todas las cajas iniciales son a×b×c con a<b<c, siendo por tanto todas las caras rectángulos. En cada paso adosamos a una de las caras de mayor área, es decir a una de las dos b×c, una caja de dimensiones b×b×c. El resultado obtenido es una caja final b×c×(a+b), que se convierte en la caja inicial de la fila siguiente*".

Observamos ahora la columna de las figuras finales... Efectivamente, si eliminamos el primer término de la sucesión de Padovan obtenemos precisamente la sucesión de las dimensiones menores. Si eliminamos los dos primeros, obtenemos la de las dimensiones intermedias. Y si eliminamos los tres primeros, la de las dimensiones mayores. Por tanto, las cajas finales siempre tienen sus dimensiones iguales a tres términos consecutivos de la sucesión de Padovan, de esta forma, al hacer tender a infinito el número de iteraciones, los cocientes  y  convergen al *número plástico*. Podríamos decir que las cajas que vamos obteniendo son cada vez *"más parecidas"* a una caja determinada por dos *"rectángulos plásticos"*, Figura 13, lo que se conoce como *"caja plástica"*.

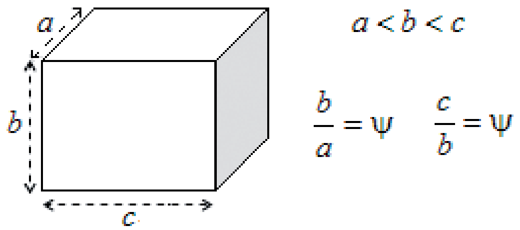
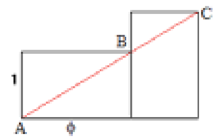



Figura 13

¿Cumple la *"caja plástica"* las condiciones de la generalización que estamos buscando? La relación algebraica $\phi^2=\phi+1 \Leftrightarrow \phi/(\phi+1)=1/\phi$ se traduce geométricamente en la construcción de la Figura 14, donde los puntos A, B y C están alineados y solamente puede generalizarse al espacio con la que muestra la Figura 15, si en ella los tres puntos señalados también están alineados. Esto ocurre.



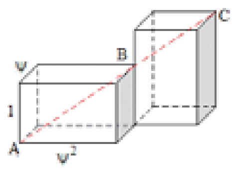




Figura 14 Figura 15

La comprobación es especialmente sencilla, si consideramos un sistema de referencia adecuado, como el de la Figura 16, en donde el eje de abcisas seria la perpendicular por A al plano del papel.

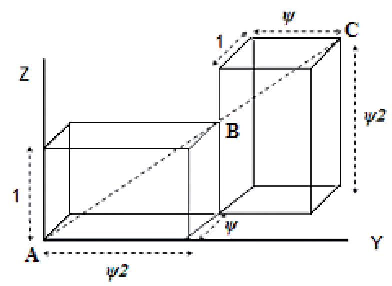



Figura 16

En este caso $A(0, 0, 0)$, $B(\psi, \psi^2, 1)$ y $C(\psi+1, \psi^2+\psi, \psi^2)$ y expresamos la noción de proporcionalidad en términos de vectores, por tanto bastará comprobar que los vectores:

$$\left[\overrightarrow{AB}\right]=\left(\psi,\psi^2,1\right) \text{ y } \left[\overrightarrow{BC}\right]=\left(1,\psi,\psi^2-1\right)$$

y  tienen la misma dirección. En efecto:

$$\psi^3-\psi-1=0 \Leftrightarrow \psi=\frac{1}{\psi^2-1} \Leftrightarrow \frac{\psi}{1}=\frac{\psi^2}{\psi}=\frac{1}{\psi^2-1}$$

¿Hay algún otro "parecido" entre el *número de oro* y el *número plástico*? La respuesta es, sí. La presencia y protagonismo de la *proporción áurea* en Arquitectura y Diseño se debe especialmente a que se puede definir un sistema de medidas basado en el número de oro. Un *sistema de medidas* es una sucesión de segmentos con longitud en progresión geométrica de razón $p=\phi$ con la condición de que al *"sumar"* o *"restar"* dos medidas consecutivas del sistema, se obtiene otra medida del sistema. Eligiendo  se cumplen las dos condiciones, Figura 17, pues $\phi+1 = \phi^2 \Leftrightarrow \phi-1 = \phi^{-1}$.

Figura 17 Figura 18

Pero tomando $p= \psi$, Figura 18, conseguimos también un sistema de medidas. De la igualdad $\psi+1=\psi^3$ se deduce que cumple la *"condición suma"* y la *"condición resta"* también por verificarse $\psi-1=\psi^4$, pero a diferencia del caso anterior, ahora las dos igualdades no son equivalentes, la segunda es una consecuencia de la relación de recurrencia (4). En efecto:

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-5} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}}-1=\frac{a_{n-5}}{a_{n-1}} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}}-1=\frac{1}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\frac{a_{n-3}}{a_{n-4}}\cdot\frac{a_{n-4}}{a_{n-5}}}$$

y los cinco cocientes que aparecen en la igualdad convergen a $\psi$, por tanto $\psi-1 =\psi^4$ .

Tenemos de esta forma dos números mayores que 1, $\phi$ y $\psi$, que son solución de la ecuación $x+1= x^r$, $r$=2, 3,  y que son también solución de la ecuación  para algún valor entero positivo de $s$. Intentemos dar un paso más en el proceso de generalización considerando también los valores $s$=4, 5, 6, ... Las soluciones que obtengamos podrán definir también un sistema de medidas y formarán la familia de los *números mórficos* (AArts, J. Fokkink, R. J. y Kruijtzer, G, 2001):
La ecuación polinómica $x+1= x^r$, no tiene solución para $r$=1, pero para  r = 2, 3, 4, ... tiene siempre una única solución positiva, irracional, mayor que 1, por tanto para encontrar más *números mórficos* sólo hay que hallar el parámetro $s$ que

*Un número mórfico es un número real p>1 que es solución del sistema:*

$$\begin{cases} x+1=x^r \\ x-1=x^{-s} \end{cases}$$ *, para algún valor natural de r y s.*

determine una ecuación de la forma $x$-1= $x^{-s}$, que comparta esa solución. En este caso no podremos apoyarnos en modelos geométricos, pero si podemos recurrir al lenguaje funcional…

## Actividad 4

***Objetivos***: Obtener elementos de la familia de los *números mórficos.*

***Conocimientos previos***: Concepto de *número mórfico.* Aproximación de soluciones irracionales de una ecuación polinómica. Resolución gráfica de sistemas.

***Materiales:*** Calculadora gráfica y ordenador (programa Derive).

Los *números mórficos* son números irracionales mayores que 1 que son solución del sistema formado por dos ecuaciones, una de la forma $x+1=x^r$ y otra como $x-1=x^{-s}$ donde $r$ y $s$ son dos números enteros positivos. Al considerar $r$=2 y $s$=1 tenemos el *número de oro*. Para $r$=3 y $s$=4 tenemos el *número plástico*.

a) ¿Sabrías encontrar el *número mórfico* asociado al valor ¿Y al ?

b) Investiga otras posibilidades para el valor $r$ ¿Cuántos *números mórficos* encuentras?

Empezamos por $r$ = 4. Gracias a la calculadora gráfica, podemos hallar rápidamente y sin dificultad la solución aproximada de la ecuación $x^4-x-1=0$. Es 1’220744084…. Ahora el problema es inverso, hay que reconocer, cual de las ecuaciones $x-1=x^{-1}$, $x-1=x^{-2}$, $x-1=x^{-3}$, $x-1=x^{-4}$, $x-1=x^{-5}$,… tiene esa misma solución. Tampoco es tarea difícil, si representamos en un mismo sistema de coordenadas las funciones:

$$f(x)=x^4-x-1,\ g_s(x)=x-1-x^{-s},\ s=2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

Todas las gráficas pasan por el punto (1, -1). No necesitamos evidentemente representar $g_1$ ni $g_4$ pues sus soluciones ya sabemos que son φ y ψ.

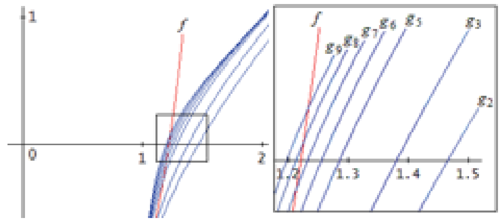



Figura 19

La representación gráfica, Figura 19, muestra que las soluciones de las ecuaciones $x-1=x^{-s}$ son mayores que 1’220744084…. y la correspondiente a $s$=8 es ya menor. No necesitamos seguir buscando pues la sucesión de funciones $g_s$ corta al eje de abcisas en puntos que originan una sucesión estrictamente decreciente y las otras soluciones serían también menores. Luego no existe ningún número mórfico asociado a $r$=4. Tampoco lo encontraremos para $r$=5, ni para valores superiores. Es inútil seguir buscando, Jan Aarts, Robbert Fokkink y Godfried Kruijtzer demostraron en 2001 que solo hay dos, el *número de oro* y el *número plástico*. Por tanto son los únicos números que generan un sistema de medidas ideal.

Entonces, ¿los números metálicos no son una buena generalización del *número de oro*? Sí, lo son en el plano, si somos menos exigentes en la noción de sistema de medidas. Los requisitos exigidos tienen su razón de ser en garantizar la armonía de las composiciones realizadas con las medidas de la escala y esto puede darse cuando por yuxtaposición (suma) o superposición (resta) de los segmentos obtengamos otro de la sucesión. Por tanto también podrían diseñarse composiciones armoniosas si acumulamos o superponemos “varias veces” un segmento a otro consecutivo. Se relajarían las condiciones exigidas admitiendo que “*al sumar o restar a un elemento de la sucesión m veces el anterior se obtenga otro de la sucesión*” y eso sucede cuando consideramos como base los *números metálicos* $\sigma_m$. Obviamente la “*condición suma*” se sigue de la relación de recurrencia asociada: “*el elemento del lugar n de la progresión geométrica es suma de m veces el término del lugar n-1 y el del lugar n-2*”. Y la “*condición resta*” también pues “*al restar a un elemento de la sucesión, m veces el anterior se obtiene otro de la sucesión (justo el anterior al que está restando)*”:

$$x^2-mx-1=0 \Leftrightarrow x-m=x^{-1} \Rightarrow \begin{cases} x^2-mx=1,\ x^3-mx^2=x,\ \ldots \\ 1-mx^{-1}=x^{-2},\ x^{-1}-mx^{-2}=x^{-3},\ \ldots \end{cases}$$

No deja de ser curioso que los cercanos *parientes planos* del *número de oro* sean tan numerosos y su *familia espacial* sea tan reducida…

El *número plástico* aparece esencialmente vinculado a la tercera dimensión, pero también lo encontramos en situaciones geométricas planas. Como ejemplo, este problema que podría también proponerse en la opción B del cuarto curso de la ESO.

***Problema:*** *Tenemos que descomponer un cuadrado de lado 1 cm. de acuerdo con las siguientes reglas:*

*(i) Hacemos un corte paralelo a uno de los lados para obtener dos rectángulos con un lado común. (ii) En uno de los dos rectángulos hacemos un corte perpendicular al anterior de manera que obtengamos un rectángulo y un cuadrado con un lado común.*

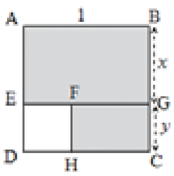
*a) ¿De qué forma se puede hacer, si queremos que los rectángulos obtenidos sean semejantes? ¿Cuáles serían las dimensiones de las partes que se obtienen?*

*b) Modificamos la regla (i) haciendo 2 cortes paralelos al lado para obtener dos rectángulos iguales adosados y la norma (ii) haciendo 2 cortes perpendiculares para dividirlo en un cuadrado y dos rectángulos. ¿Cómo lo haríamos para que los rectángulos sigan siendo semejantes? ¿Cuales son ahora las dimensiones de las figuras obtenidas?*

*c) Generaliza el apartado b) admitiendo n cortes en (i) y en (ii).*

*d) Mantenemos la regla (i) inicial y modificamos la (ii) para obtener dos rectángulos estrictos ¿De qué forma conseguimos que los tres rectángulos obtenidos sean semejantes? ¿Qué dimensiones tendrían los rectángulos?*

En el apartado *a)*, salvo giros y simetrías, solo podemos descomponer el cuadrado de una forma, Figura 20.



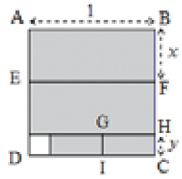

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FG}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}} \Leftrightarrow \frac{x+y}{x}=\frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{\alpha}=\alpha, \left(\textit{siendo } \frac{x}{y}=\alpha\right)$$

$$\alpha^2-\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha=\frac{x}{y}=\phi \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{FG}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}}=\alpha=\phi$$

Figura 20

El primer corte solo puede realizarse de manera que$(x+y)/x=x/y=\phi$. Como $x+y=1$, tenemos que $x=\phi^{-1}= \phi$-1y por tanto $y=2-\phi$. Los rectángulos son $1\times(\phi-1)$, $(\phi-1)\times(2-\phi)$ y $(2-\phi)\times(2-\phi)$ : *"Un cuadrado puede descomponerse en dos rectángulos áureos y un cuadrado".*

En el caso del segundo apartado, la situación del cuadrado blanco es irrelevante. Lo supondremos a la izquierda, y salvo giros o simetrías, la descomposición es la Figura 21.




$$\frac{\overline{AB}}{\overline{GH}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{HC}} \Leftrightarrow \frac{2x+y}{x}=\frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{2\alpha+1}{\alpha}=\alpha, \left(\textit{siendo } \frac{x}{y}=\alpha\right)$$

$$\alpha^2-2\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha=\frac{x}{y}=\sigma_2 \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{GH}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{HC}}=\alpha=\sigma_2=\theta$$

Figura 21

Los dos primeros cortes deben realizarse tales que $(2x+y)/x=/x/y=\theta$. Encontramos en este caso el *número de plata*. Ahora $2x+y=1$, $x=\theta^{-1}$, $\theta$-2, $y=5-2\theta$ y los rectángulos son $1\times(\theta-2)$, $(\theta-2)\times(5-2\theta)$ y $(5-2\theta)\times(5-2\theta)$. Como el cuadrado podría estar en el centro o a la derecha, tenemos 3 formas equivalentes de hacerlo.

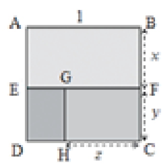
En cualquier caso: *"Un cuadrado puede descomponerse en 4 rectángulos de plata y un cuadrado".*

La generalización al caso de *n* cortes es inmediata y aparecen los números metálicos $\sigma_m$.

$$\frac{nx+y}{x}=\frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{n\alpha+1}{\alpha}=\alpha \quad \left(\textit{siendo } \frac{x}{y}=\alpha\right) \Leftrightarrow \alpha^2-n\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha=\sigma_n$$

y obtenemos los valores $x=(\sigma_n)^{-1}=\sigma_n-n$, $y=(n^2+1)-n\sigma_n$ : *"Un cuadrado se puede descomponer en 2n rectángulos metálicos $\sigma_m$ y un cuadrado".*

Finalmente si seguimos las reglas del apartado *d)* solo podemos descomponer el cuadrado como se ve en la Figura 22




$$\frac{x+y}{x}=\frac{z}{y}=\frac{y}{x+y-z} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha+1}{\alpha}=\beta \\ \beta=\dfrac{1}{\alpha+1-\beta} \end{cases} \left(\textit{siendo } \frac{x}{y}=\alpha, \frac{z}{y}=\beta\right)$$

Figura 22

Despejando $\beta$ en la primera ecuación del sistema y sustituyendo en la segunda, tenemos

$$\alpha^3-\alpha-1=0 \Rightarrow \alpha=\psi \Rightarrow \beta=\psi^2 \Rightarrow x=\psi^{-2},\ y=\psi^{-3},\ z=\psi^{-1}.$$

Los tres rectángulos semejantes son:

$$1\times\psi^{-2},\ \psi^{-1}\times\psi^{-3},\ \psi^{-3}\times(1-\psi^{-1})$$

"*Un cuadrado se puede descomponer en tres rectángulos semejantes, los tres con lados en razón* $\psi^2$".

Como era de esperar, no podremos aumentar el número de cortes y seguir teniendo rectángulos semejantes…

Este problema representa una forma sencilla y elegante de presentar de forma unificada las dos generalizaciones significativas de la proporción áurea, los números metálicos $\sigma_m$, y los números mórficos.

## NOTAS

[1] *Un viatge a l'espai*. http://www.upc.edu/ea-smi/personal/claudi/materials.html. (Página personal de Claudi Alsina).

[2] En el papiro de Ramsés IV, se describe la *Cámara de Oro* que contenía la tumba del rey, asignándole las dimensiones 16 codos de largo, 16 codos de ancho y 10 codos de alto.

[3] Figura cuya yuxtaposición a una figura dada produce una figura resultante semejante a la figura inicial.

[4] El ingeniero francés Gérard Cordonnier en 1928 llama a este número "*nombre radiant*". Fue el primero que consideró un sistema de proporciones asociado a la solución de la ecuación $x^3=x+1$, pero sus aportaciones no tuvieron repercusión, tal vez por su afición al esoterismo y las apariciones religiosas…

[5] La fracción continua del *número plástico* no puede ser periódica. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) probó que un número es irracional cuadrático si y solo si su descomposición en fracciones continuas es periódica (no necesariamente periódica pura).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AARTS, J. , FOKKINK, R. J. and KRUIJTZER, G.(2001), "Morphic Numbers", *Nieuw Archief voor Wiskunder*. 5-2, Maart, 56-58.

ALSINA, C (2007): "El número de oro es plano ¡Pásalo!", *Suma*, nº 54, 75-78.

ALSINA, C y GARCÍA-ROIG, J.L. (2001), "On plastic numbers" *Journal of Mathematics & Design*, Vol. 1, No 1, 13-19.

COLMAN, S y COAN, C.A.(1920): *Proporcional Form*, G.P. Putnam's Sons, London-New Cork.

GHYKA, M. C. (1978): *El Número de Oro*, Editorial Poseidón, Barcelona.

GHYKA, M. C. (1979): *Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes*, Editorial Poseidón, Barcelona.

LAAN, H. van der (1960): *Le Nombre Plastique; quinze Leçons sur l'Ordonnance architectonique*, Brill, Leiden.

PADOVAN, R (2002):"Dom Hans Van Der Laan and the Plastic Number", en *Nexus IV: Architecture and Mathematics*, Kim Williams Books. Florence.
http://www.nexusjournal.com/conferences/N2002-Padovan.html

REDONDO, A. (2006): "Algunos resultados sobre Números Metálicos", *Journal of Mathematics & Design*, Vol. 6, No 1, 29-44.

REDONDO, A. Y HARO, M. J. (2005): "Fracciones continuas, números metálicos y sucesiones generalizadas de Fibonacci", *Suma*, nº 50, 53-63.

SPINADEL, V. (1998): *From the Golden Mean to Chaos*, Nueva Librería, Buenos Aires.

SPINADEL, V. (1999): "The family of metallic means", *Visual Mathematics*, 1, No. 3
http//members.tripod.com/vismath1/spinadel/

SPINADEL, V. y REDONDO, A (2007): "Nuevas propiedades de la familia de Números Metálicos". Conferencia plenaria. *5th Mathematics & Design Internacional Conference, Actas* CD ROM ISBN 978-85-7114-175-4, Blumenau.

STEWART, I. (1996): "Mathematical Recreations: Tales of a neglegted number", *Scientific American*, 274, 92-93. (En *Investigación y Ciencia*, 239, Agosto 1996).

57
Febrero 2008, pp. 65-72

# De *SUMA* a clase y de vuelta a *SUMA*. Itinerario de un material didáctico

*Experiencia realizada en 1º, 2º y 3º de Primaria, en un curso de formación para el profesorado en presencia de sus alumnos, sobre el uso de materiales. Se utilizan cartulinas de color plastificadas, como las que el Grupo Alquerque de Sevilla presenta en la revista SUMA nº 53. Contenidos, según el curso y las clases: características de los polígonos, perímetro y área, concepto de equivalencia de figuras planas, isometrías,... Metodología: libre manipulación y observación guiada a través de preguntas. Análisis de las respuestas de los alumnos y de la experiencia de formación.*

*Didactic proposal for 1-3 primary classes, developed in a teachers training group about materials for mathematics, in presence of pupils. We used the coloured cards that Grupo Alquerque presented on SUMA magazine #53. Contents change according to educational step: polygons characteristics, perimeter and area, equivalence between polygons, isometries,...*
*Methodology: free manipulation of cards and conducted activities. Analysis of pupils' answers, problems, mistakes and goals. Balance of this training methodology and implementation of materials utilisation to teach maths.*

Pretendo presentar una experiencia realizada en 1º, 2º y 3º de Primaria de la Escuela Italiana “Montessori” de Barcelona, utilizando de modo distinto un material pensado para actividades de la Escuela Secundaria.

Reflexionar sobre la experiencia: el cambio de objetivos, de metodología, los contenidos matemáticos, las habilidades desarrolladas, los errores, las dificultades, las observaciones…

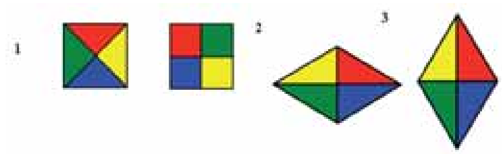
De vez en cuando aparcen momentos de análisis más general del juego y el uso de materiales: más que objetivos de este trabajo, son accidentes inevitables y reflejos del marco de referencia.

## Introducción

El material y las actividades que se presentan en el artículo han sido objeto de una comunicación en las recientes JAEM de Granada[1].

Presentarlo para la publicación en *SUMA* responde a diferentes consideraciones:

a) El trabajo se basa en la reutilización (en una etapa educativa anterior y con objetivos obviamente distintos) de las cartulinas de color plastificadas que el *Grupo Alquerque* de Sevilla ha publicado en la sección *Juegos* del nº 53 de la revista *SUMA*, noviembre 2006, pp. 61-64




b) Me gustaría profundizar en dos aspectos que, en el tiempo asignado a la comunicación, no tuve oportunidad de desarrollar:

- La experiencia de compartir el trabajo de aula entre docentes de Primaria y Secundaria

- La modalidad de “formación en situación”[2].

**Guido Ramellini**
*SMPM “Emma Castelnuovo”*
*APaMMs (FEEMCAT)*

Aún con el riesgo de generalizar unos problemas que puede que sean sólo míos, debidos a una carrera profesional dando clase y formando docentes de la Escuela Secundaria, me atrevo a afirmar que cuanto más pequeños son los alumnos, más difícil es encontrar materiales adecuados y originales, y más difícil todavía adaptar materiales elaborados para chicos mayores. No es un problema de "cantidad" (es decir, de nivel de habilidades que poseen), sino de "calidad" (¿Qué habilidades?)

Muchas de las habilidades con las que contamos normalmente en nuestros alumnos de la ESO (lenguaje, manipulación, simbolización, atención y abstracción) parecen estar a punto de manifestarse, pero son aún "primitivas", inciertas, discontinuas, mezcladas…

Sólo unos pocos de "nuestros" materiales didácticos se adaptan a este mundo en formación y a la relación entre respuesta espontánea, juego y aprendizaje en esta etapa evolutiva.

Tengo la sensación de que buena parte del problema reside en nuestro enfoque, porque existen muchas experiencias de gran valor didáctico, realizadas en educación infantil y primaria, que utilizan materiales de uso cotidiano, exprimiéndoles un jugo matemático de gran valor, nada fácil de detectar a primera vista.

Sin embargo, el día que me encontré en *SUMA* el regalo de un material bonito e interesante, me lancé a utilizarlo.

No tenía intención ¡obviamente! de trabajar la combinatoria, ni de hacer que mis pequeñines diseñaran y construyeran las piezas. Simplemente me parecía interesante que las utilizaran como un puzzle, mirando las formas, asociando los colores, confrontando las piezas, encontrando características y propiedades, descubriendo conceptos. Jugando. *Haciendo* las matemáticas que le permiten su nivel de conocimientos y sus habilidades.

## Actividad

La metodología es la misma en todos los grupos:

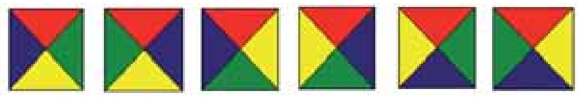
- Distribuir el material a cada pareja y dejar que lo manipulen, discutan y observen libremente

- Orientar la observación a través de unas preguntas:
  ¿Cuántas piezas tenéis?
  ¿Qué forma tienen?
  ¿Cuántos colores?
  ¿Qué dibujo?

  Para llegar a:
  ¿Son todas iguales?
  ¿Hay por lo menos dos piezas iguales?

- Lo que sigue depende de la etapa educativa, de la clase, de los conocimientos previos, del material que utilizamos, del día y, en parte, como veremos, del azar.

**Primero de Primaria**: cuadrados del tipo 1.



Contestando a las primeras preguntas, todos reconocen que tienen 6 piezas, que son cuadrados, que están divididos en 4 triángulos, de 4 colores distintos.

Contestan después, y con cierta coherencia, que las piezas son todas iguales.

Se les guía en la observación y se dan cuenta de que cambia la distribución de los colores, pero muchos están convencidos de que son iguales de dos en dos: 1 y 2, 3 y 4, 5 y 6: es decir, ¡las parejas simétricas!

No conocen el concepto de simetría, pero lo han observado en el mundo que les envuelve. ¿Cómo les explicas que sus dos manos no son iguales? ¿O las mitades de sus caras?[3]

Más fácil resulta que acepten la regla de que, en nuestro juego, son iguales sólo las figuras que, cuando se ponen una encima de la otra con una **traslación**, presentan la misma distribución de los cuatro colores. Y llegan rápidamente a la conclusión que los seis cuadrados son todos diferentes el uno del otro.

Mientras estamos discutiendo esto, algunas parejas han montado ya un rectángulo con las seis piezas, intuyendo que se deben acoplar haciendo corresponder los colores.

En breve, toda la clase consigue, con menor o mayor dificultad, montar rectángulos.

(Algunos eran tan rápidos que tuvimos que darles otro juego de cuadrados para que intentaran doblar sus figuras)

Estaba previsto fotografiar los puzzles para montar una exposición, pero nos encontramos con que la cámara del colegio tenía las pilas descargadas.

Propusimos entonces a los alumnos que dibujaran en un papel cuadriculado sus puzzles y, sorprendentemente, empezaron los problemas:

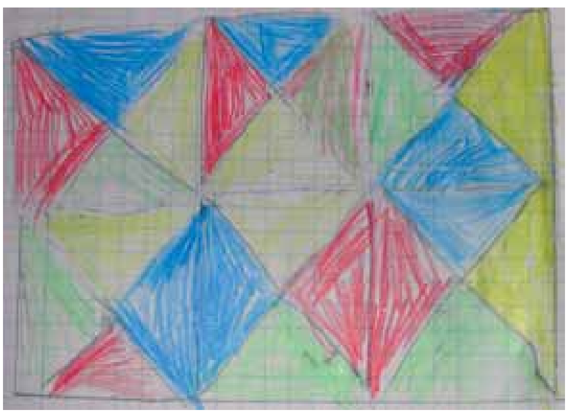
- Para trazar las diagonales

- Para obtener un dibujo con un mínimo de precisión

Pero, en especial, para transferir al dibujo la correcta distribución de los colores:

- Se equivocaban de posición

- "Creaban" un puzzle totalmente distinto, sin ya respetar la condición que se juntasen caras con colores iguales.



## Anécdotas

Varios alumnos no terminaron la tarea de dibujar sus cuadrados.

Sólo dos alumnas siguieron un procedimiento con mayor grado de elaboración, pintando todos los triángulos del mismo color antes de pasar a los de otro color.

Por razones de espacio, una sola pareja trabajaba de frente, con el puzzle en medio. Pasando, me pareció que la niña se había equivocado totalmente en la distribución de los colores. Tardé un par de minutos en darme cuenta de que estaba dibujando el puzzle ¡desde la perspectiva de su compañero! ¡Y sin equivocarse! (supongo que pensó que del único puzzle tenían que salir obviamente dos dibujos absolutamente iguales)

Naturalmente, procedía más lentamente que el otro y, cuando este terminó su dibujo, le di la vuelta al puzzle, pensando que iba a ayudar la chica. Por el contrario, empezó a dudar y a equivocarse. Sólo la ayuda de su compañero la desbloqueó, permitiéndole acabar su dibujo.

> *Para reproducir el dibujo del modelo físico, cada uno se construye una imagen mental.*

¿Qué había pasado? ¿Por qué, cuando el trabajo parecía más simple, se presentaban los errores? Avanzo la hipótesis que, para reproducir el dibujo del modelo físico, cada uno se construye una imagen mental. Dando la vuelta al puzzle, yo acercaba el modelo al dibujo, pero lo alejaba de la imagen mental que la chica se había hecho y que intentaba reproducir. Para terminar el trabajo, tuvo antes que construirse otra imagen mental.

Muchas veces, presentando materiales manipulables para la clase de geometría en los cursos de formación del profesorado, me he encontrado con la objeción de que se necesita mucho tiempo para desarrollar las actividades y que en muchas ocasiones es suficiente acercar los conceptos a través del dibujo[4]. Nadie parece nunca acordarse de cuántas veces nos hemos quejado de que nuestros alumnos parecen incapaces de *ver* lo que tan claramente hemos puesto delante de sus ojos: ese triángulo indefectiblemente rectángulo, tan inequívocamente semejante a ese otro, dibujado un poco más arriba, los ángulos compartidos. ...[5]

Una reflexión sobre los procesos lógicos que existen entre el objeto real y su representación a través del dibujo, la mediación cultural, la traducción necesaria entre dos lenguajes (más que dos niveles del mismo lenguaje), me parece interesante y necesaria.

**Segundo de Primaria**: cuadrados del tipo 1, para que entendieran el trabajo que se les proponía; y después del tipo 2, más complejo.

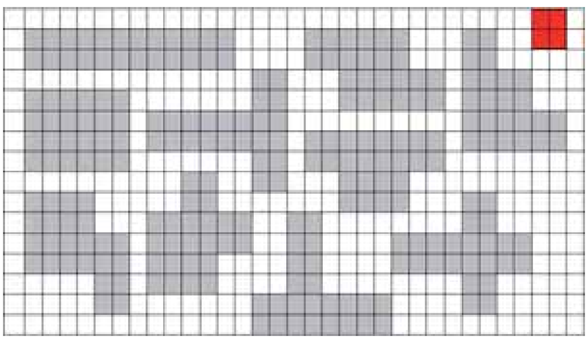
La ronda de preguntas sigue el mismo camino, con la “confusión” entre figuras iguales o simétricas, que se resuelve de la misma manera.

Realizan el rectángulo sin dificultad y les pedimos después que realicen otras figuras:

Copiamos en la pizarra cuadriculada las distintas figuras que han realizado, con la idea de comparar sus perímetros y áreas, sin introducir los conceptos, que trabajarán el próximo curso.

Para hacerlo, simulamos esta situación concreta:

“Quiero sembrar fresas y puedo escoger un campo que tiene una de las formas dibujadas. ¿Hay alguno mejor? ¿Más grande?”



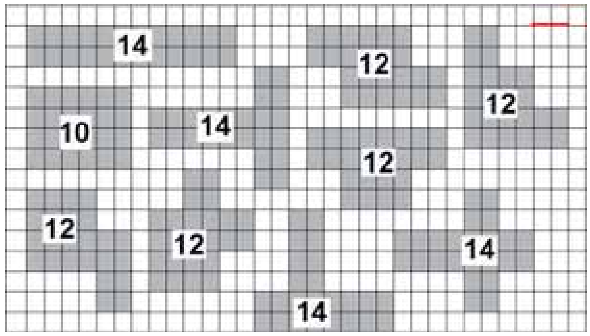
Como primer impulso, hay algunos que apuntan a que las figuras más irregulares tienen mayor extensión. Pero después, cuando alguien dice que todas son equivalentes porque están formadas por 6 cuadrados iguales, todo el mundo se declara de acuerdo.

Seguimos adelante con la simulación.

Como hay mucha gente a quien les gustan las fresas, voy a comprar un alambre eléctrico (a sugerencia de un alumno) para defender mi campo.

¿Gastaré el mismo dinero por cada campo dibujado?”

O sea: ¿Tendrán todos los campos el mismo “contorno”?



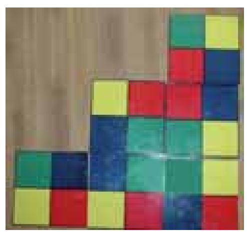

Hay muchos alumnos que impulsivamente responden que sí, otros callan, oliendo la trampa, otros tantos parecen muy poco convencidos[6].

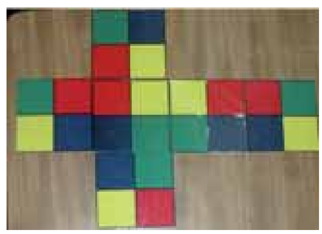
Para salir de dudas, empezamos a contar juntos los tramos unitarios que forman los contornos, comenzando por uno de los rectángulos (perímetro mínimo y máximo).

Los contornos varían entre un máximo de 14 y un mínimo de 10 unidades.

El trabajo con los cuadrados del tipo 2 sigue las mismas pautas, pero, en este caso, no se consigue montar el rectángulo 3×2. Es interesante proponerles que intenten explicar las razones que impiden la construcción de esta figura.

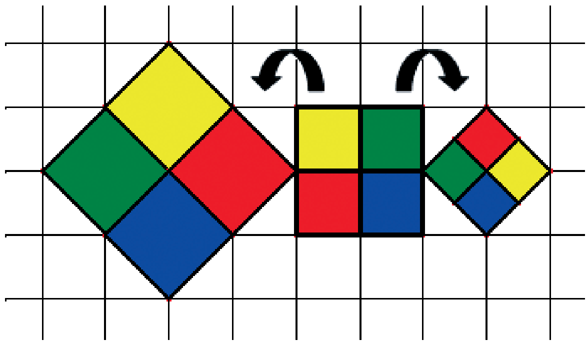
Asumida la imposibilidad de montar el rectángulo, empiezan entonces a construir figuras muy creativas, ignorando muchas veces la regla fundamental del juego: acoplar lados que lleven los mismos colores.



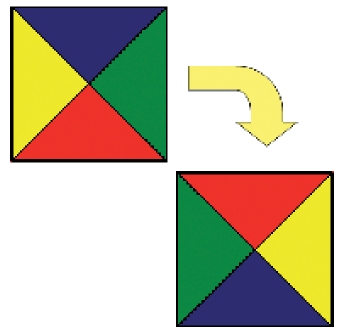


En el momento de traspasar a dibujo sus puzzles, reaparecen las dificultades y los errores, algunos muy aprovechables para la clase de geometría.

P.ej.: Dibujar un cuadrado con una rotación 45º y con las **mismas medidas**.



Es fácil llegar a la conclusión de que no hay más que seis posibles combinaciones (sin in ningún caso introducir el cálculo combinatorio, permutaciones o factoriales).
Se deja a la manipulación comprobar que los cuadrados de otros compañeros, que escogieron colores distintos para organizar sus figuras, no son otra cosa que nuestros mismos cuadrados que han sufrido una **rotación**.



**Tercero de Primaria**: cuadrados del tipo 1, para que entendieran el trabajo que se les proponía, y después los 12 rombos del tipo 3.

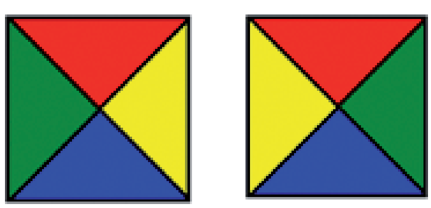
El trabajo introductorio, con los cuadrados de tipo 1, es igual al desarrollado con los alumnos de segundo y llega a las mismas situaciones, aunque ya se puedan introducir los conceptos de área y perímetros de los polígonos[7].

Se puede además formular otra pregunta:

A parte los de las seis cartulinas repartidas, ¿existen otros cuadrados diferentes pero divididos en triángulos de los mismos cuatro colores?

Contestan de manera espontánea que sí, pero con dudas, sin saber justificar su respuesta.

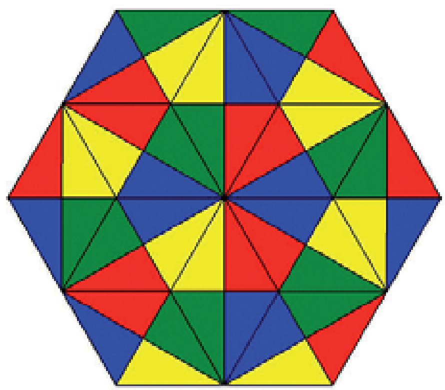
Se les sugiere que orienten sus cuadrados de manera ordenada, con el mismo color hacia arriba (cada alumno puede escoger su propio color). Se escoge después otro color y se busca la pareja de cuadrados que tenga este color abajo.



¿En qué difieren estos dos cuadrados?
¿Es posible crear otro cuadrado con los mismos colores que mantenga el rojo arriba y el azul abajo?

El trabajo con los doce rombos ha ofrecido menores ocasiones de estudio.

A todos les ha costado mucho “compactar” las figuras. Nadie ha conseguido, en el tiempo asignado, construir el hexágono gigante.



Ante la dificultad de conseguir figuras “regulares”, todos se han dedicado a crear figuras de fantasía, con resultados más o menos significativos.


## Conclusiones

Estoy convencido de que para cualquier docente puede ser muy estimulante cambiar de vez en cuando de nivel educativo. La experiencia de trabajar con alumnos de Escuela Primaria me ha permitido reflexionar sobre varios aspectos del aprendizaje, formular y revisar hipótesis, comprobar impresiones, investigar el origen de los cambios de intereses, actitudes y habilidades que todo profesor tiene delante, enriquecer mi repertorio docente.

En los alumnos que empiezan el largo proceso de la escolarización los procesos lógicos aparecen más descubiertos, "puros", se notan las pautas de su evolución, se captan los momentos clave del desarrollo de una determinada competencia, aparecen las dificultades, las dudas, las resistencias. En nuestros alumnos de Secundaria todo es más complicado, enredado.

*Estoy convencido de que para cualquier docente puede ser muy estimulante cambiar de vez en cuando de nivel educativo.*

El tema merecería una mayor dedicación, una investigación más amplia y estructurada y mejores instrumentos psicopedagógicos que los que me he ido construyendo en tantos años de "honrada profesión".

Me limito a señalar brevemente los aspectos que me han llamado la atención:

- A parte pocos casos individuales, no he notado cansancio o rechazo de las actividades propuestas, aún cuando los resultados no eran los que se esperaban (construcción del rectángulo con las piezas 2 o del hexágono con los rombos).

- Es notable y precoz la adquisición de algunas habilidades (especialmente analógicas: construcción de puzzles) a expensas de la capacidad analítica (reconocimiento de los elementos comunes, reproducción, análisis de las situaciones).

- Desde pequeños se nota una reacción ambivalente ante las tareas más estructuradas o repetitivas, con normas y reglas que son impuestas, aún cuando se contratan o se explican sus razones.

  Aparece a veces un rechazo y el recurso a la creatividad se transforma en una vía de escape, más que en la lateralización del pensamiento productivo. Aún así, se manifiestan intuiciones, desarrollos y productos tan originales que abren de golpe nuevos e imprevistos puntos de vista[8].

En otros momentos, en especial cuando encontrar una solución parece más complejo, requiere una reflexión más profunda y la discusión con los compañeros se alarga, son ellos que piden al docente una intervención autoritaria, con indicaciones claras de lo que cada uno debe hacer.

Este conflicto está recogido e interpretado en la obra de varios psicólogos del aprendizaje, empezando por Piaget[9] y Viygotsky, quien llega a afirmar que: *no existen juegos sin reglas* y que: *toda situación imaginaria de cualquier forma de juego trae consigo reglas de comportamiento, aún cuando el juego no exigiera reglas explicitadas anteriormente.*[10] Y más adelante: *el juego pide continuamente que el niño actúe en contra del impulso inmediato. En cada momento, el niño se enfrenta a un conflicto entre reglas del juego y lo que haría si pudiera actuar de forma espontánea… La característica esencial del juego es una regla que se hace deseo* y *el juego regala al niño una nueva forma de deseos.*

Además, la presencia de este conflicto configura, en relación a la función de ejercicio social del juego, una gran riqueza, que parece que vamos perdiendo al llegar a la edad adulta.

- Aún considerando que estamos todavía en una etapa evolutiva (presuntamente) egocéntrica, las pautas y tiempos de atención resultan demasiado breves[11] y se nota una escasa capacidad de colaboración con los compañeros. En este sentido, la actividad objeto del artículo tiene el valor metodológico añadido de estimular una mayor adquisición del hábito del trabajo en grupo.

- Se nota una difusa dificultad en la manipulación y en el dibujo[12], con falta de precisión y escasa sensibilidad estética. Parece evidente que las actividades que proponen la escuela de la infancia y la primaria (colorear, cortar, pegar, doblar papeles, etc.), no son suficientes para compensar los cambios sucedidos en los juegos y los juguetes, la influencia de las pantallas (TV, videojuegos, etc.).

- Creo que una escuela más activa y capaz de estimular las habilidades manipulativas y constructiva -¡bienvenida sea!- sería en todo caso una respuesta parcial al problema. Aún cuando fuéramos capaces de entender que una pedagogía del juego es distinta del uso del juego con finalidades pedagógicas, no me parece que la escuela sea el sitio más idóneo para que los chicos jueguen de la forma más espontánea. Es más bien necesario recuperar el "tiempo libre", que nuestra cultura parece despreciar y considera "tiempo vacío"[13], improductivo, y se vuelca para llenarlo de actividades organizadas de manera más estricta que en el cole.

Me parece importante revindicar el "derecho al juego", recogido en la Convención sobre los derechos de la infancia de la ONU[14].

## Agradecimientos

Muchas gracias

- Al *Grupo Alquerque* de Sevilla por su trabajo, sus ideas y su amistad.

- A las compañeras y compañeros de la *Scuola Elementare Italiana "Montessori"* de Barcelona.

Ha sido muy interesante compartir la clase con ellos, poder comparar lenguaje, aproximaciones a los temas y a los alumnos, tiempos y modalidades de trabajo, instrumentos y sensibilidad de observación, experiencias.

Por otro lado, la presencia simultánea de dos adultos en el aula me ha parecido fundamental para mantener las pautas y la concentración, una buena dinámica en las parejas y en la clase, para estimular, aclarar dudas y ayudar en las tareas.

Considero un éxito la modalidad de la formación en situación. Aparentemente, puede parecer que hay un despilfarro de recursos: si reúno a los cinco docentes, en dos horas les explico como trabajar el tangram chino en las distintas clases. Si la actividad la desarrollo en cada una de las diez clases, tardo entre diez y quince horas. En realidad, sin embargo, la formación en situación ofrece muchas ventajas:

1) Estamos seguros que los materiales y las actividades llegarán a los estudiantes.

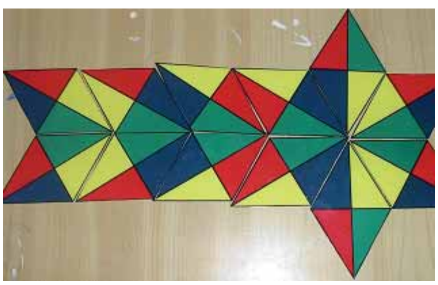
2) Que los docentes experimentarán no sólo los materiales, sino su metodología de uso, tiempos y pautas, recursos necesarios, la implicación y respuesta de sus alumnos, los resultados, …

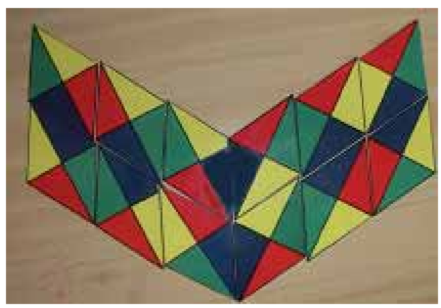
3) De este modo es más fácil que las actividades de manipulación y creación de materiales para la clase de matemáticas sigan y se difundan.

4) El intercambio de experiencias ha sido real y ha producido una gran riqueza de vivencias, nuevas ideas, enfoques originales, …

5) Mi intervención en clase era mensual, pero la dinámica de aprendizaje que generaba permitía al docente de la clase trabajar durante semanas, recogiendo, organizando, profundizando, individualizando los contenidos disciplinares y las habilidades desarrolladas.

Les agradezco la generosidad de haber compartido conmigo sus alumnos (¡ya sabemos qué celosos somos los docentes!) y su experiencia, que espero haya sido útil para evitarme la terrible enfermedad del "descubrimiento de la sopa de ajo" que aparece a veces cuando los profes de secundaria "descubrimos" cuán valiosos trabajos y recursos ofrecen las clases de primaria e intentamos contarlo. ■





## NOTAS

1 Ecología matemática: cómo utilizar un mismo material (combinatoria de colores) en otra etapa, con diferentes objetivos, contenidos y hasta en otro idioma.

2 Curso de formación sobre el uso de materiales para el aprendizaje de las matemáticas, impartido en el ámbito de una clase curricular, en presencia de los alumnos, destinado al profesorado de la Escuela Primaria Italiana “Montessori” de Barcelona.

Participaron los 5 profesores titulares (más la psicóloga y profesores de apoyo para alumnos con dificultades de aprendizaje) y los alumnos de Primero a Quinto de Primaria (dos grupos por cada etapa).

3 Es muy interesante y sorprendente coger una foto retrato y, con la ayuda de un espejo, construir la cara entera por simetría de cada mitad: resultan dos personas o expresiones distintas, fruto de la rica imperfección de la simetría del cuerpo humano.

Hay actividades con el libro de espejos y las laminas (como los de Proyecto Sur) que se pueden hacer con niños pequeños y que resultan muy entretenidas, estimulantes y creativas

4 Y es indudable que los profes de mates somos los que más llenamos las pizarras, no sólo con las fórmulas abstrusas del Aserejé matemático, como lo llamaba Rafael Pérez en una famosa ponencia, sino también con nuestros polígonos torcidos y círculos chungos.

5 Otra actividad en que el salto lógico manipulación → dibujo →resolución algebraica resulta claro es la resolución de problemas con ecuaciones (6º de P/1º de ESO).

P. Ej.: Calcula el área de un rectángulo de perímetro 24 cm. y de base doble de la altura.

Un grupo muy pequeño llega a entender y reproducir la secuencia abstracta de las instrucciones necesarias a la solución.

La comprensión de los alumnos aumenta si les enseñamos a dibujar el problema:

h = —— = u    b = —— —— = 2u

p = —— —— —— —— —— —— = 2b + 2h = 6u = 24 cm.

h + h + b ( = h + h) + b (= h + h)

→ u = 24:6

Un grupo no siempre pequeño no entiende todavía. Parece seguir el desarrollo del razonamiento, pero, si miras su dibujo, siempre falta algún elemento necesario a la solución (y la razón nunca es sólo la pereza). Se nota cuando deben trabajar autónomamente y se plantan, intentando reproducir mecánicamente el proceso, pero no saben cómo seguir.

Si empezamos construyendo el problema con algo manipulable (regletas, tiras de cartón colorado, …), substituyendo cada regleta que representa la base con dos regletas tan largas como la altura …

Si pasamos gradualmente al dibujo (cada alumno con su ritmo), el número de los que llegarán a entender las ecuaciones irá aumentando significativamente.

Entre manipulación y dibujo hay un salto enorme, puede que más grande del que hay entre dibujo y resolución abstracta.

6 Cada año, con mis alumnos de 1ª media, he propuesto el famoso problema del cordel, según las indicaciones de Emma Castelnuovo. Anudado un cordel, se le da la forma de un rectángulo usando los dedos pulgar e índice de las dos manos. Se levanta y se presenta a los alumnos. Moviendo un poco los dedos, se varía la forma del rectángulo y se pregunta qué características se mantienen invariadas. Rápidamente llegan a la conclusión de que los perímetros de todos los rectángulos que estamos formando - ¡dinámicamente! - delante de sus ojos, son equivalentes. Y lo mismo afirman cuando les preguntamos pos sus áreas: como cuando la base aumenta, la altura disminuye y la fórmula del área es b x h …

Son muy pocos los alumnos que no caen en la trampa. En este sentido, los niños de 2ª de Primaria fueron más listos. ¿Por qué? Yo creo que es porque todavía no les hemos enseñado las fórmulas de perímetro y área y no se pueden agarrar a ellas. Las fórmulas son abstractas, se aprenden tradicionalmente separadas (antes los perímetros de unos cuantos polígonos y después sus áreas) e, inevitablemente, se confunden y los confunden.

Si no conoces las fórmulas, debes mirar con tus ojos y razonar con tu cabeza.

7 En uno de los dos grupos, una niña se dio cuenta de que las medidas del contorno de las figuras eran siempre valores pares (10, 12 y 14). ¿Es una casualidad? Para contestar, después de haber dejado el tiempo para formular hipótesis, empezamos calculando el valor del contorno cuando las seis piezas estaban aisladas, sin lados en común. El contorno medía: 6×4 = 24. Juntando dos cuadrados, desaparecen del contorno *un lado por cada cuadrado*, y de este modo continuaba pieza tras pieza, restando 2 cada vez a la medida del contorno.

8 Sana envidia, porque el predominio de las reglas parece absoluto en los juegos de los adultos.

9 *El juicio moral en el niño*, 1932

10 “Il ruolo del gioco nello sviluppo” en *Il pensiero cognitivo* 1980 [trad. del autor]

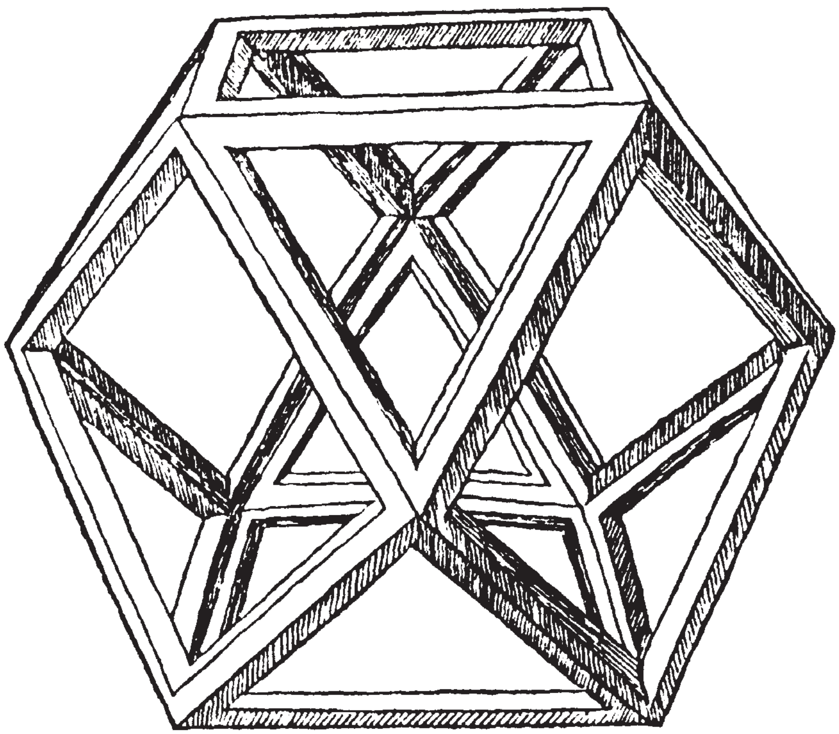
11 Me parece importante subrayar que mi intervención en cada clase duraba dos horas y respondía a exigencias de organización del trabajo de la escuela. Aún cuando intentábamos alternar actividades diversas, este ritmo de trabajo no es ciertamente el más adecuado para los alumnos de la primera etapa escolar.

12 Sus manos son más ignorantes que sus mentes

13 En la placa que regalamos a Emma Castelnuovo el día de su 90 cumpleaños se leía: *Dejemos a los chicos el tiempo de perder el tiempo.*

14 ¡Y bien nos gustaría que fuera éste, el único derecho de la infancia violado por nuestras sociedades tan civilizadas!

suma+



Dibujo de Leonardo da Vinci para *La divina proporción* de Luca Pacioli

# poliedro


| | |
|---|---|
| Juegos | *Grupo Alquerque de Sevilla* |
| El clip | *Claudi Alsina* |
| MatemásTIC | *Mariano Real Pérez* |
| Arte con ojos matemáticos | *Francisco Martín Casalderrey* |
| Hace... | *Santiago Gutiérrez* |
| En las Ciudades Invisibles | *Miquel Albertí* |
| De cabeza | *Antonio Pérez* |
| Biblioteca | *F. Corbalán, F. Fouz* |
| El hilo de Ariadna | *Xaro Nomdedeu Moreno* |
| Literatura y Matemáticas | *Constantino de la Fuente* |

suma+ 57
Febrero 2008, pp.75-78



# Las cifras del calendario

Hay muchas personas a las que les gusta jugar con los números. Unas coleccionan números capicúas, otras sienten fascinación por los que cumplen alguna propiedad en concreto, como por ejemplo ser múltiplos de nueve o que las cifras sumen lo mismo que su edad, otras rellenan sus bonolotos con números de características especiales para ellos. También existe una gran atracción ante pasatiempos donde aparecen números y quizás la prueba más palpable de esto sea el gran boom que ha significado la aparición de los *sudokus* como entretenimiento estrella de periodos vacacionales y que ha hecho aflorar otros tipos de pasatiempos supuestamente orientales, como por ejemplo el *kakuro*, que durante la década de los ochenta aparecía regularmente en las separatas dominicales del periódico El País (aunque con el nombre de *Crucinumerograma*). Y además están las curiosidades numéricas que suponen para todos un atractivo rato de esparcimiento.

Dentro de las curiosidades numéricas podríamos incluir los trucos de magia que se basan en operaciones numéricas simples pero con un resultado final muy efectista. Seguramente a todos nos habrán adivinado, en algún momento de nuestra vida, un número que habíamos pensado después de haberlo mareado sobradamente sumándole tres, multiplicándolo por siete, restándole 15 y toda una serie de perrerías que va proponiendo quien nos hace el truco.

Ya en una anterior entrega de nuestra sección vimos trucos de magia basados en la propiedad de la divisibilidad entre nueve. Hoy queremos presentar una serie de trucos que se realizan con un calendario aprovechando la especial disposición de los números que aparecen en él y su justificación se realiza utilizando álgebra elemental. Como hemos dicho en otras ocasiones, no debemos quedarnos sólo en el truco de magia, sino que éste nos debe servir primero para captar el interés de nuestros alumnos y después como motivación para investigar la parte matemática del truco, que muchas veces queda oculta por la parafernalia de la puesta en escena.

**Grupo Alquerque de Sevilla**

*Constituido por:*
**Juan Antonio Hans Martín.** *CC Santa María de los Reyes.*
**José Muñoz Santonja.** *IES Macarena.*
**Antonio Fernández-Aliseda Redondo.** *IES Camas.*
*juegos@revistasuma.es*

## La suma de nueve números

Se le pide a un espectador que, a espaldas del mago, elija un mes cualquiera del calendario, y dentro de él rodee un cuadro de tamaño 3x3 que englobe nueve números. Como por ejemplo el de la figura.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 28 | 29 | 30 | 31 | | | |

El espectador le dice al mago cuál es el primer número de su cuadro (en nuestro ejemplo el 8) y éste le indica al espectador cuánto vale la suma de las cifras seleccionadas.

*Explicación*

La distribución de números en un calendario tiene propiedades numéricas muy útiles para muchos trucos.

Si consideramos un cuadro cualquiera en el que el primer número es a, los restantes números serán los que aparecen en el cuadro siguiente.

| | | |
|---|---|---|
| a | a+1 | a+2 |
| a+7 | a+8 | a+9 |
| a+14 | a+15 | a+16 |

Si sumamos esos nueve números se obtiene:

$$9 \times a + 72 = 9 \times (a + 8).$$

Es decir, la suma total es siempre nueve veces la suma del primer número más 8. Luego el mago puede saber la suma a partir del primer número.

En nuestro ejemplo $8 + 9 + 10 + 15 + 16 + 17 + 22 + 23 + 24 = 144 = 9 \times 16 = 9 \times (8 + 8)$

Este truco tiene la ventaja de que se puede hacer con un grupo amplio de personas, por ejemplo una clase completa, y preguntarle a alumnos distintos para adivinar su suma. Hay que tener cuidado porque no es extraño que alguna persona se confunda al sumar (el resultado de la suma ha de ser múltiplo de nueve, es decir, la suma de sus cifras ha de serlo también), y para eso está el mago: para pedirle a cualquiera que repita las operaciones. Sorprende mucho que el mago pueda saber, sin más que oír el número, que la suma está mal realizada.

Como puede observarse la suma es también nueve veces el número central por lo que podría preguntarse también por ese número y simplemente multiplicar por nueve. Aunque de esta forma si se realiza el truco varias veces es más fácil averiguarlo.

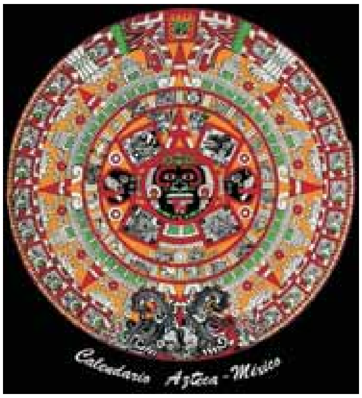
## El cuadro de nueve números

El truco anterior admite la versión inversa, es decir, el mago le pregunta a un espectador que haya realizado la operación que cuál ha sido el resultado de la suma e inmediatamente le indica cuál es el cuadro de números que ha rodeado.

Para ello basta dividir la suma entre nueve (si el número que se nos dice no es divisible entre nueve ha habido una equivocación) y el número que obtenemos lo colocamos en el centro del recuadro y rellenamos los demás de forma que hacia la izquierda restamos uno, hacia la derecha aumentamos uno, hacia arriba restamos siete y hacia abajo sumamos siete. También podemos indicar únicamente la primera cifra, que se conseguirá restando 8 a la central que habíamos obtenido de dividir.

Por ejemplo, si nos dicen que la suma de las nueve cifras del cuadro es 126, dividimos entre nueve y obtenemos 126 : 9 = 14, y a partir de él rellenamos el resto de casillas.

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 |
| 13 | 14 | 15 |
| 20 | 21 | 22 |



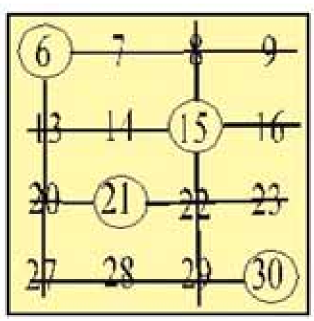

Calendario azteca

## La suma de cuatro números

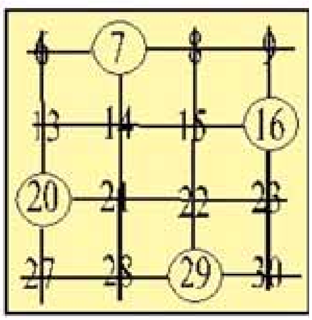
Se le pide a un espectador que elija un mes del calendario, y dentro de él rodee con un cuadrado de cuatro números de lado una extensión que comprenda 16 números.

Una vez rodeado, el mago (que se habrá fijado en el cuadro de números) escribe en un papel una cantidad y entrega el papel a otro espectador. A continuación le pide al primero que realice las siguientes operaciones:

- Elija un número de los 16 que hay y lo rodee con un círculo.
- Después tache todos los números que están en la misma fila o misma columna que el rodeado.
- Debe después elegir otro número no tachado y repetir el proceso, rodearlo con un círculo y tachar los de su misma fila y columna.
- Ya sólo deben quedar cuatro números sin tachar, de todos modos debe elegir uno de los cuatro y tachar los de su propia fila y columna.
- Al final, queda sin tachar un solo número que se rodea con el círculo.
- Por último, se suman los cuatro números que han quedado sin tachar, y se comprueba que esa suma corresponde con la cantidad escrita en el papel por el mago.




Por ejemplo, si el espectador elige un recuadro que comience en el número 6 el mago sabe que la suma que quedará al final es 72, independientemente de cómo siga a continuación el proceso. Si por ejemplo el espectador selecciona los números que aparecen en la imagen, vemos que al final los números que quedan suman la cantidad prevista por el mago.




*Explicación*

El resultado de la suma es independiente de los valores que se tachen o se elijan; siempre dará lo mismo. Lo podemos comprobar con esta otra imagen donde tenemos una elección distinta en el mismo recuadro.

El proceso que se sigue al seleccionar los números permite que al final quede un número de cada una de las filas, y uno de cada una de las columnas.

Para hacer un estudio genérico, como en el primer punto, partimos de un cuadro formado por 16 números cualesquiera incluidos en el calendario.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+1 | a+2 | a+3 |
| a+7 | a+8 | a+9 | a+10 |
| a+14 | a+15 | a+16 | a+17 |
| a+21 | a+22 | a+23 | a+24 |

Si sumáramos los cuatro números de la primera columna tendríamos la suma $a + a + 7 + a + 14 + a + 21 = 4 \cdot a + 42$. Con eso tenemos un número de cada fila. Pero si debemos tener uno de cada columna, uno de los cuatro valores estará en la segunda columna, lo que significa que tiene una unidad más (+1), otro estará en la tercera columna (+2) y otro en la cuarta (+3). Por lo que la suma de cuatro números de ese cuadro, siempre que haya uno de cada fila y uno de cada columna, será $4 \cdot a + 42 + 1 + 2 + 3 = 4 \cdot a + 48 = 4 \cdot (a + 12)$.

Igual que en el primer truco basta que nos fijemos en el primer número para saber automáticamente cuál será la suma que saldrá después del proceso de selección, sean cuales sean los números que queden al final. Es decir, la suma total es siempre cuatro veces la suma del primer número más 12.

## Un día de cada semana

El espectador elegido selecciona (a espaldas del mago) un mes cualquiera del calendario y un día de la semana en cada una de las cinco semanas que componen el mes. A veces hay meses que tienen seis semanas (esto ocurre en todo mes -distinto de febrero- en que el día 1 cae en domingo, o cuando cae en sábado y tiene 31 días), en ese caso la sexta semana no se tiene en cuenta. A continuación suma las cinco cifras elegidas y responde a las siguientes preguntas del mago:

> *"En qué día de la semana ha caído el día 1 del mes elegido."*
>
> *"Cuántos lunes, martes, miércoles, y así hasta domingos, ha elegido el espectador."*

Y con esa información el mago dice cuál es la suma que ha obtenido de los cinco números.

<u>*Explicación*</u>

La justificación se basa en algo parecido al caso anterior. Si nos fijamos en cualquier mes, la columna que corresponde al día 1 tiene los siguientes números: 1, 8, 15, 22 y 29 que si los sumamos serían 1 + 8 + 15 + 22 + 29 = 75. Quiere decir que si el día 1 ha caído por ejemplo en miércoles y el espectador hubiese elegido los cinco miércoles, le hubiese dado la suma 75. Si en lugar de los cinco miércoles ha elegido un martes en la semana que sea, la suma tendrá una unidad menos; si ha elegido un lunes, dos unidades menos; si por casualidad ha elegido un jueves en lugar de un miércoles habría que sumar uno; si es viernes, sumar dos y así sucesivamente.

Veamos un ejemplo concreto.

El espectador ha elegido los números que figuran en la imagen. El día 1 ha caído en viernes, entonces a los demás días de la semana le corresponden los siguientes valores: martes (-3), miércoles (-2), viernes (0) y sábado (+1). Luego a 75 le debemos añadir esos valores multiplicados por el número de días de la semana elegidos.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |

Así tendríamos 75 - 3 - 2 · 2 + 1 = 69, que efectivamente es la suma de los números 1 + 6 + 16 + 19 + 27 = 69.

***JUEGOS***

suma+ 57
Febrero 2008, pp.79-80

# Una resolución, un crédito europeo y la cuenta de un restaurante japonés

Los usos que la sociedad hace de los números deben merecer nuestra atención. A través de la mirada matemática podemos contribuir al desarrollo de la actitud crítica y reflexiva ante las informaciones, de todo tipo, que nos rodean. En este sentido, en el presente Clip, quisiera compartir con los lectores de SUMA tres ejemplos muy recientes.

## Una resolución de una convocatoria oficial

Buscando una información en Internet encuentro que el día 14 de diciembre sale una Resolución de 12 de diciembre de 2007, de la Dirección General de Investigación de la Generalitat de Catalunya, sobre la adjudicación de ayudas para financiar acciones de divulgación científica. La leo por curiosidad. La orden resuelve una convocatoria aparecida el Diario Oficial de la Generalitat de 25 de mayo de 2007 y da en total 250.000 euros a diversos proyectos para el 2007 presentados en su día. La misma resolución fija que los beneficiarios deberán presentar el informe final del desarrollo de la acción financiada del 2007 antes del 31 de enero de 2008.

Lo vuelvo a leer. Y empiezo a observar fechas. A mitad de diciembre, casi en vísperas de Navidad se dan ayudas para acciones del 2007 y se pone el límite de 31 de enero de 2008. ¿Diez días para la divulgación científica? ¿Se financiaban acciones ya realizadas? ¿Eran los 250.000 euros para disfraces de Papa Noel para los divulgadores? La mirada matemática ayuda a descubrir sorpresas incluso en cosas tan simples como las fechas.

## Un crédito europeo

A partir del Real Decreto (2007) del MEC ordenando las enseñanzas universitarias oficiales se fijan los nuevos "grados" en 240 créditos.

En una reunión se aclara qué son los créditos europeos ECTS. ¿Y a qué equivale cada crédito ECTS? Recurriendo a otro Real Decreto (¡del 2003!) la cosa se aclara un poco:

**Claudi Alsina**
*elclip@revistasuma.es*

*Artículo 3. Concepto de crédito*

*El crédito europeo es la unidad de medida del haber académico que representa la cantidad de trabajo del estudiante para cumplir los objetivos del programa de estudios y que se obtiene por la superación de cada una de las materias que integran los planes de estudios de las diversas enseñanzas conducentes a la obtención de títulos universitarios de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional. En esta unidad de medida se integran las enseñanzas teóricas y prácticas, así como otras actividades académicas dirigidas, con inclusión de las horas de estudio y de trabajo que el estudiante debe realizar para alcanzar los objetivos formativos propios de cada una de las materias del correspondiente plan de estudios.*

Una nueva dimensión a la teoría de la medida. En los ECTS se suma todo: las clases, las prácticas, el estudio, los exámenes, los trabajos, pero hay más:

*4. Esta asignación de créditos, y la estimación de su correspondiente número de horas, se entenderá referida a un estudiante dedicado a cursar a tiempo completo estudios universitarios durante un mínimo de 36 y un máximo de 40 semanas por curso académico.*

*5. El número mínimo de horas, por crédito, será de 25, y el número máximo de 30.*

¡Bienvenidas las desigualdades! Si H son horas y S semanas debe ser $36 \le S \le 40$ y $25 \le H \le 30$. ¿Pero cuantas horas de clase presencial representa esto? Por lo de la unidad de medida de antes resulta, que si h son horas de aula por crédito, y se hace un modelo del estilo 1h 30m de estudio/trabajo por cada hora,

surge $H = h + \frac{3}{2}h = \frac{5}{2}h$ lo que lleva a la posible inecuación, $25 \le \frac{5}{2}h \le 50$ , es decir, $10 \le h \le 12$. En la reunión a la que asisto se respira hondo. El "crédito actual" eran 10 horas de clase y ahora solo algo parecido. Pero el MEC ha tardado 4 años, de 2003 a 2007, para enlazar estos decretos. ¿Y si el modelo fuese $H=h+2h=3h$, entonces resultaría $25 \le 3h \le 30$ y $25/3 \le h \le 10$… menos horas? La reunión acuerda $h=10$ y $S=18$. El cambio… para que todo quede igual. En cambio se comenta que en otros sitios "el modelo" de relación entre h y H dependerá de cada cual ¡Caos!.

Será gracioso que el "crédito" europeo acabe "hipotecando" todos los planes de estudio. ¿Qué dirán los estudiantes cuando vean que después de cinco horas de clase por la mañana necesitan siete horas y media o diez para trabajar por su cuenta? ¿Notarán que 5 h clase + 7 ½ h trabajo + 8 h dormir + 2 h comidas + ½ h higiene + 1 h transporte = 24 h?

## La cuenta de un restaurante japonés

Hace unas semanas tuve ocasión de compartir mesa y palillos con un amigo en un restaurante japonés de Barcelona (donde, por cierto, no trabaja ningún japonés). Tras la comida pido la cuenta y quedo fascinado. No solo el precio final merece respeto sino, como podrá observarse en la imagen, en el desglose de los precios, los postres tienen una magia especial. El helado de vainilla vale 3,04999 euros, cifra redondeada al final en 3,05. Lo del 3,05 ya entiendo que proviene de la aplicación del IVA que iba incluido. Pero lo del 3,04999 resulta misterioso. Lo comento con el camarero inquiriendo como un triste helado de vainilla precisa de cinco decimales. El camarero, cuyos recuerdos de la ESO son recientes pero vagos, queda pasmado y lo va a preguntar al encargado, el cual carga a su vez la culpa a la máquina de calcular…


Kabuki Verdi S.L.
NIF B63776405

TIQUET 10012e669 FECHA 01/09/20

CAMARERO 5 MESA 22

| UDS | DESCRIPCION SALA 1 | PVP | IMPORTE |
|---|---|---|---|
| 2 | SAN MIGUEL 0.0 | 2,7 | 5,40 |
| 1 | Combinat sushi sal | 18,1 | 18,10 |
| 1 | MISOSHIRU | 2,75 | 2,75 |
| 1 | KANI TEMPURA | 9,15 | 9,15 |
| 1 | SHAKE AVOCADO URAM | 5,4 | 5,40 |
| 1 | Mochi japones | 3,95 | 3,95 |
| 1 | Gelat vainilla | 3,04999 | 3,05 |

TOTAL 47,80

IVA INCLUIDO
*** GRACIAS POR SU VISITA ***

Estos tres documentos contienen números. Y todos los números son correctos. Pero nosotros no sólo nos hemos de fijar en la ausencia de errores sino en los significados o implicaciones de estos contenidos numéricos. Este meta-análisis ya no está en el marco estricto de la Aritmética sino en el marco del sentido común: Ni cinco decimales son precisos para un helado de vainilla, ni repartir 250.000 euros para diez días de divulgación, ni tardar cuatro años en fijar algo que queda totalmente al arbitrio del que lo lee.

Al placer de matematizar le podemos añadir siempre el placer de criticar: ¡Aquí hay números!

*EL CLIP* ■

suma+ 57
Febrero 2008, pp.81-84

# Tuxmath: un juego para el cálculo mental

Un nuevo equipo se coloca al frente de la revista SUMA, por lo que me gustaría comenzar agradeciéndoles a la directiva saliente toda la dedicación y el trabajo realizado durante este tiempo. Un trabajo que se ha visto plasmado en los interesantes, curiosos, útiles... artículos y aportaciones que hemos encontrado en los distintos números. Enhorabuena. Al mismo tiempo le deseo a la nueva directiva lo mejor para este periodo que comienzan y que, a buen seguro, veremos plasmado en los textos que encontremos en éste y los siguientes números, como referencia útil para la tarea de enseñanza matemática y/o investigación que los lectores desarrollemos.

Con este número, estrenamos MatemásTIC. Aunque el nombre ya deja entrever lo que pueden ser los contenidos que podemos encontrar, por la amplia variedad de los mismos, nos hemos marcado unos objetivos claros que nos sirvan de referencia para la estructura, temas y forma en la que se van a tratar.

La sociedad actual se desarrolla en el caldo de cultivo de las tecnologías de la información y la comunicación, que ya dejaron atrás el calificativo de nuevas y en el que lo más novedoso hoy, estará desfasado en poco tiempo. En esta sociedad, en la que el teléfono móvil se ha hecho imprescindible, en la que no nos explicamos cómo hemos podido viajar sin GPS o en la que al primero que preguntamos sobre una duda es a Google, la educación debe subirse a este tren tecnológico dando respuesta a las nuevas necesidades que la sociedad demanda, utilizando el potencial que las TIC proporcionan.

En este sentido, las distintas administraciones educativas están haciendo una apuesta, en lo que a software se refiere, por sistemas operativos libres basados en Linux. Moliux en Castilla la Mancha, Linkat en Catatuña, LinEx en Extremadura, GuadaLinEx en Madrid, Lliurex en la Comunidad Valenciana, Max, mEDUXa en Canarias ... son algunos ejemplos de referencia de los sistemas que encontramos en las aulas españolas, basados en distribuciones de linux que podemos consultar en la siguiente dirección http://www.linuxiso.com.ar/, a los que podemos unir otra serie de distribuciones educativas como Caldum, EducaniX, pequelin...

**Mariano Real Pérez**
*matemastic@revistasuma.es*

También hay algunas en las que el software propietario sigue presente en las aulas. Pero lo indiscutible es que las TIC se van abriendo camino en la enseñanza, en mayor o menor medida y los docentes debemos estar preparados para beneficiarnos de las ventajas que nos puedan aportar de cara a la educación.

En la sección MatemásTIC pretendemos informar sobre herramientas TIC existentes que nos puedan resultar útiles en el aula de matemáticas. No es una cuestión de uniformar ni de encauzar el uso de las mismas, el objetivo definitivo es que se conozcan y se pueda observar su utilidad para que, si las encontramos de interés, podamos hacer uso de ellas en nuestras propias clases.

Además del software específico para las matemáticas, existen páginas en las que podemos encontrar múltiples recursos para el aula y que deben ser conocidas por todos. Por este motivo, en cada número haremos una referencia a alguna página web útil para las matemáticas, intentando, de forma resumida, explicar los contenidos y utilidades que la web encierra.

Para comenzar esta sección hemos seleccionado una aplicación para el desarrollo del cálculo mental.

## Tuxmath: un juego para el cálculo mental

Tuxmath es un juego educativo en el que se combinan la destreza y la rapidez manual con la agilidad mental a la hora de realizar operaciones matemáticas con números.

El alumno encuentra en esta herramienta un reto manual y de rapidez para alcanzar los objetivos del juego en el que debe conseguir que ninguna de las naves portadoras de operaciones matemáticas invada la plataforma sobre la que se encuentra la mascota de linux, Tux.

La aplicación se presenta en un entorno sencillo de comprender y manejar con el fin de atraer a los más pequeños. Al mismo tiempo, el colorido e imágenes con las que cuenta, hacen que la aplicación sea atractiva para los usuarios finales. Observaremos a lo largo de este texto las posibilidades que nos ofrece esta herramienta para que los alumnos realicen operaciones mentales. La configuración de la aplicación hacen, además, que podamos adaptar la dificultad de las operaciones que aparecen a distintos niveles siendo útil para distintas edades y niveles de conocimiento. Con esto, podremos utilizar la aplicación, no solamente con aquellos alumnos de las enseñanzas iniciales, sino también con aquellos que muestren en enseñanzas avanzadas dificultades de aprendizaje e incluso con los alumnos que cursen asignaturas optativas de apoyo en matemáticas.

Por otra parte, también se posibilita el estudio de una única operación o de operaciones combinadas con lo útil que puede ser esta posibilidad para el estudio de las operaciones con sumas solamente o bien para el estudio de la tabla de multiplicar.

Las operaciones que se le presentarán al alumno serán sumas, restas, multiplicaciones y divisiones.

Al entrar en el programa, la pantalla inicial que aparece es la que podemos contemplar en la Imagen 1.

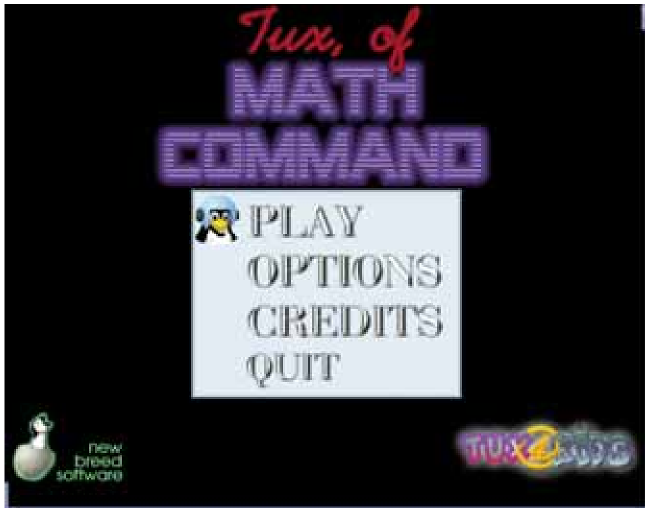



Imagen 1. Pantalla inicial de Tuxmath

Desde esta pantalla de presentación se controlan todas la opciones del programa que desglosamos seguidamente una a una. Para acceder a cada una de ellas, utilizaremos los cursores y para marcar una opción pulsaremos la tecla Enter cuando la mascota Tux se encuentre sobre la opción deseada. Tras realizar esto accederemos a la pantalla a la que conduce la opción seleccionada.

Comenzaremos con cada una de las opciones que nos ofrece la pantalla principal y, para ello, seguiremos el orden inverso para su análisis:

a) La Opción *Quit*: Es para salir del programa.

b) La opción *Credits*: se nos proporciona información sobre los creadores de la aplicación, así como la información sobre los diseñadores gráficos de la misma y la de los creadores de cada una de sus partes. Una vez que hayamos entrado en esta pantalla “Credits”, para salir de ella pulsamos la tecla Escape (Esc) y volveremos a la pantalla inicial del programa. (Imagen 1)

c) La opción *Options*: En esta pantalla nos moveremos y seleccionares de la misma forma que en la pantalla inicial. En la imagen 2, podemos observar la pantalla de configuración de la aplicación.


Imagen 2. Pantalla de configuración de Tuxmath

Podremos configurar las distintas opciones del juego adaptando el desarrollo del mismo, con las opciones que consideremos más oportunas, al nivel de los alumnos que van a utilizarla. Así, por ejemplo, si deseamos que el alumno solamente realice operaciones de multiplicar, desmarcaremos las demás operaciones y ya tendremos configurada la aplicación. Entre las opciones que podemos configurar, podremos elegir:

- Que entre las operaciones que aparezcan haya sumas.
- Que entre las operaciones que aparezcan haya restas.
- Que entre las operaciones que aparezcan haya multiplicaciones.
- Que entre las operaciones que aparezcan haya divisiones.
- Que podamos elegir el número máximo de preguntas. Éstas pueden ser: 12, 18, 28, 42, 64, 96 y 144.
- También podremos elegir el rango en el que se encontrarán los números que la aplicación nos presente para realizar las operaciones. Los rangos de los números de las operaciones que nos aparecerán será 1-5, 6-12 y/o 13-20. Nosotros podremos seleccionar entre estos el rango o rangos que más nos interesen.

  En esta tabla observamos las distintas configuraciones de rango para los números que aparezcan en el desarrollo del juego, ofreciéndonos una nueva posibilidad de adaptarnos a los alumnos y niveles con los que podemos encontrarnos en el aula.

*En la sección MatemásTIC pretendemos informar sobre herramientas TIC existentes que nos puedan resultar útiles en el aula de matemáticas.*

- Otra de las opciones que podemos configurar es la velocidad del juego, con lo que podremos adaptarla a los alumnos con que nos encontremos en el aula. Observamos que esta velocidad, por defecto 10, podemos configurarla entre 1 y 10. Mientras mayor sea el número, más rápidamente aparecerán las operaciones.

a) La opción Play:

En esta opción comenzamos a jugar. La pantalla del juego es una pantalla muy simple que podemos observar en la Imagen 3.


Imagen 3. Momento del desarrollo de la aplicación

Observamos que en la parte inferior de la pantalla aparece Tux. De la parte superior van descendiendo distintas llamas con operaciones que deberemos destruir antes de que alcancen la plataforma sobre la que se encuentra Tux. Para destruir una operación determinada, teclearemos la solución de esa operación y pulsaremos la tecla Enter. En ese momento, un rayo destructor saldrá de alguno de los lanzacohetes que hay situados a ambos lados de Tux y alcanzará a la operación que tenga esa solución y la destruirá. Así, en la pantalla que aparece en la Imagen 2, si nosotros tecleamos el número 3 y pulsamos enter, saldrá un rayo que destruirá la operación que aparece marcada como dividir 15 entre 5. Si realizamos esto, podemos observar como además Tux se alegra de haber acertado el resultado.

Cuando tecleamos la solución de una operación, el número que marquemos aparecerá en un marcador de color rojo que se encuentra justamente encima de Tux y que, en la imagen 3, podemos observar que tiene el valor 000.

En esta aplicación, a medida que se van realizando las distintas operaciones y se van superando las diferentes pantallas en las que se desarrolla el juego, van apareciendo más rápidamente las distintas operaciones, lo que hace que en algunos momentos el juego alcance cierta dificultad manual a la que hay que sumar la necesidad de una rápida reacción mental para realizar las distintas operaciones.

Una vez que hemos hecho un recorrido por las distintas opciones que nos plantea el programa y las diferentes partes que podemos configurar, podemos concluir que la aplicación es multinivelar. Es decir, es un programa que podemos utilizar en distintos niveles de educación primaria y secundaria. En la etapa primaria estaría aconsejada para que el alumno practicara operaciones concretas de un único tipo como sólo sumas, sólo restas o sólo multiplicaciones, de forma que el alumno pueda disponer de una herramienta práctica que le ayude a memorizar las tablas de sumar o multiplicar. En educación secundaria es una herramienta de gran ayuda para las matemáticas en general y para la asignatura de destrezas básicas en matemáticas en particular. Este software ayuda al alumno a practicar las operaciones mentales a través del juego.

*MatemásTIC* ■

| FICHA EDUCATIVO - TÉCNICA | |
|---|---|
| Nombre | Tuxmath |
| Sistema | Aunque es una aplicación propia de Linux y para cada distribución cuenta con el archivo de instalación en su repositorio, también encontramos una versión para Windows. |
| Descarga | http://www.newbreedsoftware.com/tuxmath/download/ |
| Licencia | GNU |
| Contenido | Operaciones matemáticas. Cálculo mental. |
| Nivel | Multinivelar, recomendado para primaria y secundaria. |
| Metodología | Los alumnos la utilizarán individualmente, aunque lo más aconsejable es que dos alumnos la utilicen en un mismo equipo. Utilizarla en periodos cortos durante múltiples sesiones prolongadas en el tiempo. |

suma+ 57
Febrero 2008, pp. 85-88

# Ha vuelto para mirarnos

Iniciamos con este artículo una nueva sección que hemos titulado *Arte con ojos Matemáticos*.

En cada entrega analizaremos un cuadro, mirándolo con ojos matemáticos. Con esa particular mirada, fruto de nuestra propia (de)formación. Y desde ese punto de vista haremos paseos por el Arte y las Matemáticas. Espero que el lector, como hago yo mismo, disfrute descubriendo más allá de lo que a simple vista distinguiría cualquiera. Al fin de cuentas, el Arte, como las Matemáticas, han sido creados para hacernos disfrutar.

*Es ejemplo único de desnudo en la pintura española hasta su momento. Todo es plástico, de blanda y fluida luminosidad. Tan bien armonizada en rojos, y con una palpitación humana que da a esta obra el máximo interés realista. Más que un modelo clásico es ésta no una mujer desnuda sino divertida, con toda la caliente carnación de un cuerpo vivo.*
*Camón Aznar,*
Summa Artis

*La Venus del espejo*, Velázquez, National Gallery, Londres

**Francisco Martín Casalderrey**
*fmc@revistasuma.es*

Y no podría empezar esta sección sino volviendo a contemplar la *Venus del Espejo*, de Velázquez. Este cuadro, que habitualmente se puede ver en la National Gallery de Londres, está de visita en Madrid formando parte de la exposición *Fábulas de Velázquez*, en el Museo del Prado, que celebra así su reciente ampliación.

La *Venus* ha estado siempre rodeada de un cierto halo de misterio. No se sabe muy bien en qué fecha fue pintada, ni quién la encargó. Pudo ser un encargo real. El rey Felipe IV había enviudado en 1644, al morir su esposa la reina Isabel, con la que había tenido siete hijos, de los que sólo dos llegaron a adultos. De naturaleza melancólica, caía en estados depresivos con cierta frecuencia. Dos años después de la reina moría en Zaragoza el heredero a la corona, el principe Baltasar Carlos, recien prometido a su prima, Mariana de Austria. La Corona quedaba sin heredero. El rey terminaría casandose de nuevo en 1649 con su sobrina, Mariana de Austria, la prometida de su hijo, que tenía sólo quince años y con la que tuvo cinco hijos más. El más pequeño de ellos, Carlos, sería finalmente su sucesor y el último de los Austrias en ostentar la Corona Española. Además, este prolífico rey tuvo otros dos hijos, al menos, con dos de sus amantes.

La Venus del Espejo*, de Velázquez, que habitualmente se puede ver en la National Gallery de Londres, está de visita en Madrid, formando parte de la exposición* Fábulas de Velázquez, *en el Museo del Prado. Es un cuadro que ha estado siempre rodeado de un cierto halo de misterio.*

Por tanto, permaneció viudo el rey Felipe IV entre los años 1644 y 1649 y se sabe que *La Venus* fue pintada por Velázquez en ese periodo. Lo más probable incluso es que fuera pintada antes de 1648, fecha en la que el pintor inició su segundo viaje a Italia, donde permaneció más de dos años, con el encargo, entre otras cosas, de adquirir cuadros para el rey de los mejores pintores italianos del momento. En su estancia italiana Velázquez tuvo una amante con la que tuvo un hijo. Algunos autores, que atribuyen la pintura a esa etapa italiana, creen ver en la Venus a la madre de su hijo. Pero como digo, otros consideran más probable que fuera pintado antes de este viaje. De hecho, el cuadro pertenecía en 1651 a Gaspar Méndez de Haro, marqués del Carpio y Heliche –hijo del nuevo valido del rey, Luis Méndez de Haro, tras la caida de Gaspar de Guzmán y Pimentel más conocido como el Conde-Duque de Olivares–. Dado que en 1651 Velázquez aún permanecía en Italia es poco probable que pintara allí la *Venus*.

Si fue un encargo real para el solaz personal de Felipe IV, en su gabinete secreto en esos años de viudedad, el rey, tras su nuevo matrimonio, debió decidir desprenderse de él, quizás regalándoselo a su valido Luis de Haro. La otra posibilidad plausible es que fuera un encargo directo de éste último, pero, como digo, el comitente es otro de los muchos misterios de esta Venus.

En todo caso, en el año 1661, a la muerte de Velázquez su yerno realiza un inventario en el que puede leerse:

*Una benus tendida de belazquez de dos brazas*

No sabemos si se trata de la misma Venus, aunque, si hubo más, éstas se han perdido.

Las fechas más destacadas de la historia de este misterioso cuadro son las siguientes:

1651-1686. Pertenece a Gaspar Méndez de Haro, marqués del Carpio y Heliche. Adquirido por 150 doblones. (En 1661 aparece la cita que hemos recogido en el inventario de bienes del artista)
1688-1802. Pertenece al duque de Alba, después de su matrimonio con Cristina de Haro y Guzmán, hija del marqués del Carpio, del que heredó el cuadro.
1802-1808. Incautado por Manuel Godoy a la muerte de la duquesa Cayetana de Alba.
1808-1813. Adquirido por G.A.Wallis para W. Buchanan, Londres. Fue valorado en 4 000 guineas.
1814-1905. Adquirido por George Yates, quien poco después lo vendió a J.B.S.Morrit (Rokeby Hall, Yorkshire) por 500 libras.
1905: Vendido a la casa *Agnew and Son*, Londres.
1906: Lo adquiere la National Gallery, Londres, por 45000 libras.
1914: el día 10 de marzo sufre un atentado por parte de una sufragista, que realizó siete cortes en el lienzo.

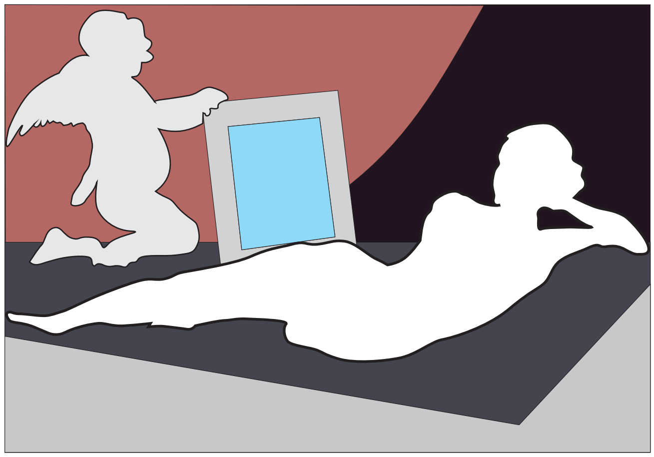
Destaquemos dos momentos: Cuando pasó a formar parte de la colección de Godoy estuvo colgado junto al otro único desnudo femenido de la pintura española, *La maja desnuda*, pintada por Goya en 1800.

En 1914, una mujer armada con un cuchillo, rasgó el cuadro en la National Gallery de Londres. Las cuchilladas rompieron el lienzo en la espalda y en las nalgas de la Venus. La autora consideró el hecho una contribución a la igualdad de los sexos.

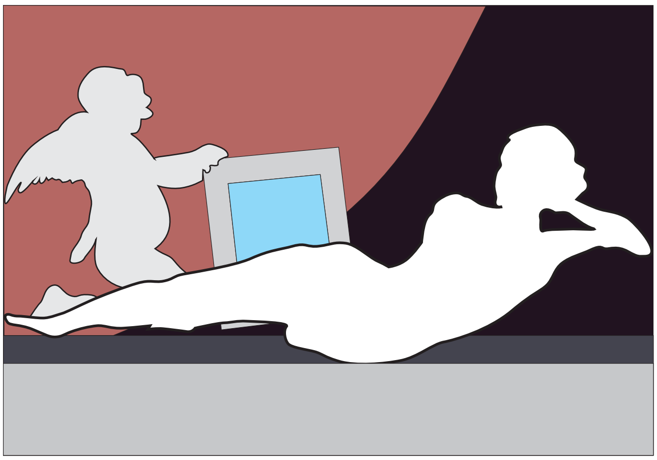
No cabe duda de que esta mujer-diosa carnal y sensual, que de espaldas muestra su cuerpo, vedando al espectador el resto, salvo su desvaído rostro que aparece reflejado en el espejo que sujeta Cupido, despliega sobre quien la contempla una fuerte atracción que resiste al paso de los años. Para una sufraguista de la segunda década del siglo XX el cuadro podía fácilmente convertirse en un símbolo de la mujer reducida a mero objeto del deseo del hombre.

Pero pasemos, tras este largo prólogo, a *mirar el cuadro con ojos matemáticos*.

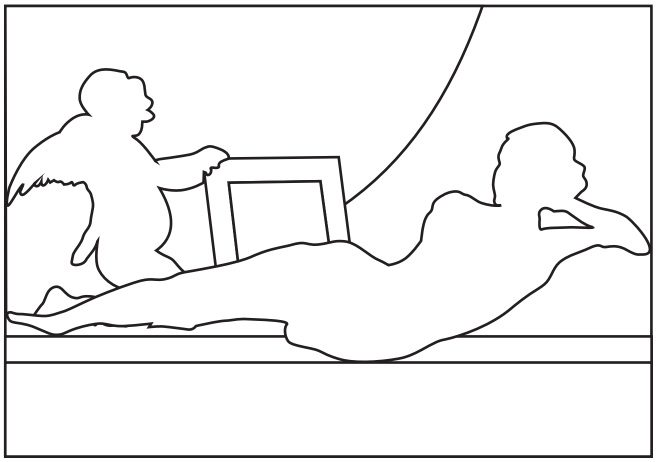
I



II



III



IV

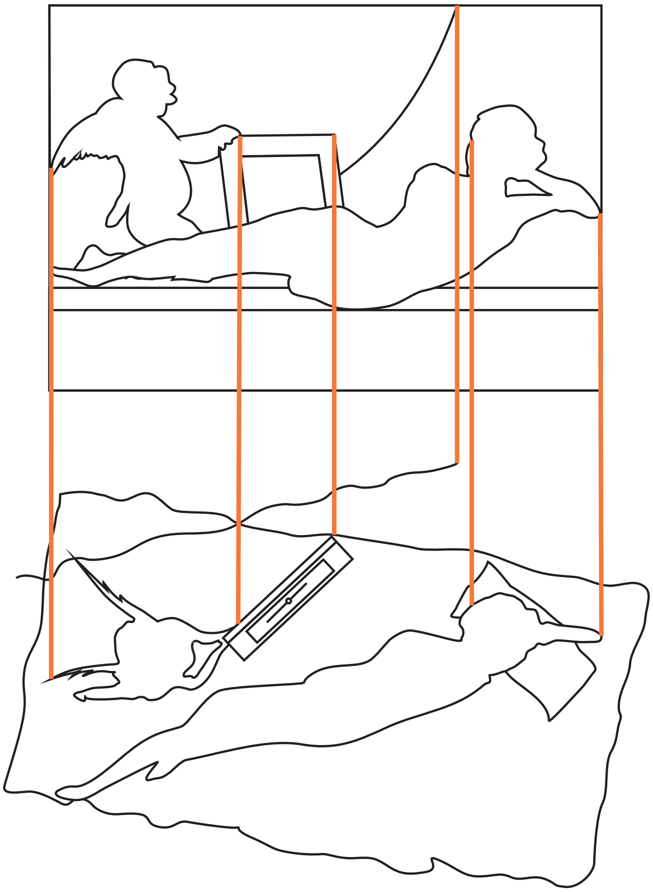
La venus del espejo. Deconstrucción del cuadro para obtener el alzado

## Del cuadro al alzado

Analizando la imagen I con detalle vemos el cuerpo femenino extendido sobre un lecho cubierto de una sábana negra. probablemente seda o satén. La mirada del espectador cae desde un ángulo superior; sin duda está de pie, delante de este diván, a la espalda de la Venus. El lecho, en perspectiva nos oculta una de sus esquinas, la más cercana a nosotros, que queda fuera de la imagen. La diametralmente opuesta a ésta se pierde tras la cortina roja del fondo, que parece cubrirla. El brazo derecho de la diosa está apoyado sobre una almohada, que se oculta bajo la sábana y de la que sólo distinguimos la forma. La imagen II resalta, simplificando las formas, la perspectiva de la cama. De ésta no resulta difícil pasar a la imagen III, que correspondería a un alzado de la escena. El lecho está ahora horizontal. Las caderas tapan el espejo, que aparentemente ha descendido, al igual que el Cupido. Nuestra mirada es ahora perpendicular al centro de la escena, por eso la cama aparece paralela a la línea de tierra, imagen IV.

## Del alzado a la planta

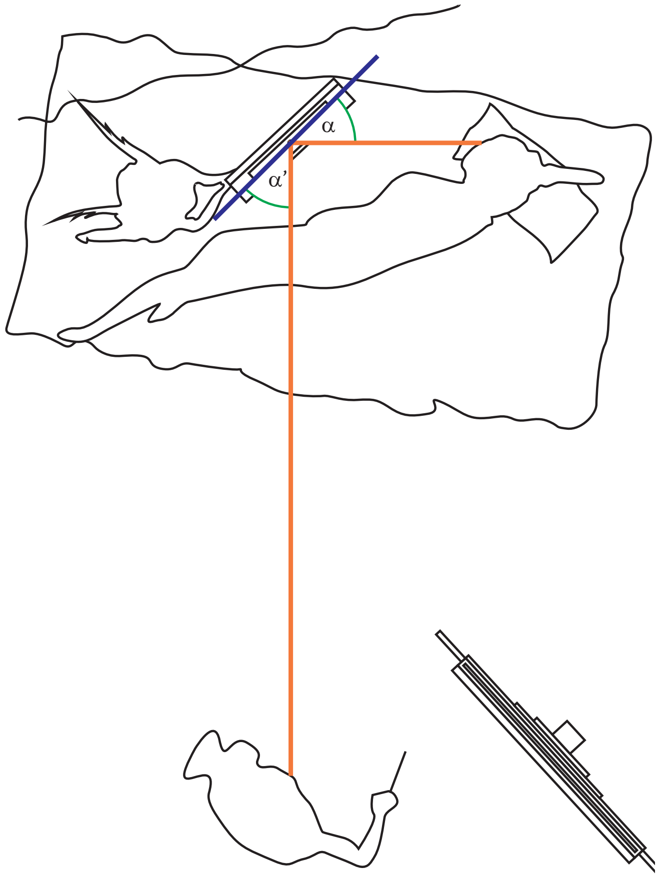
Ahora podemos con facilidad, a partir de los datos que hemos analizado, imaginar cómo sería la planta de la escena, imagen V.



V

## ¿Qué ve la venus en el espejo?

Mirando el cuadro podemos hacernos la pregunta ¿qué ve la venus en el espejo? La mayoría de los lectores se sentirán tentados a afirmar que se está mirando a sí misma, que es una Venus coqueta. Pero razonando sobre la planta podremos ver que no.




VI

Si trazamos la visual que parte de los ojos de la Venus y se refleja en el espejo, y aplicando la ley de la óptica que dice que el ángulo de incidencia $\alpha$ es igual al de reflexión $\alpha$,' descubrimos qué ve cuando parece mirarse en el espejo. Nuestra Venus resulta ser más que coqueta cotilla.

Quizás, aburrida de posar como modelo en largas horas de tedio, mira a través del espejo a quien se encuentra a su espalda: a Velázquez, al que no puede ver directamente. Velázquez también la mira a ella y ambos quedan enlazados por ese diálogo cómplice de miradas.

Pero ahora, cuando contemplamos como paseantes por el museo y sentimos la irresistible atracción de este cuadro misterioso y fascinante, somos nosotros los que nos situamos en el punto de vista del pintor. Nosotros, por un momento, podemos sentirnos Velázquez. La Venus, por tanto, nos mira y es contigo, espectador, si estás atento y te dejas llevar, con quien sostiene ahora ese diálogo de miradas cruzadas.

La genialidad de Velázquez en este cuadro, como también sucede en *Las Meninas*, logra incorporar al espectador en la escena representada, consiguiendo, por una parte, desde nuestra adversa distancia temporal, situarnos en medio de ese momento mágico, y, desde la suya, convertir en atemporal, en eterno, lo que en algún momento sólo fue un esbozo de una imagen en su cabeza.

Queda así desvelado un enigma de este cuadro, pero no su misterio. Como dice Susana Fortes en su novela *Quattrocento* (2007):

> El misterio no es algo que uno pueda resolver como un enigma, sino algo en lo que uno se adentra como se adentra en una ciudad.

En una ciudad desconocida.

*ARTE CON OJOS MATEMÁTICOS* ■

suma+ 57
Febrero 2008, pp.89-95

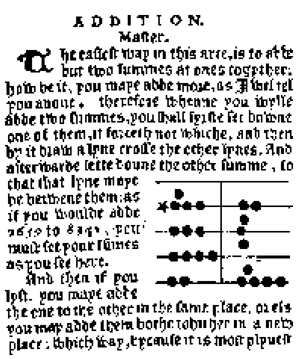


# Robert Recorde: el creador del signo igual

Hace 450 años, en 1558, moría Robert Recorde, a la temprana edad de 48 años, se cree que en prisión por razones ideológicas, políticas o religiosas. Fue casi el único matemático importante de la Inglaterra del siglo XVI, y señala el despertar en su país de una matemática que llevaba dormida cerca de dos siglos, desde la muerte de Bradwardine, por lo que se le considera como el iniciador de la escuela matemática inglesa.

> *...señala el despertar en su país de una matemática que llevaba dormida cerca de dos siglos, desde la muerte de Bradwardine, por lo que se le considera como el iniciador de la escuela matemática inglesa.*

Recorde había nacido en 1510, en el seno de una modesta familia de Tenby, en el País de Gales. Estudió Matemáticas, y en 1531 obtuvo su primer título universitario, que le permitía enseñar Matemáticas en Oxford y Cambridge. En 1545, se doctoró en Medicina por la Universidad de Cambridge, uniéndose así al grupo de médicos, como Chuquet y Cardano, que hicieron importantes aportaciones a las Matemáticas. Poco después, recibió el nombramiento de médico del rey Eduardo VI y, más tarde, de la reina María. Finalmente, fue nombrado para el cargo de Inspector de Minas y de la Moneda de Irlanda.


ADDITION.
Master.
The easiest way in this arte, is to adde but two summes at ones together: how be it, you maye adde more, as I wil tel you anone. Therefore whenne you wylle adde two summes, you shall fyrste set downe one of them, it forceth not whiche, and then by it drawe a lyne crosse the other lynes. And afterwarde sette downe the other summe, so that that lyne maye be betwene them: as if you woulde adde 2659 to 8342, you must set your summes as you see here.
And then if you lyst, you maye adde the one to the other in the same place, or els you may adde them bothe togither in a newe place: which way, because it is most playnest

El primer tratado de matemáticas suyo que se conserva es *Grounde of Artes* (El campo de las artes), publicado en 1541, y escrito en forma de diálogo, según acostumbraba, entre un maestro y un alumno. Recorde estaba muy preocupado por la extensión de la enseñanza de la Aritmética, así que este libro, dedicado a Eduardo VI, versa sobre el uso de las operaciones fundamentales y sus algoritmos, así como de algunas aplicaciones comerciales. Fue muy popular llegando a alcanzar más de doce ediciones, si bien solo en la isla, ya que estaba escrito en lengua vernácula, Recorde es el primer inglés en hacerlo, y esto dificultaba su difusión por el continente. Ejemplo del tipo de cuestiones que plantea son las siguientes:


**Santiago Gutiérrez**
*hace@revistasuma.es*

Problema del caballo

> *Te vendo un caballo con cuatro herraduras, y cada herradura lleva seis clavos, a condición de que tu me pagues una moneda por el primer clavo, dos monedas por el segundo, cuatro monedas por el tercero, y así sucesivamente, doblando cada vez la cantidad de monedas hasta acabar con todos los clavos. Te pregunto, ¿cuál es entonces el precio del caballo?*

Problema de los ladrillos

> *Un señor proporciona cierto número de ladrillos a un albañil para que construya doce paredes de manera que en la primera emplee los dos tercios del total de ladrillos, en la segunda los dos tercios del resto, y así sucesivamente hasta la última. Cuando el albañil hubo terminado quedaba solo un ladrillo por utilizar. Te pregunto, ¿cuántos ladrillos se emplearon en cada una de las paredes, y de cuántos disponía el albañil?*

En 1551, publicó Recorde dos obras, el *Pathewaie to knowledge* (El camino hacia el conocimiento), destinada a la iniciación de los artesanos, y el *The Castle of knowledge* (El castillo del conocimiento), de contenido astronómico, en la que da su aprobación al sistema heliocéntrico de Copérnico. El *Pathewaie* viene a ser una versión abreviada de los *Elementos* de Euclides, con la traducción de los cuatro primeros libros. Pensaba publicar cuatro partes, pero solo aparecieron dos. El primer tomo con las definiciones y construcciones, y el segundo con los postulados, axiomas y resto de teoremas de los tres primeros libros de Euclides.


*The Castle of Knowledge*, Recorde

La obra más citada de Recorde es *The Whetstone of Witte*, (La piedra de afilar el ingenio ), publicada en 1557, esto es, un año antes de su muerte. El libro está dedicado al álgebra, y en él es donde aparece por primera vez el signo que hoy utilizamos para afirmar la igualdad de dos expresiones, si bien Recorde lo hace más largo de lo que nosotros hacemos en la actualidad. Así lo justifica el propio Recorde en la obra citada:

> *And to avoide the tediouse repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke use, a pair of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: ═════, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle.*

> (*Y para evitar la tediosa repetición de las palabras: "es igual a", pondré, como hago a menudo en el curso de mi trabajo, un par de paralelas o rectas gemelas de la misma longitud, así: ═════, porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales.*)

Sin embargo este signo no iba a tener un éxito inmediato ni fácil. Tardaría más de un siglo en imponerse definitivamente.

¿Por qué y cómo ocurrió?

## Primeros pasos del signo de igualdad

Antes de Recorde, la igualdad solía aparecer expresada en forma retórica por palabras tales como *aequales*, *aequantur*, *esgale*, *faciunt*, *ghelijck*, o *gleich*, y a veces por la forma abreviada *aeq*. Entre los autores que expresaban la igualdad de

> *La obra más citada de Recorde es The Whetstone of Witte, (La piedra de afilar el ingenio ), publicada en 1557, esto es, un año antes de su muerte. El libro está dedicado al álgebra, y en él es donde aparece por primera vez el signo que hoy utilizamos para afirmar la igualdad de dos expresiones.*

semejante manera están, entre otros, Kepler, Galileo, Pascal, Napier, y Fermat. Es decir, unos cien años después de Recorde, algunos de los más notables matemáticos no usan ningún tipo de símbolo para expresar la igualdad. Lo más sorprendente es que alrededor de un siglo antes de Recorde, Regiomontano, en su correspondencia, utiliza a veces para la igualdad una raya horizontal (—), que había sido empleada ya por Pacioli.

*... unos cien años después de Recorde, algunos de los más notables matemáticos no usan ningún tipo de símbolo para expresar la igualdad.*


GEOMETRIA,
à
RENATO DES CARTES
Anno 1637 Gallicè edita; postea autem
Unà cum NOTIS
FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curia Blesensi Consiliarii Regii, Gallicè conscriptis in Latinam linguam versa, & Commentariis illustrata,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batava Matheseos Professoris.
Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus Commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad uberiorem explicationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus, exornata,
Quorum omnium Catalogum pagina versa exhibet.
AMSTELÆDAMI,
Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
CIↃ IↃC LIX.

El símbolo = de Recorde, después de su aparición en 1557, no volvió a aparecer impreso hasta 1618, o sea, sesenta y un años más tarde. Algunos escritores utilizan símbolos en sus manuscritos privados que no exhiben en sus libros impresos, como John Napier, que utiliza el signo = de Recorde en un manuscrito algebraico, que no fue impreso hasta 1839. En 1618 nos encontramos con el signo = en un apéndice anónimo (muy probablemente debido a Oughtred) impreso en Inglés por Edward Wright's, traducción de la famosa *Descriptio* de Napier. Pero, fue en 1631 cuando disfrutó de un reconocimiento generalizado en Inglaterra al ser adoptado como símbolo de igualdad en tres influyentes obras: *Artis analyticae praxis* de Thomas Harriot, *Clavis mathematicae* de William Oughtred, y *Trigonometria* de Richard Norwood.

## Los distintos significados del símbolo =

Mientras tanto, en el continente europeo el signo = se aplicaba a relaciones distintas de la igualdad. Así:

- Francisco Vieta, en 1591, en su *In artem analyticen isagoge* utiliza el signo = para designar la diferencia aritmética.

- Descartes, en 1638, utiliza el signo = para designar el doble signo, más o menos, ±.

- Johann Caramuel lo empleaba para indicar la separación entre la parte entera y la parte decimal de un número; por ejemplo, la expresión 102 = 857 significaba lo mismo que nuestro 102,857.

- La cosa empeoró cuando Dulaurens y Reyher lo utilizaron para indicar el paralelismo de dos rectas.

Si añadimos el significado original que le daba Recorde, nos encontramos con que el símbolo = adquirió cinco significados difstintos, según los diferentes escritores continentales. Por tal motivo, estaba en peligro de ser totalmente descartado en favor de algún otro símbolo que no tuviera este tipo de inconvenientes.

## Otras propuestas de símbolos

Una nueva fuente de peligros para nuestro = lo constituyó la aparición de otros símbolos competidores. En efecto, nuevos pretendientes hicieron su aparición tanto en el Continente como en Inglaterra.

En 1559, el monje francés J. Buteo, publicó su Logistica en la que aparecen ecuaciones como

$$1A,\frac{1}{3}B,\frac{1}{3}C[14 \qquad \text{y} \qquad 3A.3B.15C[120$$

En notación moderna:

$$x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z=14 \qquad \text{y} \qquad 3x+3y+15z=120$$

El signo “[“, de Buteo, funciona como un signo de igualdad.

En 1571, un escritor alemán, Wilhelm Holzmann, más conocido bajo el nombre de Xylander, publicó una edición de la Arithmetica de Diofanto en la que utilizaba dos paralelas verticales ‖ para la igualdad. No da ninguna pista sobre el origen de este símbolo, que fue adoptado por unos pocos matemáticos holandeses y franceses durante los cien años siguientes, especialmente en los trabajos sobre proporciones.

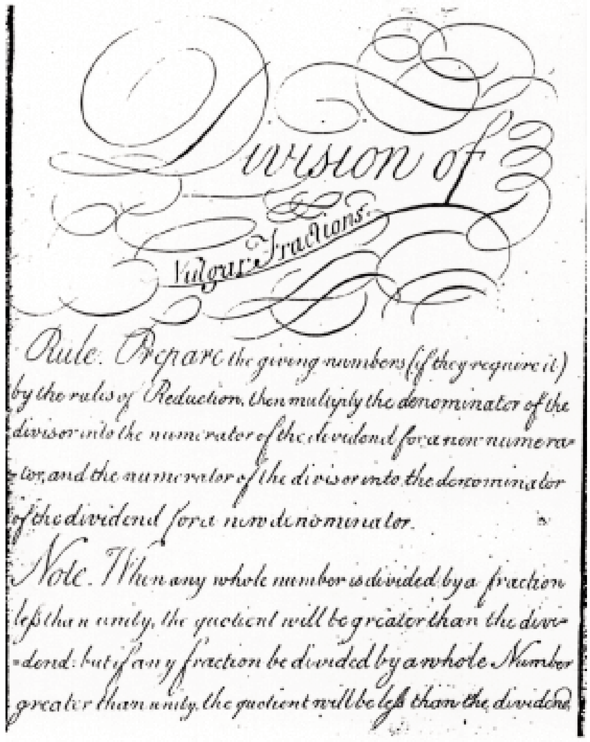
Así, R. Descartes, en su *Opuscules* de 1619-1621, hace la afirmación:

*“ex progressione habentur* 1 | 2 ‖ 4 | 8 ‖ 16 | 32 ‖ *Numeri perfecti 6, 28, 496.”*

Aunque utilizados por los escritores de vez en cuando durante más de un siglo, este signo “ ‖ ” nunca dio la impresión de convertirse en el símbolo universal de la igualdad.

*Si añadimos el significado original que le daba Recorde, nos encontramos con que el símbolo ═══ adquirió cinco significados distintos, según los diferentes escritores continentales.*

Lo más raro fue la propuesta de Hérigone en su *Cursus mathematicus* (París, 1644). Es el símbolo 2|2 para la igualdad. Basado en esta misma idea, es su 3|2 para “mayor que”, y su 2|3 para “menor que”. Así, $a^2+ab=b^2$ se indica, en su simbolismo, por $a2+ba2|2b2$. Aunque inteligente y curiosa,


Division of Vulgar Fractions.

Rule. Prepare the giving numbers (if they require it) by the rules of Reduction, then multiply the denominator of the divisor into the numerator of the dividend for a new numerator, and the numerator of the divisor into the denominator of the dividend for a new denominator.

Note. When any whole number is divided by a fraction less than unity, the quotient will be greater than the dividend: but if any fraction be divided by a whole Number greater than unity, the quotient will be less than the dividend.

Página de la edición de Recorde de *División de fracciones*

esta notación no logró interesar a nadie. En algunos casos, Hérigone utiliza también ⊔ para expresar la igualdad. Si a este signo se le da la vuelta, de arriba abajo, tenemos el utilizado por F.Dulaurens en 1667, a saber, ⊓ ; con Dulaurens ⊓ significa “majus” y ⊓ significa “minus “. Leibniz, en parte de su correspondencia y algunos documentos no publicados, utiliza normalmente ⊓ y también ═══. Pero, en los documentos impresos, sólo utiliza el signo ═══.

Hubo todavía algún otro signo diferente para la igualdad, pero de menos importancia.

## El signo de igualdad de Descartes

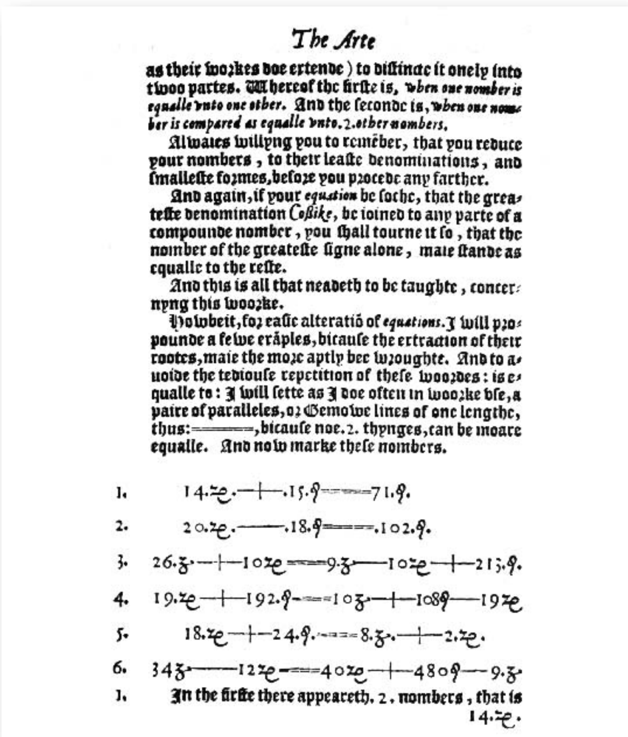
Todos los signos anteriores en ningún momento amenazaron con poner en serio peligro el símbolo de Recorde. El gran competidor del símbolo de Recorde fue el signo ∝ , introducido por René Descartes en su *Géométrie* (Leyden, 1637). Sin embargo, también este símbolo tuvo un recorrido tortuoso, como ahora veremos.

Se ha pensado que el signo ∝ le fue sugerido a Descartes por su parecido con las iniciales *æ* de la palabra latina aequalis, que significa "igual". Cantor lo describió como la unión de las dos letras, *ae*, simplemente. Mejor, quizás, es la descripción realizada por Wieleitner como la unión de las letras *oe* invertidas; pero, tras un minucioso examen del símbolo, sostiene que un modo más preciso de describirlo es pensar que se compone de dos letras o, es decir, *oo*, presionadas una contra otra, y suprimida la parte izquierda de la primera. Hay razones para suponer, como hace Cajori, que el símbolo de igualdad de Descartes, es simplemente el símbolo astronómico de Taurus colocado de lado, con la apertura vuelta a la izquierda. Este símbolo aparece regularmente en las obras astronómicas y estaba por tanto disponible en algunos de los talleres de imprenta.

Descartes no menciona la notación de Recorde; su *Géométrie* carece de toda referencia, bibliográfica e histórica. Pero sabemos que él conocía la *Praxis* de Harriot, donde se emplea el símbolo ===== regularmente. De hecho, Descartes mismo utiliza el signo ===== para la igualdad en una carta de 1640, donde escribe:

lC-6N ===== 40 (en lenguaje actual, $x^3-6x=40$)

Pero, se trataba solo de un documento privado. Descartes no da ninguna razón para haber dejado de utilizar, en este caso, su nuevo símbolo, ∞.


The Arte

as their workes doe extende) to distincte it onely into twoo partes. Whereof the firste is, *when one nomber is equalle unto one other*. And the seconde is, *when one nomber is compared as equalle unto.2.other nombers*.

Alwaies willyng you to remēber, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.

And again, if your *equation* be soche, that the greateste denomination *Cosike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for easie alteratiō of *equations*. I will propounde a fewe exāples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes: is equalle to: I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =====, bicause noe.2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. 14.ze.—+—.15.ϑ ===== 71.ϑ.
2. 20.ze.———.18.ϑ ===== .102.ϑ.
3. 26.ʒ.—+—10ze ===== 9.ʒ——10ze—+—213.ϑ.
4. 19.ze—+—192.ϑ ===== 10ʒ—+—108ϑ——19ze
5. 18.ze—+—24.ϑ. ===== 8.ʒ.—+—2.ze.
6. 34ʒ——12ze ===== 40ze—+—480ϑ——9.ʒ.

1. In the firste there appeareth. 2. nombers, that is 14.ze.

Página donde aparece el signo igual

¿Por qué, entonces, se resistía tanto Descartes a adoptar la notación de Recorde?

Quizá el uso del signo ===== por Vieta, Girard, y De Var-Lezard para indicar la "diferencia" aritmética habría sido un argumento que actuaba en contra. Por otra parte, Descartes veía difundirse su signo ampliamente por todo el continente, a lo que contribuyeron varios factores. En primer lugar, la *Géométrie*, en la que apareció impreso por primera vez, llegó a ser reconocida como la obra de un genio, y por lo tanto llamaba poderosamente la atención de los matemáticos. En segundo lugar, en este libro, Descartes había perfeccionado la

notación exponencial $a^n$, (siendo n un entero positivo), lo que suponía un tremendo avance en el álgebra simbólica; así que lo más probable era que el símbolo de Descartes, ∞, siguiera la estela de la notación exponencial.

> *Una nueva fuente de peligros para nuestro ===== lo constituyó la aparición de otros símbolos competidores.El gran competitor del símbolo de Recorde fue el signo introducido por René Descartes en su Géométrie (Leyden, 1637).*

Como Descartes había vivido en Holanda varios años, no es de extrañar que los escritores holandeses fueran los primeros en adoptar ampliamente su nueva notación. Van Schooten utiliza el signo cartesiano en varias ocasiones. Aún más influyente fue Christiaan Huygens que lo utilizó ya en 1646 y en sus escritos posteriores. En Holanda, el símbolo fue adoptado por los más influyentes matemáticos del siglo XVII. Se abrió paso incluso en los libros de texto más elementales. Jean Prestetl lo adoptó en su *Nouveaux Élémens*, publicado en París en 1689. Este hecho es de lo más notable, ya que en 1675 había utilizado el signo =====. Parece indicar que poco después de 1675, en Francia, el signo  estaba ganando terreno al símbolo de Recorde, =====.

En 1659 el símbolo de Descartes invadió Inglaterra, apareciendo en los pasajes en latín, del *Miscellanies,* de Samuel Foster. En la versión Inglesa, sin embargo, se utiliza el signo =====. Otra publicación Londinense que emplea el signo de igualdad de Descartes es una traducción latina del álgebra del suizo Johann Alexander. Michael Rolle usa el símbolo  en su *Traité d'algebre*, de 1690, pero cambia al ===== en 1709. En Holanda, el signo de igualdad de Descartes fue adoptado en

1660 por Kinckhvysen, en 1694 por De Graaf, salvo en escritos sobre proporciones, donde utiliza el $=$. Bernard Nieuwentüt usa el símbolo de Descartes en su *Considerationes* de 1694 y 1696, pero prefiere el $=$ en el *Análisis infinitorum* de 1695. Jakob Bernoulli utiliza el carácter cartesiano, en el *Ars Conjectandi* (Basilea, 1713).

*El hecho de que tanto Newton como Leibniz empleasen el símbolo de Recorde, llevó a su adopción general, debido principalmente, según parece, a la influencia de Leibniz durante el período crítico que cierra el siglo XVII.*

En resumen, el signo de igualdad de Descartes se utiliza ampliamente en Francia y Holanda durante la última parte del siglo diecisiete y la primera parte del dieciocho, pero no logra una posición importante en otros países.

En algunos textos aparecen diversas variaciones del símbolo cartesiano, probablemente debidas a razones de imprenta. Por citar algunos ejemplos, tenemos el caso de Johaan Caramuel que en 1670 emplea el símbolo Æ, o el de Fermat, en 1679, que usa el símbolo ∞, como nuestro infinito, en su *Ad locos planos et solidos isagoge*, si bien no lo hace en el manuscrito original.

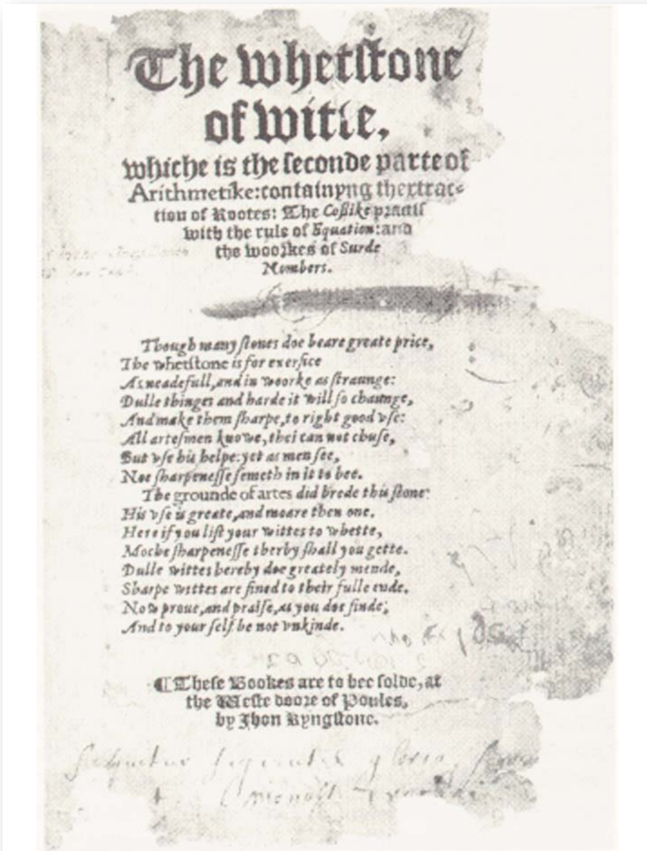
## La lucha por la supremacía

El siglo XVII, es el de la adopción casi total del símbolo $=$ de Recorde. Solo en dos libros impresos se ha encontrado el de Descartes, . Después de Harriot y Oughtred, el símbolo de Recorde fue usado por John Wallis, Isaac Barrow, e Isaac Newton. Sin duda estos grandes nombres le dieron un gran impulso al símbolo en su caminar hacia los otros países europeos.

En el continente, el signo $=$ no ofrece un avance sustancial hasta 1650 o 1660, alrededor de un siglo después de aparecer el algebra de Recorde. Cuando logró introducirse, experimentó una fuerte competencia con otros símbolos, durante medio siglo, antes de quedar plenamente establecido. El comienzo del siglo XVIII, más o menos, se puede señalar como el momento en que cesa la competencia. Descartes mismo usa el signo $=$ en una carta a Mersenne del 30 de septiembre de 1640. Los primeros libros de texto continentales en los que encontramos el uso del símbolo de Recorde son un álgebra holandesa de 1639 y un folleto de 1640, ambos de J. Stampioen, además del *Teutsche Álgebra* del suizo Johann Heinrich Rahn (1659). Rahn dice:

*Bey disem anlaasz habe ich das namhafte gleichzeichen $=$ zum ersten gebraucht, bedeutet ist gleich, 2a=4 heisset 2a ist gleich 4.*

(En esta ocasión, utilicé el mencionado signo igual $=$ por primera vez. Significa "es igual", así 2a = 4 quiere decir que "2a es igual a 4").


The whetſtone of witte,
whiche is the ſeconde parte of Arithmetike: containyng thextraction of Rootes: The Coßike practiſe, with the rule of Equation: and the woorkes of Surde Nombers.

Though many ſtones doe beare greate price,
The whetſtone is for exerſice
As neadefull, and in woorke as ſtraunge:
Dulle thinges and harde it will ſo chaunge,
And make them ſharpe, to right good vſe:
All arteſmen knowe, thei can not chuſe,
But vſe his helpe: yet as men ſee,
Noe ſharpeneſſe ſemeth in it to bee.
The grounde of artes did brede this ſtone:
His vſe is greate, and moare then one.
Here if you liſt your wittes to whette,
Moche ſharpeneſſe therby ſhall you gette.
Dulle wittes hereby doe greately mende,
Sharpe wittes are fined to their fulle ende.
Now proue, and praiſe, as you doe finde,
And to your ſelf be not vnkinde.

These Bookes are to bee ſolde, at the Weſte doore of Poules, by Jhon Kyngſtone.

Portada de *La piedra de afilar el ingenio* de Recorde

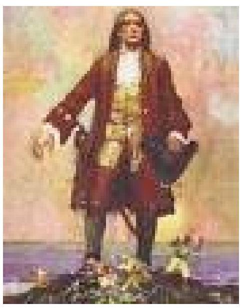
Fue usado por Bernhard Frenicle de Bessy, en los famosos cuadrados mágicos, en una carta a John Wallis del 20 de diciembre de 1661, y por Huips en el mismo año. Leibniz, que había leído el Euclid de Barrow, de 1655, adoptó el símbolo de Recorde, en su *De arte combinatoria*, de 1666, pero luego lo abandonó durante casi veinte años. El primer libro de texto conocido publicado en París que usa este signo es el de Arnauld en 1667; el primero en Leyden es el de C.F.M. Dechales, en 1674.

El signo ═══ fue usado por una importante serie de matemáticos, pero la mayoría de los escritores del siglo XVII en el continente o usa la notación de Descartes o no usa ninguna para denotar la igualdad.

Con el comienzo del siglo XVIII el signo ═══ de Recorde gana terreno rápidamente. El gran avance matemático de este tiempo fue la invención del cálculo diferencial e integral. El hecho de que tanto Newton como Leibniz empleasen el símbolo de Recorde, llevó a su adopción general, debido principalmente, según parece, a la influencia de Leibniz durante el período crítico que cierra el siglo XVII.

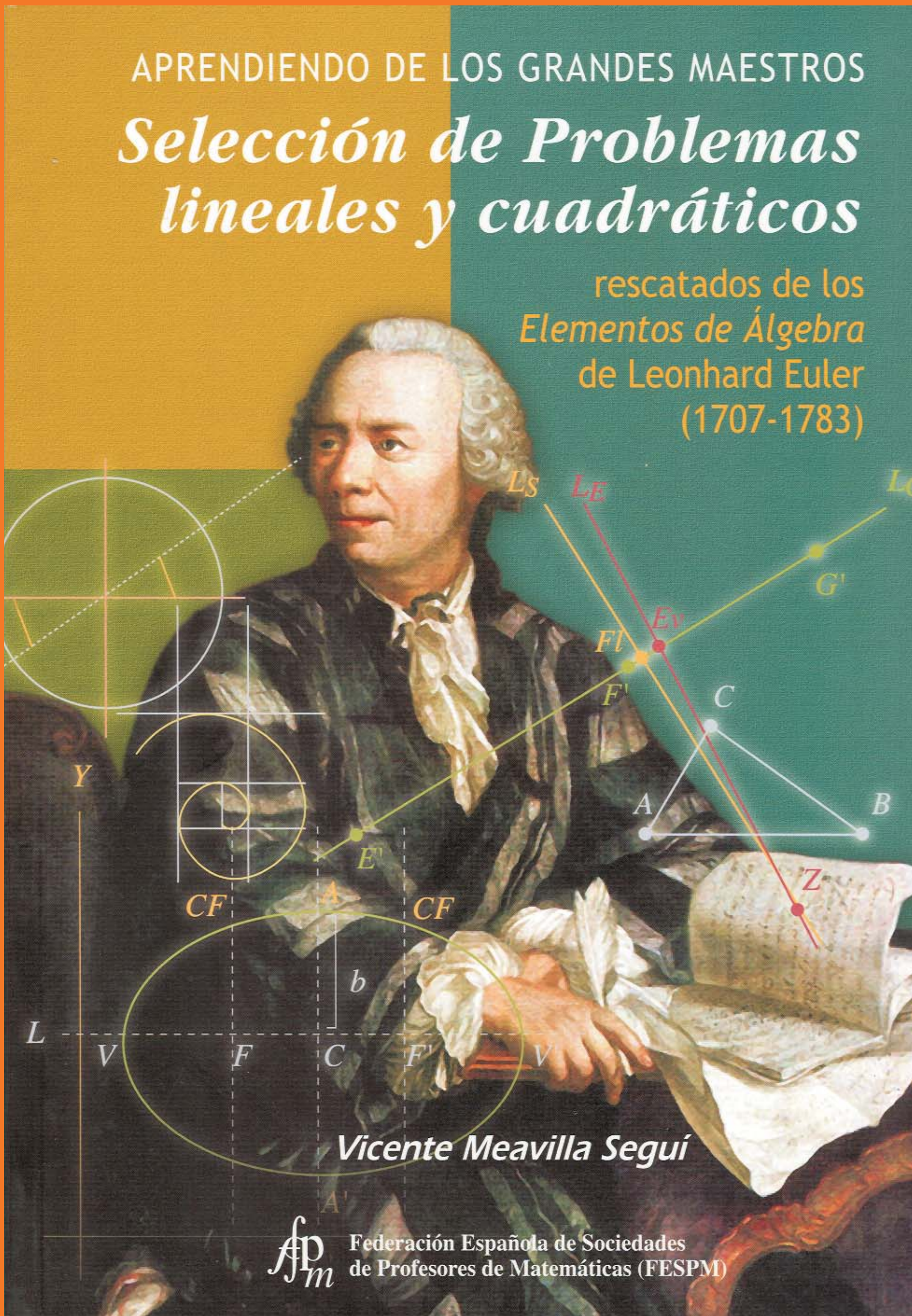
El signo de igualdad ═══ es uno de los pocos símbolos matemáticos que han contado con aprobación universal, si bien fue acortando su longitud con el uso por evidentes razones prácticas. Recorde no propuso ningún otro símbolo algebraico, pero, ya hizo bastante. Éste fue elegido de manera tan admirable que sobrevivió a todos los competidores, y constituye uno de los elementos clave del lenguaje matemático.

*HACE* ■



## REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

FLORIAN CAJORI : A History of Mathematical Notations. Dover publications. USA, 1993 (1ª ED. 1928).




Servicio de Publicaciones de la FESPM

Apartado de Correos 590
06080 Badajoz
Información y pedidos: publicafespm@wanadoo.es

**APRENDIENDO DE LOS GRANDES MAESTROS:**
**Selección de Problemas lineales y cuadráticos rescatados de los Elementos de Álgebra de Leonard Euler (1707-1783)**
**Vicente Meavilla Seguí**
*Federacion Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)*
*Badajoz, 2007*
*ISBN 978-84-934488-4-4*
*95 páginas*

suma+ 57
Febrero 2008, pp. 97-104

# En las ciudades invisibles IV y V

## diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

*–Marco: Sólo si conoces el residuo de infelicidad que ninguna piedra preciosa llegará a compensar, podrás calcular el número exacto de quilates a que debe tender el diamante final, y no errarás desde el principio los cálculos de tu proyecto.*

¿A qué recuerda ese residuo de infelicidad (imperfección, inexactitud) que jamás llega a compensar la piedra más preciosa (fórmula, igualdad) y cuyo conocimiento determina el número exacto de quilates (perfección, igualdad) a la que debe aproximarse el diamante final (sucesión, serie, límite)? Sólo conociendo bien ese residuo evitaremos errores de cálculo, errores en la igualdad.

Esta descripción podría ser una lectura poética de la fórmula de Taylor para el desarrollo de una función como serie de potencias cuyo residuo $E_n(x)$ tiende a cero a medida que $n$ tiende a infinito:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k+E_n(x)$$

Las Matemáticas rebosan de diamantes semejantes. Pero si tuviese que elegir, me quedaría con dos. Uno relaciona el número fundamental con la fracción más elemental y cuya inspiración puede situarse en la paradoja de Aquiles y la tortuga:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$$

Un caso particular de:

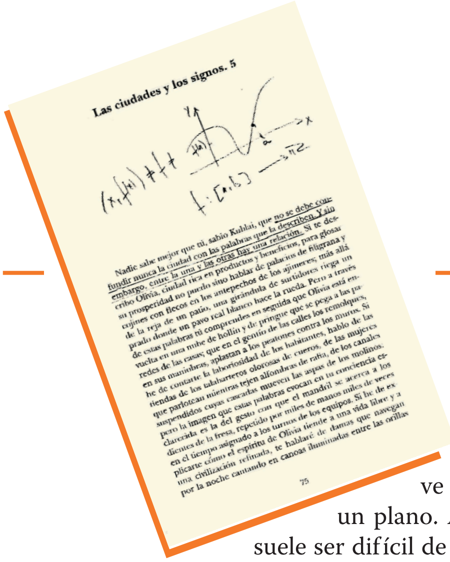
$$\forall x\in(1,+\infty):\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^k}=\frac{1}{x-1}$$

El otro diamante es la función exponencial cuya base lleva por nombre la inicial del apellido de uno de los más grandes matemáticos que haya habido jamás:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$$

Diseño y maquetación FMC

**Miquel Albertí Palmer**
*ciudadesinvisibles@revistasuma.es*



**Las ciudades y los signos. 5**

Nadie sabe mejor que tú, sabio Kublai, que no se debe confundir nunca la ciudad con las palabras que la describen. Y sin embargo, entre la una y las otras hay una relación. Si te describo Olivia, ciudad rica en productos y beneficios, para glosar su prosperidad no puedo sino hablar de palacios de filigrana y cojines con flecos en los antepechos de los ajimeces; más allá de la reja de un patio, una girándula de surtidores riega un prado donde un pavo real blanco hace la rueda. Pero a través de estas palabras tú comprendes en seguida que Olivia está envuelta en una nube de hollín y de pringue que se pega a las paredes de las casas; que en el gentío de las calles los remolques, en sus maniobras, aplastan a los peatones contra los muros. Si he de contarte la laboriosidad de los habitantes, hablo de las tiendas de los talabarteros olorosas de cueros, de las mujeres que parlotean mientras tejen alfombras de rafia, de los canales suspendidos cuyas cascadas mueven las aspas de los molinos: pero la imagen que estas palabras evocan en tu conciencia esclarecida es la del gesto con que el mandril se acerca a los dientes de la fresa, repetido por miles de manos miles de veces en el tiempo asignado a los turnos de los equipos. Si he de explicarte cómo el espíritu de Olivia tiende a una vida libre y a una civilización refinada, te hablaré de damas que navegan por la noche cantando en canoas iluminadas entre las orillas

75

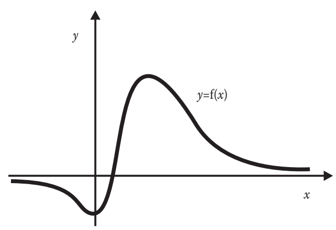
# Olivia

La ciudad no es lo que se escucha decir de ella, ni lo que se lee en una guía de viaje, ni lo que se ve en miles de fotografías, ni los trazos delineados en un plano. Algo tan fácil de admitir en el lenguaje corriente suele ser difícil de aceptar en el lenguaje técnico: una curva no es la línea trazada sobre una superficie del espacio, sino la función entre un intervalo real [a, b] y el espacio $R^3$ en el que se representará su gráfica.

*(...)no se debe confundir nunca la ciudad con las palabras que la describen.*

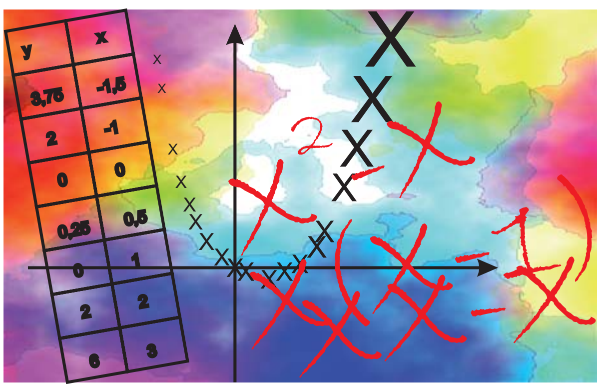
Tampoco debe confundirse una función *f* con ninguna de sus representaciones, ya se trate de una tabla de valores, de una fórmula (expresión algebraica), de una figura (representación gráfica) o de *las palabras que la describen* (expresión verbal):

$$f \neq \text{Tabla de valores } [x, y=f(x)]$$
$$f \neq \text{Graf}(f)=\{(x, y) \in R^2 \ / \ y=f(x)\}$$
$$f \neq f(x)$$



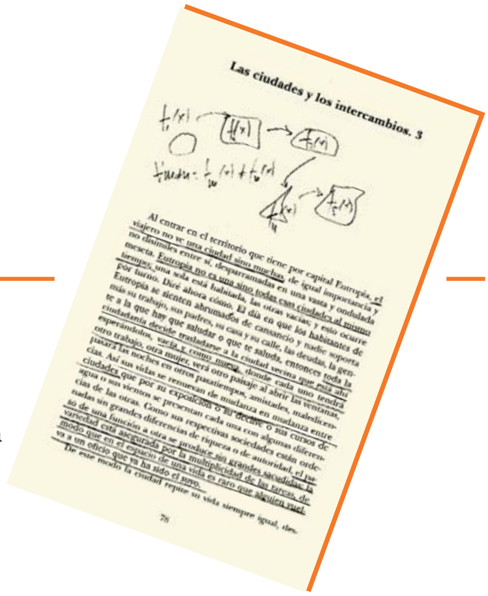

Y sin embargo, entre una y las otras hay una relación.

Evidentemente, existe una relación entre la representación y lo representado, aunque no sea del mismo carácter que el de la función generatriz de dicha representación. Ya puede una gráfica contener todos los puntos, una tabla todos los valores, y una fórmula abarcar todo el dominio. Nada de eso es la función. La función es la correspondencia que asocia un valor con otro y que se manifiesta en cada representación. Una función es invisible.




**Olivia**: *las funciones invisibles*

# Eutropia Eutropia



**Las ciudades y los intercambios. 3**

Al entrar en el territorio que tiene por capital Eutropia, el viajero no ve una ciudad sino muchas, de igual importancia y no disímiles entre sí, desparramadas en una vasta y ondulada meseta. Eutropia no es una sino todas esas ciudades al mismo tiempo; una sola está habitada, las otras vacías; y esto ocurre por turno. Diré ahora cómo. El día en que los habitantes de Eutropia se sienten abrumados de cansancio y nadie soporta más su trabajo, sus padres, su casa y su calle, las deudas, la gente a la que hay que saludar o que te saluda, entonces toda la ciudadanía decide trasladarse a la ciudad vecina que está ahí esperándolos, vacía y como nueva, donde cada uno tendrá otro trabajo, otra mujer, verá otro paisaje al abrir las ventanas, pasará las noches en otros pasatiempos, amistades, maledicencias. Así sus vidas se renuevan de mudanza en mudanza entre ciudades que por su exposición o su declive o sus cursos de agua o sus vientos se presentan cada una con algunas diferencias de las otras. Como sus respectivas sociedades están ordenadas sin grandes diferencias de riqueza o de autoridad, el paso de una función a otra se produce sin grandes sacudidas; la variedad está asegurada por la multiplicidad de las tareas, de modo que en el espacio de una vida es raro que alguien vuelva a un oficio que ya ha sido el suyo.

De este modo la ciudad repite su vida siempre igual, des-

76

*(...) el viajero no ve una ciudad sino muchas... Eutropia no es una sino todas esas ciudades al mismo tiempo (...)*

*Eutropia no es una sino todas esas ciudades* a la vez, una ciudad espacialmente desconexa.

*(...) una sola está habitada, las otras vacías; y esto ocurre por turno. (...) toda la ciudadanía decide trasladarse a la ciudad vecina que está ahí ...vacía y como nueva, donde cada uno tomará otro trabajo, otra mujer (...) sus vidas se renuevan de mudanza en mudanza (...)*

Las mudanzas establecen conexiones entre las partes desconexas de Eutropia haciendo de ella un grafo fuertemente conexo.

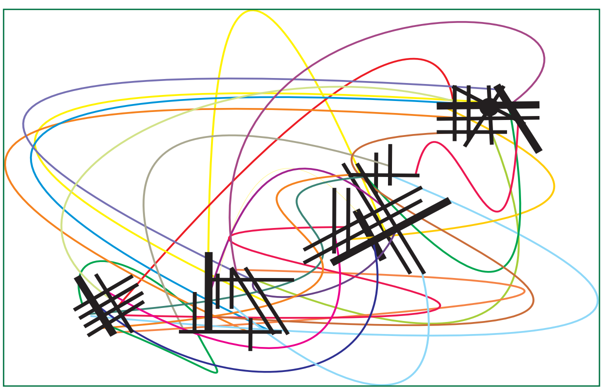
En Eutropia es raro que alguien desempeñe dos veces la misma función, que haga el mismo trabajo. A lo largo de su vida un eutropiano $x$ pasa de una tarea a otra sin repeticiones: $\forall m, n \in \mathbf{N}, m<n: f_m(x) \neq f_n(x)$.

Sea $E(t)$ la función que indica cómo es Eutropia en cada instante $t$. La ciudad permanece idéntica a sí misma si no cambia, si $E(t)$ no varía con respecto al tiempo. En tal caso la función de cambio de $E(t)$, su derivada, es nula $[E'(t) = 0]$ y la ciudad es constante: $E(t) = E(0)=E_0=\text{cte}$. Eutropia está muerta.

Pero hay otro modo de ser igual a uno mismo. Y es estar hecho de cambio. Si Eutropia vive en un cambio incesante del que ella misma indica en todo momento su medida, será idéntica a sí misma. Entonces, $E(t)=E'(t)$ y $E(t)=E_0\cdot e^t$. La ciudad cambia a un ritmo exponencial. ■

*(...) el paso de una función a otra se produce sin grandes sacudidas; la variedad está asegurada por la multiplicidad de las tareas, de modo que en el espacio de una vida es raro que alguien vuelva a un oficio que ya ha sido el suyo.*

*Sola entre todas las ciudades del imperio, Eutropia permanece idéntica a sí misma*



**Eutropia:** *desconexa como espacio, conexa como grafo.*

# diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Veamos como el término *combinaciones* cobra un sentido matemático más ajustado de lo que en principio parece.

Sea $N$ la ciudad norma y sean $\{C_i\}$ $i$=1,...,$n$ las ciudades reales que dan lugar a las excepciones o diferencias con la norma: $\{e_i=C_i-N\}$ $i$=1,...,$n$. Puesto que las ciudades excepcionales están hechas con *las combinaciones más probables*, cabe preguntarse cuáles son las combinaciones más probables de dichas excepciones. Tenemos $2^n$ modos de combinar esas $n$ excepciones disponibles y crear así ciudades con 0, 1, 2, 3, 4, 5,…, $n$ excepciones:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$$

Para $i$=0 se obtiene la ciudad sin excepciones, la ciudad norma $E_0=N$. Con $i$ excepciones pueden formarse ciudades excepcionales $E_i$:

$$\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

Si las excepciones son equiprobables, $P(e_i)=2^{-n}$. Considerando como probabilidad de que una ciudad exista la proporción entre las posibles combinaciones de las excepciones que posee y el total de ésas combinaciones, la probabilidad de que exista la ciudad $E_i$ hecha con $i$ excepciones es:

$$P(E_i)=\binom{n}{i}2^{-n}$$

Puesto que $P(N)=P(E_0)=2^{-n}$, la ciudad norma es segura ($P(N)=1$) sólo cuando no hay excepción alguna ($n$=0). Cuantas más excepciones haya ($n\to\infty$), menos probable será ($P(N)\to 0$).

¿Es cierto que la ciudad excepcional $X=E_n$ hecha con todas las excepciones es absolutamente improbable? Observemos que:

$$P(X)=P(E_n)=\binom{n}{n}2^{-n}=2^{-n}$$

Así que la ciudad excepcional $X$ es igual de probable que la ciudad norma $N$. Además, disminuir las excepciones aumenta su probabilidad: $n\to 0 \Rightarrow P(X)=P(N)=2^{-n}\to 1$.

Pero si las cosas se llevan muy lejos, como cuando $n$=0, $X$ y $N$ no sólo comparten probabilidad, sino que son idénticas: $X=E_0=N$.

*–Kublai: (...) he construido en mi mente un modelo de ciudad del cual se pueden deducir todas las ciudades posibles. Encierra todo lo que responde a la norma. Como las ciudades existentes se alejan en diferente grado de la norma, me basta prever las excepciones y calcular las combinaciones más probables.*

*–Marco: También yo he pensado en un modelo de ciudad del cual deduzco todas las otras. Es una ciudad hecha sólo de excepciones. (...) Si una ciudad así es absolutamente improbable,*

*disminuyendo el número de elementos contrarios a la norma aumentan las posibilidades de que la ciudad verdaderamente exista. Pero no puedo llevar mi operación más allá de ciertos límites: obtendría ciudades demasiado verosímiles para ser verdaderas.*

¡He aquí la paradoja expresada por Marco Polo! La reducción excesiva de excepciones produce ciudades demasiado verosímiles para ser verdaderas, demasiado probables como para existir realmente:

$P(X)=P(E0)=P(N)=1$.

Tomando como base del modelo de ciudad los múltiplos de un número, pueden trazarse modelos de ciudades diferencia. Si $C_3$ es la ciudad de los múltiplos de 3 y $C_7$ la de los múltiplos de 7, pueden formarse dos ciudades diferencia:

$C_3$

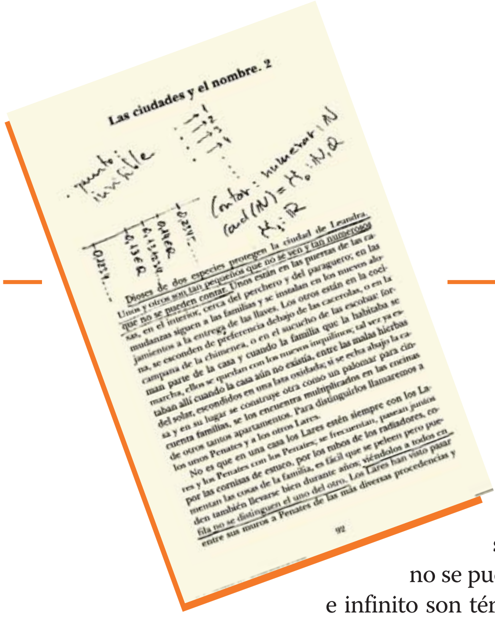
$C_7$

$C_3 - C_7$

$C_7 - C_3$

Y llegar así a diseñar un modelo matemático para la ciudad excepcional $X$ hecha sólo con diferencias. Es decir, la ciudad excepcional $X$ formada con todos los números primos.

$X=\{n\in \mathbf{N} \mid n \text{ primo}\}$



Las ciudades y el nombre. 2

· punto: invisible

Cantor: numerable: N
card (N) = $\aleph_0$: N, Q
$\aleph_1$: R

Dioses de dos especies protegen la ciudad de Leandra. Unos y otros son tan pequeños que no se ven y tan numerosos que no se pueden contar. Unos están en las puertas de las casas, en el interior, cerca del perchero y del paraguero; en las mudanzas siguen a las familias y se instalan en los nuevos alojamientos a la entrega de las llaves. Los otros están en la cocina, se esconden de preferencia debajo de las cacerolas, o en la campana de la chimenea, o en el sucucho de las escobas: forman parte de la casa y cuando la familia que la habitaba se marcha, ellos se quedan con los nuevos inquilinos; tal vez ya estaban allí cuando la casa aún no existía, entre las malas hierbas del solar, escondidos en una lata oxidada; si se echa abajo la casa y en su lugar se construye otra como un palomar para cincuenta familias, se los encuentra multiplicados en las cocinas de otros tantos apartamentos. Para distinguirlos llamaremos a los unos Penates y a los otros Lares.

No es que en una casa los Lares estén siempre con los Lares y los Penates con los Penates; se frecuentan, pasean juntos por las cornisas de estuco, por los tubos de los radiadores, comentan las cosas de la familia, es fácil que se peleen pero pueden también llevarse bien durante años; viéndolos a todos en fila no se distinguen el uno del otro. Los Lares han visto pasar entre sus muros a Penates de las más diversas procedencias y

92

# Leandra

Leandra

*Tan pequeños que no se ven...* ¿Qué es tan pequeño que no se ve? Sólo hay una cosa que siempre resultará invisible a los ojos de la más avanzada tecnología: el punto matemático. Aunque, no es por una cuestión de tamaño, sino por concepto. ¿Y qué es tan numeroso que no se puede contar? En el lenguaje cotidiano, incontable e infinito son términos usados para calificar tanto lo extraordinariamente numeroso como lo verdaderamente infinito.

*Dioses de dos especies protegen la ciudad de Lenadra. Unos y otros tan pequeños que no se ven y tan numerosos que no se pueden contar.*

En Matemáticas es distinto porque algo puede contarse si puede establecerse una correspondencia 1-1 entre sus elementos y los números naturales **N**. Y así, algo infinito numerable es el que posee el mismo cardinal que **N**: $\aleph_0$.

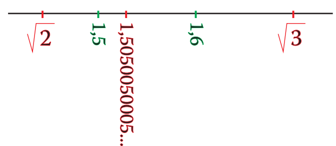
Cuando un conjunto infinito no puede contarse, es decir, no puede ponerse en correspondencia 1-1 con **N**, se dice que es no numerable. George Cantor demostró que el continuo **R**, el conjunto de los números reales, es no numerable. Su cardinal es $\aleph_1=2^{\aleph_0}$. ¿Es **R** un buen modelo de esos dioses hogareños tan numerosos que ni se ven ni se pueden contar?

Puestos en fila, los Lares y los Penates de Leandra resultan indistinguibles. Más todavía al acomodarse *codo con codo*. Algo parecido sucede con los números racionales, **Q**, y los irracionales, **R–Q,** si interpretamos que *codo con codo* se refiere al hecho de intercalarse y no al carácter consecutivo del intercalado.

*(...) Viéndolos a todos en fila no se distinguen el uno del otro... A los Penates les toca acomodarse codo con codo con los Lares...*

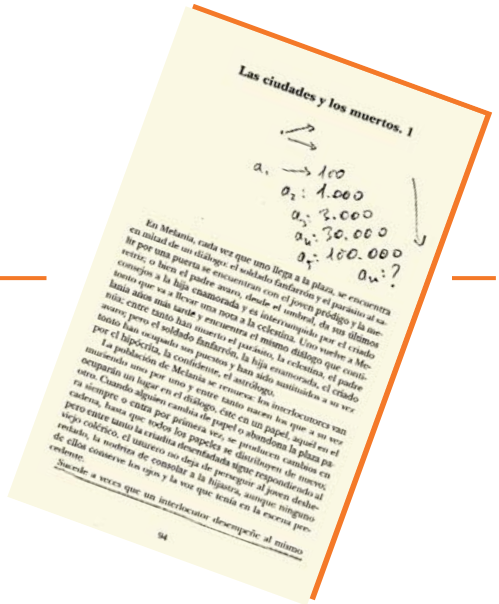
Los números racionales son numerables; los irracionales no. Dando por hecho que el que no se puedan contar se refiere al carácter infinito, un modelo que asocie Lares con **Q** y Penates con **R–Q** no parece muy desacertado. Incluso podemos representarlos mediante la estrategia usada por Cantor para demostrar lo innumerable que es **R**. En las hileras, los Lares; en las diagonales, los Penates. En la figura siguiente hay un Penate destacado en rojo.

**Leandra:** *donde los puntos son dioses.*




Entre dos irracionales hay siempre racionales, y viceversa, entre dos racionales, hay siempre irracionales.

# Melania


Las ciudades y los muertos. 1

$a_1 \longrightarrow 100$
$a_2 : 1.000$
$a_3 : 3.000$
$a_4 : 30.000$
$a_5 : 100.000$
$a_6 : ?$

En Melania, cada vez que uno llega a la plaza, se encuentra en mitad de un diálogo: el soldado fanfarrón y el parásito al salir por una puerta se encuentran con el joven pródigo y la meretriz; o bien el padre avaro, desde el umbral, da sus últimos consejos a la hija enamorada y es interrumpido por el criado tonto que va a llevar una nota a la celestina. Uno vuelve a Melania años más tarde y encuentra el mismo diálogo que continúa; entre tanto han muerto el parásito, la celestina, el padre avaro; pero el soldado fanfarrón, la hija enamorada, el criado tonto han ocupado sus puestos y han sido sustituidos a su vez por el hipócrita, la confidente, el astrólogo.

La población de Melania se renueva: los interlocutores van muriendo uno por uno y entre tanto nacen los que a su vez ocuparán un lugar en el diálogo, éste en un papel, aquél en el otro. Cuando alguien cambia de papel o abandona la plaza para siempre o entra por primera vez, se producen cambios en cadena, hasta que todos los papeles se distribuyen de nuevo; pero entre tanto la criadita desenfadada sigue respondiendo al viejo colérico, el usurero no deja de perseguir al joven desheredado, la nodriza de consolar a la hijastra, aunque ninguno de ellos conserve los ojos y la voz que tenía en la escena precedente.

Sucede a veces que un interlocutor desempeñe al mismo

94

*Sucede a veces que un interlocutor desempeñe al mismo tiempo dos o más papeles... o que un papel se desdoble, se multiplique, se atribuya a cien, a mil habitantes de Melania: tres mil para el hipócrita, treinta mil para el gorrón, cien mil hijos de reyes caídos en desgracia que esperan su reconocimiento.*

Cien, mil, tres mil, treinta mil, cien mil. ¿Adónde conduce esta sucesión numérica?

$$\begin{aligned} 100 &= 10^2 \\ 1\,000 &= 10^3 \\ 3\,000 &= 3{\cdot}10^3 \\ 30\,000 &= 3{\cdot}10^4 \\ 100\,000 &= 10^5 \end{aligned}$$

Las potencias de diez no son consecutivas. Y el 3 que las multiplica distorsiona la sucesión. ¿Forman un ritmo los exponentes 2, 3, 3, 4 y 5? ¿Y los productos por tres? La sucesión de exponentes podría ser 233455677899..., pero también podría ser 2233455667, u otra. Los triples parecen alternarse de dos en dos.

Otra opción posible es observar que cada término se multiplica alternativamente por 10 o por 3, pero falla el quinto. Debería ser 90 000, y no 100 000. Reorganizando la serie se aventura aun otra posibilidad:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 1 000 | 10 000 | 100 000 |
| 300 | 3 000 | 30 000 | 300 000 |

¿Zigzaguea Calvino entre $10^n$ y $3{\cdot}10^n$ siguiendo un patrón geométrico del que nos muestra sólo el principio? ¿Quizá éste?:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $10^2$ | $10^3$ | $10^4$ | $10^5$ | $10^6$ | $10^7$ | $10^8$ |
| $3{\cdot}10^2$ | $3{\cdot}10^3$ | $3{\cdot}10^4$ | $3{\cdot}10^5$ | $3{\cdot}10^6$ | $3{\cdot}10^7$ | $3{\cdot}10^8$ |

¿O acaso el matemático busca pautas de las que carecen el capricho y el azar? Si esa serie numérica obedece un patrón, también lo establece en los atributos que cuantifica. La pauta que se desprende de 3 000, 30 000 y 100 000 determina otra correspondiente a hipócrita, gorrón y príncipe. Ambos patrones van emparejados. Si no tiene sentido ordenar hipócritas, gorrones y príncipes, ¿qué sentido tiene ordenar 3 000, 30 000 y 100 000? ■

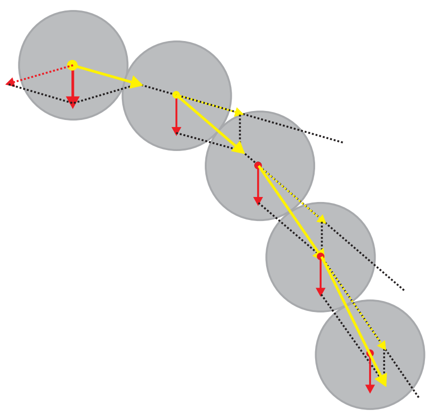
*En **Melania** el matemático busca un papel como interlocutor.*

# *diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan*

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

¿Un puente sostenido por una línea? Un puente sobre un río sostiene el camino tendido entre las dos orillas, pero ¿qué sostiene al puente? Uno diría que él mismo, el arco trazado por las piedras que lo forman. Pero esa paradoja de que algo se sostenga en aquello de lo que está hecho es desvelada también por Marco Polo. En realidad, un arco sostiene el puente, pero no es el arco visible formado por las piedras, sino el arco de la línea invisible trazado por las fuerzas de carga de esas piedras.

Esa *línea del arco que ellas forman* es la *curva de empuje*, la línea formada por las resultantes de las fuerzas de empuje y peso que cada parte del arco transmite a la inmediatamente inferior. Si la directriz del arco coincide con ella, el arco no cede, no se flexiona:



Sólo el arco catenario se sostiene a sí mismo. Gaudí hizo extenso uso de él aunando así la forma con la estructura. Pero sus obras no estaban destinadas a salvar ríos. Como puente, el arquitecto prefiere el arco parabólico. A la vista resulta prácticamente indistinguible del otro. El primero se caracteriza por soportarse a sí mismo; el segundo, por soportar lo que tiene encima. ■

*Marco Polo describe un puente, piedra por piedra.*

*– Pero ¿cuál es la piedra que sostiene el puente? –pregunta Kublai Jan.*

*– El puente no está sostenido por esta piedra o por aquélla –responde Marco–, sino por la línea del arco que ellas forman.*

*Kublai permanece silencioso, reflexionando. Después añade:*

*–¿Por qué me hablas de las piedras? Lo único que me importa es el arco.*

*Polo responde:*

*–Sin piedras no hay arco.*

suma+ 57
Febrero 2008, pp.105-109

# Ramanujan y el número π

***"Las ideas de los matemáticos como las de los pintores o los poetas deben ser bellas. La belleza es el primer requisito: no hay lugar permanente en el mundo para unas matemáticas feas"***

***G.H. Hardy***

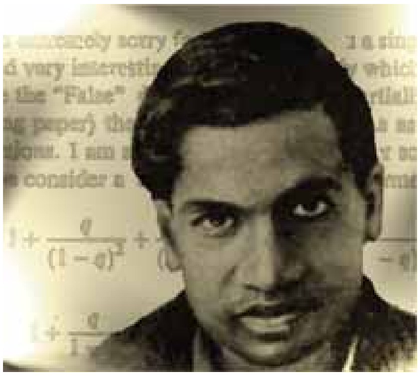
*Estimado señor:*

*Me permito presentarme a Vd. como un contable del departamento de cuentas del Port Trust Office de Madrás, con un salario de 20 libras anuales solamente. Tengo 26 años de edad. No he recibido educación universitaria, pero he seguido los cursos de la escuela ordinaria. He hecho un estudio detallado de las series divergentes en general y los resultados a los que he llegado son calificados como sorprendentes por los matemáticos locales...*

*Querría pedirle el favor de que repasara los trabajos aquí incluidos. Si usted se convence de que hay alguna cosa de valor, me gustaría publicar mis teoremas, ya que soy pobre. No he presentado los cálculos reales ni las expresiones que he adoptado, pero he indicado el proceso que sigo. Debido a mi poca experiencia tendría en gran estima cualquier consejo que usted me diera. Pido que me excuse por las molestias que ocasiono.*

*Quedo, apreciado señor, a su entera disposición.*

*S. Ramanujan*



**Antonio Pérez Sanz**
*decabeza@revistasuma.es*

Esta es la carta que el joven Srinivasa Ramanujan, un empleado de la aduana del puerto de Madrás en la India, había enviado a Hardy y que éste leyó con un cierto escepticismo el 16 de enero de 1913. Acompañando a la carta aparecían unas hojas de cuaderno en las que se apiñaban 120 extrañas fórmulas y la afirmación de haber descubierto una para obtener la cantidad de números primos menores que un número dado, con el sorprendente añadido de que esa fórmula funcionaba sin error al menos hasta 10.000.000. También había unas cuantas con desarrollos en serie sobre el número π. Tras una primera ojeada, Hardy piensa que todo aquello es obra de algún personaje estrafalario, de uno de tantos locos con ínfulas de genio y a punto estuvo de tirarla a la papelera.

Pero por la noche en compañía de su colega Littelwood, vuelven a revisar las extrañas fórmulas y llegan a la conclusión de que no se trata de la obra de un loco sino más bien de la de un extraño genio.

> *“Forzoso es que sean verdaderas, porque de no serlo, nadie habría tenido la imaginación necesaria para inventarlas”.*

Entre las más de cien fórmulas recibidas varias están relacionadas con el número π; de todas ellas Hardy sólo es capaz de reconocer una, descubierta por Bauer, en la que aparecen los cubos de fracciones formadas con los números pares e impares, y cuyos coeficientes forman una progresión aritmética de diferencia 4:

$$1-5\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^3-13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^3+\ldots=\frac{2}{\pi}$$

El resto son completamente nuevas para él y despiertan su curiosidad y la sospecha de que Ramanujan está en posesión de teoremas más generales. Hardy se apresuró a responder a la carta de quien ya consideraba un colega indio pidiéndole las demostraciones de sus fórmulas y, sobre todo, la fórmula tan ansiada desde los tiempos de Gauss acerca de la cantidad de números primos menores que un número natural dado, no dudando en escribir:

> *“Haber demostrado lo que usted afirma habría sido la empresa matemática más extraordinaria de toda la historia de las matemáticas.”*

Pero Ramanujan no envió dichas demostraciones, lo que acrecentaría aún más el interés de Hardy hacia el desconocido matemático que se consideraba a sí mismo un aficionado a las matemáticas sin una formación académica seria. De hecho, Ramanujan fue rechazado en la prueba de acceso a la Universidad.

Hardy le invitó a trasladarse a Cambridge, a lo que Ramanujan en un principio se mostró reticente. Por fin, tras la intervención de su madre y de la diosa Namagiri, de la que Ramanujan afirmaba que le dictaba sus resultados en sueños, y de una beca de 250 libras, el joven indio abandona Madrás para llegar al Trinity College en la primavera de 1913. Su estancia durante cinco años en Cambridge, hasta 1919, no fue del todo feliz. Vegetariano estricto, en un ambiente raro para él, con una comida alejada de sus gustos y costumbres, en plena guerra mundial, sin amigos salvo Hardy y Littelwood, acabó enfermando seriamente, teniendo que ser ingresado en varios sanatorios. En 1919 tras el fin de la contienda, y gravemente enfermo, decide regresar a la India. Morirá a los pocos meses. A pesar de ello, de su trabajo con Hardy nos ha dejado una increíble producción de resultados matemáticos sorprendentes en forma de “Cuadernos”. Algunos de ellos todavía están siendo estudiados.

> *Acompañando a la carta aparecían unas hojas de cuaderno en las que se apiñaban 120 extrañas fórmulas y la afirmación de haber descubierto una para obtener la cantidad de números primos menores que un número dado, con el sorprendente añadido de que esa fórmula funcionaba sin error al menos hasta 10.000.000.*

## Cautivado por π

Desde muy pequeño Ramanujan estuvo cautivado por el número π. De hecho a lo largo de su corta vida descubrió numerosas fórmulas para calcular aproximaciones de π.

Para ello, como ya venían haciendo los matemáticos desde hacía más de 300 años, utilizó series formadas por infinitos términos de estructura semejante. La más simple y conocida es ésta del inglés John Wallis, publicada en 1665 en su *Arithmetica infinitorum*.

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdot\frac{8\cdot 8}{7\cdot 9}\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$$

La serie se acerca a π pero con una lentitud desesperante. Si hiciésemos los 100 primeros productos obtendríamos un valor de π = 3,1260789... Bastante alejado del valor verdadero.

Esta otra es de apariencia más sencilla. Son fracciones cuyos denominadores son los números impares y en las que vamos alternando sumas y restas.

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

Es la serie de Gregory-Leibniz. También nos sirve para calcular aproximaciones de π. Pero tiene el mismo inconveniente: para calcular las 100 primeras cifras de π tendríamos que desarrollar más de $10^{50}$ términos de la serie.

Ramanujan descubrió series que se acercaban a π con una velocidad de vértigo. Una de ellas no deja de extrañarnos:

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9,801}\cdot\left(\frac{(4\cdot 1)!(1,103+26,390\cdot 1)}{(1!)^4\cdot 396^{4\cdot 1}}+\frac{(4\cdot 2)!(1,103+26,390\cdot 2)}{(2!)^4\cdot 396^{4\cdot 2}}+\frac{(4\cdot 3)!(1,103+26,390\cdot 3)}{(3!)^4\cdot 396^{4\cdot 3}}+...\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{8}}{9,801}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1,103+26,390\cdot n)}{(n!)^4\cdot 396^{4n}}$$

La fórmula no es nada elemental. Aunque esta otra no le va a la zaga.

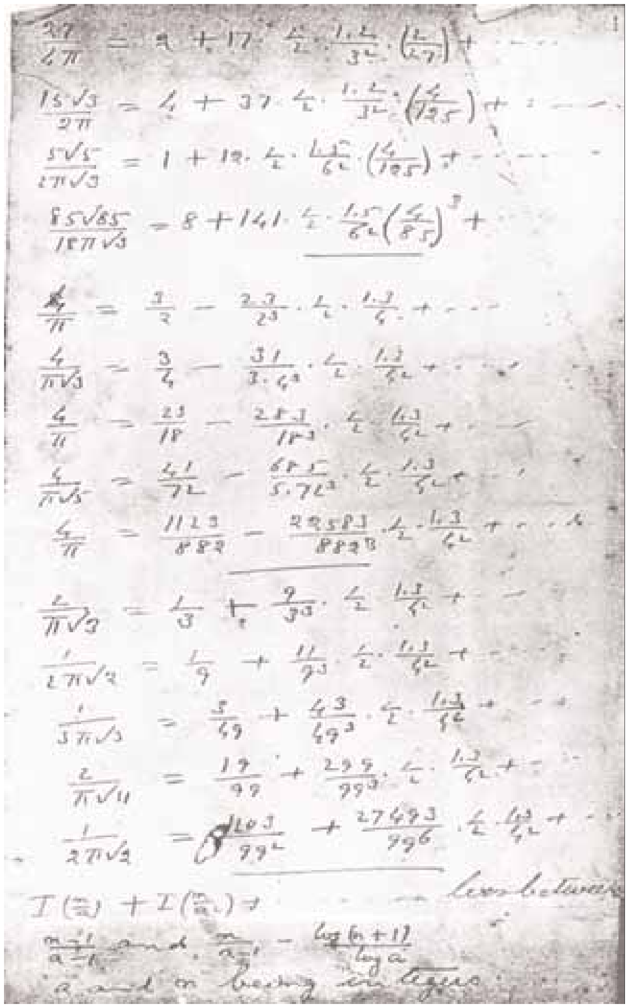
$$\frac{4}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1123+21460n)(2n-1)!!(4n-1)!!}{882^{2n+1}32^n(n!)^3}$$

Pero Ramanujan no siempre recurrió a series infinitas.

Esta simple expresión le proporcionaba 15 decimales de π:

$$\frac{355}{113}\cdot\left(1-\frac{0,0003}{3533}\right)=3.14159265358979...$$

Algunas de sus aproximaciones a π se basan en construcciones geométricas y nos permiten obtener de forma rápida π con unos cuantos decimales.



Esta constituye por sí sola un auténtico poema geométrico-aritmético

$$\pi\approx\sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}}=\sqrt[4]{81+\frac{361}{22}}=\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}=\sqrt[4]{97,409090909...}$$

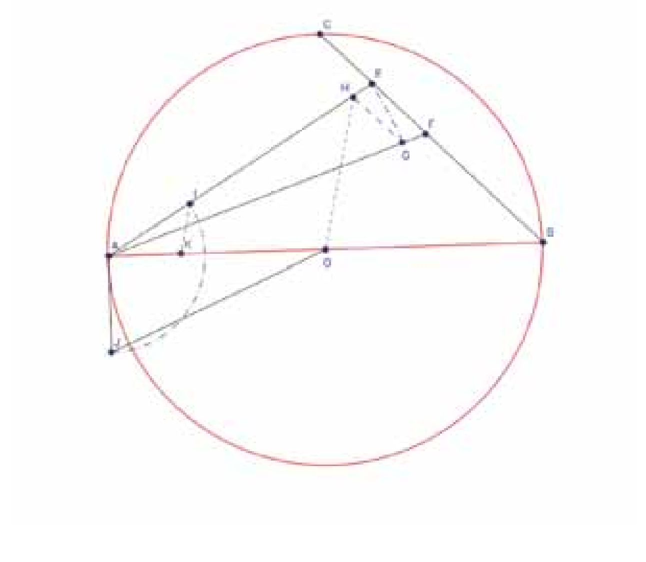
Que también se puede escribir así

$$\pi\approx\sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}}=\sqrt[4]{102-\frac{2222}{22^2}}=\sqrt[4]{97,409090909...}$$

O en forma de fracción

$$\pi \approx \sqrt[4]{97,409090909...} = \sqrt[4]{\left(97+\frac{1}{2}-\frac{1}{11}\right)} = 3,141592652...$$

Aproximación que obtuvo mediante una original y creativa construcción geométrica



• Construimos un círculo de centro O y radio la unidad. AB es su diámetro.

• C es el punto medio del arco ACB. Dividimos en tres partes iguales el radio OA para obtener el punto K, así:

$$\overline{AK} = \frac{1}{3}$$

• Trazamos el segmento CB y sobre él desde C llevamos dos veces el segmento AK para obtener los puntos E y F. Así:

$$\overline{CE} = \frac{1}{3} \quad y \quad \overline{CF} = \frac{2}{3}$$

• Trazamos los segmentos AE y AF.

• Con radio AE trazamos un arco de circunferencia hasta que corte al segmento AF. Tenemos así el punto G. Por él trazamos una paralela a BC que cortará a AE en el punto H.

• Unimos el centro O con el punto H y trazamos una paralela a OH por el punto K. Esta recta corta a AE en el punto I.

• Con radio AI trazamos un arco de circunferencia que cortará a la recta tangente a la circunferencia en el punto A en un punto J.

• Por fin trazamos el segmento OJ.

Hecha la construcción, Ramanujan afirma que la media proporcional entre OA y OJ es aproximadamente un tercio de la semicircunferencia ACB. Hagamos los cálculos:
Longitud de *ACB* = $\pi \cdot r = \pi$

$$\frac{\pi}{3} = \sqrt{\overline{OA}\cdot\overline{OJ}} = \sqrt{\overline{OA}\cdot\overline{OJ}} = \sqrt{\overline{OJ}} = \sqrt{\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{AJ}^2}} = \sqrt[4]{1+\overline{AJ}^2} \qquad \text{(i)}$$

Calculemos el valor de AJ.

AJ = AI. Los triángulos AIK y AHO son semejantes, por tanto

$$\frac{AI}{AT} = \frac{AH}{AO} \Rightarrow \frac{AJ}{\frac{1}{3}} = \frac{AH}{1}$$

por lo cual,

$$\overline{AJ} = \frac{1}{3}\overline{AH} \qquad \text{(ii)}$$

También son semejantes los triángulos AHG y AEF. Además *AE* = *AG*. Por tanto

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} \Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}$$

es decir,

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AE}^2}{\overline{AF}} \qquad \text{(iii)}$$

Calculemos AF y AE. Aplicando el teorema del coseno en el triángulo AFB tendremos:

$$\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BF}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BF}\cdot\cos 45^\circ$$

Tengamos en cuenta que:

$$\overline{BC} = \sqrt{2}, \quad \overline{AB} = 2, \quad \overline{BF} = \overline{BC} - \overline{CF} = \sqrt{2} - \frac{2}{3}$$

Es decir:

$$\overline{AF}^2 = 4+\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= 4+2+\frac{4}{9}-\frac{4\sqrt{2}}{9}-4+\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{22}{9}$$

*A lo largo de su corta vida de su mano salieron cientos de formas distintas de calcular valores aproximados de π*

Aplicamos ahora el teorema del coseno en el triángulo AEB

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BE}^2 - 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BE}\cdot\cos 45^{\circ}$$

Ahora

$$\overline{BE} = \overline{BC} - \overline{CE} = \sqrt{2}-\frac{1}{3}$$

y por tanto

$$\overline{AE}^2 = 4+\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)^2 - 2\cdot 2\cdot\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= 4+2+\frac{1}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{9}-4+\frac{2\sqrt{2}}{9}=\frac{19}{9}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión (iii) tendremos

$$\overline{AH}^2 = \left(\frac{\overline{AE}^2}{\overline{AF}}\right)^2 = \frac{\overline{AE}^4}{\overline{AF}^2} = \frac{\frac{19^2}{9^2}}{\frac{22}{9}} = \frac{19^2}{9\cdot 22}$$

y sustituyendo en (ii)

$$\overline{AJ}^2 = \left(\frac{1}{3}\overline{AH}\right)^2 = \frac{1}{9}\overline{AH}^2 = \frac{19^2}{9\cdot 9\cdot 22} = \frac{19^2}{9^2\cdot 22}$$

Sustituyendo este valor en (i) tendremos

$$\frac{\pi}{3} = \sqrt[4]{1+\overline{AJ}^2} = \sqrt[4]{1+\overline{AJ}^2} = \sqrt[4]{1+\frac{19^2}{9^2\cdot 22}} =$$
$$= \sqrt[4]{\frac{1}{9^2}\left(9^2+\frac{19^2}{22}\right)} = \frac{1}{3}\sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}}$$

Y por tanto

$$\pi \approx \sqrt[4]{9^2+\frac{19^2}{22}} = \sqrt[4]{81+\frac{361}{22}} = \sqrt[4]{\frac{2143}{22}} =$$
$$= \sqrt[4]{97,409090909...} = 3,141592652...$$

Ramanujan no encontró un par de aproximaciones a π. A lo largo de su corta vida de su mano salieron cientos de formas distintas de calcular valores aproximados de π.

Decididamente, si alguien le puede disputar al genial Arquímedes el título de padre de π, ese sería sin duda este tímido muchacho indio: Srivinasa Ramanujan.

Y todo ello... ¿DE CABEZA?

***DE CABEZA***

## REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

BORWEIN. (1995) *Grandes Matemáticos.* Investigación y Ciencia. Temas 1. Prensa Científica. Barcelona

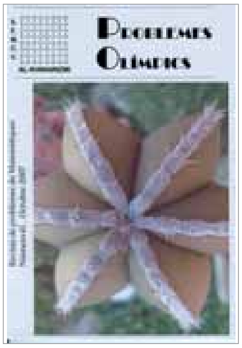
COLLANTES / PEREZ SANZ. (2007). *Matemáticos a contracorriente.* Ed. NIVOLA. Madrid. ( En prensa)

NEWMAN. (1968) *Sigma. El Mundo de las Matemáticas*. Vol. 1. Ed Grijalbo. Barcelona.

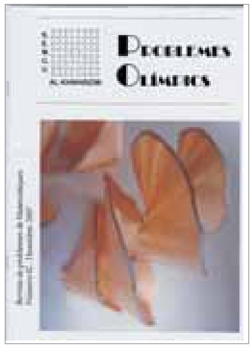
PEREZ SANZ, A. (2000) *Documental Historias de Pi.* Serie Universo Matemático. RTVE. Madrid

POSAMENTIER / LEHMANN (2006). *La proporción trascendental.* Ed Ariel Barcelona

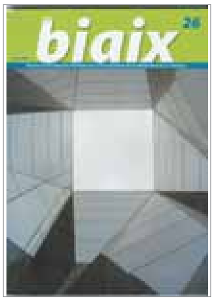
# Publicaciones recibidas



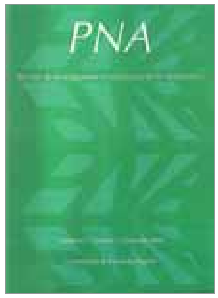

**Problemes olímpics**
*SEMCV* Al Khwarizmi
*N.º 41, Octubre 2007*
*Valencia*
*ISSN: 1578-1771*



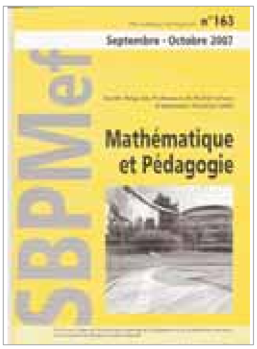

**Problemes olímpics**
*SEMCV* Al Khwarizmi
*N.º 42, Desembre 2007*
*Valencia*
*ISSN: 1578-1771*



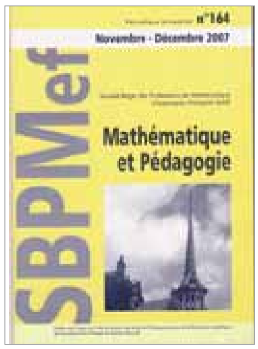

**BIAIX. Revista de la FEEMCAT**
*Núm.26, juny 2007*
*Bellaterra.*
*ISSN: 1133-4282*



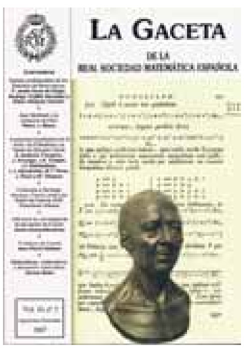

**PNA. Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas**
**Universidad de Granada**
*Vol. 2 n.º 2, enero 2008*
*ISSN 1886-1350*




**Mathématiques et Pédagogie**
**SBPMeF**
*N.º163, Septembre-Octobre 2007*
*ISSN: 0773-7378*




**Mathématiques et Pédagogie**
**SBPMeF**
*N.º164, Novembre-Decémbre 2007*
*ISSN: 0773-7378*




**a Gaceta de la RSME**
**RSME**
*MADRID*
*Vol.10, n.º 3, Septiembre-Diciembre 2007*
*ISNN 1138-8927*


**El libro español de Matemáticas**
Exposición bibliografica
***Catálogo***
*Servcio de Publicaciones,*
*Universidad de Cordoba*
*Córdoba, 2005*
*ISBN: 84-7801-781-X*

suma+ 57
Febrero 2008, pp.111-116



# Biblioteca

## Mi biblioteca particular: balance y adiós

Una revista como SUMA, de periodicidad cuatrimestral, no puede ser notaria de la actualidad palpitante en ningún campo, pero menos en el de una realidad editorial basada cada vez más en una rotación acelerada de novedades que pasan fugaces por las mesas de las librerías (las que quedan), cadenas y grandes superficies, y son reemplazadas en seguida por otras. La existencia de los últimos libros aparecidos se documenta en periódicos y revistas o por medio de los portales de Internet (papel que en nuestro caso lo cumplen, por ejemplo, divulgamat o matematicalia).

Los libros siguen siendo fundamentales por ahora (yo deseo que por bastante tiempo aunque mi esperanza al respecto no esté muy firme teniendo en cuenta la velocidad de evolución de la web) para conformar una opinión fundada sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje. Y aunque el paso de los libros de matemáticas sea un poco menos fugaz que en otros géneros bibliográficos, también les ha llegado su turno.

Por todo eso consideré en la remodelación de la sección (que comenzó en el número 50, de noviembre de 2005) que había que reconducir el camino de la sección de bibliografía de SUMA para poder traer al escaparate libros con los que no era fácil que nos topáramos al entrar en una librería ni en una lista de novedades, pero que sin embargo tenían cosas que aportar o que, al menos, habían sido importantes para algunos profesionales de la enseñanza de las matemáticas. Dicen algunos teóricos del marketing bibliográfico que las dos formas fundamentales de vender libros es por presión (a base de campañas masivas de publicidad) o por recomendación (lo que pasa por ejemplo con todos los libros de texto en los diferentes niveles). Yo pienso que también está el boca a boca o la recomendación no cautiva (la del colega, el amigo o el disertador), que muchas veces nos acercan auténticas perlas que de otra forma no hubiéramos tenido la posibilidad de saborear.

*Los libros siguen siendo fundamentales por ahora para conformar una opinión fundada sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.*

**Fernando Corbalán (coordinador de la sección)**
*biblioteca@revistasuma.es*

Mi apuesta fue porque colegas destacados, formados y brillantes, con perspectivas diferentes pusieran a nuestro alcance una muestra de esos libros que les habían dejado huella. Porque tal vez podrían dejarla en nosotros. Si hay clásicos (antiguos y modernos) en todas las ramas del conocimiento, con más razón tiene que haberlos en matemáticas (una ciencia más 'estable', con resultados imperecederos). Y es fácil que además duren más que en otras disciplinas. Solo es cuestión de ponerlos en el candelero, darles audiencia para que puedan continuar influyendo en nuevos lectores.

Y ya que se les pedía sus lecturas matemáticas favoritas, pensé que era interesante ampliar el campo de visión y preguntar también por otros elementos culturales (para poner en valor el hecho de que las matemáticas son parte sustancial de la cultura y que a los profesores de matemáticas no solo nos interesan las matemáticas) y en particular pensamientos o frases que les hubieran llegado de forma especial.

*...las matemáticas son parte sustancial de la cultura y que a los profesores de matemáticas no solo nos interesan las matemáticas...*

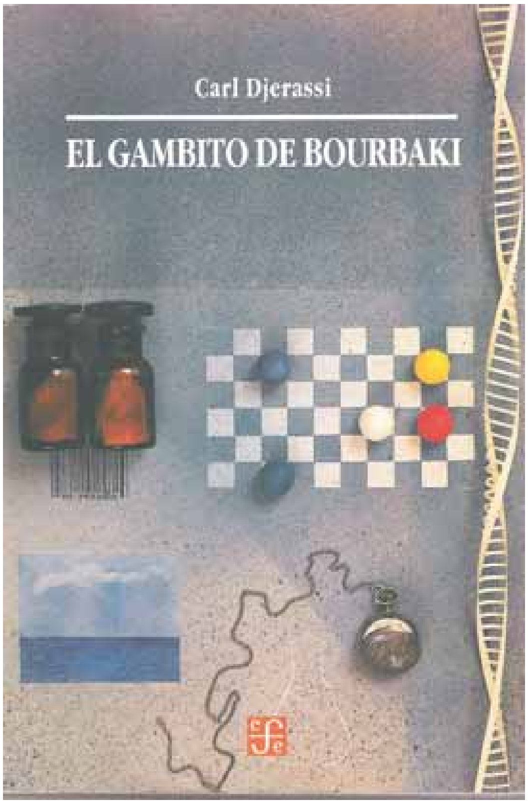
Y lo cierto es que pasados siete números de SUMA (casi tres años desde el tiempo en que cavilé todo lo anterior) lo sigo pensando, aunque ahora ya no sea una cuestión en la que yo tenga relevancia, sino algo que depende del nuevo encargado de la sección y de los nuevos directores de la revista. Porque lo cierto es que este es el último número de SUMA en el que yo soy el responsable de la sección de libros: por medio de este artículo me despido de la misma. Y en serio porque ya hice otra despedida de la revista (de la sección de 'Mates y medios') que resultó fallida porque me reenganché en esta.

Solo me queda antes de hacer mutis por el foro esbozar un pequeño balance de lo que han supuesto estas entregas de la sección. Y como no creo que sean tantas ni cuestión de un estudio sesudo, solo quiero decir que a mí, como lector, me ha supuesto el descubrimiento de algunos libros que no conocía (como el de Bergamini al que se refería Santiago Fernández en el número 54, con el añadido de que ahora se puede descargar de Internet) o que había leído por arriba hacía tiempo (como 'De letras y números' de F. Mellizo al que hacía referencia Antonio Pérez en el 51). Y sobre todo el volver a mirar muchos libros que uno tiene escondidos entre otros, que leyó en su día incluso con atención, y que la mención actual hace volver a releer con otra perspectiva (y aquí no señalo ninguno porque son casi todos los que han ido apareciendo en la sección). Pero además creo que es importante (al menos para un lector impenitente como quien escribe) que también me ha dado la sección recomendaciones de libros alejados de las matemáticas que me han proporcionado un inmenso placer.

Por último, aunque en absoluto lo menos importante, esta sección creo que me ha permitido conocer mejor a las personas (colegas y amigos) que han escrito las diferentes entregas y sentirme más próximo, más ligado a ellas. Y espero que hayan contribuido a humanizar para quien no los conociera personalmente a seres humanos de los que seguro que conocían el nombre como firma de libros o artículos. Porque con su 'bibliografía particular', cada uno de los firmantes dejaba bastante de su biografía personal.

Decir también que yo quedo contento de mi labor al frente de la sección de libros de SUMA (cada uno de vosotros es libre de opinar sobre ella), porque me ha permitido relacionarme de forma más profunda con uno de los objetos que más placeres me han proporcionado, de forma tal que difícilmente los puedo mirar con distancia. Tengo con ellos una relación apasionada, que espero que se note, y que desearía, al menos en alguna medida, haber transmitido. Paso a un segundo plano en el que echaré las manos que se me soliciten, y desde donde espero seguir disfrutando de mi historia de amor con los libros. Hasta siempre.

# Escaparate 1: En campo ajeno




**EL GAMBITO DE BOURBAKI**
**Carl Djerassi**
*Fondo de Cultura Económica, México, 1996*
*ISBN: 0-8203-1652-0*
*240 páginas*

Existe toda una serie de estereotipos sociales sobre la ciencia y los científicos, que incluyen el altruismo en la transmisión del conocimiento obtenido en el batallar por los descubrimientos ('por el bien de la humanidad', por supuesto), el reconocimiento del talento esté donde esté (sin distinción de sexo o nacionalidad) y el paso libre al empuje de la juventud (porque la ciencia requiere creatividad, que se va perdiendo con los años). La vida diaria en los centros universitarios y/o de investigación pone en cuestión no pocos de esos valores, junto con otros conexos.

'El gambito de Bourbaki', de Carl Djerassi, se refiere directamente a las matemáticas solo en el título y en el hecho de que Bourbaki sea el nombre de un 'matemático colectivo' de gran influencia en la historia de las matemáticas, pero aborda cuestiones fundamentales de la investigación científica y de las relaciones de los científicos entre sí y con la sociedad, que son aplicables en buena medida también a los investigadores en matemáticas.

Pero de todo esto no habla en un ensayo más o menos sesudo sino en una novela con personajes creíbles, con una trama que se sigue con gran interés y trufada de informaciones significativas y reflexiones pertinentes, sobre situaciones y ambientes conocidos y vividos en primera persona. Porque el autor (hasta donde tengo conocimiento no editado en España) es un destacado biólogo ya veterano de reconocido prestigio mundial, sintetizador del primer anticonceptivo oral, con destacados galardones entre los que se encuentra el

**Fernando Corbalán**
*biblioteca@revistasuma.es*

Premio Nacional de Ciencias de Estados Unidos y más de una decena de doctorados 'honoris causa'. Por tanto cuando habla del ambiente científico lo hace con el conocimiento de causa que da el pertenecer a él y conocerlo desde la primera fila.

No voy a referirme en detalle a la trama, pero sí alguno de los temas que se abordan en ella. Por una parte está la prioridad en los descubrimientos importantes, algo que en nuestro ámbito se conoce bien: sólo hace falta pensar en la literatura –y hasta cine, con la reciente película española 'La habitación de Fermat' para ejemplificarlo- que la demostración de la conjetura de Goldbach ha generado. También la dialéctica entre el trabajo individual y el que se desarrolla en equipo, con la asignación de los logros que se obtienen. Y el papel que juegan los investigadores con una edad avanzada, que tienen todas las palancas del poder en sus manos, al tiempo que inexorablemente van decayendo sus capacidades. Sin olvidar el papel de las mujeres en un mundo en que lo masculino, a pesar de que las cosas se 'mueven', sigue siendo dominante. Por cierto, que en el libro, al hilo de la trama, hay mucha información sobre Bourbaki, entre la que entresacamos

*se aborda el etnocentrismo de los científicos, mayoritariamente blancos y con usos sociales de universidades occidentales, con las dificultades de inserción de las otras culturas.*

> *"¿Sabes que [Bourbaki] nunca incluyeron una mujer? Cuando buscaban nuevos miembros, invitaban a los posibles candidatos –'courbail' los llamaban- a una sesión para examinarlos. Encontré que, en los setenta, dos de esos conejillos de Indias fueron mujeres, pero nada resultó de ello".*

Asimismo se aborda el etnocentrismo de los científicos, mayoritariamente blancos y con usos sociales de universidades occidentales, con las dificultades de inserción de las otras culturas. Y el dinero, el poder, la fama,... Como se ve todos los elementos que conforman la realidad social del colectivo de científicos, con comportamientos no muy diferentes de los de cualquier otra casta humana.

Para acabar, junto con la recomendación de su lectura, añadir que este libro es parte de una tetralogía sobre temas relacionados con lo que podríamos llamar la sociología de la ciencia, de la que solo conozco este volumen, pero que espero ampliar cuando los imponderables de la distribución bibliográfica me lo permitan. ■

# Escaparate 2:
# Las funciones. Un paseo por su historia.


**LAS FUNCIONES. UN PASEO POR SU HISTORIA**
**Carlos Sánchez Fernández.**
**Concepción Valdés Castro**
Editorial: **Nivola**
ISBN: 978-84-96566-57-6
172 páginas

Comenzamos señalando que el libro está dividido en dos partes, tomando como momento final de la primera e inicio de la segunda la aparición del Cálculo Infinitesimal, fecha que fijan en 1620. La primera parte se inicia con las culturas prehelénicas y se cierra con la aparición del Cálculo, y la segunda llega hasta nuestros días con los fractales y distribuciones. Cada una de las dos partes se divide, a su vez, en cinco capítulos. Los cinco primeros son de periodos de tiempo muy amplios y los últimos abarcan periodos de un siglo más o menos regulares. Ambas partes, como los autores señalan en la introducción, se pueden leer independientemente.

Los inicios de la idea de función los sitúan en los datos relacionados mediante tablas que ya era usados por la culturas prehelénicas pues, como señalan, entender estas tablas es entender las relaciones funcionales que puedan existir entre los números que aparecen. Cuando aparece la cultura helénica, se producen cambios en los contenidos de estudio derivando hacia un mayor papel de la Geometría. El tomar esta dirección parece indicar un alejamiento de la aparición de las funciones, sin embargo, esto no va a ser así. Aunque los problemas geométricos tratan de ser resueltos mediante la regla y el compás, la aparición de las magnitudes inconmensurables y lo que hoy llamamos problemas clásicos (cuadratura del círculo, trisección y duplicación del cubo) junto con los esfuerzos para resolverlos, trajo consigo la creación de diferentes curvas. Entre ellas se destaca la *trisectriz*, y su futuro uso para cuadrar el círculo (*cuadratiz)*. Aquí es donde se explica como, aunque no se cita el término función, si se habla de relación entre magnitudes geométricas variables.

El siguiente paso es mostrarnos la matemática árabe y su gran personaje de la matemática, *Al-Khwarizmi* (siglos VIII-IX). Como sabemos, *Al-Khwarizmi* dominó distintos ámbitos de las Matemáticas pero, los autores, se centran en sus estudios

**Fernando Fouz Rodriguez**
*Asesor de Matemáticas del Berritzegune de Donostia*

de ángulos y las tablas de valores de relaciones trigonométricas. Pero en la aparición del concepto de función no se producen avances. Cuando la influencia árabe desaparece, surge el papel de Europa con su Renacimiento. Las universidades, fundadas en los siglos anteriores, recuperaron la figura de Aristóteles y su obra. En particular, la Física con el estudio de la naturaleza del infinito y la divisibilidad de las cantidades continuas. Se estudia el movimiento y el cambio y se establece, expresado con palabras, no algebraicamente como ahora lo conocemos, la relación entre el espacio y el tiempo en el movimiento uniforme.

De ese trabajo aparecen continuadores que van formulando nuevas ideas que ayudarán a la creación de la idea de función. Oresme, Galileo (estudio de la Cinemática), Torricelli, Napier son las figuras de las que nos presentan sus aportaciones. Esta última parte del primer periodo que fijan los autores, se cierra con la segunda mitad del siglo XVI y primera del XVII y, en este momento, es cuando emergen los grandes matemáticos franceses: Viète, Descartes y Fermat. Su aportación, desde la creación de la *Geometría Analítica*, es fundamental para todo lo que va venir luego.

*el libro se puede considerar como un recorrido histórico a través del desarrollo del concepto de función*

A partir de este momento se entra en la segunda parte del libro, que se inicia con la aparición del Cálculo, lo cual significa hablar de Newton y Leibniz. La herramienta que crean los dos es, sin duda, la mayor aportación matemática de la historia. El gran salto ya está dado y, a partir de entonces, el progreso se hará más rápido. Efectivamente, en el siglo siguiente, va a aparecer la figura del matemático más prolífico de la historia, Euler, al que le había precedido una familia de matemáticos suizos realmente sorprendente: los Bernoulli (Johann y Jacob, especialmente). Se señala en el libro cómo aparecen funciones nuevas (las trascendentes) que ayudan a resolver problemas relacionados con la Física (cicloide, catenaria, lemniscata, ...). Pero es Euler quien lleva más allá la idea de función, dándole la posibilidad de estudiarlas como entes matemáticos propios pues hasta ese momento eran consideradas como herramientas de resolver problemas, generalmente relacionados con la Física. Clasifica las funciones según criterios (algebraicas y trascendentes, explícitas e implícitas, etc) e introduce el término de *expresión analítica.*

El final del siglo XVIII fue importante por el desarrollo de la Física, especialmente la Mecánica y Fluidos, que trajo “nuevas necesidades matemáticas”. En este apartado aparecen las figuras de Daniel Bernoulli, D’Alambert, Lagrange y Fourier. Cada uno de ellos es perfectamente retratado en su aportación al desarrollo de nuevas funciones y desarrollos en series trigonométricas. El siglo siguiente es la búsqueda de la fundamentación del análisis matemático y dentro de ella el concepto de *continuidad* es el primero a precisar. Se señala que, aunque su obra nos es conocida hasta 1930, es Bolzano quien da la primera definición, siendo, sin embargo, otros grandes matemáticos los que van a aparecer en este proceso de formalización: Cauchy, Abel, Dirichlet, Riemann, Darboux, Weierstrass. Se fijan las relaciones entre derivabilidad y continuidad. A modo de ejemplo se cita la famosa función de Weierstrass:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

que, siendo continua, no tiene derivada en ningún punto. También se trata de la aparición de funciones extrañas (trabajos de Koch), a las que incluso se llama funciones monstruosas, y son muchas veces rechazadas por grandes matemáticos (Hermite, Poincaré). Pero algunos de estos “monstruos” son el anticipo de una geometría de gran proyección en nuestros días: la Geometría Fractal.

El último capítulo, que finaliza en 1970, trata de explicar, en palabras de los autores, lo que en el siglo XX aporta la idea de representación analítica y las nuevas definiciones de función entre conjuntos arbitrarios, no necesariamente numéricos. Los matemáticos que contribuyen a este proceso son figuras de la talla de Borel, Baire, Lebesgue, Luzin, Dedekind o Peano, en la primera parte del siglo y, Kolmogórov, Sobolev y Schwartz en la segunda.

En resumen el libro se puede considerar como un recorrido histórico a través del desarrollo del concepto de función tomando como punto referencial la aparición del Cálculo. Está hecho sin grandes profundizaciones teóricas, algo de agradecer en obras que buscan el acercamiento y divulgación de la Matemática, lo que lógicamente ayuda a su lectura. La conclusión es que estamos ante un buen libro, fácil de leer y entender, que cumple perfectamente su objetivo de introducirnos en el proceso histórico de la aparición, desarrollo y formalización del concepto de función, haciendo especial hincapié en los matemáticos que la desarrollaron. Y como no puede ser de otra forma, con especial énfasis en la figura de Euler, a quien dedican el libro utilizando, como presentación, la definición que Euler dio de función

Como nota final, señalar que los autores (con otros libros de historia de las matemáticas publicados en la misma editorial) se formaron como matemáticos en la escuela de Kolmogórov en Moscú y que fue éste quien presidió el tribunal ante el que presentaron sus tesis doctorales, lo cual, indudablemente, es una buena referencia de su trabajo. .

suma+ 57
Febrero 2008, pp.117-122

# El hilo de Ariadna

Foto: *Pilar Moreno*

Esta sección, *El hilo de Ariadna*, nace de la confrontación entre la **necesidad de buscar** el camino con la **imposibilidad de encontrarlo.**

## LA IMPOSIBILIDAD

Como dice el poeta:

*“Caminante, no hay camino,*
*se hace camino al andar.*
*Al andar se hace camino*
*y al volver la vista atrás*
*se ve la senda que nunca*
*se ha de volver a pisar.”*

Antonio Machado

### *Caminante*

El caminante, en el poema de Machado es el ser humano que transita el laberinto de su vida buscando caminos

### *No hay camino*

Caminos que no existen. El camino, EL MÉTODO, para resolver con éxito cualquier problema no existe.

Las recientes investigaciones en neurofisiología nos dicen que el cerebro, cuando empieza a resolver un problema, entra en estado caótico.

Una cosa es el análisis del proceso de la resolución de problemas y otra muy distinta el propio proceso.

**Xaro Nomdedeu Moreno**
*ariadna@revistasuma.es*

### *Se hace camino al andar*

El análisis de los procesos y su consiguiente disección en componentes, desvía la mirada del proceso mismo, impide la visión de la totalidad. El todo no es la suma de sus partes, ni cuantitativa ni cualitativamente.

La magdalena de Proust no es la receta dividida en ingredientes y modo de hacerlo. Ni llega a serlo si le añadimos los aromas y los recuerdos.

A resolver problemas se aprende resolviendo problemas, como a vivir se aprende viviendo, tal como nos dice la metáfora del poeta.

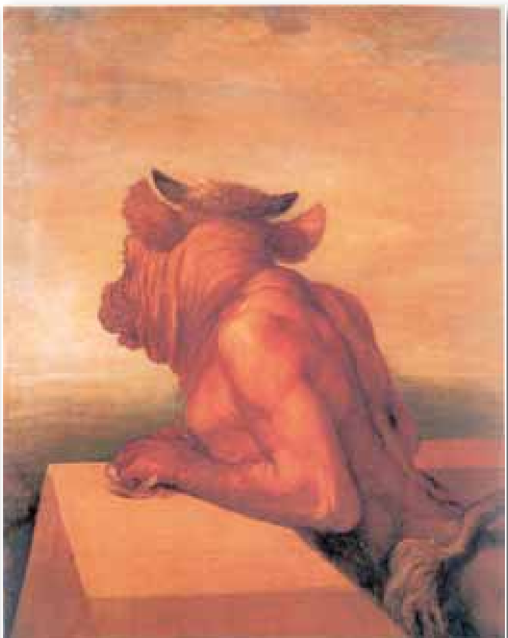
### *Y al volver la vista atrás*

Los análisis, bien sean sobre el proceso de resolución de problemas, sobre la existencia humana o sobre la sintaxis gramatical, ayudan a comprender los procesos, son interesantes como elementos de reflexión, pero no son métodos apropiados para el aprendizaje, porque no pueden sustituir la práctica de los procesos que analizan.

### *Se ve la senda que nunca se ha de volver a pisar*

La magdalena, la vida, el problema, el monstruo, el minotauro, son únicos.

Teseo, una vez muerto el minotauro y con el hilo de Ariadna en su mano, ya no se siente ni en peligro ni perdido, el laberinto es ya, para él, una senda conocida, ya no es un laberinto.



George F. Wats: *Minotauros*

## LA NECESIDAD

La necesidad de encontrar el método es el tema central del mito de Ariadna.

### *El mito*

Ariadna era la hija de Minos, rey de Creta, y Teseo el héroe ateniense que mató a Asterión, el Minotauro. Dédalo fue el constructor del laberinto en cuyo interior moraba el toro monstruoso, el hermano o alter ego de Ariadna. Teseo destruyó al monstruo, eliminó la amenaza que pesaba sobre las y los jóvenes atenienses, que eran condenados a vagar por el laberinto hasta caer víctimas del Toro de Minos.

Ariadna, enamorada, le dio a Teseo un ovillo de hilo y sujetó uno de sus cabos. Mientras Teseo se internaba en el laberinto para matar a Asterión, el ovillo se desenrollaba. Después, enrollando el hilo, Teseo encontró la salida.

> *A resolver problemas se aprende resolviendo problemas como a vivir se aprende viviendo.*

Más tarde, el héroe abandonó a su libertadora, que pronto se desposó con el dios Baco o Liber, quien le dio su nombre y le regaló una corona de estrellas: la Corona Boreal.

El deseo de disponer de un hilo que nos guíe, como guió a Teseo, ha hecho que el mito perviva en forma de metáforas y símbolos que son la sal y la pimienta de los poemas y los cuentos.

### *Las metáforas y los símbolos*

Metafóricamente, se denomina "*el hilo de Ariadna*" a la pista o, mejor, al indicio o indicios que llevan a dar con la pista verdadera para resolver un asunto complicado…
*Dédalo* ha quedado como sinónimo de "complicación", "dificultad" u "obstáculo" insuperables" (Vega, 1952)

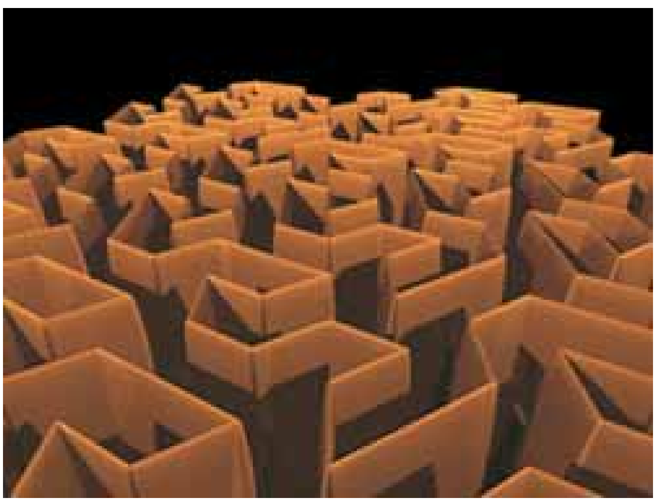
Cuando los mitos se convierten en cuentos, los monstruos, los problemas, el minotauro se convierten en brujas, ogros, dragones y gigantes malvados; los atascos, los bloqueos, las desgracias, las dificultades toman la forma de hechizos maléficos;

el hilo de Ariadna se convertirá en elemento auxiliar mágico *Ariadna-Arihagne-Aracné es* la araña que con su hilo teje el laberinto de la vida, como Penélope y Láquesis. Éstas, con Cloto la hilandera y Atropo que corta el hilo vital, forman las tres partes del camino: nacimiento, vida y muerte. Son las Parcas. En Roma estaban representadas por tres estatuas, llamadas Tria Fata, que pasaron a estatus de Hadas en los cuentos tradicionales, muy en particular en el cuento de todos los cuentos: *La bella durmiente.*

Foto: *Pilar Moreno*

En los cuentos, el papel de Ariadna pasó al hada buena, la que libera de los maleficios, la que ayuda a salir de los problemas, la que acompaña en el viaje, la que, con su varita mágica, realiza el milagro. Ariadna posee el hilo, el método para alcanzar la idea feliz, el ¡eureka! o el ¡ajá!

Ariadna es EL CAMINO, pero... ¡las hadas no existen!



## UN PROBLEMA ES UN LABERINTO

### Los Problemas Como Laberintos

Hoy, cuando la vida virtual nos tiene atrapados o navegando en el caos laberíntico de la telaraña mundial, sentimos que no perder el hilo es más necesario que nunca, porque, cada problema es un laberinto, con su entrada; sus calles; sus plazas, como bellos oasis, donde todavía no hemos vencido al minotauro pero donde podemos encontrar agua fresca y alimento con el que reponer fuerzas y continuar el camino; sus callejones sin salida, que nos obligan a decidir si retrocedemos o nos quedamos ahí disfrutando de ese recorrido; sus cruces y bifurcaciones, en las que hay que tomar una decisión sobre qué calle tomar. Tal vez acertemos el camino de salida, si existe; tal vez exista y no lo encontremos. Tal vez descubramos la forma más eficaz de salir. En cualquier caso, el camino recorrido formará parte de nuestra experiencia.

Todo lo dicho hasta aquí, es válido para una clase particular de problemas: los problemas de matemáticas, siempre que queramos entrar en ellos. Polya lo veía así:

> *"Los problemas que ponen en juego varias incógnitas, varias investigaciones y varias condiciones entreveradas, son a menudo verdaderos laberintos; los crucigramas, la construcción de figuras geométricas complejas proporcionan buenas ilustraciones. En la resolución de estos problemas, se presenta una elección en cada etapa."*

Existe gran cantidad de literatura sobre la didáctica de la resolución de problemas. Las mejores aportaciones, a grandes rasgos, coinciden en lo fundamental: Pappo, Descartes, Polya, Burton, Schoenfeld, Guzmán, Grupo Cero, etc.

Todos ellos dedicaron mucha energía al análisis, pero nunca se despistaron de la máxima básica mencionada más arriba: "a resolver problemas se aprende, resolviendo problemas".

Dice el TAO, que se traduce como *el camino, la vía, el método, la dirección* o *el curso*: "el Tao que puede nombrarse no es el Tao".

Sinograma del Tao

Por otra parte, lo que importa mientras se aprende a resolver problemas, es más ese camino único e irrepetible seguido por quien aprende, que el resultado, o resultados del problema mismo. Camino difícil de evaluar en pruebas escritas, en contextos hostiles y con tiempos limitados.

Llevamos largo trecho hablando del procedimiento de resolución de problemas, aceptando tácitamente que estamos de acuerdo en la convención que existe tras ese término, pero, ¿lo estamos?, ¿qué significa resolver un problema?, ¿qué es un problema?, ¿lo que es un problema para unos lo es también para el resto?
Un ejemplo:

Sabemos que Diofanto revolucionó las matemáticas a raíz, entre otras, de una de sus decisiones más conocidas, una decisión política, no matemática. Los problemas, hasta entonces, solían venir enunciados como historietas míticas, con lo que introducían contextos paganos que, a Diofanto, cristiano devoto, le molestaban. Decidió eliminar esos contextos y, de ese proceso de abstracción en que se metió, surgió el álgebra sincopada, tan fructífera.

Una de esas historietas, la de *las manzanas robadas*, es uno de los epigramas, el tercero, de la Antología Palatina. Como es de suponer, es una historieta anterior a Diofanto, lo que deja claro que se proponía con la intención inevitable de que se resolviera sin el auxilio de álgebra simbólica alguna.

¿Podéis enfrentaros a esta resolución con la misma tranquilidad mecánica que lo haríais de poder utilizar el aparato algebraico?

*Así se dirigió Cipria a Eros cabizbajo:*
*"¿Qué dolor, hijo mío, te aqueja? Y él le respondió:*
*"Las Musas de Pieria me robaron y se repartieron,*
*Unas manzanas del Helicón que llevaba yo en mi seno*
*Clio tomó la quinta parte; la doceava,*
*Euterpe; la octava le tocó en suerte a la divina Talía;*
*Melpómene se llevó la veinteava; Terpsícore*
*La cuarta; Erato, del total un séptimo;*
*Polimnia me despojó de treinta manzanas;*
*Urania, de ciento veinte; y Calíope se marchó arrebatándome trescientas.*
*Vengo a ti, pues, con las manos más ligeras,*
*Con estas cincuenta manzanas que las diosas me dejaron"*

*¿qué significa resolver un problema?, ¿qué es un problema?, ¿lo que es un problema para unos lo es también para el resto?*

¿Y la solución?, ¿es la solución un concepto claro?

El siguiente enunciado es una buena herramienta para probar que la respuesta es negativa.

*Un hombre sale de su casa, camina 10 km al sur, dobla y camina 10 km al este y después vuelve a doblar y camina otros 10 km al norte. Tras este recorrido se encuentra de nuevo en su casa, donde lo está esperando un oso ¿de qué color es el oso?*

## Los Laberintos Como Problema

Resolver un laberinto por primera vez puede ser un problema. La segunda, como le ocurre al juguete de Shanon "el ratón en el laberinto", puede dejar de serlo. El ratón del juguete, la segunda vez, recorre el laberinto linealmente sin que le asalte ninguna duda durante el trayecto. Para él, ese laberinto ya no es un problema. La pregunta obvia ante este juguete es: ¿cómo se las arregla el ratón para aprender tan rápido? En sentido más amplio:

*¿Cómo cruzar un laberinto sin perderse ni aturdirse?*

En febrero de 1987, en la sección Taller y Laboratorio de la revista Investigación y Ciencia, Jearl Walter, titulaba con ésta pregunta su artículo. Lo comenzaba con otra serie de preguntas como:

•¿Cuál es la mejor manera de adentrarse en un laberinto desde la puerta y encaminarse a una meta interior?

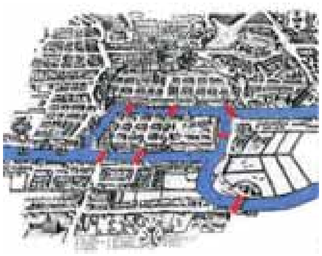
•¿Hay algún modo de alcanzar ésta y regresar al punto de partida sin hacer dos veces el mismo camino?

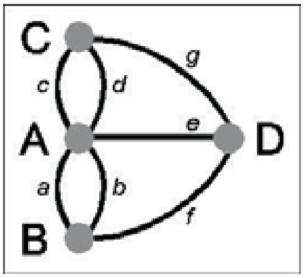
•¿Puede evitarse el dar vueltas interminablemente?

Supongamos que alguien se da cuenta de que se ha perdido
•¿Cómo hallar el camino de retorno a la entrada sin adentrarse más en el laberinto?

El problema y sus subproblemas se plantean en los nudos con ramificaciones, en los que hay que elegir un camino, tomar una decisión respecto la ruta a seguir.

El éxito de la estrategia elegida depende del tipo de laberinto. En el de Creta, basta con seguir el hilo de Ariadna o tocar siempre la pared de tu derecha, tal como han aprendido los ratones de laboratorio.
Si el laberinto es más complejo, si tiene bucles, conviene simplificar su plano mediante una deformación topológica, para formar un grafo, tal como hiciera Euler en el famoso problema de *los puentes de Koenigsberg*.

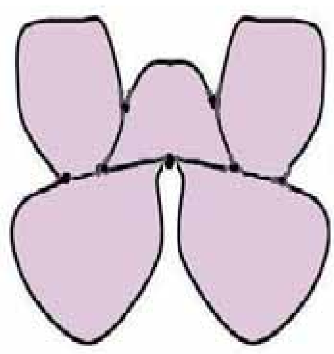





## Problemas De Laberintos

### La orquídea

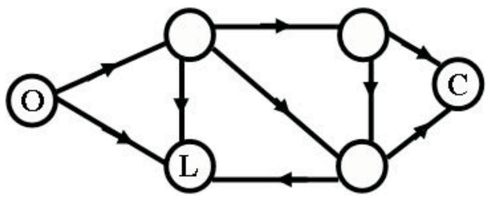
*Busca una línea que corte una y sólo una vez a cada uno de los once arcos de la orquídea.*
*No está permitido pasar por los vértices.*



### La oveja, el lobo y la col

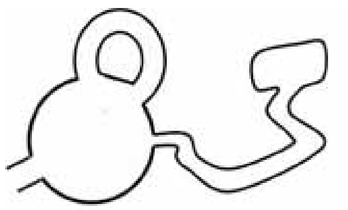
*Observa el laberinto que representa el grafo. Tiene una entrada y dos salidas: una guardada por un LOBO y otra en la que hay una COL. Una OVEJA está en la entrada y avanza por el laberinto. En cada cruce elige al azar uno de los dos caminos posibles. Si llega a la col, sale del laberinto relamiéndose, pero, si tropieza con el lobo, está irremisiblemente perdida*

*¿Cuál es la probabilidad de que salga del laberinto con vida y bien alimentada? ¿Y de que se la coma el lobo?*




### La cueva

*Varios excursionistas se han perdido en una cueva de la que parten cuatro caminos.*



*Uno de ellos conduce al exterior en una hora; otro dos forman un bucle que se tarda en recorrer, de vuelta a la cueva, un día, tanto en un sentido como en el otro; el restante es un camino sin salida, del que deberán retroceder e invertirán en ello dos días.*

*Como no llevan ninguna luz y la cueva está oscura y llena de obstáculos, eligen, cada vez que hacen un intento de salir, uno de los cuatro caminos al azar.*

*Si sólo tienen comida y agua para sobrevivir hasta tres días, ¿qué proporción de excursionistas crees que logrará salir de la cueva?*

*Si tuviesen alimentos para subsistir indefinidamente, ¿crees que se salvaría todo el grupo?*

*¿Cuánto tiempo crees que tardaría cada excursionista en salir, por término medio?*

## Soluciones

Dar soluciones, tal como indica el título de este epígrafe, sería contradictorio con el contenido de todo el artículo.

Invitamos a los lectores y lectoras de esta sección a que se adentren en el laberinto, que se impliquen en la resolución de los problemas aquí enunciados y que nos comuniquen sus hallazgos, experiencias y observaciones. De buen seguro que, si lo hacen, por los vericuetos de su laberinto particular, encontrarán preguntas que se podrán transformar en nuevos enunciados. Si les apetece compartirlos en esta sección, serán bienvenidos, de modo que *El hilo de Ariadna* nos enredará en un proyecto común, tejido con los recorridos irrepetibles provocados mutuamente.

Quienes queráis formar parte de esta telaraña particular podéis enviar vuestra colaboración a: ariadna@revistasuma.es

***EL HILO DE ARIADNA***

Imagen de Marc Sporleder creada con TG-MAX

## REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

BORRAS VESES, E. y MORATA CUBELLS, M. (1989). El azar y su aprendizaje. *Suma,* nº 3, 21-27.

GRUPO CERO. (1989). *De 12 a 16. Un proyecto de curriculum*. Mestral llibres, Valencia.

PATON, W. R. (1953). *The Greek Anthology*. Arithmetical Problems, Riddles, Oracles. Hardvard University Press, Book 14

POLYA, G. (1967). *La découverte des mathématiques.* Dunod. Paris.

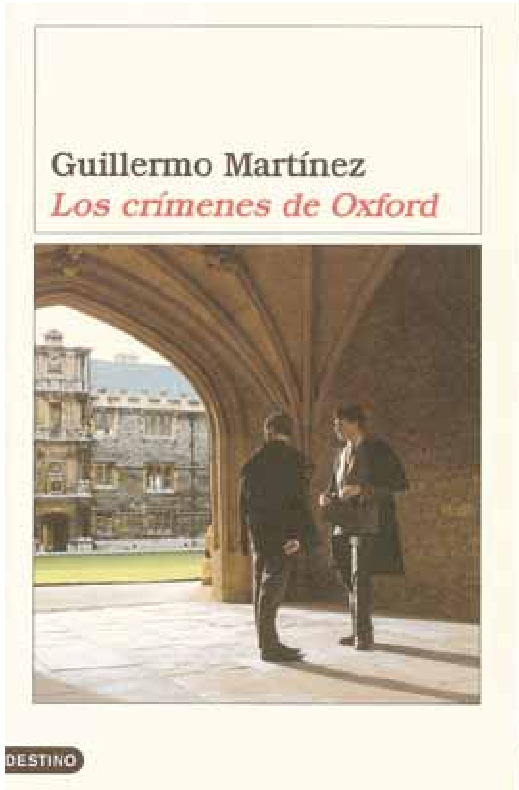
VEGA, V. (1952). *Diccionario ilustrado de frases célebres y citas literarias* Editorial Gustavo Gili, S.A., Barcelona.

WALKER, J. (1987). Cómo cruzar un laberinto sin perderse ni aturdirse. *Investigación y Ciencia*, nº 125, 98-104

www.theoi.com/Georgikos/Ariadne.html

suma+ 57
Febrero 2008, pp.123-129

# Crímenes imperceptibles




**LOS CRÍMENES DE OXFORD**
*Guillermo Martínez*
*Ediciones Destino, Colección Áncora y Delfín*
*Volumen 992. Barcelona.*
*Barcelona, Marzo de 2004 (1ª Edición)*
*ISBN: 84-233-3601-8.*
*212 páginas*

Presentamos en esta ocasión un libro de reciente publicación, que se ha convertido en un indiscutible éxito editorial y que, en la actualidad, también se ha convertido en otro éxito cinematográfico con la adaptación realizada por el director español Alex de la Iglesia.

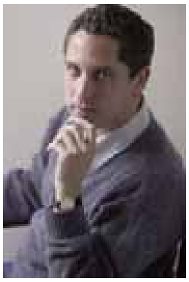
En la presentación que aparece en la contraportada podemos leer:

> *Pocos días después de haber llegado a Oxford, un joven estudiante argentino encuentra el cadáver de una anciana que ha sido asfixiada con un almohadón. El asesinato resulta ser un desafío intelectual lanzado a uno de los lógicos más eminentes del siglo, Arthur Seldom, y el primero de una serie de crímenes. Mientras la policía investiga a una sucesión de sospechosos, maestro y discípulo llevan adelante su propia investigación, amenazados por las derivaciones cada vez más arriesgadas de sus conjeturas. Los crímenes de Oxford, que conjuga los sombríos hospitales ingleses con los juegos de lenguaje de Wittgenstein, el teorema*

**Constantino de la Fuente Martínez**
*literatura@revistasuma.es*

*de Gödel con los arrebatos de la pasión y las sectas antiguas de matemáticos con el arte de los viejos magos, es una novela policíaca de trama aparentemente clásica que, en el sorprendente desenlace, se revela como un magistral acto de prestidigitación.*

*El asesinato como acertijo, el crimen como desafío intelectual. Una fascinante indagación detectivesca con Oxford como escenario.*



*Guillermo Martínez (Bahía Blanca, Argentina, 1962). Doctor en Matemáticas, en 1989 publicó el libro de cuentos "Infierno Grande". Su primera novela, "Acerca de Roderer", recibió el elogio unánime de la crítica. Posteriormente publicó "La mujer del maestro" y el libro de ensayos "Borges y la matemática (2003).*

## Nuestro comentario

La obra que nos ocupa es el relato, en primera persona, de los acontecimientos vividos por un joven matemático argentino, unos años antes, durante su estancia en Oxford becado por un año y con el "propósito secreto de inclinarse hacia la Lógica..." La acción discurre durante casi tres meses, desde su llegada a principios de abril de 1993 hasta el 25 de junio del mismo año.

Hay una constante a lo largo de esta magnífica novela: la búsqueda de la verdad como objetivo irrenunciable y, simultáneamente, como meta inalcanzable. El autor nos lo ilustra con múltiples ejemplos del conocimiento científico: el teorema de Gödel, el principio de incertidumbre de Heisenberg, la limitación de los sistemas filosóficos que parten de unos primeros axiomas, la búsqueda del término general de una sucesión; todo ello con variadas situaciones y temáticas de la vida: el conocimiento del otro y de su realidad interior, el espectáculo de la actuación de un mago de cartas, o la resolución de cualquier investigación criminal, aunque sea de "crímenes imperceptibles".

Paralelamente, el narrador nos va provocando diferentes sensaciones y estados emocionales: desde la serenidad y el sosiego que se desprenden de los ambientes intelectuales en los que se desenvuelve, hasta la angustia y el agobio preocupantes del hospital de los "siete pisos", sin olvidarnos de la intranquilidad creciente que nos van generando las investigaciones sobre la autoría de los crímenes que dan título al libro.
Es muy curioso y sorprendente cómo una segunda lectura de la obra nos permite descubrir en profundidad los múltiples matices de las situaciones que, claro está, se nos muestran como recuerdos del narrador, pero que tienen una clara conexión con la idea clave del final de la obra: la lógica de las relaciones de parentesco es la lógica de los sentimientos y, por tanto, es otra lógica diferente a la matemática. Esos detalles contribuyen a que nos vayamos dejando llevar más plácidamente hasta el desenlace final...; un desenlace inesperado, muy aprovechable desde el punto de vista cinematográfico.

Los conocimientos matemáticos casi nunca ocupan el primer plano de la acción, como cuando el personaje principal decide no acudir al famoso seminario de Cambridge porque tenía un cita amorosa. Aún así van desfilando personajes, desde Pitágoras hasta Andrew Wiles; símbolos eternos, como la *vesica piscis* o la *tetraktys* griega; ideas y conceptos del conocimiento matemático, como demostración, conjetura, paradoja, teorema, etc. Esta circunstancia hace que el autor consiga, para el público en general, un inmejorable equilibrio entre los temas científico-matemáticos y los de la vida cotidiana, y que podamos afirmar sin ningún género de dudas que nos encontramos ante una verdadera novela matemática, según nuestra acepción habitual.

Para terminar recordaremos que, así como Paul Erdös decía que las demostraciones matemáticas que son modelo de belleza y estética están sacadas del *Libro de las Demostraciones* que Dios (el Fascista Supremo según él) enseña de vez en cuando a algunos mortales antes de que pasen a ser inmortales, estamos en condiciones de conjeturar que Guillermo Martínez, el autor de la obra que nos ocupa, también ha sacado su novela del Libro de las Novelas, homólogo al de las demostraciones.

# Una propuesta de trabajo en el aula

Son muchos los temas que podríamos sacar del libro para ser llevados al aula, por lo que nos hemos visto en la disyuntiva de tener que descartar algunos, sobre todos los relacionados con los fundamentos de la matemática, que desbordan las posibilidades de nuestros alumnos y alumnas de ESO o Bachillerato.

En esta selección nos hemos quedado, esencialmente, con las sucesiones, las ternas pitagóricas y, sobre todo, un recorrido histórico por el Ultimo Teorema de Fermat.

Antes de concretar la propuesta para la clase, conviene recordar que, cuando se hace mención de alguna página del libro, ésta se refiere a la primera edición, en marzo de 2004.

Dicho esto, pasamos a enumerar las actividades.

## 1. Unos cuantos nombres

En el libro aparecen los nombres de varios matemáticos:

| | |
|---|---|
| - Kurt Gödel | - Andrew Wiles |
| - Pierre Fermat | - Euclides |
| - Ernst Eduard Kummer | - Leonardo de Pisa (Fibonacci) |
| - Alan Turing | - Pitágoras |
| - Goro Shimura | - Yutaka Taniyama |
| - Nicolas de Cusa | - Ludwig Wittgenstein |
| - Ernst Zermelo | - Diofanto |
| - Alfred Tarski | |

A) En esta lista se nos ha colado un nombre que no aparece en la novela. ¿Quién es? Escribe una breve biografía sobre él, haciendo hincapié en sus aportaciones al conocimiento matemático.

*Carta de Martin a Lorna:*

*"Oh Dios, haz que el amor entre ella y yo sea parejo,*
*que ninguno rebase al otro,*
*Haz que nuestros amores sean idénticos,*
*como ambos lados de una ecuación."*

*(sacado del ruego de Qais ben-al-Mulawah en uno de los versos para Laila)*

B) Ordena cronológicamente la lista anterior con las fechas de nacimiento (en algún caso aproximada) y muerte (si es el caso).

## 2. Una de sucesiones

En el libro aparecen, en diferentes momentos, varias sucesiones.

A) Escribe los primeros términos de las tres más representativas.

B) Propón dos posibles continuaciones diferentes para cada una de las sucesiones del apartado anterior, explicando el criterio que utilizas.

C) Teniendo en cuenta el *principio estético a priori* que se explica en la página 77, averigua los términos siguientes y el término general de las siguientes sucesiones:

- 1, 4, 9, 16, ...
- 2, 5, 8, 11, ...
- 15, qe, 12, de, 58, co, 23, _ _, ...
- 2, 6, 12, 20, ...

D) En la Universidad de Michigan hay un grupo de investigadores sobre la creatividad humana llamado FARG (en siglas inglesas). Uno de los programas de ordenador, llamado *Copycat*, resuelve problemas sobre analogías como el siguiente:

**abc** cambia a **abd.** Hacer *lo mismo* con **ijk**

La mayoría de la gente responde **ijl**. ¿Por qué crees tú que será así? Otras respuestas han sido **ijd, ijk, abd**. ¿Con qué criterios podemos proponer estas respuestas?

Resuelve la siguiente variante, dando más de una respuesta posible:

**abc** cambia a **abd.** Hacer *lo mismo* con **kji**.

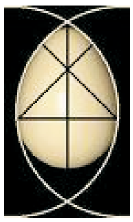
## 3. Círculo, pez, triángulo, tetraktys, ...

Esta misteriosa sucesión aparece intermitentemente a lo largo de las páginas del libro. Vamos a estudiarla con un enfoque matemático

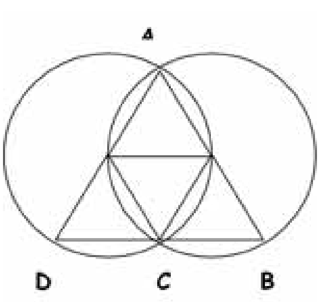
A) Tomemos el primero de los términos: el círculo. En la página 155 se habla de un método para obtener la longitud de la circunferencia a partir de polígonos regulares inscritos, cada vez con mayor número de lados. Suponiendo que el diámetro de la circunferencia es 1, calcular el perímetro de un polígono regular de n lados, inscrito en ella. Cuando n sea muy grande, ¿hacía qué valor se va acercando el perímetro?

B) Haz lo mismo con polígonos circunscritos a la circunferencia.

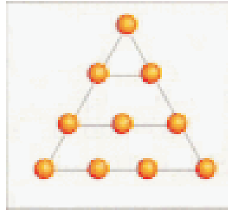
C) Nos vamos a fijar en el segundo término de la sucesión: el pez o *vesica piscis*. Se puede construir como la parte común a dos círculos del mismo radio, de forma que la circunferencia de cada uno pasa por el centro del otro.



Suponiendo que los radios de los círculos valen 1, demuestra que los triángulos de la figura son todos equiláteros, calcula la distancia AC y el área del triángulo ABD. ¿Cuál es el área de la vesica piscis?




D) El tercer término de la sucesión es el triángulo equilátero. Esta figura geométrica es muy familiar, y de ellas conocemos muchas cosas. Para que repases o profundices en ella, te vamos a plantear las siguientes cuestiones:



- Calcula el área de un triángulo equilátero conociendo la longitud del lado.
- Calcula la longitud del lado de un triángulo equilátero conociendo el valor de su superficie.
- ¿Puede haber un triángulo equilátero en el que su lado y su área sean números enteros? Demuéstralo.

E) Llegamos al cuarto término: la tetraktys, que es la suma de los cuatro primeros números naturales: 1 + 2 + 3 + 4 = 10. También puede considerarse como el cuarto número triangular, pues éstos forman la sucesión 1, 3, 6, 10,.... Busca la expresión general de los números triangulares. ¿Por qué se llaman así?

F)Demuestra que un número cuadrado perfecto se puede descomponer como suma de dos números triangulares consecutivos.

*Seldon*

*"A los matemáticos siempre nos gusta tener la sensación de que podemos decir algo con sentido."*

## 4. Ternas pitagóricas

En el libro también se habla de las ternas pitagóricas; son números enteros positivos x, y, z, que cumplen la igualdad

$$x^2+y^2=z^2$$

A) Encuentra varias ternas pitagóricas.

B) Demuestra que si a, b y c son una terna pitagórica, entonces n.a, n.b, n.c, siendo n un número entero positivo, también lo son.

C) Comprobar que las ternas de números de la forma

$$2n+1,\ 2n^2+2n,\ 2n^2+2n+1,$$

siendo n un número entero positivo, forman una terna pitagórica para cualquier valor de n.

D) Hacer lo mismo con la terna $a^2-b^2$, $2ab$, $a^2+b^2$, siendo a y b enteros positivos, con a mayor que b.

E) Encontrar otras ternas pitagóricas.

F) Fermat demostró que el área de un triángulo pitagórico (es decir, cuyos lados forman una terna pitagórica) no puede ser un número cuadrado perfecto. Lo consiguió utilizando un método de demostración del que él fue su creador y que se denomina *del descenso infinito*. ¿En qué consiste este método? ¿Cómo se aplica en este caso?

$$x^n + y^n = z^n \qquad n>2$$

## 5. Fermat y su Conjetura

Un personaje del libro comenta en la página 143 que la Conjetura de Fermat o el Último Teorema de Fermat “no es más que una generalización del problema de las ternas pitagóricas...”

A) Escribe el enunciado de la Conjetura de Fermat. ¿Dónde apareció por primera vez? Comenta su relación con las ternas pitagóricas.

B) Escribe, de forma resumida, la biografía de Pierre de Fermat, también llamado “el príncipe de los aficionados”. ¿Por qué se le llama así?

C) Partiendo de la idea de que el área de un triángulo pitagórico no puede ser un número cuadrado perfecto, Fermat demostró que su conjetura era cierta para n=4. ¿Cómo lo hizo?

D) Más tarde demostró que también era cierto cuando n sea un múltiplo de 4. ¿Cómo lo hizo?

E) Demuestra que si el Último Teorema de Fermat es cierto para un exponente n, también lo será para todos los múltiplos de n.

F) Teniendo en cuenta el anterior resultado y como **todo número mayor que 2 es divisible por 4 o por un número primo impar**, sólo es necesario demostrar su veracidad cuando el exponente sea un número primo impar (porque para n=4 ya lo demostró él). Justifica de alguna forma que el enunciado en negrilla es cierto.


## 6. La Conjetura a través de la historia

Fermat también afirmó que tenía la demostración para n=3, pero no se conoce.

A) Leonard Euler, un siglo después, publicó la demostración para n=3, pero tenía un fallo... ¿Qué método de demostración utilizó? ¿Cuál es el fallo que contenía?

B) En el siglo XIX, concretamente en 1828 y 1830, dos matemáticos demostraron la validez del teorema para el caso n=5, utilizando el método de Euler mejorado. ¿Quiénes lo consiguieron?

En 1839, Gabriel Lamé demostró el caso n=7 y el 1 de marzo de 1847 Lamé anunció haber encontrado una demostración general de la Conjetura de Fermat, válida para todo exponente n, pero la demostración también tenía un fallo... Esto dio lugar a una lucha frenética entre él y otro matemático por ser


el primero en tenerla. Casi quince días más tarde, el 17 de marzo de 1847, Lamé y el otro matemático presentaron en la Academia de Ciencias de París sendas demostraciones...

C) Averigua el nombre del otro matemático y lo que pasó con estas pruebas del teorema. Cuenta el desarrollo y el desenlace de este episodio histórico.

## 7. Y la historia sigue...

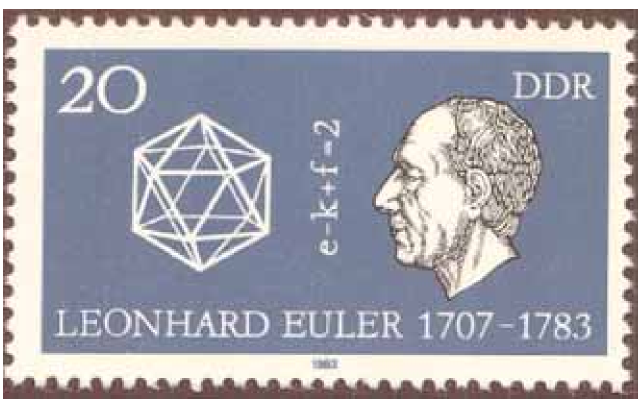
El 17 de mayo de 1847 Joseph Liouville leyó una carta en la Academia de Ciencias de París, por la que iban a cambiar muchas cosas en la historia de los intentos de demostración de la Conjetura de Fermat.

A) ¿Quién había escrito esa carta? ¿Qué decía en ella?

B) Ese mismo año, el autor de la carta, demostró la veracidad de la conjetura para bastantes números, muchos más que hasta entonces... ¿Qué demostró concretamente?

C) La Academia de Ciencias de París, en 1854, creó un premio de 300.000 francos para quien resolviera el problema. En 1858, la Academia concedió, a nuestro personaje misterioso, un premio, pero no el de los 300.000 francos. ¿Qué fue lo que le dieron?

D) Reúne los principales datos de la biografía de este matemático.




## 8. Llegamos al siglo XX

A lo largo del siglo XX, y sobre todo con la aparición de los ordenadores, se fue estableciendo la veracidad del Último Teorema de Fermat para valores más grandes del exponente n:

- En 1923 se formuló una conjetura que dice que la ecuación de Fermat, para n mayor o igual que 3 posee, a lo sumo, un número finito de soluciones enteras. Esta conjetura se demostró en 1983.

- En 1970 se demostró su certeza para n primo menor que 30.000.

- En 1980 para n primo menor que 125.000.

A) ¿Quiénes son los autores de estas demostraciones?

Así mismo, en 1955, un matemático planteó un problema sobre funciones elípticas que, junto con las generalizaciones añadidas por otros dos matemáticos, se denominó la Conjetura de ...


Andrew Wiles

B) Averigua el nombre de estas tres personas y el enunciado de la conjetura.

## 9. Y acabamos otra vez en el libro...

Después de este paseo a través de la historia de las matemáticas, llegamos a los días de la acción de la novela y leemos:

> *"El miércoles 23 de junio me desperté cerca del mediodía..." (pág 184)*

> *"Allí estaba el breve mensaje que se propagaba como una contraseña a todos los matemáticos a lo largo y*

Andrew Wiles a los 10 años

Yutaka Taniyama

Andrew Wiles en 2007

*ancho del mundo: ¡Wiles lo había conseguido! No había detalles sobre la exposición final, sólo se decía que la demostración había logrado convencer a los especialistas y que una vez escrita podría llegar a las 200 páginas."(pág 185)*

Este acontecimiento había comenzado dos días antes en un Seminario en el Instituto Isaac Newton de Cambridge.

A) ¿En qué año se produjo esta noticia y quién es su protagonista?

B) La realidad nos dice que, algo menos de dos años más tarde, la comunidad matemática dio su beneplácito oficial a la validez de la prueba. ¿Cuándo ocurrió esto? ¿Cómo se publicaron de forma impresa los resultados?

C) Recopila todas las informaciones que puedas sobre el proceso de trabajo, los años dedicados al tema, las impresiones personales del protagonista, etc, y exponlas aquí..

*LITERATURA Y MATEMÁTICAS* ■

*Seldon:*

*"El crimen perfecto no es el que queda sin resolver sino el que se resuelve con un culpable equivocado."*

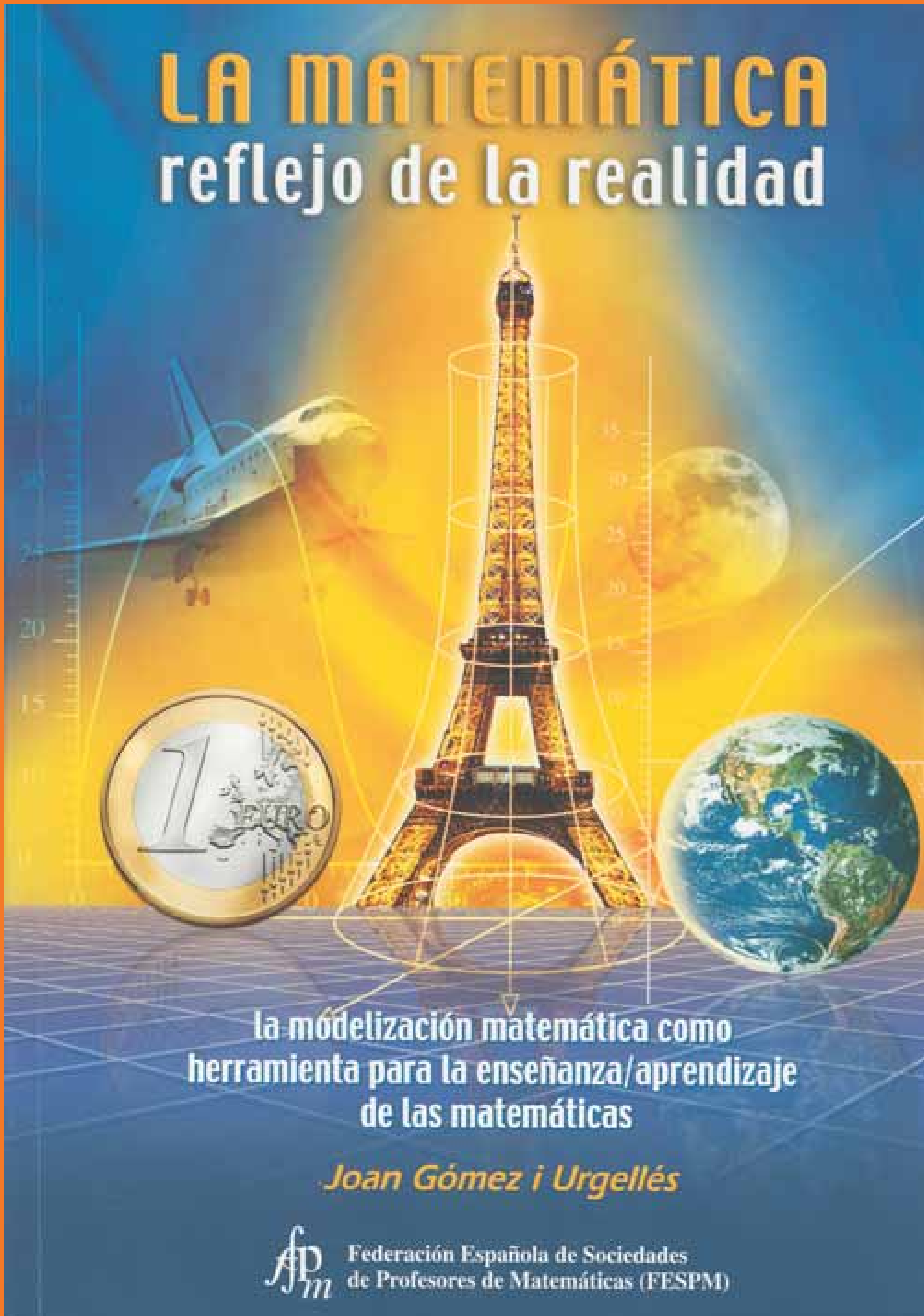
## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DAVIS, P. y HERSH, R. (1989): *"Experiencia matemática".* Ed. Mec-Labor, Barcelona.

HAKEN, H., HOFSTADTER, D. R. y otros (1990): *"Sobre la imaginación científica. Qué es, cómo nace, cómo triunfa una idea".* Ed. Tusquets, Barcelona.

Investigación y Ciencia (1995) *"Grandes matemáticos. Temas 1".* Ed. Prensa Científica, S. A., Barcelona.

STEWART, I. (1998): *"De aquí al infinito. Las matemáticas de hoy".* Ed. Grijalbo Mondadori, Barcelona.



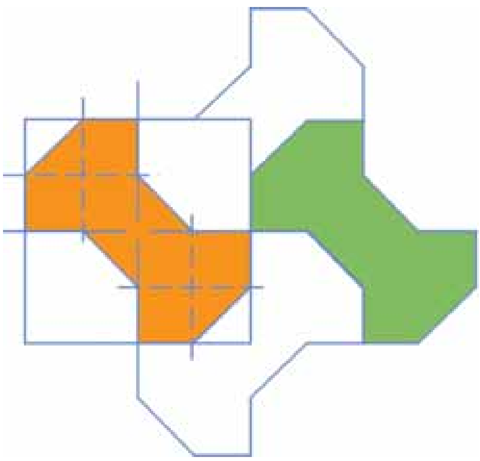

Servicio de Publicaciones de la FESPM

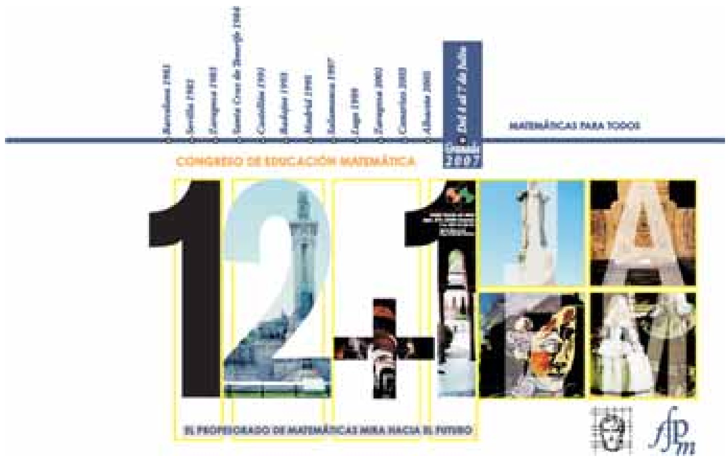
Apartado de Correos 590
06080 Badajoz
Información y pedidos: publicafespm@wanadoo.es

**LA MATEMÁTICA: REFLEJO DE LA REALIDAD**
**La modelización matemática como herramienta para la enseñanza/aprenizaje de las matemáticas**
**Joan Gómez i Urgellés**
*Federacion Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)*
*Badajoz, 2007*
*ISBN 84-934488-6-8*
*166 páginas*

suma+ 57
Febrero 2008, pp.131-132

# Crónica de las XIII JAEM de Granada






Dentro de dos años, nos vemos en Gerona 2009…

“He disfrutado muchísimo”, “Me he sentido muy a gusto en Granada”, “Días inolvidables”… Después de un curso muy largo y a pesar del fuerte calor; eran las 10 de la noche del 7 de Julio, tras la clausura de las XIII JAEM. Estas y otras cosas similares se podían oír.

Cerca del millar de personas, todos interesados en la educación matemática, en sus diferentes etapas: Educación Infantil, Primaria, Secundaria o Adultos, Universidad, del campo de la investigación y, como no, estudiantes. La juventud siempre presente, independientemente de la edad. Una experiencia interesante que permitió la interacción y el encuentro entre los distintos niveles. Es destacable la cantidad de jóvenes profesores y docentes, muy valioso para el futuro de la enseñanza de las matemáticas.

Fueron 4 días muy intensos tanto a nivel profesional como personal. Se trata del evento matemático más importante de los que se organizan en toda España y que se celebra cada dos años. En él se entregó el premio Gonzalo Sánchez Vázquez, que en esta ocasión recayó en María Antonia Canals i Tolosa.

Bajo el lema “El profesorado de matemáticas mira hacia el futuro”, las XIII Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas han estado organizadas por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES. Conscientes de la importancia de las matemáticas. Del papel fundamental que desempeña la educación matemática, sobre todo en los niveles de primaria y secundaria, para la comprensión de conceptos básicos y el desarrollo del pensamiento racional de la persona. De las aplicaciones que tiene para la ciencia, la tecnología, la economía, las comunicaciones y otros muchos campos. Centradas en el papel del profesor, tuvieron lugar del 4 al 7 de Julio en Granada, en la Facultad de Ciencias de su Universidad.

Contamos con la presencia de auténticos maestros. D. Luis Rico Romero pronunció la conferencia inagural con el título de “Herramientas matemáticas y competencias escolares”. Nos sorprendió la forma tan sencilla con la que D. Abrahan

**Luis Berenguer Cruz**
*Coordinador General de las XIII JAEM*

Arcavi dijo cosas tan importantes de la enseñanza de las matemáticas en “Hacia una visión integradora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas” que rozaba la simplicidad. Nos adentramos en el universo mágico y sorprendente de las Matemáticas alternativas con D. Antonio Pérez Sanz y “¡Malditos sean la regla y el compás!”. La clausura corrió a cargo de D. Rafael Pérez Gómez y sus “37º”. Nos “enseñó” La Alhambra a todos los presentes y despidió las JAEM dejando un gratísimo sabor de boca.

En jornada de mañana y tarde, la agenda estaba apretadísima. Tal era la cantidad y calidad de las ponencias, comunicaciones o grupos de debate que todos encontrábamos asuntos de interés en cada momento, el problema era por cuál decidirnos. En los talleres se participó masivamente. La alta participación contribuyó a aumentar aún más la temperatura. Destacar la presencia y colaboración de los voluntarios de “rojo”, siempre dispuestos.

El congreso también contaba con una parte menos académica. Los acompañantes no fueron olvidados. Tuvieron su programa de actividades que incluía visitas turísticas y gastronómicas a la ciudad y provincia. Las exposiciones “Geometría de Metal” B. Pradas, “Números y Figuras” Zalemo y “De Cerca, Naturaleza y Forma” L. Morales estaban abiertas al público, al igual que los Zocos o el stand comercial. Nos deleitó el cuadro flamenco del Sacromonte. Vimos teatro”Matemática es nombre de mujer”, “Del color del cristal con que se mira. Crónica de un curso escolar”. Visitamos La Alhambra, (los más afortunados). La cena en el Carmen de los Mártires fue “doblemente mágica”.

Obsequios los hubo también. Los espárragos buenísimos. Los regalos que se entregaban cada día con las firmas son pura “artesanía”, auténticas joyas y no sólo matemáticas.

Fue complicado atender a tanta gente, mucha más de la prevista. La cordialidad y buena disposición suplió con creces cualquier imprevisto o fallo. El lenguaje matemático es universal y pese a tratarse de un evento a nivel nacional, fueron muchos los docentes extranjeros que se sumaron a las jornadas. Nos hicieron partícipes de las experiencias educativas que se llevan a cabo en sus países y compartieron unos días con nosotros enormemente enriquecedores.

El éxito de las JAEM ha sido de todos: la hospitalidad y belleza de Granada, la buena disposición, amabilidad y eficacia de la organización, que puso no sólo el corazón sino cantidad de detalles que adornaron todo; el saber de los conferenciantes, ponentes, comunicantes; y el interés, participación y atención de los asistentes. Y en definitiva de TODOS los que con su trabajo e ilusión permiten que las matemáticas sigan enseñándose. ¡Felicidades a todos!

Unas magníficas JAEM difíciles de olvidar. Seguro que en ellas hemos aprendido cosas nuevas, hemos recargado las pilas, nos hemos encontrado con y entre amigos. Ahora estamos dispuestos a enfrentarnos a este curso con más energía y ganas, con mayor esperanza en al futuro de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. En definitiva, han cumplido ampliamente con las expectativas con las que las JAEM fueron concebidas.

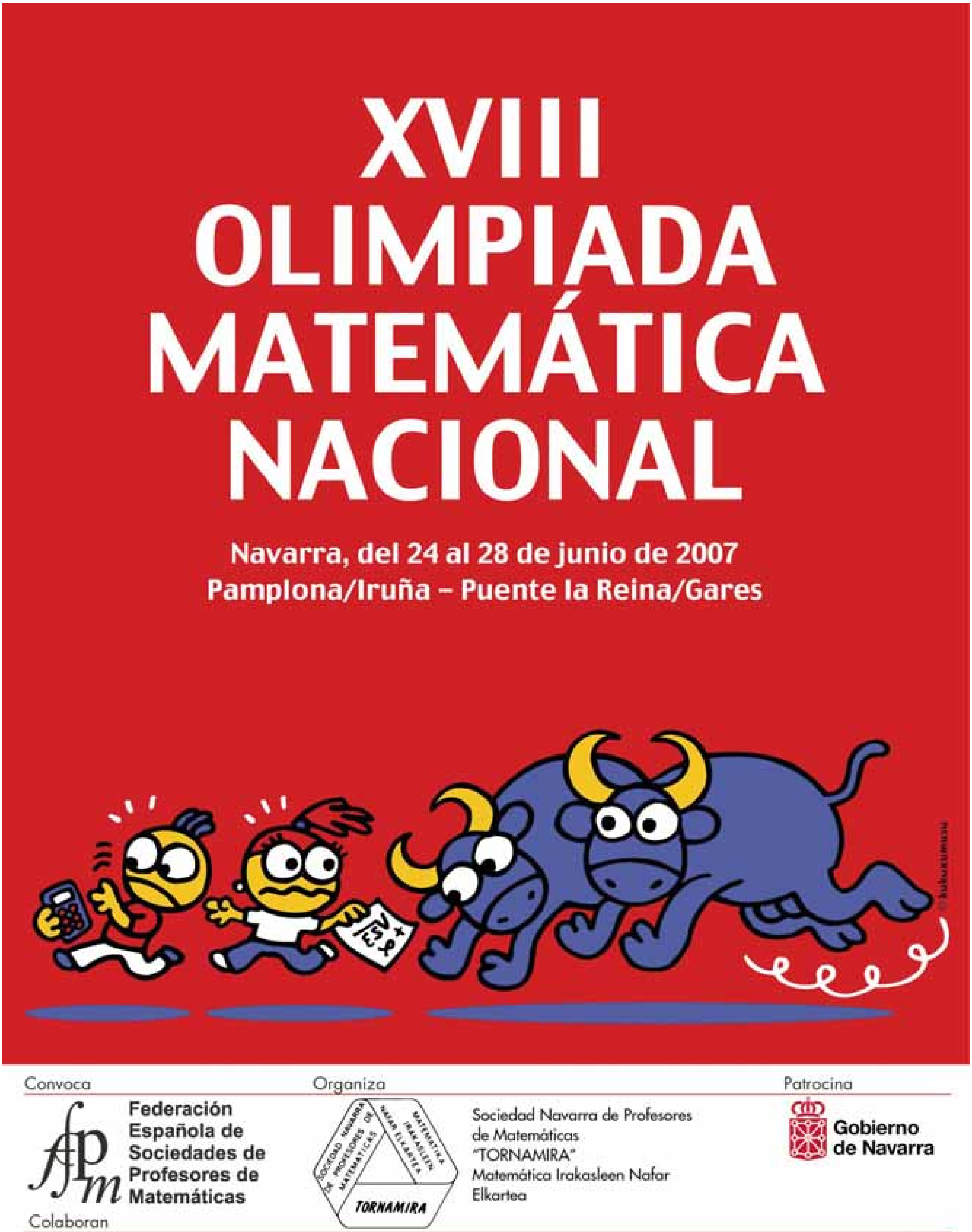
¡Nos vemos en las XIV JAEM!

Las XIII JAEM en cifras.

- Participantes: 930
- Países de procedencia: España, Portugal, Italia, Méjico, Guatemala, Chile, …
- Voluntarios: 40
- Conferencias plenarias: 4
- Núcleos temáticos: 9
- Ponencias: 35
- Comunicaciones: 118
- Talleres: 33
- Zocos: 6
- Grupos de debate: 4
- Exposiciones: “Geometría del metal” B. Pradas, “Números y figuras” F. González Moreno, Zalemo y “De cerca: Naturaleza y forma” L. Morales Rufo.

XIV JAEM
GIRONA 2009

*¡Nos vemos en Girona en 2009!*


XVIII
OLIMPIADA
MATEMÁTICA
NACIONAL
Navarra, del 24 al 28 de junio de 2007
Pamplona/Iruña – Puente la Reina/Gares
Convoca
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
Colaboran
Organiza
TORNAMIRA
Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas "TORNAMIRA" Matemática Irakasleen Nafar Elkartea
Patrocina
Gobierno de Navarra

# Programa

### 1er Día, domingo 24 de junio

**15:00 – 18:30 h** Recepción de participantes en la Universidad Pública de Navarra.
**19:00 h** Bienvenida, inauguración de la Olimpiada y presentación del programa.
**20:00 h** Salida hacia Puente la Reina en autobús.
**20:30 h** Entrega de credenciales, documentación y material. A continuación entrega de cámaras a los equipos para el concurso de fotografía matemática.
**21:00 h** Distribución de habitaciones.
**21:30 h** Cena y a las 23:45 h A dormir.
**22:30 h** Reunión de coordinadores.

### 2º Día, lunes 25 de junio

**9:15 h** Desayuno
**10:00 h** Realización de la prueba individual.
**12:15 h** Visita-paseo por la villa de Puente la Reina. Saludo de la Alcaldía.
**13:30 h** Comida.
**16:00- 21:00 h** Recorrido en autobús de una etapa del Camino de Santiago: Obanos, Eunate, Estella, Irache.
**21:30 h** Cena y a las 24 horas a descansar.
**22:30 h** Reunión de coordinadores.

### 3er Día, martes 26 de junio

**8:30 h** Desayuno
**9:00 h** Salida hacia Pamplona.
**9:45 h** Saludo Consejero de Educación.
**10:00-12:30 h** Prueba por equipos: Encierro Matemático.
**13:00 h** Recepción en el Ayuntamiento de Pamplona.
**14:00 h** Comida en “Aranzadi”.
**16:00 h** Paseo por Pamplona: Murallas, Parque de la Taconera, Ciudadela, Parque Yamaguchi
**18:30 h** Sesión de estrellas en el Planetario de Pamplona.
**20:00 h** Salida a Puente.
**20:45 h** Recogida de las cámaras de fotografía. Descanso.
**21:30 h** Cena y a las 23:45 h a dormir.
**22:30 h** Reunión de coordinadores.

### 4º Día, miércoles 27 de junio

**9:00 h** Desayuno
**9:30 h** Salida hacia el Parque Natural Señorío de Bértiz (Valle del Baztán)
**11:00 h** Visita al jardín botánico y breve paseo por el bosque.
**14:20 h** Comida
**15:30 h** Taller de Juegos matemáticos.
**17:00 h** Salida de regreso hacia Puente. En Pamplona: Partido de pelota para los alumnos y cata de vinos para los adultos.
19:30 h Entrega de las fotografías para seleccionar y poner pie.
**21:30 h** Cena despedida
**24:00 h** Felices sueños.

### 5º Día, jueves 28 de junio

**9:00 h** Desayuno
**10:00 h** Salida con equipajes
**10:45 h** Sesión de cierre en la Universidad Pública de Navarra:
- Discusión y análisis de los problemas planteados.
- “La magia en la teoría de códigos” por Pedro Alegría y Juan Carlos Ruiz de Arcaute.
- Entrega premios.
- Clausura.

**13:30 h** Aperitivo de despedida.

Foto P. Corcho

# La XVIII Olimpiada Matemática Nacional

En el año 1990, cuando acababa de nacer nuestra ***Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas TORNAMIRA Matematika Irakasleen Nafar Elkartea***, tuvimos el encargo de organizar la primera Olimpiada Matemática Nacional. Éramos cinco Sociedades y hoy, gracias a la ilusión y el esfuerzo de muchos profesores, celebramos la mayoría de edad de la Olimpiada con la participación de alumnos de todas las Comunidades Autónomas y de algunos colegios españoles en el extranjero. En esta "puesta de largo" hemos podido disfrutar todos con las matemáticas y ensanchar nuestros lazos de amistad.

## Breve relato sobre cómo ocurrió la XVIII OMN

Del 24 al 28 de junio de 2007, se celebró la XVIII Olimpiada Matemática Nacional para alumnos de 2º de Educación Secundaria Obligatoria, convocada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y organizada por la Sociedad TORNAMIRA. A lo largo de los cinco días de duración de la Olimpíada los 61 alumnos y alumnas y los 24 profesores y profesoras acompañantes (85 participantes), además de realizar las pruebas específicas de Matemáticas, han podido disfrutar de otras actividades lúdico-recreativas como excursiones, visitas turísticas, visita al Planetario, partido de pelota y otras.

A partir del medio día del domingo día 24, fueron llegando a la Universidad Pública de Navarra los alumnos participantes con los correspondientes profesores responsables, o con sus familias en el caso de los procedentes de comunidades vecinas. Los chicos y chicas fueron formando grupo al que se les unían otros conforme iban llegando. Para cuando salimos de la Universidad ya se habían empezado a conocer.

Tras un breve acto de bienvenida salimos en autobús hacia Puente la Reina que es donde iban a estar alojados. Tras la cena, los alumnos jugaron y charlaron un rato, y mientras se disponían a descansar tras, en alguno de los casos, un largo viaje, el equipo organizador se reunía con los colaboradores y coordinadores.

**Julian Pérez Iturmendi**
**Marilo Eraso Erro**
*Coordinadores de la XVIII Olimpiada Matemática Nacional 2007*

El día 25, lunes, sin madrugar mucho y después de desayunar, en la misma residencia los alumnos realizaron la prueba individual. Desde las 10 hasta las 12 horas, los alumnos tuvieron que resolver 6 problemas.

Hacia las 12:15 h, salimos de la residencia para realizar una visita turística a los lugares más importantes de Puente la Reina. En la visita nos acompañó la responsable de la Oficina de Turismo que con sus explicaciones amenas y didácticas nos hizo muy agradable el recorrido. Finalizamos en el Puente Románico, que según cuentan da nombre a la localidad, y ahí nos recibieron dos Txistularis, hicimos las fotos recuerdo y nos recibió el Alcalde y una representación del Ayuntamiento en la Casa del Vínculo, próxima al puente. Después de comer, hicimos un recorrido en autobús por una pequeña etapa del Camino de Santiago. Visitamos: Obanos, pequeña localidad del Camino, la Iglesia Románica de Eunate, Estella donde hicimos un recorrido turístico, y finalizamos en Irache visitando la Fuente del Vino que permite a los peregrinos hacer un alto en el camino y disfrutar de un trago de vino de Navarra. De vuelta, en la residencia, un poco de descanso, la cena, unos juegos y patadas al balón y a la cama.

*En esta ocasión han participado 20 chicas y 41 chicos que han representado a las 17 Sociedades participantes, además de los centros españoles en Marruecos, Roma y Andorra.*

Foto P. Corcho

El martes día 25, nos desplazamos a Pamplona donde tuvo lugar la prueba por equipos que denominamos "Encierro Matemático". El autobús nos llevó hasta el Departamento de Educación que está situado justo donde da comienzo el encierro de los Sanfermines. Tras cantar al Santo, como lo hacen los mozos antes de correr el encierro, fuimos recibidos en el Departamento por el Consejero de Educación y el Director del Servicio de Innovación Educativa. Un breve saludo y la entrega de unos obsequios-recuerdo nos llevaron a comenzar la prueba a lo largo del recorrido del encierro. Todos nos habíamos vestido de pamplonicas con camiseta blanca y pañuelo y faja rojos.

Esta prueba llamó la atención de los medios de comunicación y en todo momento varias cámaras de TV y varios reporteros fueron tomando imágenes y entrevistando a los alumnos y a los profesores. En los escaparates de los comercios del recorrido del encierro, colocamos las reproducciones ampliadas de sellos y sus correspondientes leyendas de personajes y motivos matemáticos que nos habían prestado nuestras compañeras de Andorra. También se invitaba a los viandantes a que participaran en la fiesta de las matemáticas resolviendo unas pruebas que se habían preparado al efecto. Al final se sortearon unas camisetas entre los participantes.

Al finalizar la prueba, nos recibió la señora alcaldesa Doña Yolanda Barcina. Tras unas amables palabras, Julián Pérez, en nombre de todos, le agradeció su colaboración y apoyo con la olimpiada y un alumno y una alumna le entregaron un ramo de flores y un ejemplar de las pruebas que habían tenido que resolver los participantes. Subimos a la planta superior del Ayuntamiento donde nos ofreció un aperitivo y donde pudimos estar en el balcón desde el que se lanza el cohete-chupinazo que da comienzo a las fiestas de San Fermín. Al finalizar nos desplazamos hasta un complejo deportivo municipal “Piscinas Aranzadi” donde el Ayuntamiento nos obsequiaba con la comida.

Después de comer y dando un paseo por las murallas, la plaza del Castillo, la Ciudadela y el parque de Yamaguchi, llegamos al Planetario de Pamplona donde disfrutamos viendo las estrellas. Desde allí volvimos a Puente.

El día 27 miércoles, después de desayunar visitamos el Señorío de Bértiz. El tiempo que tuvimos en todo el trayecto, lloviendo, nos hacía pensar en un día desagradable, pero al llegar a Bértiz, despejó y nos permitió realizar un bonito paseo por el jardín y adentrarnos un poco en el bosque. Las explicaciones de la guía contribuyeron a que la visita fuera amena, instructiva y muy agradable. Comimos en un restaurante cercano y después de comer, Albert Violant dirigió una sesión de juegos que tuvo atrapados a alumnos y profesores hasta tal punto que fue difícil levantarlos de las mesas para emprender el viaje de regreso. En Pamplona hicimos un alto y los alumnos fueron a ver un partido de pelota en un frontón y los adultos tuvimos ocasión de probar unos vinos navarros en una cata dirigida que nos ofreció un amigo en una vinotera. Hacia las ocho de la tarde fuimos a Puente ya que teníamos que prepararnos un poco para la cena de despedida.

*Hubo también representantes de los centros del País Vasco, donde no hay por ahora una sociedad federada. A los participantes les acompañaron 24 coordinadores y el equipo local organizador.*

La cita era en el Restaurante Jakue de Puente la Reina a las 9:30 p.m. Nos acompañaron el Consejero de Educación, la alcaldesa saliente de Puente la Reina, y varios compañeros profesores que han colaborado en distintas actividades. La cena estuvo muy bien y al final los alumnos y alumnas pudieron bailar un poco. Debemos resaltar el estupendo comportamiento de los alumnos que sorprendió al personal del restaurante y por lo que nos felicitaron.

Fotos P. Corcho

A la llegada a la residencia el jurado formado por los profesores, tuvo que valorar y premiar las fotos que durante los días pasados habían realizado los alumnos.

Llegó el día de partida. El jueves 28, después de desayunar fuimos en autobús a Pamplona. En el salón de actos del edificio "El Sario" de la Universidad Pública de Navarra iba a tener lugar el acto de clausura con la entrega de premios. Antes de comenzar el acto, hubo una sesión de análisis y discusión de los problemas que se habían planteado y resuelto en los dos días de pruebas. La sesión, abierta a profesores, alumnos y padres, fue dirigida por nuestro compañero Javier Etxeberria y resultó muy interesante. A continuación Pedro Alegría (matemático y aficionado a la magia) y Juan Carlos Ruiz de Arcaute (mago y aficionado a las matemáticas), ofrecieron una pequeña, por breve, actuación de título "La magia en la teoría de códigos" que hizo disfrutar un rato a los asistentes. De ahí se pasó al acto final, que estuvo presidido por el Rector de la Universidad Pública de Navarra, D. Julio Lafuente, además matemático y socio de Tornamira, y por el Consejero de Educación D. Luis Campoy a los que acompañaban en la mesa, José Ramón Pascual y Floreal Gracia.

Se entregaron los diplomas a todos los participantes alumnos y profesores, y las menciones de honor a los premiados en las pruebas: individual, de equipos y de fotografía. Después de realizar las fotos recuerdo disfrutamos de un aperitivo y llegó el momento de las despedidas.

## Premiados en la XVIII Olimpiada Matemática Nacional.

Las Menciones de Honor fueron para los cinco primeros clasificados en la prueba individual (por orden alfabético)

| | |
|---|---|
| - Inés Laura Dawson | Andalucía |
| - Fernando Etayo Rodríguez | Cantabria |
| - David Pardo Simón | Valencia |
| - Rafael Sánchez Bailo | Aragón |
| - Norberto Vera Vélez | Valencia |

El premio en la prueba por equipos correspondió al equipo PITÁGORAS formado por:

| | |
|---|---|
| - Alberto Díaz Dorado | Andalucía |
| - Julia Falo Sanjuán | Aragón |
| - Pablo García Alonso | Asturias |
| - Joan Rafel Bisbal Mayol | Baleares |

Y el premio de Fotografía Matemática recayó al equipo formado por:

| | |
|---|---|
| - Albeto Díaz Dorado | Andalucía |
| - Jorge Moliner Malaxechevarría | Castilla León |
| - Pedro Soria Postigo | Madrid |
| - Norberto Vera Vélez | Valencia |

Al finalizar el acto de entrega de premios, entregamos el testigo y "la antorcha" a nuestros amigos de Murcia en la persona de Ascensión Fernández Vicente, a la que damos todo nuestro ánimo y deseamos toda la suerte en la organización de la XIX Olimpiada Matemática Nacional. ■

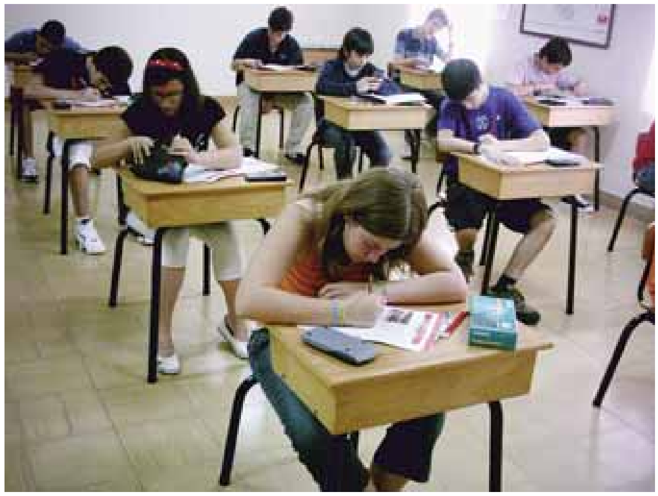
Se puede encontrar información de la XVIII OMN en las siguientes páginas:

www.villafrancadelosbarros.es/olimpiada/news.php

http://www.unavarra.es/info/not3042.htm

http://educarc.blogcindario.com/2007/07/01529-la-xviii-olimpiada-nacional-de-matematicas-se-clausuro-en-pamplona-con-la-entrega-de-premios.htm

***Nos vemos en Murcia en el 2008***



## Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas

### XXVI Concurso de Resolución de Problemas

**Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y el Colegio de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias**

### BASES DEL CONCURSO

**Primera**: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) *Primer nivel*: alumnos de 3º de E.S.O.
b) *Segundo nivel*: alumnos de 4º de E.S.O.
c) *Tercer nivel*: alumnos de 1º Bachillerato

**Segunda**: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado *7 de junio del 2008* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

**Tercera**: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

**Cuarta**: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 7 de Mayo del 2008, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

*Prof. Javier Etayo Gordejuela*
*Departamento de Algebra*
*Facultad de Ciencias Matemáticas*
*28040-Madrid    Fax: 91 394 4662*
*Correo electrónico:* **jetayo@mat.ucm.es**

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

**Quinta**: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2007-2008.

## Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"

### VIII JORNADES D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA

UNIVERSITAT JAUME·I

S. E. M. C. V. AL-KHWARIZMI

Los días 25, 26 y 27 de abril de 2008 tendrá lugar en la Universitat Jaume I de Castellón las VIII JORNADES DE LA SOCIETAT D'EDUCACIÓ MATEMÀTICA DE LA COMUNITAT VALENCIANA "AL-KHWARIZMI". En la programación se incluyen conferencias, ponencias y una mesa redonda, así como las propuestas aceptadas de comunicaciones, posters i talleres relacionados con la Educación Matemática, la Historia de las Matemáticas, las Tecnologías de la Información y la Comunicación aplicadas a las Matemáticas, la Didáctica de las Matemáticas, y en general, cualquier apartado teórico, práctico o aplicado de las matemáticas. Teneis toda la información en www.semcv.org

# Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

## Comisión Ejecutiva

Presidente: **Serapio García Cuesta**
Secretario General: **Francisco Martín Casalderrey**
Vicepresidente: **Manuel Torralbo Rodríguez**
Tesorera: **Claudia Lázaro del Pozo**

**Secretariados:**
Prensa: **María Peñas Troyano**
Revista SUMA: **Tomás Queralt Llopis/Onofre Monzó del Olmo**
Relaciones internacionales: **Sixto Romero Sánchez**
Publicaciones: **Ricardo Luengo González**
Actividades y formación del profesorado: **Salvador Guerrero Hidalgo**
Actividades con alumnos: **Floreal Gracia Alcaine/Esther López Herrainz**

## Sociedades federadas

**Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya**
Presidenta: Carme Aymerich Padilla
CEIP Rocafonda
C/Tàrrega, 41
08304 Mataró (Barcelona)

**Organización Española para la Coeducación Matemática *Ada Byron***
Presidenta: M.ª Carmen Rodríguez
Almagro, 28. 28010 Madrid

**Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales***
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

**Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas**
Presidenta: Ana Pola Gracia
ICE Universidad de Zaragoza. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza

**Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes***
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

**Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton***
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38208 La Laguna (Tenerife)

**Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán***
Presidente: Antonio Arroyo
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Víllalar, s/n. 09006 Burgos

**Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas**
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

**Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia**
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

**Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)**
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

**Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper***
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

**Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo***
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
C/ Limonero, 28. 28020 Madrid

**Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria**
Presidenta: María José González López
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

**Sociedad Melillense de Educación Matemática**
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades. Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

**Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas *Tornamira***
**Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira***
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática.
Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006 Pamplona

**Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas**
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

**Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima***
Presidente: Javier Galarreta Espinosa
CPR. Avda. de la Paz, 9. 26004 Logroño

**Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)**
Presidente: Manuel Díaz Regueiro
C/ García Abad, 3, 1ºB. 27004 Lugo

**Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi***
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento Didáctica de la Matemática. Apdo. 22045. 46071 Valencia

**Societat Balear de Matemàtiques *Xeix***
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/ Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Islas Baleares


**Servicio de Publicaciones de la FESPM**
Apartado de Correos 590
06080 Badajoz
Información y pedidos: *publicafespm@wanadoo.es*

# Día Escolar de las Matemáticas
## 12 de mayo de 2008
## *Música y Matemáticas*

# NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, Apartado de Correos 498, E-46900 Torrent (Valencia), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los gráficos, diagramas, fotografías y figuras se enviarán impresos en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración. Indíquense los créditos de las fotografías y dibujos.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original impreso ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de un máximo de 625 caracteres contando los blancos, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción al artículo. De este resumen se remitirá también su traducción al inglés.

5. Los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; correo electrónico; sociedad federada a la que pertenecen (si procede) y el resumen en castellano y en inglés deberán ir escritos en una misma hoja aparte.

6. Se enviará también en soporte magnético (disco de tres pulgadas y cuarto con formato PC, CDRom o DVDRom) una copia de los archivo de texto que contenga el artículo y del que contega la hoja con los datos y los resumenes, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quieran incluir. La etiqueta debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda Microsoft Word para Windows o RFT. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF. Para las fotografías se recomienda archivos TIF o BMP y con una definición mínima de 600x600 puntos por pulgada cuadrada.

7. Al menos un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

8. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

9. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.

10. La bibliografía se dispondrá también al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:
    TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.
    En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas*, Labor, Barcelona.
    En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:
    VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ... supone un gran avance (Hernández, 1992). Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ... según Rico (1993).

12. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como -en caso afirmativo- la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.

13. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

# Boletín de suscripción

| **Tarifas** | Suscripción anual | Número suelto |
|---|---|---|
| Particulares | 25 € | 10 € |
| Centros | 40 € | 15 € |
| Europa | 50 € | 20 € |
| Resto del mundo | 60 € | 22 € |

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista SUMA. Apartado de correos 498
46900-Torrent (Valencia)
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista SUMA:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ____________

☐ N.os sueltos ____________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CCC 2077-0347-11-1101452547)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

---

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (fecha y firma):

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

ISSN 1130-488X

9 771130 488006 00057

SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.