suma+ 57
Febrero 2008, pp. 97-104

En las ciudades invisibles IV y V

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

–Marco: Sólo si conoces el residuo de infelicidad que ninguna piedra preciosa llegará a compensar, podrás calcular el número exacto de quilates a que debe tender el diamante final, y no errarás desde el principio los cálculos de tu proyecto.

¿A qué recuerda ese residuo de infelicidad (imperfección, inexactitud) que jamás llega a compensar la piedra más preciosa (fórmula, igualdad) y cuyo conocimiento determina el número exacto de quilates (perfección, igualdad) a la que debe aproximarse el diamante final (sucesión, serie, límite)? Sólo conociendo bien ese residuo evitaremos errores de cálculo, errores en la igualdad.

Esta descripción podría ser una lectura poética de la fórmula de Taylor para el desarrollo de una función como serie de potencias cuyo residuo $E_n(x)$ tiende a cero a medida que n tiende a infinito:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k+E_n(x)$$

Las Matemáticas rebosan de diamantes semejantes. Pero si tuviese que elegir, me quedaría con dos. Uno relaciona el número fundamental con la fracción más elemental y cuya inspiración puede situarse en la paradoja de Aquiles y la tortuga:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$$

Un caso particular de:

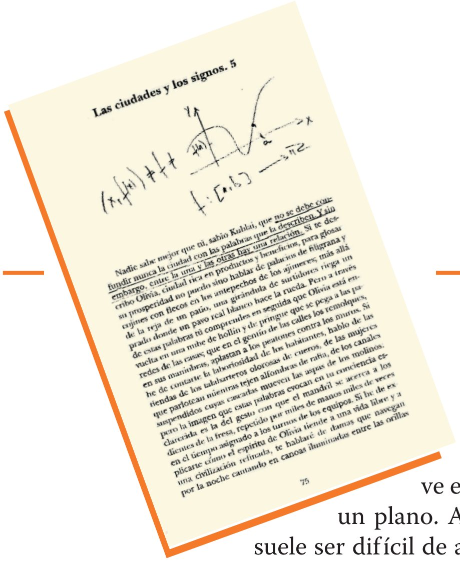
$$\forall x\in(1,+\infty):\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^k}=\frac{1}{x-1}$$

El otro diamante es la función exponencial cuya base lleva por nombre la inicial del apellido de uno de los más grandes matemáticos que haya habido jamás:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$$

Diseño y maquetación FMC

Miquel Albertí Palmer
ciudadesinvisibles@revistasuma.es


Las ciudades y los signos. 5

Nadie sabe mejor que tú, sabio Kublai, que no se debe confundir nunca la ciudad con las palabras que la describen. Y sin embargo, entre la una y las otras hay una relación. Si te describo Olivia, ciudad rica en productos y beneficios, para glosar su prosperidad no puedo sino hablar de palacios de filigrana y cojines con flecos en los antepechos de los ajimeres; más allá de la reja de un patio, una girándula de surtidores riega un prado donde un pavo real blanco hace la rueda. Pero a través de estas palabras tú comprendes en seguida que Olivia está envuelta en una nube de hollín y de pringue que se pega a las paredes de las casas; que en el gentío de las calles los remolques en sus maniobras, aplastan a los peatones contra los muros. Si he de contarte la laboriosidad de los habitantes, hablo de las tiendas de los talabarteros olorosas de cueros, de las mujeres que parlotean mientras tejen alfombras de rafia, de los canales suspendidos cuyas cascadas mueven las aspas de los molinos: pero la imagen que estas palabras evocan en tu conciencia esclarecida es la del gesto con que el mandril se acerca a los dientes de la fresa, repetido por miles de manos miles de veces en el tiempo asignado a los turnos de los equipos. Si he de explicarte cómo el espíritu de Olivia tiende a una vida libre y a una civilización refinada, te hablaré de damas que navegan por la noche cantando en canoas iluminadas entre las orillas

75

Olivia

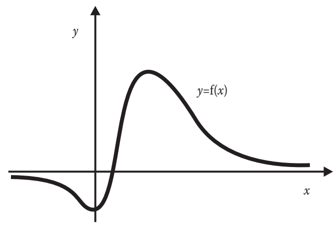
Olivia

La ciudad no es lo que se escucha decir de ella, ni lo que se lee en una guía de viaje, ni lo que se ve en miles de fotografías, ni los trazos delineados en un plano. Algo tan fácil de admitir en el lenguaje corriente suele ser difícil de aceptar en el lenguaje técnico: una curva no es la línea trazada sobre una superficie del espacio, sino la función entre un intervalo real [a, b] y el espacio R^3 en el que se representará su gráfica.

(...)no se debe confundir nunca la ciudad con las palabras que la describen.

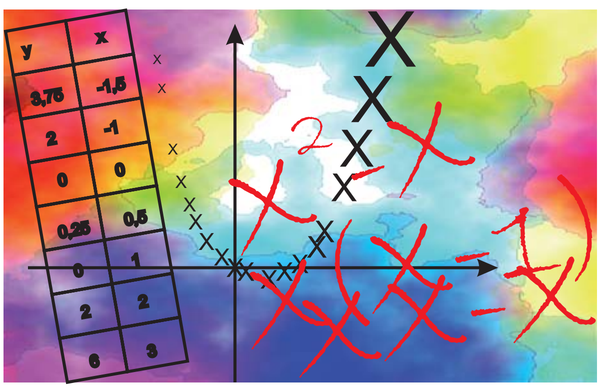
Tampoco debe confundirse una función *f* con ninguna de sus representaciones, ya se trate de una tabla de valores, de una fórmula (expresión algebraica), de una figura (representación gráfica) o de *las palabras que la describen* (expresión verbal):

$$f \neq \text{Tabla de valores } [x, y=f(x)]$$
$$f \neq \text{Graf}(f)=\{(x, y) \in R^2 \ / \ y=f(x)\}$$
$$f \neq f(x)$$



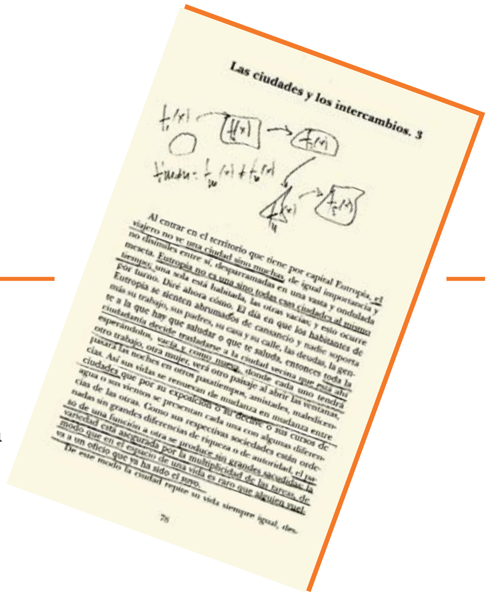
Y sin embargo, entre una y las otras hay una relación.

Evidentemente, existe una relación entre la representación y lo representado, aunque no sea del mismo carácter que el de la función generatriz de dicha representación. Ya puede una gráfica contener todos los puntos, una tabla todos los valores, y una fórmula abarcar todo el dominio. Nada de eso es la función. La función es la correspondencia que asocia un valor con otro y que se manifiesta en cada representación. Una función es invisible.



Olivia: *las funciones invisibles*

Eutropia


Las ciudades y los intercambios. 3

Al entrar en el territorio que tiene por capital Eutropia, el viajero no ve una ciudad sino muchas, de igual importancia y no disímiles entre sí, desparramadas en una vasta y ondulada meseta. Eutropia no es una sino todas esas ciudades al mismo tiempo; una sola está habitada, las otras vacías; y esto ocurre por turno. Diré ahora cómo. El día en que los habitantes de Eutropia se sienten abrumados de cansancio y nadie soporta más su trabajo, sus padres, su casa y su calle, las deudas, la gente a la que hay que saludar o que te saluda, entonces toda la ciudadanía decide trasladarse a la ciudad vecina que está ahí esperándolos, vacía y como nueva, donde cada uno tendrá otro trabajo, otra mujer, verá otro paisaje al abrir las ventanas, pasará las noches en otros pasatiempos, amistades, maledicencias. Así sus vidas se renuevan de mudanza en mudanza entre ciudades que por su exposición o su declive o sus cursos de agua o sus vientos se presentan cada una con algunas diferencias de las otras. Como sus respectivas sociedades están ordenadas sin grandes diferencias de riqueza o de autoridad, el paso de una función a otra se produce sin grandes sacudidas; la variedad está asegurada por la multiplicidad de las tareas, de modo que en el espacio de una vida es raro que alguien vuelva a un oficio que ya ha sido el suyo.

De este modo la ciudad repite su vida siempre igual, des-

78

(...) el viajero no ve una ciudad sino muchas... Eutropia no es una sino todas esas ciudades al mismo tiempo (...)

(...) una sola está habitada, las otras vacías; y esto ocurre por turno. (...) toda la ciudadanía decide trasladarse a la ciudad vecina que está ahí ...vacía y como nueva, donde cada uno tomará otro trabajo, otra mujer (...) sus vidas se renuevan de mudanza en mudanza (...)

(...) el paso de una función a otra se produce sin grandes sacudidas; la variedad está asegurada por la multiplicidad de las tareas, de modo que en el espacio de una vida es raro que alguien vuelva a un oficio que ya ha sido el suyo.

Sola entre todas las ciudades del imperio, Eutropia permanece idéntica a sí misma

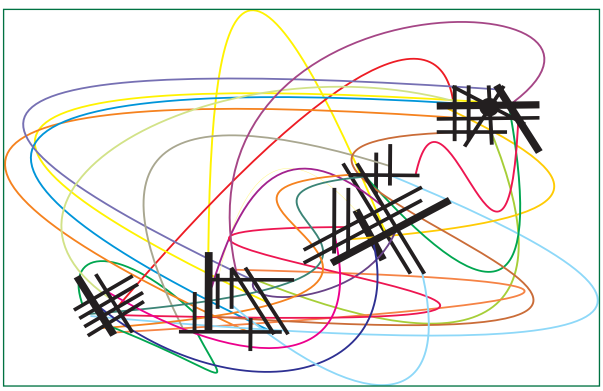
Eutropia no es una sino todas esas ciudades a la vez, una ciudad espacialmente desconexa.

Las mudanzas establecen conexiones entre las partes desconexas de Eutropia haciendo de ella un grafo fuertemente conexo.

En Eutropia es raro que alguien desempeñe dos veces la misma función, que haga el mismo trabajo. A lo largo de su vida un eutropiano x pasa de una tarea a otra sin repeticiones: $\forall m, n \in \mathbf{N}, m<n: f_m(x) \neq f_n(x)$.

Sea $E(t)$ la función que indica cómo es Eutropia en cada instante t. La ciudad permanece idéntica a sí misma si no cambia, si $E(t)$ no varía con respecto al tiempo. En tal caso la función de cambio de $E(t)$, su derivada, es nula $[E'(t) = 0]$ y la ciudad es constante: $E(t) = E(0)=E_0$=cte. Eutropia está muerta.

Pero hay otro modo de ser igual a uno mismo. Y es estar hecho de cambio. Si Eutropia vive en un cambio incesante del que ella misma indica en todo momento su medida, será idéntica a sí misma. Entonces, $E(t)=E'(t)$ y $E(t)=E_0 \cdot e^t$. La ciudad cambia a un ritmo exponencial. ■



Eutropia: *desconexa como espacio, conexa como grafo.*

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Veamos como el término *combinaciones* cobra un sentido matemático más ajustado de lo que en principio parece.

Sea N la ciudad norma y sean $\{C_i\}$ i=1,...,n las ciudades reales que dan lugar a las excepciones o diferencias con la norma: $\{e_i=C_i-N\}$ i=1,...,n. Puesto que las ciudades excepcionales están hechas con *las combinaciones más probables*, cabe preguntarse cuáles son las combinaciones más probables de dichas excepciones. Tenemos 2^n modos de combinar esas n excepciones disponibles y crear así ciudades con 0, 1, 2, 3, 4, 5,..., n excepciones:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}=2^n$$

Para i=0 se obtiene la ciudad sin excepciones, la ciudad norma $E_0=N$. Con i excepciones pueden formarse ciudades excepcionales E_i:

$$\binom{n}{i}=\frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

Si las excepciones son equiprobables, $P(e_i)=2^{-n}$. Considerando como probabilidad de que una ciudad exista la proporción entre las posibles combinaciones de las excepciones que posee y el total de ésas combinaciones, la probabilidad de que exista la ciudad E_i hecha con i excepciones es:

$$P(E_i)=\binom{n}{i}2^{-n}$$

Puesto que $P(N)=P(E_0)=2^{-n}$, la ciudad norma es segura ($P(N)=1$) sólo cuando no hay excepción alguna (n=0). Cuantas más excepciones haya ($n\to\infty$), menos probable será ($P(N)\to 0$).

¿Es cierto que la ciudad excepcional $X=E_n$ hecha con todas las excepciones es absolutamente improbable? Observemos que:

$$P(X)=P(E_n)=\binom{n}{n}2^{-n}=2^{-n}$$

Así que la ciudad excepcional X es igual de probable que la ciudad norma N. Además, disminuir las excepciones aumenta su probabilidad: $n\to 0 \Rightarrow P(X)=P(N)=2^{-n}\to 1$.

Pero si las cosas se llevan muy lejos, como cuando n=0, X y N no sólo comparten probabilidad, sino que son idénticas: $X=E_0=N$.

–Kublai: (...) he construido en mi mente un modelo de ciudad del cual se pueden deducir todas las ciudades posibles. Encierra todo lo que responde a la norma. Como las ciudades existentes se alejan en diferente grado de la norma, me basta prever las excepciones y calcular las combinaciones más probables.

–Marco: También yo he pensado en un modelo de ciudad del cual deduzco todas las otras. Es una ciudad hecha sólo de excepciones. (...) Si una ciudad así es absolutamente improbable,

disminuyendo el número de elementos contrarios a la norma aumentan las posibilidades de que la ciudad verdaderamente exista. Pero no puedo llevar mi operación más allá de ciertos límites: obtendría ciudades demasiado verosímiles para ser verdaderas.

¡He aquí la paradoja expresada por Marco Polo! La reducción excesiva de excepciones produce ciudades demasiado verosímiles para ser verdaderas, demasiado probables como para existir realmente:

P(X)=P(E0)=P(N)=1.

Tomando como base del modelo de ciudad los múltiplos de un número, pueden trazarse modelos de ciudades diferencia. Si C_3 es la ciudad de los múltiplos de 3 y C_7 la de los múltiplos de 7, pueden formarse dos ciudades diferencia:

C_3

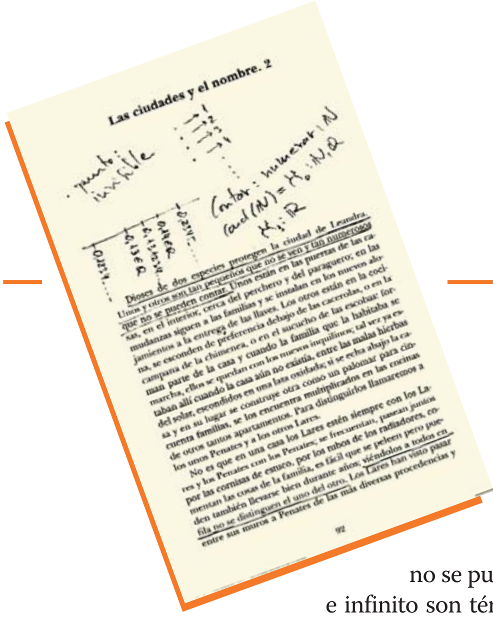
C_7

$C_3 - C_7$

$C_7 - C_3$

Y llegar así a diseñar un modelo matemático para la ciudad excepcional *X* hecha sólo con diferencias. Es decir, la ciudad excepcional *X* formada con todos los números primos.

$X=\{n\in \mathbf{N} \mid n \text{ primo}\}$


Las ciudades y el nombre. 2

· punto invisible

Cantor: numerable N
card(N) = $\aleph_0$: N, Q
$\aleph_1$: R

Dioses de dos especies protegen la ciudad de Leandra. Unos y otros son tan pequeños que no se ven y tan numerosos que no se pueden contar. Unos están en las puertas de las casas, en el interior, cerca del perchero y del paragüero; en las mudanzas siguen a las familias y se instalan en los nuevos alojamientos a la entrega de las llaves. Los otros están en la cocina, se esconden de preferencia debajo de las cacerolas, o en la campana de la chimenea, o en el sucucho de las escobas: forman parte de la casa y cuando la familia que la habitaba se marcha, ellos se quedan con los nuevos inquilinos; tal vez ya estaban allí cuando la casa aún no existía, entre las malas hierbas del solar, escondidos en una lata oxidada; si se echa abajo la casa y en su lugar se construye otra como un palomar para cincuenta familias, se los encuentra multiplicados en las cocinas de otros tantos apartamentos. Para distinguirlos llamaremos a los unos Penates y a los otros Lares.

No es que en una casa los Lares estén siempre con los Lares y los Penates con los Penates; se frecuentan, pasean juntos por las cornisas de estuco, por los tubos de los radiadores, comentan las cosas de la familia, es fácil que se peleen pero pueden también llevarse bien durante años; viéndolos a todos en fila no se distinguen el uno del otro. Los Lares han visto pasar entre sus muros a Penates de las más diversas procedencias y

92

Leandra

Tan pequeños que no se ven... ¿Qué es tan pequeño que no se ve? Sólo hay una cosa que siempre resultará invisible a los ojos de la más avanzada tecnología: el punto matemático. Aunque, no es por una cuestión de tamaño, sino por concepto. ¿Y qué es tan numeroso que no se puede contar? En el lenguaje cotidiano, incontable e infinito son términos usados para calificar tanto lo extraordinariamente numeroso como lo verdaderamente infinito.

Dioses de dos especies protegen la ciudad de Lenadra. Unos y otros tan pequeños que no se ven y tan numerosos que no se pueden contar.

En Matemáticas es distinto porque algo puede contarse si puede establecerse una correspondencia 1-1 entre sus elementos y los números naturales **N**. Y así, algo infinito numerable es el que posee el mismo cardinal que **N**: $\aleph_0$.

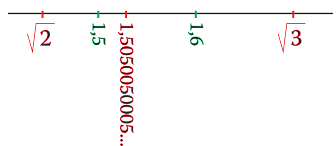
Cuando un conjunto infinito no puede contarse, es decir, no puede ponerse en correspondencia 1-1 con **N**, se dice que es no numerable. George Cantor demostró que el continuo **R**, el conjunto de los números reales, es no numerable. Su cardinal es $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. ¿Es **R** un buen modelo de esos dioses hogareños tan numerosos que ni se ven ni se pueden contar?

Puestos en fila, los Lares y los Penates de Leandra resultan indistinguibles. Más todavía al acomodarse *codo con codo*. Algo parecido sucede con los números racionales, **Q**, y los irracionales, **R**–**Q**, si interpretamos que *codo con codo* se refiere al hecho de intercalarse y no al carácter consecutivo del intercalado.

(...) Viéndolos a todos en fila no se distinguen el uno del otro... A los Penates les toca acomodarse codo con codo con los Lares...

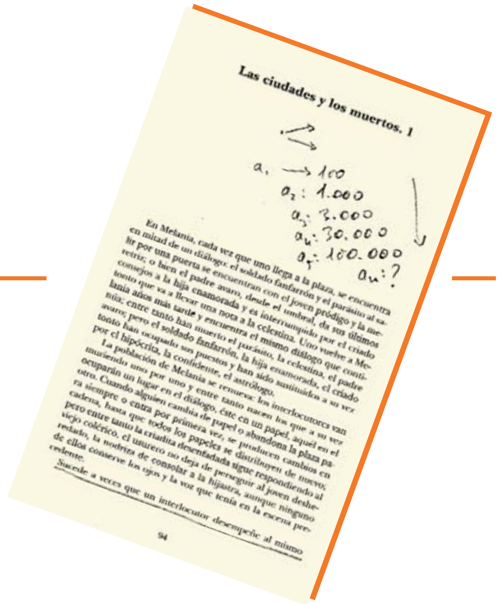
Los números racionales son numerables; los irracionales no. Dando por hecho que el que no se puedan contar se refiere al carácter infinito, un modelo que asocie Lares con **Q** y Penates con **R**–**Q** no parece muy desacertado. Incluso podemos representarlos mediante la estrategia usada por Cantor para demostrar lo innumerable que es **R**. En las hileras, los Lares; en las diagonales, los Penates. En la figura siguiente hay un Penate destacado en rojo.

Leandra: *donde los puntos son dioses.*



Entre dos irracionales hay siempre racionales, y viceversa, entre dos racionales, hay siempre irracionales.

Melania



Sucede a veces que un interlocutor desempeñe al mismo tiempo dos o más papeles... o que un papel se desdoble, se multiplique, se atribuya a cien, a mil habitantes de Melania: tres mil para el hipócrita, treinta mil para el gorrón, cien mil hijos de reyes caídos en desgracia que esperan su reconocimiento.

Cien, mil, tres mil, treinta mil, cien mil. ¿Adónde conduce esta sucesión numérica?

$$\begin{aligned} 100 &= 10^2 \\ 1\,000 &= 10^3 \\ 3\,000 &= 3{\cdot}10^3 \\ 30\,000 &= 3{\cdot}10^4 \\ 100\,000 &= 10^5 \end{aligned}$$

Las potencias de diez no son consecutivas. Y el 3 que las multiplica distorsiona la sucesión. ¿Forman un ritmo los exponentes 2, 3, 3, 4 y 5? ¿Y los productos por tres? La sucesión de exponentes podría ser 233455677899..., pero también podría ser 2233455667, u otra. Los triples parecen alternarse de dos en dos.

Otra opción posible es observar que cada término se multiplica alternativamente por 10 o por 3, pero falla el quinto. Debería ser 90 000, y no 100 000. Reorganizando la serie se aventura aun otra posibilidad:

100	1 000	10 000	100 000
300	3 000	30 000	300 000

¿Zigzaguea Calvino entre 10^n y $3{\cdot}10^n$ siguiendo un patrón geométrico del que nos muestra sólo el principio? ¿Quizá éste?:

10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
$3{\cdot}10^2$	$3{\cdot}10^3$	$3{\cdot}10^4$	$3{\cdot}10^5$	$3{\cdot}10^6$	$3{\cdot}10^7$	$3{\cdot}10^8$

¿O acaso el matemático busca pautas de las que carecen el capricho y el azar? Si esa serie numérica obedece un patrón, también lo establece en los atributos que cuantifica. La pauta que se desprende de 3 000, 30 000 y 100 000 determina otra correspondiente a hipócrita, gorrón y príncipe. Ambos patrones van emparejados. Si no tiene sentido ordenar hipócritas, gorrones y príncipes, ¿qué sentido tiene ordenar 3 000, 30 000 y 100 000?

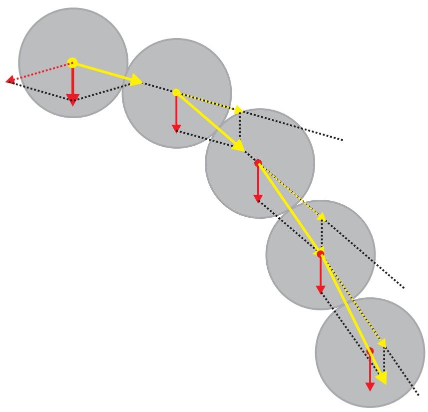
En ***Melania*** *el matemático busca un papel como interlocutor.*

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

¿Un puente sostenido por una línea? Un puente sobre un río sostiene el camino tendido entre las dos orillas, pero ¿qué sostiene al puente? Uno diría que él mismo, el arco trazado por las piedras que lo forman. Pero esa paradoja de que algo se sostenga en aquello de lo que está hecho es desvelada también por Marco Polo. En realidad, un arco sostiene el puente, pero no es el arco visible formado por las piedras, sino el arco de la línea invisible trazado por las fuerzas de carga de esas piedras.

Esa *línea del arco que ellas forman* es la *curva de empuje*, la línea formada por las resultantes de las fuerzas de empuje y peso que cada parte del arco transmite a la inmediatamente inferior. Si la directriz del arco coincide con ella, el arco no cede, no se flexiona:



Sólo el arco catenario se sostiene a sí mismo. Gaudí hizo extenso uso de él aunando así la forma con la estructura. Pero sus obras no estaban destinadas a salvar ríos. Como puente, el arquitecto prefiere el arco parabólico. A la vista resulta prácticamente indistinguible del otro. El primero se caracteriza por soportarse a sí mismo; el segundo, por soportar lo que tiene encima. ■

Marco Polo describe un puente, piedra por piedra.

– Pero ¿cuál es la piedra que sostiene el puente? –pregunta Kublai Jan.

– El puente no está sostenido por esta piedra o por aquélla –responde Marco–, sino por la línea del arco que ellas forman.

Kublai permanece silencioso, reflexionando. Después añade:

–¿Por qué me hablas de las piedras? Lo único que me importa es el arco.

Polo responde:

–Sin piedras no hay arco.