

*La utilización de herramientas informáticas permite utilizar conceptos matemáticos sencillos para describir y estudiar problemas complejos. Este artículo es una propuesta para el aula de 4º de ESO (16 años) en la que se aplican algunos contenidos matemáticos de este curso al estudio, con rigor científico, de un problema real: la existencia de un cambio climático originado por las actividades humanas (calentamiento global antropogénico). Los contenidos matemáticos empleados son: lectura e interpretación de gráficas, pendiente de una recta como medida de variación y dependencia e independencia probabilística.*

*Using computer tools allows the use of easy mathematical concepts to describe and analyse complex problems. This article is meant to be a proposal for a 4º ESO class (16 yrs average), in which some mathematical concepts are applied to scientifically studying a real problem: the evidence of climate change due to human actions (anthropogenic global warming). The mathematical contents involved are: reading and interpreting graphics, slope of a straight line for variation measurement, conditional dependence and independence.*

**E**l cambio climático es, indudablemente, un tema de actualidad y una de las principales cuestiones científicas en estos momentos: ¿Se está produciendo un cambio en el clima? en caso de ser así, ¿son las actividades humanas las responsables? ¿Cuáles serán sus consecuencias?

Si los pronósticos más pesimistas son correctos, los ciudadanos del mundo quizás debamos adoptar complicadas decisiones sobre nuestro cómodo modo de vida actual para evitar esas consecuencias, y esas decisiones debamos empezar a tomarlas ya.

Por el contrario, es posible que no debamos preocuparnos tanto, y que los posibles efectos sean mucho menos graves y fáciles de corregir.

Parece un tema interesante para llevar al aula, pero lejos de las posibilidades de nuestra materia.

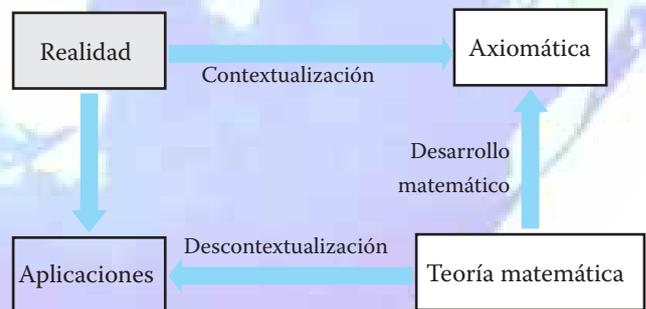
Abordar, con las limitadas herramientas de las Matemáticas de secundaria, ese tipo de cuestiones tan complejas parece una tarea imposible, máxime si queremos hacerlo de forma rigurosa.

Claro que, por otra parte, existen ordenadores, calculadoras...

¿Podemos estudiar de un modo científico y riguroso el cambio climático en secundaria?

Realmente, quizás deberíamos invertir el sentido de la pregunta: ¿Tiene sentido enseñar unas Matemáticas que no permitan estudiar de forma rigurosa esas cuestiones?

El gran matemático Sixto Ríos (1975) definía la Matemática como *el estudio de diversos modelos* y describía el proceso de elaboración de esos modelos mediante el esquema:



En secundaria, nuestros esfuerzos se centran en la enseñanza de desarrollos matemáticos ya elaborados, esencialmente

**Francisco Manuel Rodríguez Mayo**

*IES Miguel Ángel González Estévez  
Vilagarcía de Arousa. Pontevedra*

algoritmos de cálculo numérico y simbólico, pero sólo de forma marginal se aborda su aplicación a problemas reales.

En mi opinión hay al menos dos aspectos que deberían tratarse con mayor profundidad:

- Abrir la posibilidad de emplear otros algoritmos mucho más potentes (TIC, calculadoras gráficas, etc) y valorar más positivamente los algoritmos desarrollados por los propios alumnos.
- Aplicar los conceptos matemáticos a situaciones reales en las que muestren su utilidad.

Son aspectos relacionados. La utilización de TIC permite centrarse en los aspectos *interpretativos* de los modelos y aplicarlos a situaciones totalmente reales.

Este artículo pretende mostrar cómo podemos llevar las Matemáticas que enseñamos un poco más allá y emplearlas en la resolución de problemas reales de forma totalmente rigurosa y científica, utilizando versiones intuitivas de conceptos aparentemente complejos.

Solo necesitaremos algunos datos accesibles en Internet y emplear algunas herramientas simples que cualquiera alumno de bachillerato o incluso de los últimos cursos de la ESO pueden comprender.

Esas herramientas matemáticas son, en este caso, la noción de recta de regresión (no su cálculo) y la dependencia e independencia de sucesos.

### Rectas de regresión

En secundaria, dedicamos una gran cantidad de tiempo a enseñar la manipulación de funciones polinómicas de primer grado: dibujamos sus gráficas, calculamos los puntos de corte de esas gráficas con los ejes de coordenadas, incluso encontramos la fórmula de la función correspondiente a una tabla de valores dada (valores rigurosamente funcionales claro).

Finalmente, algunos alumnos, serán capaces de resolver esos ejercicios con cierta destreza, pero difícilmente serán capaces de aplicar esos conocimientos a situaciones diferentes a las propuestas en el aula ni comprenderán el interés de su aprendizaje.

La aplicación a situaciones reales sólo requiere un pequeño paso más. Introducir la noción de recta de regresión: es la recta que mejor se adapta a un conjunto de puntos.

De considerarlo necesario, se puede proponer un ejemplo de una tabla de valores no estrictamente funcional (peso y estatura, temperaturas en varios días anteriores...) y encontrar la recta

que, a ojo, mejor se adapte a esos valores e, incluso, comparar esa recta con la calculada por un ordenador o calculadora.

### Dependencia e independencia de sucesos

El concepto de independencia de sucesos es difícil de entender pero, al menos en mi comunidad, figura en el currículo de 4º de ESO y también en los libros de texto<sup>1</sup>.

Curiosamente se estudia en situaciones más o menos complicadas de juegos con bolas o naipes pero no en situaciones reales partiendo de tablas de contingencia, mucho más interesantes y sencillas.

Una tabla de contingencia es, simplemente, una tabla de doble entrada:

	<i>B</i>	No <i>B</i>	Totales
<i>A</i>	$n_{11}$	$n_{12}$	$n_{2.} = n_{11} + n_{12}$
No <i>A</i>	$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{2.} = n_{21} + n_{22}$
Totales	$n_{.1} = n_{11} + n_{21}$	$n_{.2} = n_{12} + n_{22}$	$n$

Nuestro interés será contrastar la dependencia o independencia de los sucesos *A* y *B*, comparando sus probabilidades con las que obtendríamos en caso de ser independientes.

Podemos estimar las probabilidades de cada una de las celdas por las frecuencias relativas observadas:

- La probabilidad estimada de la intersección será:

$$P(A \cap B) = \frac{n_{11}}{n}$$

- Si fuesen independientes, la probabilidad estimada sería:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{n_{1.}}{n} \cdot \frac{n_{.1}}{n}$$

Si esos valores son similares, *A* y *B* posiblemente sean independientes y no lo serán en caso contrario.

Podemos limitarnos a esa comparación o aplicar también el mismo razonamiento a las demás celdas:

- Probabilidades observadas:

	<i>B</i>	No <i>B</i>
<i>A</i>	$\frac{n_{11}}{n}$	$\frac{n_{12}}{n}$
No <i>A</i>	$\frac{n_{21}}{n}$	$\frac{n_{22}}{n}$

- Probabilidades suponiendo independencia:

	<i>B</i>	No <i>B</i>
<i>A</i>	$\frac{n_{1-} \cdot n_{-1}}{n^2}$	$\frac{n_{1-} \cdot n_{-2}}{n^2}$
No <i>A</i>	$\frac{n_{2-} \cdot n_{-1}}{n^2}$	$\frac{n_{2-} \cdot n_{-2}}{n^2}$

Como puede observarse, se trata de una versión intuitiva de la prueba Chi-cuadrado<sup>ii</sup>: comparamos las frecuencias relativas observadas con las teóricas en caso de independencia.

### Cambio climático

El cambio es inherente al clima, nuestra preocupación es averiguar si se está produciendo un aumento global de las temperaturas debido a la actividad humana, calentamiento global antropogénico (CGA).

Podemos establecer dos etapas en nuestro estudio:

- Análisis de la situación: para el que, habitualmente, se emplean datos observacionales y datos obtenidos con modelos de simulación.
- Estudio de las posibles consecuencias en caso de que se esté produciendo.

Los datos observacionales son fundamentalmente de dos tipos: datos climáticos directos, obtenidos de mediciones en estaciones meteorológicas que se remontan, como mucho, a principios del siglo pasado y datos indirectos obtenidos, por ejemplo, en testigos de hielo en los polos que recogen datos de hace miles de años.

En los testigos de hielo se mide la concentración de CO<sub>2</sub> en burbujas de aire aprisionadas y las concentraciones de diferentes isótopos variables según la actividad biológica, lo que permite estimar las temperaturas.

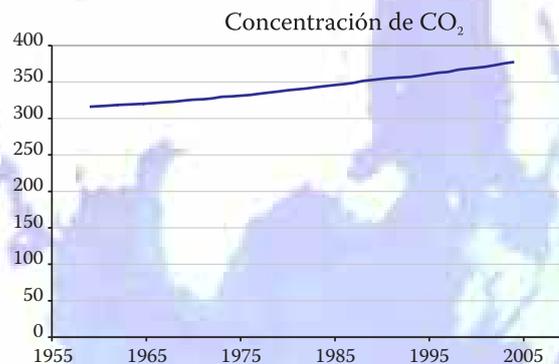
En cuanto a los modelos climáticos, consisten básicamente en simulaciones por ordenador del intercambio de calor en nuestro planeta y su eficacia está muy testada, por lo que sus conclusiones deben, al menos, tenerse en cuenta<sup>iii</sup>.

Este es el panorama en el que nos desenvolveremos pero, curiosamente, para una primera valoración sobre la realidad del CGA, sólo necesitaremos algunos datos accesibles en Internet, algo de matemáticas y herramientas informáticas simples (hoja de cálculo).

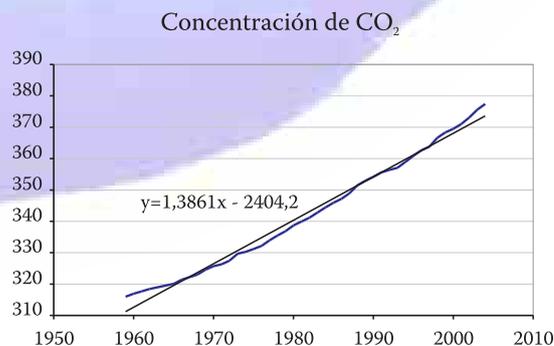
### Analizando datos

Que la cantidad de CO<sub>2</sub> en la atmósfera está aumentando debido a las ingentes cantidades emitidas por las actividades humanas es un dato incontrovertible y que el CO<sub>2</sub> es un gas de efecto invernadero es también conocido y aceptado.

En la gráfica podemos ver la concentración anual media de CO<sub>2</sub> desde 1958, medida en partes por millón:



Añadiendo la recta de regresión<sup>iv</sup> podemos interpretar esos valores con mayor facilidad (se ha cambiado la escala del eje y para facilitar su lectura y se debe tener en cuenta que no empieza en 0):

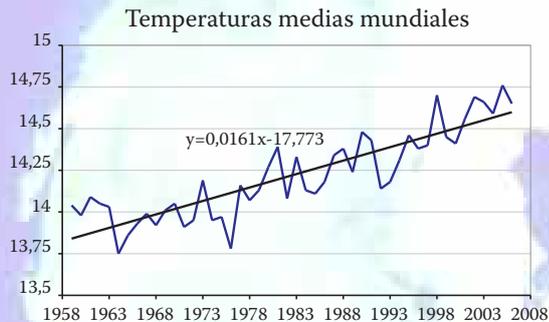


La pendiente de la recta de regresión indica el aumento anual medio, 1,39 ppm/año de CO<sub>2</sub>. 66,5 ppm desde 1958 (un 21%).

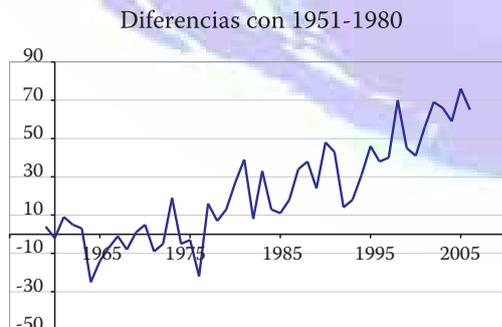
*El cambio es inherente al clima, nuestra preocupación es averiguar si se está produciendo un aumento global de las temperaturas debido a la actividad humana, calentamiento global antropogénico (CGA).*

También podemos apreciar que se está produciendo un aumento cada vez más rápido y que, posiblemente, se obtenga un mejor ajuste empleando una función exponencial o en parte exponencial ( $y = c + a \cdot b^x$ ), pero la interpretación resulta mucho más fácil con la recta de regresión.

En la siguiente gráfica aparecen las temperaturas anuales medias calculadas en base a una serie de estaciones meteorológicas de todo el mundo y la recta de regresión correspondiente.



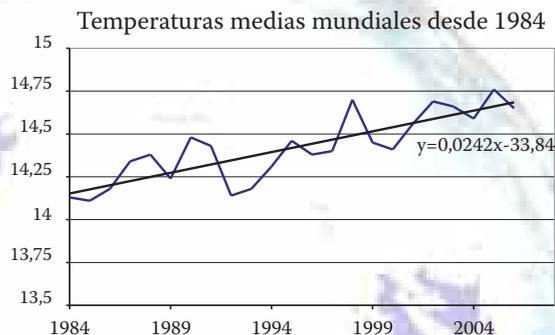
Puede observarse que la evolución de las temperaturas dista mucho de ser lineal pero sí se constata un aumento anual gradual de 0,0161 °C, similar a los 0,15 °C por década mencionados en el informe del IPCC.



Este gráfico, igualmente clarificador, corresponde a las diferencias entre la temperatura media anual y la media correspondiente al período 1951-1980.

En la gráfica de la concentración de CO<sub>2</sub> se aprecia un aumento cada vez más rápido de la concentración. ¿También se está produciendo ese aumento acelerado en las temperaturas?

Podemos comprobarlo estudiando sólo los últimos 20 años:

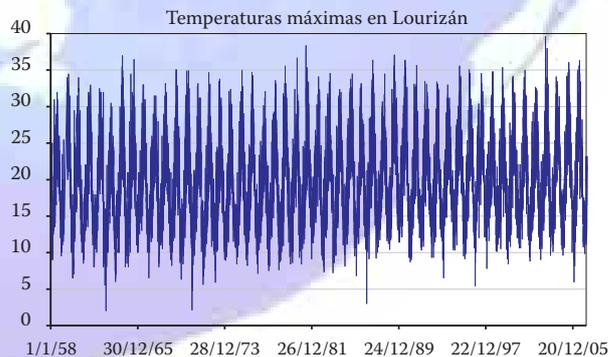


La pendiente de la recta de regresión es muy superior a la obtenida para el período 1958–2007, lo que confirma la aceleración en el aumento de las temperaturas<sup>9</sup>.

### Cambio climático: ¿También aquí?

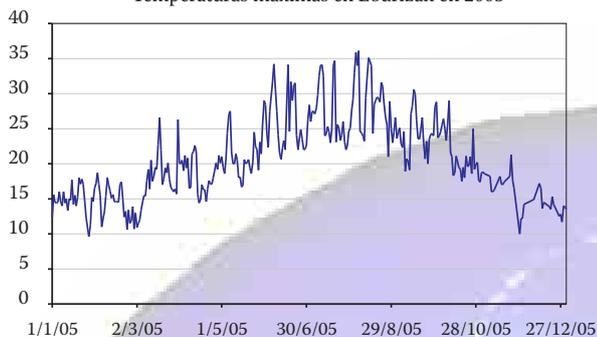
Los datos de la red de estaciones meteorológicas de Galicia permiten estudiar si también aquí se está produciendo un aumento de las temperaturas.

La gráfica recoge las temperaturas máximas diarias en Luorizán, Pontevedra (la estación meteorológica gallega que registra datos más antiguos, desde 1958)<sup>vi</sup>:



El grosor de la línea corresponde a las variaciones diarias de la temperatura y las oscilaciones a las variaciones estacionales a lo largo de un año. La gráfica de las temperaturas máximas durante 2005 permite apreciarlo con más detalle:

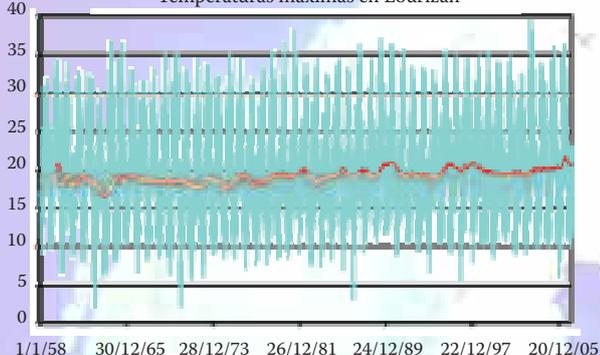
Temperaturas máximas en Lourizán en 2005



Estos datos forman una serie temporal y, para facilitar su interpretación, debemos eliminar las variaciones diarias y estacionales.

Uno de los métodos más habituales para hacerlo es el de medias móviles que consiste en sustituir cada uno de los datos por la media de, en este caso, los 365 días anteriores.

Temperaturas máximas en Lourizán



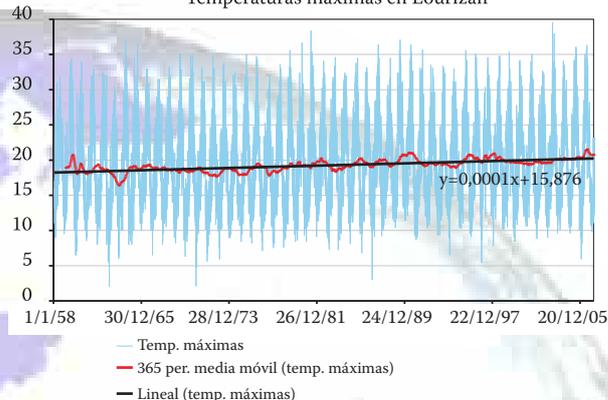
La línea de medias móviles permite comprobar que, con oscilaciones, las temperaturas máximas han aumentado en el período estudiado: hasta 1980 la línea está casi constantemente por debajo de 20° y de 1980 en adelante está por encima.

*Uno de los métodos más habituales para eliminar las variaciones diarias y estacionales es el de medias móviles, que consiste en sustituir cada uno de los datos por la media de, en nuestro caso, los 365 días anteriores.*

Esta línea también permite apreciar oscilaciones en las temperaturas que pueden abarcar varios años (un período con máximas bajas en 1962 – 64, por ejemplo).

Si incluimos además la recta de regresión, podemos incluso cuantificar el aumento producido.

Temperaturas máximas en Lourizán



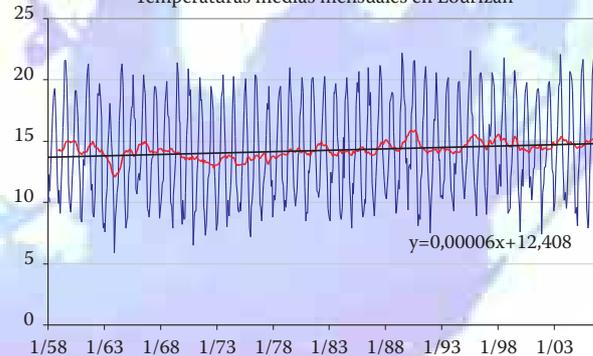
La ecuación de esa recta es:

$$y = 0,0001142x + 15,8770.$$

Su pendiente es la variación diaria media de la temperatura máxima en Lourizán desde 1958, aumenta 0,0001142 °C/día, es decir 0,04 °C/año, unas tres veces el aumento medio mundial calculado por el IPCC, si bien debemos destacar que se trata de temperaturas máximas y no de temperaturas medias.

Podemos repetir el estudio con las temperaturas medias mensuales:

Temperaturas medias mensuales en Lourizán

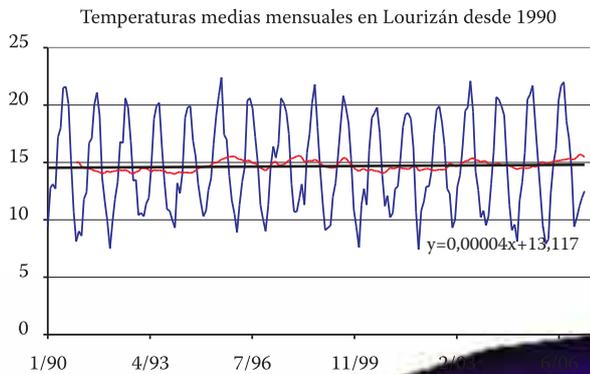


En este caso, la ecuación de la recta de regresión es:

$$y = 0,000061482x + 12,965.$$

La pendiente indica un aumento medio de 0,000615 °C/mes, 0,0074 °C/año, la mitad del calculado por el IPCC.

Comprobemos si, también en Lourizán, el aumento de temperaturas es cada vez más rápido:



La pendiente de la recta de regresión es ligeramente menor que la correspondiente al período 1958-2007. En Lourizán, el aumento de temperaturas no parece estar acelerándose en estos últimos años.

### Primeras conclusiones

Los datos anteriores indican la existencia de un aumento de la temperatura en el planeta pero, ¿podemos afirmar que se debe a las emisiones de gases de efecto invernadero?

Establecer relaciones causa efecto en situaciones complejas no es fácil. El método seguido habitualmente por la ciencia puede aclararnos un poco las ideas.

- Se comprueba la relación estadística entre el efecto y las posibles causas. Los análisis anteriores establecen esa relación.
- Se investiga en laboratorio si existe algún mecanismo para que esos factores originen los efectos observados. Ese mecanismo también está perfectamente estudiado, es el efecto invernadero.

Parece clara la existencia de un CGA que también afecta aquí.

También se evidencia que la relación es muy compleja. Aquí solo estamos considerando una única variable, la concentración de CO<sub>2</sub>, pero es claro que existen muchos otros gases de efecto invernadero que deberíamos tener en cuenta (algunos mucho más eficaces que el CO<sub>2</sub> como el metano) y muchas otras variables a considerar.

También se aprecian algunas incoherencias, en especial las diferencias entre la evolución de la concentración de CO<sub>2</sub> y la de las temperaturas.

Si observamos las gráficas, puede apreciarse claramente que la concentración de CO<sub>2</sub> parece aumentar de forma exponencial, cosa que no parece tener un reflejo en las temperaturas, algo que debe ser explicado<sup>ii</sup>.

### Las consecuencias

Este es un terreno mucho más resbaladizo. Se habla de aumento del nivel del mar, de acidificación de los océanos, pérdida de sincronía entre los ciclos vitales de diferentes animales y plantas, aumento de fenómenos catastróficos, ...

Unos simples cálculos nos permiten descubrir qué sucedería si todo el hielo de Groenlandia se derritiese.

Groenlandia está cubierta por una inmensa capa de hielo de 1,71 millones de Km<sup>2</sup> de superficie y una altura media de 2135 m. (<http://www.wikipedia.org>). Unos 2,85·10<sup>6</sup> km<sup>3</sup>.

Calculamos la superficie del mar (3/4 de la terrestre):

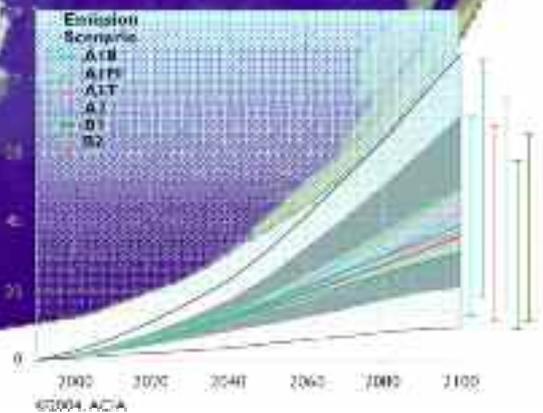
$$S = 4pr^2 \frac{3}{4} = 3p6372^2 = 3,83 \cdot 10^8 \text{ km}^2$$

Calculamos la altura de un cuerpo con base la superficie del mar y volumen igual al del hielo de Groenlandia:

$$\text{altura} = \frac{2,85 \cdot 10^6}{3,83 \cdot 10^8} = 0,0074 \text{ km} = 7,4 \text{ m}$$

Pero esta predicción parece demasiado catastrofista. Sólo las simulaciones más pesimistas, con aumentos de temperatura de 8°C, llegan a esta conclusión y solo después de cientos de años.

El gráfico muestra las estimaciones sobre el aumento del nivel del mar obtenidas con diferentes escenarios de emisión de CO<sub>2</sub>.



Arctic Climate Impact Assessment (ACIA)

http://visibleearth.nasa.gov/view\_rec.php?id=787

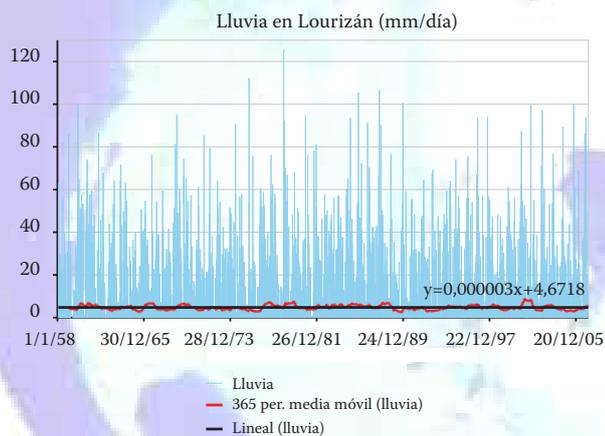
Los estudios sobre la evolución de la capa de hielo en Groenlandia muestran que efectivamente se está derritiendo por los bordes pero también recogen un aumento de espesor en la zona central (el mapa muestra esa evolución, las líneas indican las zonas en las que se realizan las mediciones empleando radar desde aviones) aunque sí parece estar produciéndose una disminución neta en la cantidad de hielo.

En cualquier caso, ese aumento del nivel del mar sería paulatino a lo largo de décadas o incluso siglos. Claro que, para un país como el nuestro, ligeros aumentos del nivel del mar pueden tener muy desagradables consecuencias económicas al reducirse o incluso desaparecer muchas de nuestras playas.

### Las consecuencias del CGA aquí

El aumento de fenómenos catastróficos es otro posible efecto del CGA. Lluvias torrenciales, olas de calor, vientos huracanados forman un terrible panorama. ¿Está aumentando ese tipo de fenómenos?

Podemos valorar, por ejemplo, si se aprecia un cambio significativo en el régimen de lluvias en Lourizán:

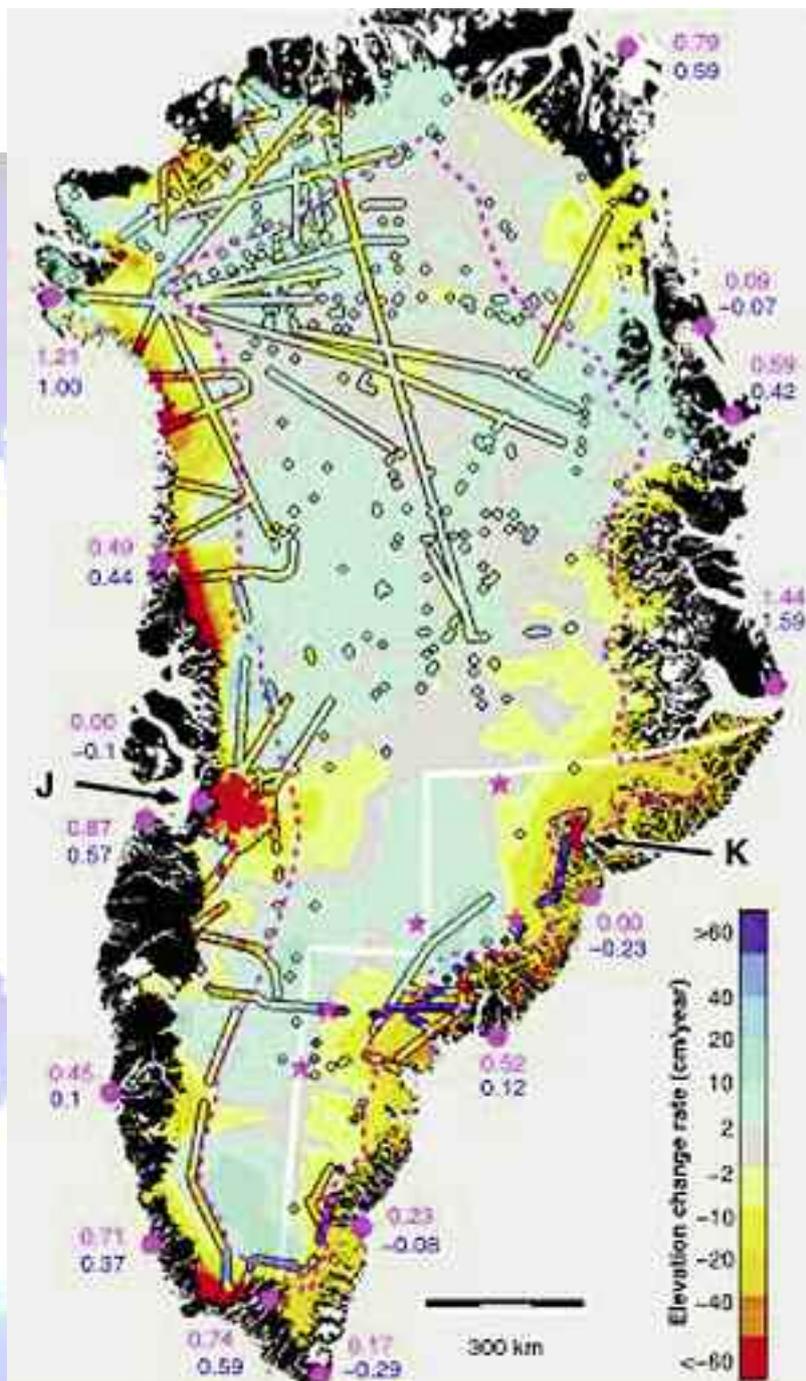


La pendiente de la recta de regresión es 0,00000309 mm/día, una variación casi insignificante de 0,001127 mm/año.

No llueve más, pero quizás lo haga de forma más concentrada. ¿Se producen más lluvias torrenciales (más de 50 mm/m<sup>2</sup>-día)?

Construimos la siguiente tabla de contingencia<sup>viii</sup>:

	Lluvia >50	Lluvia <50	Total
Antes 1990	120	11446	11566
Después 1990	59	6253	6312
Total	179	17878	18057



<http://www.nasa.gov/vision/earth/lookingatearth/thinningice.html>

Para comprobar si existe alguna relación entre las dos variables, comparamos las probabilidades de cada celda con las que se obtendrían si suponemos que son independientes (en ese caso las probabilidades de las celdas serían el producto de la probabilidad de la fila por la de la columna en la que se encuentra):

Probabilidades observadas		
	Lluvia <50	Lluvia >50
Antes 1990	0,00671	0,64023
Después 1990	0,00330	0,34976

Probabilidades suponiendo independencia		
	Lluvia <50	Lluvia >50
Antes 1990	0,00648	0,64046
Después 1990	0,00354	0,34952

No hay diferencias significativas entre las dos tablas. No podemos afirmar que se esté produciendo un aumento en la intensidad de las precipitaciones en Lourizán.

También podemos estudiar el número de días con temperaturas máximas muy elevadas (35 °C en Lourizán es una temperatura muy alta):

	Temp. max. >35	Temp. max. <35	Total
Antes 1990	13	11552	11565
Después 1990	16	6253	6269
Total	29	17805	17834

Probabilidades observadas		
	Temp. max. >35	Temp. max. <35
Antes 1990	0,000729	0,647751
Después 1990	0,000897	0,350622

## NOTAS

i En el libro de texto que elegimos en nuestro centro para 4º ESO, se define la independencia de experimentos de forma incorrecta: *Dos o más experiencias aleatorias se llaman independientes cuando el resultado de una de ellas no depende del resultado de las demás.*

ii La prueba Chi-cuadrado es una de las más empleadas. Permite comparar las frecuencias observadas en un experimento con las que deberíamos obtener de darse una cierta hipótesis:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

Donde  $n_i$  frecuencias observadas y  $np_i$  frecuencias esperada.

El estadístico  $\chi^2$  sigue una distribución Chi-cuadrado, si su valor está dentro de los márgenes de confianza establecidos, se considerará que los resultados del experimento encajan con la hipótesis que se deseaba contrastar.

iii Es curioso que predecir el tiempo que hará en Galicia en los próximos diez días esté más allá de las capacidades de los modelos pero sí sea posible estimar con razonable exactitud la evolución del clima en el planeta en cientos de años.

Las razones de esa aparente contradicción son fáciles de entender, los modelos globales sólo deben tener en cuenta unas pocas variables (emisión de energía por el Sol, absorción por la atmósfera, albedo...) pero los modelos locales deben describir el comportamiento de la atmósfera y, dado que describir el comportamiento de cada átomo es imposible, se divide la atmósfera en prismas (elementos finitos) y se estudia la evolución de esos elementos (movimiento, intercambios de calor entre ellos y con el

mar y la tierra, etc.). Son modelos aproximados y sus predicciones necesariamente limitadas.

iv Para calcular la recta de regresión, sólo necesitamos utilizar la correspondiente función de la hoja de cálculo (solo algunas pulsaciones del ratón).

v Este resultado contradice las afirmaciones de Antón Uriarte Cantollo en su enormemente interesante artículo *Protocolo de Kioto, opinión de un disidente.*

vi Lourizán está justo a orillas del mar, en la Ría de Pontevedra. Esta estación proporciona dos series de datos: manuales, de 1958 a 2005, y automáticos de 2001 en adelante.

Eso obliga a mezclar datos de las dos series, si queremos abarcar desde 1958 a la actualidad. Datos que no son exactamente iguales.

Para evitar esas diferencias, se comparan en el intervalo común (2001-2005) y se compensa la diferencia (0,46°C mayor para las temperaturas de la serie automática).

Es posible que esa compensación provoque un cierto desajuste. En cualquier caso, la influencia en el análisis de esos valores no parece muy importante.

vii Esa explicación ya existe: el CO<sub>2</sub> absorbe sólo un estrecho intervalo de longitudes de onda que, en la actualidad, ya está bastante saturado por lo que, para un cierto incremento de temperatura, se necesitan cantidades cada vez mayores de CO<sub>2</sub>.

viii La tabla puede construirse fácilmente *a mano* si la cantidad de datos no es muy alta, lo que no es el caso (unos 18000). Las hojas de cálculo permiten construir esa tabla de forma automática pero es necesario una cierta soltura en su manejo.

Probabilidades suponiendo independencia		
	Temp. max. >35	Temp. max. <35
Antes 1990	0,001054	0,647426
Después 1990	0,000572	0,350948

En esta ocasión sí que parece apreciarse una mayor probabilidad de que se produzcan días con temperaturas mayores de 35 °C desde el año 1990, si bien se trata de fenómenos muy poco frecuentes. ■

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

RIOS, SIXTO (1975): *Métodos Estadísticos*, Ediciones del Castillo, Madrid.

En Internet:

Imágenes y datos de deshielo en Groenlandia, NASA:  
<http://www.nasa.gov>

Estimación del aumento del nivel del mar:  
<http://www.acia.uaf.edu/pages/overview.html>

Datos de Groenlandia: <http://www.wikipedia.org>

Datos meteorológicos y de emisiones de CO<sub>2</sub>:

De Lourizán, Galicia: <http://www.meteogalicia.es>

Mundiales, Carbon Dioxide Information Analysis Center:  
<http://cdiac.esd.ornl.gov/home.html>.

Informe del IPCC: <http://www.ipcc.ch>

Artículo de Antón Uriarte Cantollo:  
<http://antonuriarte.blogspot.com>

---

## Fe de erratas de SUMA 55

**Artículo: Joyas matemáticas de una caja de música**

Pág. 15, columna izquierda. Donde dice:

"...nota inmediatamente anterior mediante el factor  $21/12$ . Y..."

Debería decir:

"...nota inmediatamente anterior mediante el factor  $2^{1/12}$ . Y..."