SUMA 55
Junio 2007, pp. 101-108

En las ciudades invisibles II

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Los futuros no realizados son sólo ramas del pasado: ramas secas.

El modelo del presente como un punto que recorre la recta del tiempo dejando el pasado a la izquierda y el futuro a la derecha, es demasiado simple. Calvino admite más de un posible futuro aunque al final sólo vivamos uno de ellos, ya sea por voluntad propia o impuesta. Los demás dejan inmediatamente de pertenecer tanto a nuestro futuro como a nuestro pasado.

Todo el mundo tiene alguna rama seca. La felicidad o infelicidad presentes endulzan o amargan su recuerdo. El sistema de Calvino es el de las bifurcaciones de las ramas de un árbol y como tal, las bifurcaciones en cada momento pueden ser múltiples. En cada instante t podemos considerar dos funciones. Una, $F(t)$, el número de futuros posibles que se nos plantean. La otra, $D(t)$, la capacidad de decisión para elegir uno de esos futuros, es decir, el número de futuros sobre los que tenemos poder para decidir.

Si la esperanza de vida de una persona es de a años. Podemos suponer que nacemos con una infinidad de futuros posibles, pero morimos con uno solo ($F(0)=\infty$, $F(a)=1$). Además, los futuros posibles decrecen a lo largo de la vida ($F'(t)<0$). No es difícil hallar una función continua con estas características:

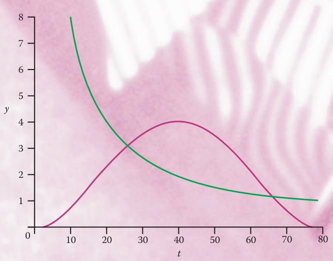
$$F(t)=\frac{a}{t}$$

Por lo que respecta a $D(t)$:

1. Nacemos y morimos con nula capacidad de decisión ($D(0)=D(a)=0$).
2. Hacia la mitad de la vida, cénit de la madurez, la capacidad de decisión es máxima ($D'(a/2)=0$, $D''(a/2)<0$).
3. Si n es el valor de ése máximo, es decir, el mayor número de futuros a considerar y sobre los que podemos decidir, entonces: $D(a/2)=n$.
4. Tanto el aumento de la capacidad de decisión tras el nacimiento como su mengua previa a la muerte comienzan y acaban en 0: $D'(0)=D'(a)=0$.

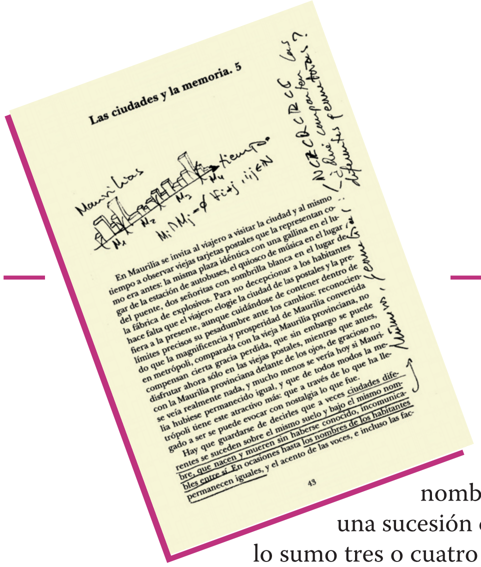
Existe un polinomio que verifica esas premisas: $D(t)=\frac{16n}{a^4}t^2(a-t)^2$

Si $a=80$ años y $n=4$, la capacidad de decisión está por encima de los futuros posibles en el intervalo [26, 67], aproximadamente la del gráfico. ■



Diseño y maquetación FMC

Miquel Albertí Palmer
ciudadesinvisibles@revistasuma.es


Las ciudades y la memoria. 5

En Maurilia se invita al viajero a visitar la ciudad y al mismo tiempo a observar viejas tarjetas postales que la representan como era antes: la misma plaza idéntica con una gallina en el lugar de la estación de autobuses, el quiosco de música en el lugar del puente, dos señoritas con sombrilla blanca en el lugar de la fábrica de explosivos. Para no decepcionar a los habitantes hace falta que el viajero elogie la ciudad de las postales y la prefiera a la presente, aunque cuidándose de contener dentro de límites precisos su pesadumbre ante los cambios: reconociendo que la magnificencia y prosperidad de Maurilia convertida en metrópoli, comparada con la vieja Maurilia provinciana, no compensan cierta gracia perdida, que sin embargo se puede disfrutar ahora sólo en las viejas postales, mientras que antes, con la Maurilia provinciana delante de los ojos, de gracioso no se veía realmente nada, y mucho menos se vería hoy si Maurilia hubiese permanecido igual, y que de todos modos la metrópoli tiene este atractivo más: que a través de lo que ha llegado a ser se puede evocar con nostalgia lo que fue.

Hay que guardarse de decirles que a veces ciudades diferentes se suceden sobre el mismo suelo y bajo el mismo nombre, que nacen y mueren sin haberse conocido, incomunicables entre sí. En ocasiones hasta los nombres de los habitantes permanecen iguales, y el acento de las voces, e incluso las fac-

43

Maurilia

Maurilia

La Maurilia M_n del instante n es distinta de su sucesora M_{n+1}. Comparten únicamente el nombre y el lugar en el que se desarrollan formando una sucesión disjunta, cada uno de sus términos abarcando a lo sumo tres o cuatro generaciones:

$$M_i \cap M_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

> *...ciudades diferentes se suceden sobre el mismo suelo y bajo el mismo nombre, ..., incomunicables entre sí.*

Una ciudad acorde con la idea de las Matemáticas que tenía Poincaré, para quien consistían en *dar el mismo nombre a cosas diferentes*. Un guante, un pañuelo, una canica, un folio, una cuerda, un calcetín, todos son homeomorfos a un punto.

> *Es inútil preguntarse si éstos son mejores o peores que los antiguos, dado que no existe entre ellos ninguna relación, (...)*

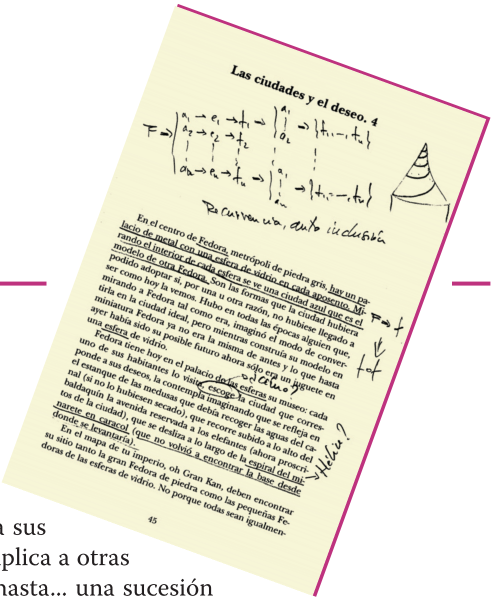
Pero no es necesario ir al ámbito topològico para ver que cosas de apariencia distinta tienen fondos comunes. Bajo el mismo nombre de *número* se han sucedido a lo largo de la Historia multitud de concepciones distintas de la cantidad.

En eso Maurilia se distingue del mundo matemático. Cierto es que no hay ninguna relación entre las personas que tienen las ideas y que han hecho que el *número* se desarrollase, pero aunque nuestros abuelos pitagóricos no lograsen digerir los irracionales ni imaginar siquiera los complejos, y a pesar de que, generación tras generación, los niños siguen encontrando dificultades para asimilar los enteros, la relación entre ellos no puede ser más sólida:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

No es el tiempo lo que determina ese orden, sino su capacidad. Los números situados más a la derecha resuelven problemas irresolubles para los que están a su izquierda aunque éstos les sirvieron de base. ■

La incomunicación entre **Maurilias** *sucesivas imposibilita su progreso confundiéndolo con el cambio.*



Las ciudades y el deseo. 4

En el centro de Fedora, metrópoli de piedra gris, hay un palacio de metal con una esfera de vidrio en cada aposento. Mirando el interior de cada esfera se ve una ciudad azul que es el modelo de otra Fedora. Son las formas que la ciudad hubiera podido adoptar si, por una u otra razón, no hubiese llegado a ser como hoy la vemos. Hubo en todas las épocas alguien que, mirando a Fedora tal como era, imaginó el modo de convertirla en la ciudad ideal, pero mientras construía su modelo en miniatura Fedora ya no era la misma de antes y lo que hasta ayer había sido su posible futuro ahora sólo era un juguete en una esfera de vidrio.

Fedora tiene hoy en el palacio de las esferas su museo: cada uno de sus habitantes lo visita, escoge la ciudad que corresponde a sus deseos, la contempla imaginando que se refleja en el estanque de las medusas que debía recoger las aguas del canal (si no lo hubiesen secado), que recorre subido a lo alto del baldaquín la avenida reservada a los elefantes (ahora proscritos de la ciudad), que se desliza a lo largo de la espiral del minarete en caracol (que no volvió a encontrar la base desde donde se levantaría).

En el mapa de tu imperio, oh Gran Kan, deben encontrar su sitio tanto la gran Fedora de piedra como las pequeñas Fedoras de las esferas de vidrio. No porque todas sean igualmen-

45

$F \Rightarrow \left| \begin{matrix} a_1 \to e_1 \to f_1 \to \\ a_2 \to e_2 \to f_2 \\ \vdots \\ a_n \to e_n \to f_n \to \end{matrix} \right.$ $\{f_1, \ldots, f_n\}$

Recurrencia, auto inclusión

$F \Rightarrow f$

$f \Rightarrow f$

¿Cómo?

¿Hélice?

Fedora

(...), hay un palacio de metal con una esfera de vidrio en cada aposento. Mirando el interior de cada esfera se ve una ciudad azul que es el modelo de otra Fedora.

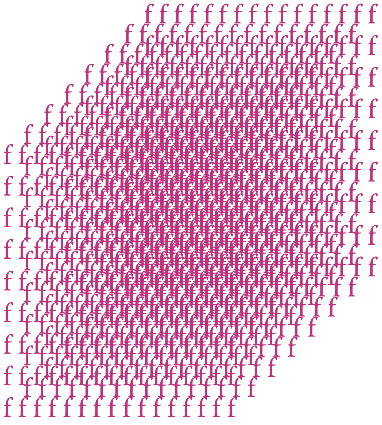
Caracterizándose Fedora por tener un palacio de las esferas cabe suponer que también las fedoras envidriadas lo poseen, lo que desata la recurrencia. La primera Fedora (F) implica sus representaciones (F⇒f), cada una de éstas implica a otras fedoras a su vez (f⇒f), y así sucesivamente, hasta... una sucesión ilimitada de fedoras:

[F⇒f] ⇒ [f⇒f] ⇒ [F⇒ f, f, f...]

Esta capacidad iguala el carácter existencial de la primera ciudad con el de las demás, por lo que absolutamente todas comparten el mismo grado de ficción o realidad, algo que de haber pasado por alto la interpretación recurrente quedaría más en entredicho. Lógico es, por tanto, que esa configuración *autoinclusiva* sólo tenga sentido considerando que todas ellas son, como dice Marco Polo, *supuestas*.

En el mapa de tu gran imperio, oh Gran Jan, deben encontrar su sitio tanto la gran Fedora de piedra como las pequeñas Fedoras de las esferas de vidrio. No porque todas sean igualmente reales, sino porque todas son sólo supuestas.

La primera Fedora no se distingue de sus reproducciones. Es tan virtual como ellas. Un mapa que registre la primera debe registrar también aquellas que poseen su naturaleza. El mapa las iguala. ■



***Fedora**: encerrada en sí misma hasta la saciedad.*

Zoe

Crear esa ciudad de diferencias no supone tanto esfuerzo como uno se imagina, ya que no es necesario visitar todos los posibles pares de ciudades para establecer las diferencias. De hecho, de las diferencias entre ciudades consecutivas se desprenden todas las demás. Si c_1, c_2, c_3, y c_4 son las ciudades visitadas, conociendo tres diferencias $c_1-c_2=a$, $c_2-c_3=b$, $c_3-c_4=c$, se obtienen las restantes:

Cada hombre lleva en su mente una ciudad hecha sólo de diferencias...

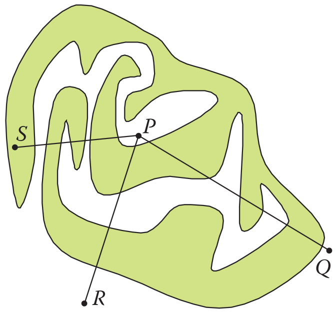
$$c_1 - c_2 = a$$
$$c_1 - c_3 = a + b$$
$$c_2 - c_3 = b \qquad c_1 - c_4 = a + b + c$$
$$c_2 - c_4 = b + c$$
$$c_3 - c_4 = c$$

Las otras diferencias se hallan sumando las tres primeras ya conocidas. Lo mismo vale para más de cuatro.

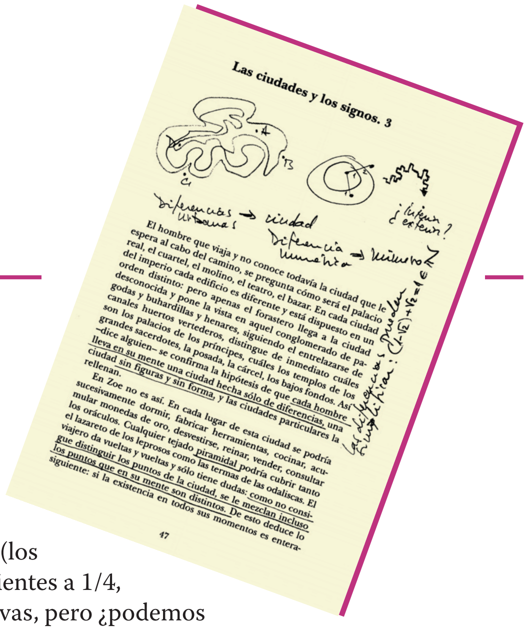
La pregunta puede interpretarse de varias formas. ¿Se refiere a la existencia de tal línea? ¿Quizá a qué línea concreta de una serie de líneas? ¿O tal vez al carácter de la línea ya existente?

¿Qué línea separa el dentro del fuera...?

La frontera de un recinto bidimensional conexo suele ser una curva tradicional continua y cerrada. El teorema de Jordan dice que una curva semejante que no se corte a sí misma divide el plano en dos regiones disjuntas y conexas. Una es acotada –llamada interior–, y la otra no es acotada –llamada exterior. Decidir si un punto determinado pertenece a una región o a la otra depende de si es par o impar el número de cortes (intersecciones no tangenciales) de un segmento que una el punto dónde nos hallamos con un punto cualquiera de la región exterior. En la figura de la derecha el punto P se halla en el exterior de la curva porque el segmento PQ la corta un número par de veces: seis. Igual sucede con PR, que la corta en cuatro ocasiones. En cambio S está dentro porque el segmento PS corta la curva siete veces.



Pero determinar el número de intersecciones puede ser difícil. En el caso de una curva fractal las intersecciones pueden ser infinitas, como en la frontera del conjunto de Mandelbrot. Además, de esas curvas no se puede tener una imagen completa y definitiva, ya que son curvas recurrentes en las que cualquier representación, por muy afinada que sea, es sólo un estadio de los infinitos que se necesitan para completarla. No se pueden contar los cortes y debemos basarnos en su expresión analítica para ver si un punto verifica o no la descripción correspondiente.

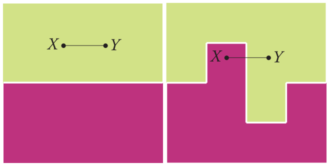

Las ciudades y los signos. 3

El hombre que viaja y no conoce todavía la ciudad que le espera al cabo del camino, se pregunta cómo será el palacio real, el cuartel, el molino, el teatro, el bazar. En cada ciudad del imperio cada edificio es diferente y está dispuesto en un orden distinto: pero apenas el forastero llega a la ciudad desconocida y pone la vista en aquel conglomerado de pagodas y buhardillas y henares, siguiendo el entrelazarse de canales huertos vertederos, distingue de inmediato cuáles son los palacios de los príncipes, cuáles los templos de los grandes sacerdotes, la posada, la cárcel, los bajos fondos. Así –dice alguien– se confirma la hipótesis de que cada hombre lleva en su mente una ciudad hecha sólo de diferencias, una ciudad sin figuras y sin forma, y las ciudades particulares la rellenan.

En Zoe no es así. En cada lugar de esta ciudad se podría sucesivamente dormir, fabricar herramientas, cocinar, acumular monedas de oro, desvestirse, reinar, vender, consultar los oráculos. Cualquier tejado piramidal podría cubrir tanto el lazareto de los leprosos como las termas de las odaliscas. El viajero da vueltas y vueltas y sólo tiene dudas: como no consigue distinguir los puntos de la ciudad, se le mezclan incluso los puntos que en su mente son distintos. De esto deduce lo siguiente: si la existencia en todos sus momentos es entera-

47

Zoe



Por ejemplo, en una orilla semejante a una versión de la curva de von Koch (véase la figura de la izquierda), podemos asegurar que los cinco puntos que dividen en cuatro partes cada segmento (los extremos 0 y 1, y los interiores correspondientes a 1/4, 2/4 y 3/4) estarán en todas las orillas sucesivas, pero ¿podemos asegurar que los puntos X e Y que al principio flotan en el agua estarán al final de la iteración en la orilla? Sólo podemos saberlo si conocemos su posición exacta, sus coordenadas, y averiguar si acabarán siendo capturados por el proceso recursivo que traza la curva.

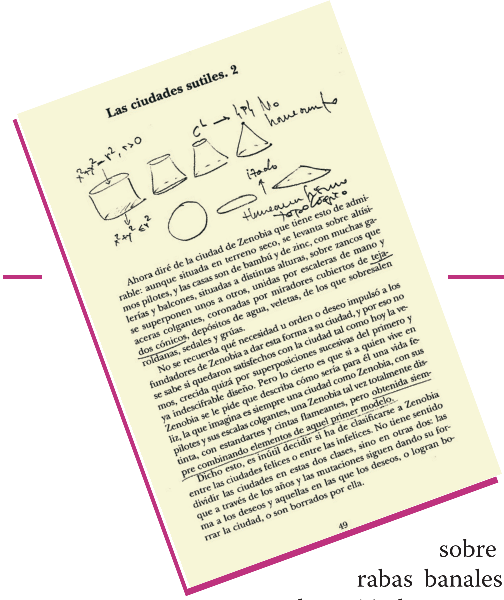

¿Cuál es la línea que separa el dentro del fuera?

La otra dificultad no está en la topología de la curva, sino en saber cuál de una serie de líneas es la que separa el dentro del fuera, como en la foto del margen.

¿Qué línea separa el dentro del fuera, el estruendo de las ruedas del aullido de los lobos?

Calvino acaba por aclararnos las dudas. Los carros y su ruido pertenecen a la ciudad, están dentro de ella. El aullido de los lobos pertenece al exterior, está fuera de Zoe. Pero entre el lugar en el que únicamente se oye aullar a los lobos y el lugar en el que sólo se escuchan los carros hay una franja en la que ambos sonidos penetran nuestros oídos. ¿Estamos dentro o estamos fuera de Zoe? No hay línea divisoria, sino una franja confusa y oscilante. No siempre son los mismos lobos ni los mismos carros. Ni los mismos lugares ni las mismas horas. Un punto por el que pasaste ayer y que era exterior porque sólo oíste a los lobos, hoy es interior porque sólo escuchas el rodar de los carros. Estamos en la tercera dificultad. No existe una línea que separa el dentro del fuera, sino una zona difusa y variable de perfiles imprecisos como los de una nube o como el vaivén del oleaje en la orilla. ■

*El interior y exterior de **Zoe** están separados por una franja de límites invisibles, pero audibles.*



Las ciudades sutiles. 2

$x^2+y^2=r^2, r>0$ $x^2+y^2\le r^2$ $C^L \to \{p\}$ No homeomorfo izado Homeomorfismo topológico

Ahora diré de la ciudad de Zenobia que tiene esto de admirable: aunque situada en terreno seco, se levanta sobre altísimos pilotes, y las casas son de bambú y de zinc, con muchas galerías y balcones, situadas a distintas alturas, sobre zancos que se superponen unos a otros, unidas por escaleras de mano y aceras colgantes, coronadas por miradores cubiertos de tejados cónicos, depósitos de agua, veletas, de los que sobresalen roldanas, sedales y grúas.

No se recuerda qué necesidad u orden o deseo impulsó a los fundadores de Zenobia a dar esta forma a su ciudad, y por eso no se sabe si quedaron satisfechos con la ciudad tal como hoy la vemos, crecida quizá por superposiciones sucesivas del primero y ya indescifrable diseño. Pero lo cierto es que si a quien vive en Zenobia se le pide que describa cómo sería para él una vida feliz, la que imagina es siempre una ciudad como Zenobia, con sus pilotes y sus escalas colgantes, una Zenobia tal vez totalmente distinta, con estandartes y cintas flameantes, pero obtenida siempre combinando elementos de aquel primer modelo.

Dicho esto, es inútil decidir si ha de clasificarse a Zenobia entre las ciudades felices o entre las infelices. No tiene sentido dividir las ciudades en estas dos clases, sino en otras dos: las que a través de los años y las mutaciones siguen dando su forma a los deseos y aquellas en las que los deseos, o logran borrar la ciudad, o son borrados por ella.

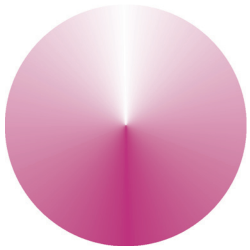
49

Zenobia

En Zenobia te sorprendes de ti mismo cuando al levantar la vista te quedas embelesado por el vértice culminante de un techo. Mirando a lo alto reflexionas sobre cuestiones que hasta ese momento considerabas banales, pero que ahora no puedes quitarte de la cabeza. Te das cuenta de que el cono hueco divide el espacio tridimensional en dos semiespacios, uno cóncavo y otro convexo, y de que el punto en el que termina certifica una paradoja. Pese a ser finito y limitado, el cono propone un punto como límite de las sucesivas circunferencias de nivel que lo conforman. Es el cierre del cono. Pero eso ocurre sin que dicho vértice sea topológicamente isomorfo a ninguno de los anillos circulares de los que es límite.

(...), coronadas por miradores de techos cónicos,(...)

También piensas en el techo cónico como límite de una serie de cilindros huecos y abiertos cuya circunferencia superior se estrecha hasta colapsar en un punto. Tampoco ahí hay equivalencia topológica. Pero un instante después caes en la cuenta de que sustituyendo la circunferencia por un círculo, es decir, cubriendo su agujero superior, el límite puntual sí es isomorfo a cada uno de los discos que se le aproximan.



Otra opción es hacer girar un segmento inclinado alrededor del eje vertical definido por su extremo más elevado. Y todavía se te ocurre otra. Obtener el cono pellizcando el centro de un disco e izándolo hasta la altura deseada, añadiéndole una dimensión.

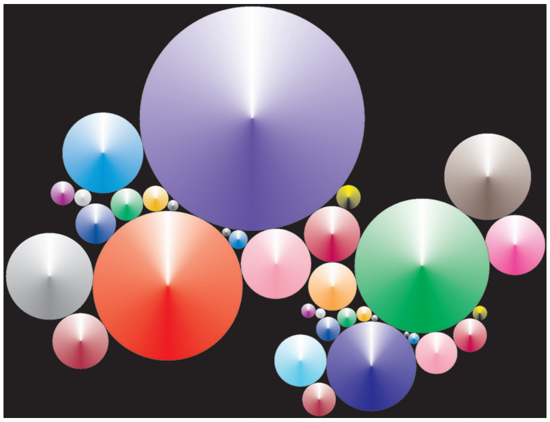
Este isomorfismo topológico entre el disco D de radio 1 y su cono hueco Ch de altura 1:

$$D=\{(r\cos\alpha, r\,\mathrm{sen}\,\alpha, 0)\in \mathbf{R}^3 \mid \alpha\in [0,2\pi], r\in [0,1]\} \quad Ch=\{(r\cos\alpha, r\,\mathrm{sen}\,\alpha, 1-r)\in \mathbf{R}^3 \mid \alpha\in [0,2\pi], r\in [0,1]\}$$

te satisface hasta el punto de preguntarte cuál de todas esas formas de pensamiento refleja con mayor fidelidad la realidad de los techos cónicos de Zenobia.

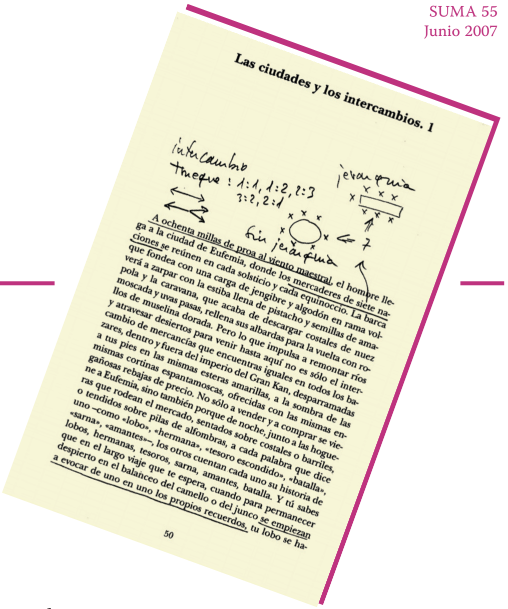
Marco Polo te da la respuesta. Si Zenobia se levanta del suelo con altos pilotes, es decir, con segmentos verticales, es izando el centro del disco como hay que interpretar el cono. ■

(...), se levanta sobre altísimos pilotes, (...)



***Zenobia**: ciudad de isomorfismos circulares.*

SUMA 55
Junio 2007


Las ciudades y los intercambios. 1

intercambio
trueque: 1:1, 1:2, 2:3
3:2, 2:1
jerarquía
sin jerarquía
7

A ochenta millas de proa al viento maestral, el hombre llega a la ciudad de Eufemia, donde los mercaderes de siete naciones se reúnen en cada solsticio y cada equinoccio. La barca que fondea con una carga de jengibre y algodón en rama volverá a zarpar con la estiba llena de pistacho y semillas de amapola y la caravana, que acaba de descargar costales de nuez moscada y uvas pasas, rellena sus albardas para la vuelta con rollos de muselina dorada. Pero lo que impulsa a remontar ríos y atravesar desiertos para venir hasta aquí no es sólo el intercambio de mercancías que encuentras iguales en todos los bazares, dentro y fuera del imperio del Gran Kan, desparramadas a tus pies en las mismas esteras amarillas, a la sombra de las mismas cortinas espantamoscas, ofrecidas con las mismas engañosas rebajas de precio. No sólo a vender y a comprar se viene a Eufemia, sino también porque de noche, junto a las hogueras que rodean el mercado, sentados sobre costales o barriles, o tendidos sobre pilas de alfombras, a cada palabra que dice uno –como «lobo», «hermana», «tesoro escondido», «batalla», «sarna», «amantes»–, los otros cuentan cada uno su historia de lobos, hermanas, tesoros, sarna, amantes, batalla. Y tú sabes que en el largo viaje que te espera, cuando para permanecer despierto en el balanceo del camello o del junco se empiezan a evocar de uno en uno los propios recuerdos, tu lobo se ha-

50

Eufemia

A ochenta millas, de proa al viento maestral, el hombre llega a la ciudad de Eufemia, donde los mercaderes de siete naciones se reúnen (...)

No sólo a vender y a comprar se viene a Eufemia (...), la ciudad donde en cada solsticio y en cada equinoccio intercambiamos nuestros recuerdos.

El viento maestral sopla del noroeste. Puesto que la proa se le opone, las componentes del sentido y dirección de la navegación son, tomando la milla como unidad, $(-80/\sqrt{2}, 80/\sqrt{2})$.

Al ser siete los mercaderes no pueden llevar solamente un producto cada uno porque el intercambio no sería posible (si nadie quiere irse de vacío). Lo lógico es que cada mercader traiga consigo varios productos que le faciliten el intercambio y el regateo.

El trueque es primordial en Eufemia, pero no lo único. La ventaja de los recuerdos sobre las mercancías es que ni pesan ni ocupan lugar alguno y que el relato que uno cuenta se lo llevan todos aquellos que lo escuchan.

A diferencia de lo que ocurre con los productos comerciales en los que el precio o el trueque se establece en base a una relación proporcional acordada, como 1:1, 1:2 o 2:3, el intercambio de relatos es gratuito y las únicas reglas a obedecer son disponer de uno, contarlo y escuchar los de los demás. La relación es la misma para todos los del corro, $1{:}n$. Y puesto que $n\cdot(1{:}n)=1$, el trueque es justo y se duerme en paz.

Este es ya el juego de las permutaciones, no sólo el del intercambio. Los recuerdos no se borran. ■

***Eufemia**, donde el trueque esencial destaca que* $n\cdot(1{:}n)=1$.

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

Este es el esfuerzo exigible y que debe llevar a cabo el que aprende. Interpretar palabras, símbolos y objetos que articulados de forma, en órdenes distintos y en contextos diferentes generan nuevos conceptos y significados.

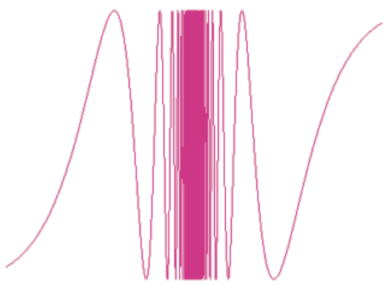
No siempre las conexiones entre un elemento y otro del relato eran evidentes para el emperador; los objetos podían querer decir cosas diferentes: (...)

Topamos con la filosofía taoísta que ve en el vacío circundante la esencia de las cosas: *Modelando el barro se hacen las vasijas, y es de su vacío del que depende la utilidad de las vasijas de barro (Zi, 1983, p. 111)**. El Tao sitúa la utilidad de algo en su complementario. Hay que prestar atención no sólo a la parte tangible de las palabras, su sonido y significado, sino a su complementario, el silencio y la reflexión.

Colmando los intervalos silenciosos de un discurso con elaboraciones propias de las ideas que transmite, lejos de perdernos, construimos conocimiento: aprendemos.

(...) lo que hacía precioso para Kublai cada hecho o noticia (...) era el espacio que quedaba en torno, un vacío no colmado de palabras. Las descripciones (...) tenían esa virtud: que se podía dar vueltas con el pensamiento entre ellas, perderse (...)

Pensar con palabras y articularlas lógicamente distingue el pensamiento y conocimiento racional del irracional. No hay gestos, objetos ni imágenes capaces de describir con suficiente claridad lo que ocurre en el punto $x=0$ de la curva $y=\text{sen}(1/x)$:



Solamente las palabras y la argumentación tienen ese poder:

$$\nexists a \in R : \mathop{Lim}_{x \to 0} \text{sen}\frac{1}{x} = a$$

(...) es cierto que las palabras servían mejor que los objetos y los gestos para catalogar las cosas más importantes (...)

* Zi, Lao (1983): *El libro del Tao*, Edición Bilingüe, traducción, prólogo y notas de Juan Ignacio Preciado, Alfaguara, Madrid.