SUMA 55
Junio 2007, pp. 61-66

Las reglas nos guían hacia los conceptos

El problema del cálculo de extremos relativos se ofrece habitualmente como la primera aplicación de la función derivada, pero históricamente existen reglas y métodos que preceden a este concepto. Nos preguntamos si el concepto debe ir forzosamente por delante de estas reglas simples y fácilmente justificables.

Normally it is used to introduce maximum-minimum problems as the first application of the derivative, but historically there are rules and methods preceding this concept. I wonder whether the concept has to go before these simple and easily demonstrable rules.

§1. La solución al bien conocido problema de determinar las dimensiones del rectángulo con perímetro $2p$ y de área máxima, pasa por la consideración de x y p-x como posibles dimensiones de sus lados y la declaración de la función

$$A(x) = x(p - x) = px - x^2$$

como aquella de la que deberíamos obtener el máximo.

El cálculo del valor de x que hace a $A(x)$ máxima se atiene a reglas precisas y suele presentarse, junto a los rudimentos del cálculo infinitesimal, como una de las primeras aplicaciones de la función derivada. A tal efecto recordemos que el primer paso consiste en formar, a partir de $A(x)$, su derivada

$$A'(x) = p - 2x$$

Seguidamente, como segundo paso, se obtiene la raíz de la ecuación $A'(x) = 0$, porque entre esas raíces deben estar los valores que hacen máxima la función. Aquí precisamente la única raíz, $x = p/2$, nos da el resultado para el que $A(x)$ es máximo. En definitiva, el área máxima se obtiene cuando el rectángulo en cuestión es un cuadrado de lado $p/2$, de modo que el área a su vez será $A(p/2) = p^2/4$.

Todo esto nos resulta familiar porque conocemos las reglas de cálculo de la función derivada y las correspondientes a la resolución de las ecuaciones resultantes. En el caso planteado, la solución final ha requerido simplemente la regla de derivación de un polinomio de segundo grado y la de resolución de una ecuación de primer grado. Unas exigencias bien módicas, puesto que la segunda de estas reglas es trivial, y la primera a su vez se reduce, en el caso más general, a que para la función polinómica

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

se obtiene como derivada

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1}$$

§2. No es raro que en la historia de las matemáticas el uso de ciertos recursos algorítmicos preceda a la definición del concepto que hoy tomamos como su fundamento. En el caso de los máximos y mínimos, ciertas transformaciones de los poli-

Ángel Marín Martínez
Universidad Pública de Navarra
Pamplona

nomios permitieron ver y emplear lo que hoy conocemos como función derivada mucho antes de que ésta fuera introducida como tal. Hay conceptos, como éste de derivada, cuya aparición llega tras un largo proceso de contrastación de diversos enfoques en torno a problemas comunes. En la fase previa, mientras tanto, es frecuente encontrar algoritmos o reglas que dan salida a los casos más simples o directos. Este podría ser el caso de los polinomios, donde se tiene noticia de reglas asociadas al cálculo de máximos y mínimos, que pese a ser anteriores a la introducción de la función derivada, suponen implícitamente su obtención formal.

Las reglas basadas en la transformación del polinomio, o más bien de la ecuación obtenida al anularlo, son anteriores a la introducción, a finales del siglo XVII, del cálculo infinitesimal.

Originalmente este tipo de reglas basadas en la transformación del polinomio, o más bien de la ecuación obtenida al anularlo, no fueron obra ni de Newton ni de Leibniz. Son anteriores, pues, a la introducción, a finales del siglo XVII, del cálculo infinitesimal. Dichas reglas están más próximas a ciertos métodos de determinación de la tangente a una curva ideados por Descartes y también por Fermat a comienzos de ese mismo siglo. Sin embargo, tampoco son propiamente obra de estos autores. Las formulaciones de las que hablamos tienen un carácter marcadamente analítico y aparecen en torno a 1650 en el círculo de los discípulos de Frans van Schooten, profesor en Leyden, amigo de Descartes y primer editor en latín[1] de su *Géométrie* en 1649.

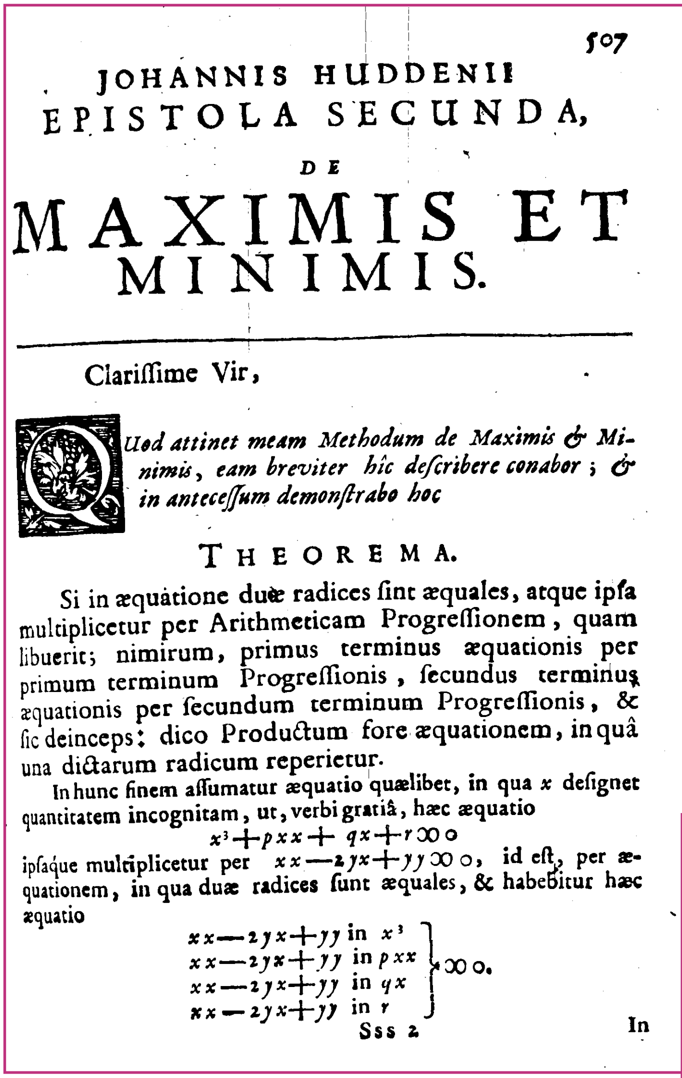
A ese restringido círculo holandés pertenecen desde autores hoy consagrados, como el entonces joven Christiaan Huygens, hasta otros menos renombrados como Johann Hudde, que es quien ahora nos ocupa. Hablamos en su caso de un autor con una obra matemática sumamente breve, al que se le conoce mejor por su dilatada carrera política al servicio de la nueva república como burgomaestre de Amsterdam. En cualquier caso, debemos a Hudde, y esto es lo que importa, la formulación en 1658 de unas reglas en las que las ecuaciones polinómicas ordinarias son transformadas hasta obtener resultados similares a los que se obtendrían con el actual cálculo de derivadas. Es también importante subrayar que la intención que guía el proceso es, en palabras del autor, la determinación de cantidades máximas y mínimas. No olvidemos que en esa época no se habla de funciones, ni de dominios, ni consecuentemente de máximos o mínimos relativos.

§3. Antes de mostrar las reglas propuestas por Hudde, quizá convenga señalar que en lo sucesivo apenas iremos más allá de las funciones polinómicas. Debemos también añadir que en la época citada la determinación de sus raíces era un asunto decisivo de cara a la formulación algebraica de las propiedades de las curvas. Precisamente las llamadas curvas geométricas, las que admitían una expresión en forma de ecuación, fueron para Descartes las únicas merecedoras de consideración. Su tratamiento algebraico constituye de hecho el núcleo de su única obra matemática, la *Géométrie*, que aparece como uno de los anexos destinados a ilustrar los beneficios de lo expuesto en su *Discours de la méthode*.

René Descartes. 31 de marzo de 1596 -11 de febrero de 1650

A Hudde hay que situarlo en la estela de esta obra, como estudiante y conocedor, a través de van Schooten, de los planteamientos geométricos cartesianos. Pero también, a la vista de sus escritos, como un matemático familiarizado con los métodos más abiertamente analíticos de Fermat[2]. Entre esos escritos se encuentra la carta enviada a su maestro en febrero de 1658, que hoy conocemos por haber sido incluida por éste para enriquecer, junto con otros trabajos de distintos autores, la segunda edición latina de la *Geometría* de Descartes en 1659. En dicha carta Hudde propone un nuevo método para obtener máximos y mínimos[3] del que derivan las reglas antes señaladas.

Para entonces Fermat había hecho ver que los máximos y mínimos de una curva $y = f(x)$ estaban asociados a las raíces dobles de la ecuación $f(x) = M$, donde M sería el máximo o mínimo alcanzado. Por eso Hudde pudo tomar como punto de partida de su investigación la determinación de las raíces dobles de la ecuación:



507

JOHANNIS HUDDENII
EPISTOLA SECUNDA,
DE
MAXIMIS ET
MINIMIS.

Clarissime Vir,

Quod attinet meam Methodum de Maximis & Minimis, eam breviter hîc describere conabor; & in antecessum demonstrabo hoc

THEOREMA.

Si in æquatione duæ radices sint æquales, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit; nimirum, primus terminus æquationis per primum terminum Progressionis, secundus terminus æquationis per secundum terminum Progressionis, & sic deinceps: dico Productum fore æquationem, in quâ una dictarum radicum reperietur.

In hunc finem assumatur æquatio quælibet, in qua x designet quantitatem incognitam, ut, verbi gratiâ, hæc æquatio

$$x^3 + pxx + qx + r \infty 0$$

ipsaque multiplicetur per $xx - 2yx + yy \infty 0$, id est, per æquationem, in qua duæ radices sunt æquales, & habebitur hæc æquatio

$$\left.\begin{array}{l} xx - 2yx + yy \text{ in } x^3 \\ xx - 2yx + yy \text{ in } pxx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } qx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } r \end{array}\right\} \infty 0.$$

Sss 2 In

Johann van Waveren Hudde. 1628-1704

RENATI DES CARTES
GEOMETRIA,
Unà cum NOTIS
FLORIMONDI DE BEAUNE,
In Curia Blesensi Consiliarii Regii, & Commentariis illustrata,
Operâ atque studio
FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Acad. Lugd. Batav. Matheseos Professoris.
AB EODEM DUM VIVERET DILIGENTER RECOGNITA.
locupletioribus Commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus, tam ad ulteriorem explicationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus exornata.
Nunc verò à Viro Clariss. denuo revisa, & ab innumeris mendis, quibus priores Editiones scatebant, repurgata, unà cum notis quibusdam & animadversionibus tumultuariis in universum Opus, huic quartæ editioni recens adjectis.
Accedit insuper
COMPENDIUM MUSICÆ.
Cum Gratia & Privilegio Sacræ Cæs. Majest.
SPES SOLA DEUS
FRANCOFURTI AD MOENUM,
Sumptibus FRIDERICI KNOCHII, Bibliop.
Anno M DC XCV.

Franciscus Schooten. 1615 - 1660

$$F(x) = f(x) - M = 0$$

o más directamente plantearse la cuestión de cuál podría ser el valor de M para que resulte en la ecuación alguna raíz doble.

§4. Partiendo de ahí, la propuesta de Hudde debe inscribirse en una tradición más propiamente algebraica que geométrica. Dicha tradición tendría sus antecedentes en los mecanismos de reducción de grado, tan característicos en la resolución de ecuaciones[4], y en reglas como las de Cardano, en las que se ligan las raíces o soluciones de las ecuaciones a las relaciones entre sus coeficientes[5]. Siguiendo esta línea, se inicia la carta citada con un teorema destinado a preparar el posterior análisis de los máximos y mínimos en las curvas, en el que se propone una regla de naturaleza estrictamente algebraica. Hudde lo enuncia así:

> «Si en una ecuación dos raíces son iguales y, si se multiplica por una progresión aritmética cualquiera, a saber el primer término por el primer término de la progresión, el segundo por el segundo término de la progresión, y así sucesivamente: Yo digo que la ecuación que se obtiene mediante la suma de estos productos tendrá una raíz en común con la ecuación inicial».[6]

Este resultado no es difícil de comprobar. Supongamos dado, al igual que Hudde hace en su demostración, el polinomio

$$F(x) = (x-\alpha)^2(x^3 + px^2 + qx + r)$$

con α como raíz doble. Al realizar el producto de ambos factores se tiene

$$\begin{array}{llllllll} F(x) = & x^5 & -2\alpha x^4 & +\alpha^2 x^3 & & & & \\ & & px^4 & -2\alpha px^3 & +\alpha^2 px^2 & & & \\ & & & qx^3 & -2\alpha qx^2 & +q\alpha^2 x & & \\ & & & & rx^2 & -2\alpha rx & +\alpha^2 r & \end{array}$$

Para la transformación, esto es para el *producto* sugerido en el enunciado, consideremos la progresión aritmética

$$a,\ a + b,\ a + 2b,\ a + 3b,\ \ldots$$

En el emparejamiento multiplicaremos por $a + 5b$ el coeficiente del término de quinto grado, por $a + 4b$ el de cuarto y así hasta el término independiente que multiplicaremos por a. Finalmente denominaremos $F^*(x)$ al polinomio resultante.

Si procedemos línea por línea a esa transformación en $F^*(x)$ podemos empezar por la última

$$rx^2 - 2\alpha rx + \alpha^2 r$$

que multiplicamos por

$$a + 2b,\ a + b,\ a$$

El resultado en este caso será

$$\begin{aligned} & r(a+2b)x^2 - (a+b)2\alpha rx + a\alpha^2 r = \\ & = r\left[\left(ax^2 - a2\alpha x + a\alpha^2\right) + \left(2bx^2 - 2\alpha bx\right)\right] = \\ & = r\left[a(x-\alpha)^2 + 2bx(x-\alpha)\right] \end{aligned}$$

o sea, un sumando de $F^*(x)$ que tiene como factor $x - \alpha$. Al operar con las restantes líneas se obtiene para los correspondientes sumandos la misma conclusión: sus transformadas tienen $x - \alpha$ por factor. De ahí se deduce que $F^*(x)$ tiene $x - \alpha$ como factor común y, por tanto, α como raíz.

§5. Tras comprobar, con métodos similares a los de Hudde, que el teorema es válido, convendría saber cómo es el polinomio resultante $F^*(x)$, y sobre todo qué relación guarda con el inicial $F(x)$. Podemos para ello generalizar un poco más y partir de

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

Para la transformación usaremos la progresión

$$a,\ a + b,\ \ldots,\ a + (n-1)b,\ a + nb$$

De donde resulta que

$$\begin{aligned} & F^*(x) = aa_0 + (a+b)a_1 x + \ldots + (a+(n-1)b)a_{n-1}x^{n-1} + \\ & +(a+nb)a_n x^n = a\left(a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n\right) + \\ & +bx\left(a_1 + \ldots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_n x^{n-1}\right) = aF(x) + bxF'(x) \end{aligned}$$

Destaca en esta última igualdad la aparición de un segundo

Los criterios didácticos no siempre coinciden con los principios epistemológicos.

polinomio $F'(x)$ en el que nuestros ojos actuales reconocen precisamente la derivada del primero $F(x)$. Por eso, aunque la transformación operada en el polinomio no nos da exactamente su derivada, podemos estimar que lo obtenido no se aleja en exceso de ella. De hecho, basta con que la transformación se realice tomando como base la progresión aritmética natural

$$0, 1, 2, 3, ..., n-1, n$$

es decir con $a = 0$ y $b = 1$, para que la igualdad se convierta en

$$F^*(x) = xF'(x)$$

Esto permite una reconstrucción de la regla contenida en el teorema en un estilo más actual, o sea con derivadas

Si α es raíz doble de $F(x) = 0$, entonces
también será raíz de $F'(x) = 0$.

Además, partiendo de la igualdad inicial

$$F^*(x) = aF(x) + bxF'(x)$$

podemos confirmar con mayor rigor el teorema anterior. Pero esta vez no por los métodos de Hudde, sino haciendo valer el cálculo habitual de derivadas y teniendo presente en todo caso que ese rigor suplementario se logra con las reglas de un cálculo, como el de derivadas, posterior a la regla de Hudde que aquí estamos comentando.

Obsérvese para la demostración del teorema que, si consideramos

$$F(x) = (x-\alpha)^2 Q(x)$$

por ser α raíz doble, y formamos $F'(x)$ como su derivada, para la transformada tendremos

$$F^*(x) = a(x-\alpha)^2 Q(x) + bx\left[2(x-\alpha)Q(x) + (x-\alpha)^2 Q'(x)\right]$$

por lo que es evidente que α es raíz de $F^*(x) = 0$.

§6. Es momento de aplicar el teorema a la obtención de máximos y mínimos. Recordemos que, según Fermat, estas cantidades aparecerían en todo caso como raíces dobles de la ecuación $F(x) = f(x) - M = 0$. Pero, por lo que hemos visto, es más fácil localizarlas como raíces simples de un polinomio más sencillo, a saber $F^*(x)$, aunque esta condición sólo sea necesaria y no suficiente para que las raíces ahí obtenidas sean dobles en $F(x)$. Esta traslación del teorema al asunto geométrico la refleja Hudde como método o regla de cálculo en los siguientes términos:

> Cualquier cantidad algebraica, considerada máximo o mínimo, se hace igual a z; ordenada la ecuación se multiplica por una progresión aritmética del modo en que se ha dicho: y el producto será una ecuación que tiene una raíz común con la precedente.[7]

La cantidad algebraica, que hoy llamaríamos función, $f(x)$ la igualamos a z (de manera similar a nuestra anterior igualdad $f(x) = M$). A partir de ahí Hudde aplica a $f(x) - z = 0$ la regla algebraica anterior. En este caso toma directamente la progresión aritmética natural y obtiene la transformada. En la ecuación resultante $xf'(x) = 0$ prescinde sin mayor comentario de la raíz nula y se aplica al cálculo de las restantes, en una traslación que bien podría concretarse en la siguiente regla:

Si a es un máximo o un mínimo de $f(x)$,
entonces será raíz de $f'(x) = 0$.

Finalmente Hudde se extiende en una serie de ejemplos destinados a incorporar a su método, en un primer paso, a las funciones racionales y, en un segundo, a las funciones racionales con varias indeterminadas. Este último caso es novedoso ya que prefigura el uso de derivadas parciales en condiciones similares al que de las derivadas se podría hacer en el método inicial.

En este extremo, no obstante, quizá resulte más certero otro algoritmo de parecidas características introducido por su coetáneo René François de Sluse. Aunque ideada en 1655, su regla no llega a publicarse hasta 1673. La intención ahí es más analítica en el sentido de que se orienta a la determinación de la subtangente[8] y la pendiente de la tangente a una curva. Su justificación resulta también próxima a lo que poco después se verá en el cálculo de fluxiones de Newton[9].

§7. Creo, por último, que convendría mostrar cómo hemos sabido de estas reglas en nuestro aprendizaje matemático. Siguiendo el modelo publicado en 1934 por Edmund Landau[10], se fue fijando, en sucesivas tentativas por otros matemáticos, una presentación canónica del cálculo infinitesimal. Karl Menger, por ejemplo, en su *Calculus. A modern Approach* de 1955 propone como teorema una versión de la nueva regla en un lenguaje que nos resulta manifiestamente más próximo.

> Si c es interior en dom(f'), y si f posee un extremo relativo (esto es, un mínimo o un máximo relativo) en c, entonces $f'(c) = 0$.[11]

A la vista está que el teorema en cuestión recoge puntualmente la segunda de las reglas comentadas. Pero los antecedentes expuestos en nuestras aulas para llegar a este punto suelen ser muy diferentes de los aquí mostrados. Hudde ni siquiera es citado.

§8. Existe una explicación para todo ello: los criterios didácticos no siempre coinciden con los principios epistemológicos. De ahí la sorpresa con la que recibimos ese uso de la derivada tan ajeno al que hoy nos parece convencional. Las razones por las que ese uso se ha visto primado, hasta convertirse en el uso convencional, tienen que ver, por un lado, con la subordinación de los algoritmos a los conceptos y, por otro, con la necesidad de dar un sentido geométrico a estas cuestiones. Esta segunda razón, que suele ser apremiante, nos lleva a intentar concretar el problema de la tangente en el marco de la representación gráfica, desplazando a segundo término el problema del cálculo efectivo con las ecuaciones.

Esta tendencia analítica de ir asociando los logros algebraicos a las interpretaciones geométricas es quizá más manifiesta en Fermat que en Descartes. En la práctica esto invita a crear conceptos que sirvan de puente entre lo algebraico y lo geométrico. De hecho, es Fermat el primero en dar paso a un análisis localmente variacional para el estudio de las cantidades variables (hoy funciones). La siguiente generación convertirá sus métodos en un enfoque infinitesimal, aunque esta idea requerirá una concepción del límite que tardará más de un siglo en cuajar. A pesar de ello, en esa corriente de investigación se asume de un modo más o menos intuitivo que el cociente:

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

es una explicación sintética y significativa de lo que se refleja en la pendiente de la tangente[12]. Lo que no parece es que, desde un punto de vista operativo, el cálculo asociado a la definición resulte sencillo.

Pensemos simplemente en las ecuaciones polinómicas. Para aplicar a las funciones correspondientes la definición anterior se requiere el teorema binomial, que no llegaría en toda su generalidad hasta Newton, y también explicitar en qué forma la derivada afecta a las operaciones algebraicas elementales. Así que el valor de esta definición no reside ciertamente en sus virtudes operativas. Quizá por eso reglas como la de Hudde gozaron por un tiempo de amplio reconocimiento y difusión. El recorrido habitual que va del concepto a los algoritmos realza indudablemente la importancia del concepto, pero añade pocas ventajas cuando uno trata de justificar el cálculo partiendo de funciones elementales. Seguramente está más indicado al intentar mejorar las posibilidades de ese primer cálculo. ■

NOTAS

1 Recordemos que la edición original en francés de la *Géométrie* es de 1637.

2 Sobre el sentido e implicaciones matemáticas de lo analítico, véase de A. Marín (2006), *Incógnitas, variables y otros fantasmas matemáticos*, Pamplona (particularmente su primera parte).

3 *Johannes Hudennii epistola secunda, de maximis et minimis, en Geometria à Renato DesCartes*, Amsterdam, 1659, pp. 507-516.

4 Es bien sabido que la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado pasa por una reducción a ecuaciones de grado inferior.

5 Según las reglas de Cardano si tenemos la ecuación $x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$, entonces la suma de las raíces es $-p_1$, la suma de sus productos dobles será p_2, la de los triples $-p_3$, y así sucesivamente.

6 "Si in aequatione duae radices sint aequales, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit; nimirum, primus terminus aequationis per primum terminum Progressionis, secundus terminus aequationis per secundum terminum Progressionis, et sic deinceps: dico Productum fore aequationem, in quâ una dictarum radicum reperietur.", Op. cit. p. 507.

7 "Positis quotcunque quantitatibus Algebraicis, maximum aut minimum designantibus, ponantur ipsae=*z*; et ordinata aequatione multiplicetur ea per Progressionem Arithmeticam, eo modo, quo dictum est: et Productum erit aequatio, quae communem cum praecedenti radicem habebit.", Op. cit. p. 509-10.

8 Si se considera a la tangente como el segmento de la recta tangente que va desde el punto de tangencia hasta la intersección (cuando ésta exista) con el eje de abscisas, la subtangente sería la proyección de ese segmento en el eje.

9 Para un estudio más completo de todo este período previo al Cálculo infinitesimal pueden consultarse las obras siguientes: Margaret E. Baron (1969), *The origins of the Infinitesimal Calculus*, Toronto; C. H. Edwards (1979), *The Historical Development of the Calculus*, New York; Carl B. Boyer (1968), *A History of Mathematics*, New York; así como la anteriormente citada *Incógnitas, variables y otros fantasmas matemáticos*.

10 Cf. Landau, E.(1934), *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung, Groningen*.

11 "If c is interior to dom(f'), and if f possesses a relative extremum (that is, either a relative minimum or a relative maximum) at c, then $f'(c) = 0$.", Menger, K. (1955), *Calculus. A Modern Approach*, Boston, pg. 164.

12 Formalmente la primera definición de derivada como cociente de incrementos no llega hasta 1754, en la entrada *Différentiel* de la *Encyclopédie* redactada por d'Alembert.