SUMA 55
Junio 2007, pp. 55-60

Deducción por inducción

El presente trabajo no pretende ser un estudio exhaustivo del método inductivo, sino más bien una exposición divulgativa de dicho método en el que se presentan una serie de ejemplos ilustrativos y curiosidades relacionadas con la inducción. He intentado que los ejemplos tengan una cierta componente lúdica, planteando varios como un reto o desafío al lector, huyendo en todo caso de ejemplos aburridos o en exceso académicos.

This work is not an exhaustive research of the inductive method, but only an informative exposition about this method. Here some illustrative examples and curiosities are shown. Those are related to induction. My intention has been to create entertaining examples, so several examples are suggested as a challenge to the reader, I think there are not too boring or academic examples.

No se puede negar que existe una analogía llamativa (de la inducción matemática) con los procesos habituales de inducción. Pero subsiste una diferencia esencial. La inducción, aplicada a las ciencias físicas, es siempre incierta, porque se basa en la creencia en un orden general del universo, orden que está fuera de nosotros. La inducción matemática, esto es, la demostración por recurrencia, se impone al contrario necesariamente, porque no es más que la afirmación de una propiedad del espíritu mismo.

H. Poincaré, La ciencia y la hipótesis

Henri Poincaré. 1854-1912

El método de inducción matemática es, sin lugar a dudas, una de las herramientas más poderosas de las que disponemos los matemáticos para demostrar resultados y también es, en mi opinión, una de las más bellas construcciones de la mente humana. Además creo que es importante para nuestros alumnos una buena comprensión y una correcta utilización de este método. En la enseñanza secundaria puede introducirse a nivel de Bachillerato, a pesar de que no aparece explícitamente en el temario. Es una herramienta habitual en numerosas carreras de contenido científico y técnico para los alumnos de primer curso universitario.

Natalia Casás Ferreño
IES Ingenio
Ingenio. Las Palmas

El presente trabajo no pretende ser un estudio exhaustivo del método inductivo, sino más bien una exposición divulgativa de dicho método en el que se presentan una serie de ejemplos ilustrativos y curiosidades relacionadas con el mismo. Se pretende que los ejemplos tengan una componente lúdica, planteando varios como un reto o desafío al lector, huyendo en todo caso de ejemplos *aburridos* o excesivamente académicos. A aquellos lectores interesados en conocer más ejemplos y aplicaciones de la inducción matemática se les recomienda el capítulo 7 del magnífico libro (GUZMÁN, 1995).

Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura.
Bertrand Russell

El principio de inducción matemática

En las ciencias naturales el principio de inducción es utilizado para obtener resultados generales a partir de unos cuantos casos particulares: por ejemplo, un ornitólogo observa que varios cuervos son negros y llega a la conclusión de que todos los cuervos son negros.

Sin embargo desde un punto de vista estrictamente lógico no se puede justificar el enorme salto que supone pasar de una afirmación cierta para algunos casos particulares a una afirmación cierta para todos los casos. Por tanto, como remarcaba Poincaré, el método inductivo de las ciencias naturales no es exacto y está sometido a incertidumbre. Los científicos confían en el método inductivo porque creen en el orden del universo, pero podemos afirmar que esta confianza no está basada en la razón lógica, aunque ha demostrado ser extremadamente útil.

En matemáticas también existe un principio de inducción, pero éste es absolutamente fiable y preciso porque su fundamentación es lógica. Veamos en que consiste:

Principio de inducción matemática: Sea S_n una afirmación relativa al número natural n. Supongamos que:

1. S_1 es cierta;
2. Si S_n es cierta, también lo es S_{n+1}

Entonces la afirmación S_n es cierta para todos los números naturales.

Es fácil convencerse de la veracidad de este principio. En efecto, por *1.* la afirmación S_1 es cierta. Entonces por *2.* la afirmación S_2 también debe ser verdadera, en cuyo caso aplicando de nuevo *2.* se sigue que S_3 también es verdadera, y así sucesivamente… Podemos pensar las afirmaciones S_n como fichas de dominó: la condición *2.* nos dice que si la ficha S_n cae, entonces tira la ficha siguiente S_{n+1} y la condición *1.* nos dice que la primera ficha S_1 ha caído. Luego, el principio de inducción matemática simplemente afirma que todas las fichas acaban cayendo una tras otra. Veamos dos ejemplos de demostración por inducción:

Infinitud de los números primos: Se definen los números de Fermat:

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Probar que para $n \geq 1$ se satisface la siguiente fórmula de recurrencia

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$$

Nota: El lector puede estarse preguntando justificadamente qué tiene que ver el problema anterior con la existencia de infinitos números primos. Pues bien, de la fórmula de recurrencia se sigue inmediatamente que dos números de Fermat cualesquiera son primos. Como cada número de Fermat tiene al menos un factor primo se deduce entonces la existencia de infinitos número primos. Esta prueba se debe a C. Goldbach en una carta a Euler (1730) y aparece recogida en El Libro de las Demostraciones (AIGNER y ZIEGLER, 2005).

Demostración. Comprobamos la fórmula para n=1 (F_0=3, F_1=5).

$$F_0 = F_1 - 2$$

Ahora suponemos que la fórmula es cierta para $n > 1$, es decir, supongamos la fórmula

$$\prod_{k=0}^{n-1} F_k = F_n - 2$$

y la probamos para $n + 1$

$$\prod_{k=0}^{n} F_k = \left(\prod_{k=0}^{n-1} F_k\right) F_n = (F_n - 2) F_n = \left(2^{2^n} - 1\right)\cdot\left(2^{2^n} + 1\right) =$$
$$= 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2$$

Adivinanza, adivinanza... Para un entero no negativo n se define

$$g(n)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$$

¡Calcular el valor de $g(n)$ para un entero no negativo arbitrario n !

Nota: Como en muchas adivinanzas el valor de $g(n)$ se esconde en el enunciado del problema.

Solución. Empezamos calculando el valor de $g(n)$ para el primer número de la lista $n = 0$,

$$g(0)=\int_0^\infty e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^\infty=1,$$

y continuamos por el segundo número de la lista $n = 1$,

$$g(1)=\int_0^\infty xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^\infty+\int_0^\infty e^{-x}dx=1.$$

Si observamos que $g(0) = 1 = 0!$ y $g(1) = 1 = 1!$ parece que hemos encontrado una pauta. ¿Será $g(n) = n!$ para cualquier entero no negativo n?

Vamos a demostrarlo por inducción: suponemos que $g(n) = n!$ y comprobamos que en efecto $g(n+1) = (n+1)!$ realizando una integración por partes

$$g(n+1)=\int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}dx=\left[-x^{n+1}e^{-x}\right]_0^\infty+\int_0^\infty (n+1)x^n e^{-x}dx=$$
$$=(n+1)\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=(n+1)\,g(n)=(n+1)n!=(n+1)!$$

La inducción y el principio de buena ordenación

Existe una formulación equivalente al principio de inducción matemática que se conoce como principio de la buena ordenación para los números naturales.

Principio de la buena ordenación de los números naturales: Cualquier subconjunto no vacío del conjunto de los números naturales N tiene mínimo.

Demostración. Supongamos que $X \subset N$ es un subconjunto de números naturales no vacío que no tiene mínimo, y sea S_n la proposición

S_n = ningún número natural $\leq n$ pertenece a X.

Como X no tiene mínimo, S_1 es verdadera (porque si S_1 fuera falsa entonces 1 sería el mínimo de X) y suponiendo que S_n es verdadera también lo es S_{n+1} (porque si S_{n+1} fuera falsa entonces $n + 1$ sería el mínimo de X). Luego por el principio de inducción todas las afirmaciones S_n son verdaderas, lo que implica que no existe ningún número natural en X, en contradicción con el hecho de que X es no vacío.

Como ejercicio para el lector proponemos que pruebe el principio de inducción matemática a partir del principio de buena ordenación, demostrando así que en realidad son equivalentes. De hecho esta equivalencia nos permite generalizar el principio de inducción a cualquier conjunto bien ordenado (i.e. un conjunto parcialmente ordenado en el que cualquier subconjunto no vacío tiene mínimo), obteniéndose el llamado *método de inducción transfinita*.

Principio de inducción transfinita: Sea X un conjunto bien ordenado y sea B un subconjunto de X. Supongamos que B tiene las siguientes propiedades:

i. El mínimo de X pertenece a B.
ii. (Hipótesis de inducción transfinita) Si el segmento que precede a $x \in X$

$$S_{<x}=\left\{y\in X : y<x\right\}$$

está contenido en B, entonces $x \in B$.

Entonces necesariamente $B = X$.

Cuando $X = N$ el principio de inducción transfinita se reduce al familiar principio de inducción. Una discusión más profunda del principio de inducción transfinita y de sus asombrosas consecuencias está por supuesto fuera del alcance de este trabajo. A aquellos lectores que deseen saber más sobre este fascinante tópico se les recomienda la introducción a la teoría de conjuntos (CIESIELSKI, 1997).

> *A pesar de su apariencia inofensiva el principio de la buena ordenación de los números naturales es una poderosa herramienta para probar resultados.*

A pesar de su apariencia inofensiva el principio de la buena ordenación de los números naturales es una poderosa herramienta para probar resultados. Por ejemplo, es el fundamento del llamado *método de descenso infinito* utilizado por el príncipe de los matemáticos aficionados, Pierre de Fermat, para hacer numerosas demostraciones en teoría de números: supongamos que queremos demostrar que ningún número natural n satisface una propiedad $P(n)$. El método del descenso infinito consiste en demostrar que si $P(n_1)$ es cierta entonces también lo será $P(n_2)$ para algún $n_2 < n_1$. Repitiendo el argumento encontraríamos una sucesión infinita estrictamente decreciente de números naturales, lo que contradice el principio de buena ordenación. (En el capítulo 2 de (GUZMÁN, 1995) y en el capítulo 1 de (RÍO MATEOS, 2005) se encuentra una discusión más detallada del método del descenso de Fermat incluyendo varias aplicaciones del mismo).

En el prólogo del libro *Apología de un matemático* (HARDY, 1999), el escritor inglés C.P. Snow narra la siguiente anécdota sucedida entre el propio Hardy y el genio matemático autodidacta Ramanujan, cuando el primero visitaba al segundo gravemente enfermo en el hospital:

> Hardy había ido a Putney en taxi, que era su método de transporte favorito, entró en la habitación en la que estaba Ramanujan, y siempre torpe para comenzar una conversación, dijo, probablemente, sin saludar antes y, ciertamente sin más preámbulos: "creo que el número de mi taxi era el 1729. Me parece un número bastante aburrido". A lo que Ramanujan respondió: "¡No, Hardy!, ¡No, Hardy! Es un número muy interesante, ya que es el más pequeño que se puede expresar como la suma de dos cubos de dos formas diferentes." (¿Puede encontrar el lector sin desesperarse cuáles son las dos formas distintas de expresar 1729 como suma de dos cubos?).

Para aquellos que no poseemos el genio de Ramanujan el principio de la buena ordenación nos permite refutar de manera sencilla la afirmación de Hardy acerca de que el número 1729 carece de interés.

Srinivasa Aaiyangar Ramanujan. 1887-1920

Teorema generalizado de Ramanujan: Todos los números naturales son interesantes.

Demostración: Supongamos que existe algún número natural que no es interesante. Entonces existe n_0 el menor de los números no interesantes, propiedad ésta que convierte a n_0 en un número ciertamente muy interesante. De esta forma llegamos a una contradicción.

Paradojas inductivas

El principio de inducción también es la base de numerosas paradojas. El siguiente teorema se debe al eminente matemático G. Polya.

Teorema de Polya: Si en un conjunto de niñas rubias al menos una de ellas tiene los ojos azules entonces todas las niñas del conjunto tienen los ojos azules.

George Pólya. 1887-1985

Demostración. La prueba se realiza por inducción sobre el número de niñas rubias del conjunto. Claramente el resultado es cierto para $n = 1$ (porque solamente hay una niña rubia que necesariamente ha de tener los ojos azules). Ahora supongamos que el resultado es cierto para cualquier conjunto de n niñas. Si tenemos un conjunto de $n + 1$ niñas de tal forma que al menos una tiene los ojos azules basta formar conjuntos de niñas juntando la niña de ojos azules con cualquier otro conjunto formado por $n - 1$ de las niñas restantes. Aplicando ahora la hipótesis de inducción se sigue que todas las niñas de ese conjunto tienen los ojos azules.

Como todos conocemos a alguna niña rubia con los ojos azules la sorprendente afirmación siguiente es consecuencia del Teorema de Polya.

Corolario: Todas las niñas rubias tienen los ojos azules.

Evidentemente la demostración del Teorema de Polya es errónea (¿puede el lector decir por qué?). Otra aplicación interesante de la inducción es la siguiente paradoja, que explica porqué la pobreza es tan difícil de erradicar.

Paradoja de la pobreza: Si una persona pobre recibe n euros seguirá siendo pobre, ¡independientemente de la cantidad recibida *n!* (Aquí el signo *!* es de admiración y no de factorial).

Demostración. Consideremos la afirmación:

> S_n = Una persona pobre sigue siendo pobre después de recibir n euros

Claramente S_1 es verdadera. Ahora si suponemos que S_n es cierta también lo será S_{n+1}, pues si alguien es pobre después de recibir n euros lo seguirá siendo al recibir solo un euro más. Por tanto S_n es verdadera para cualquier $n \in \mathbb{N}$ ..

Comenzábamos este trabajo afirmando que las demostraciones por inducción matemática eran fiables al cien por cien porque se basaban en la lógica. ¿Cómo podemos entonces solucionar de forma lógica la paradoja anteriormente planteada?

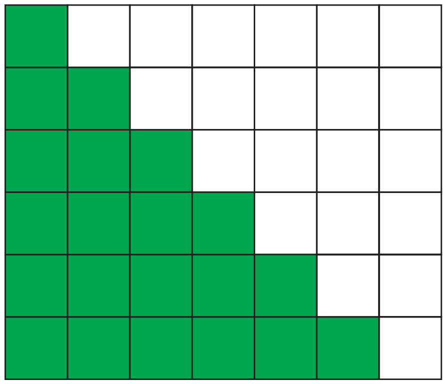
En muchas ocasiones el método inductivo nos proporciona la demostración de un resultado, pero no nos ayuda a entender la razón por la que es cierto.

Inducción versus Visualización

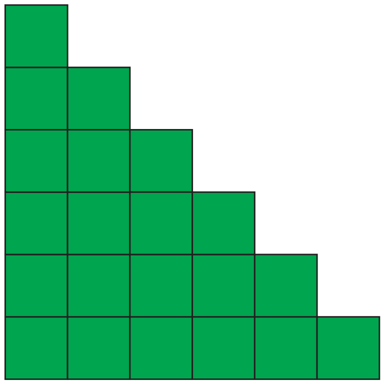
Un hecho importante que seguramente no haya pasado desapercibido al lector es que en muchas ocasiones el método inductivo nos proporciona la demostración de un resultado, pero no nos ayuda a entender la razón por la que es cierto. Por ejemplo, es sencillo demostrar por inducción la conocida fórmula:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Sin embargo, para entenderla, resulta mucho más clarificadora cualquiera de las dos imágenes siguientes:



$$2(1+2+3+\ldots+n)=n(n+1)$$



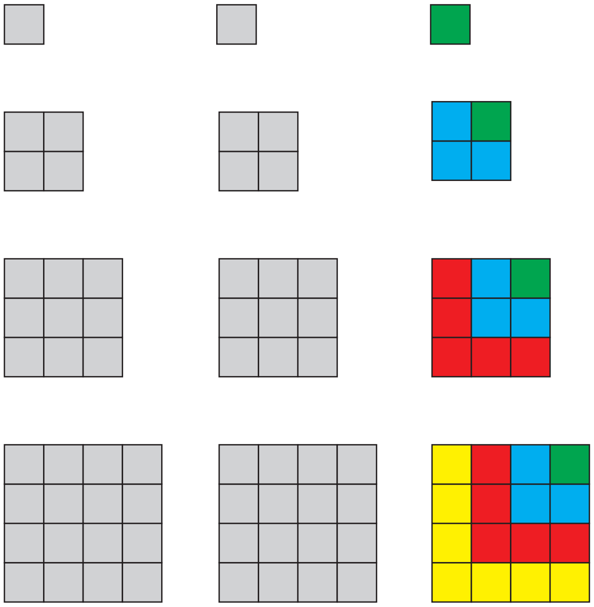
$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

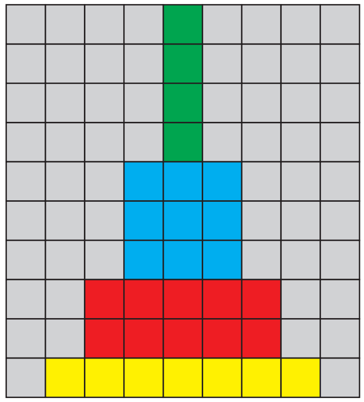
El papel de la visualización en matemáticas ha sido reivindicado y popularizado en los últimos años (véanse los magníficos libros (GUZMÁN,1996) y (ALSINA y NELSEN, 2006). Sin embargo el uso de diagramas, figuras e imágenes para representar, explicar o demostrar resultados matemáticos se remonta a los antiguos matemáticos griegos. De hecho, la palabra teorema significa *lo que se contempla* y no *lo que se demuestra* como solemos interpretarla hoy en día. Además la palabra *ver* tiene también el significado de *entender*. Es por ello importante, sobretodo en los niveles más básicos de la enseñanza, que los alumnos perciban la importancia de un buen dibujo que sugiera o explique un teorema. En esta línea se enmarcan las llamadas demostraciones sin palabras que nos proporcionan de un vistazo una prueba del teorema de Pitágoras o de la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Finalizamos nuestra excursión por el mundo inductivo con una demostración visual, debida a Martin Gardner, de la fórmula para la suma de los n primeros cuadrados. Dicha fórmula puede probarse por inducción pero el lector apreciará que resulta más fácil de entender usando un dibujo adecuado (véanse NELSEN, 2001 y ALSINA y NELSEN, 2006).

Teorema: $1+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{(2n+1)n(n+1)}{6}$

Demostración:





Sumando 3 veces $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ obtenemos un rectángulo de base $2n + 1$ y altura $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.

Utilizando ahora que

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

deducimos la fórmula deseada. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AIGNER, M. y ZIEGLER, G. M. (2005): *El libro de las demostraciones*, Nivola, Madrid.

ALSINA, C. y NELSEN, R. B. (2006): *Math made visual*, MAA, Washington.

CIESIELSKI, K. (1997): *Set theory for the working mathematician*, Cambridge University Press, Londres.

DE GUZMÁN, M. (1995): *Aventuras matemáticas*, Pirámide, Madrid.

DE GUZMÁN, M. (1996): *El rincón de la pizarra*, Pirámide, Madrid.

HARDY, G. H. (1999): *Apología de un matemático*, Nivola, Madrid.

NELSEN, R. B. (2001): *Demostraciones sin palabras*, Proyecto Sur, Granada.