SUMA 55
Junio 2007, pp. 49-54

Joyas matemáticas de una caja de música

Las cajas de música esconden en su interior un verdadero tesoro compuesto por joyas matemáticas. Son estudiadas, en concreto, la espiral de Arquímedes, el tornillo como engranaje, la precisión en la medida de sus pequeños componentes, la longitud de las pletinas sonoras, el sistema de codificación de la melodía sobre el tambor y el análisis de Fourier aplicado de manera simplificada al reconocimiento del timbre de las posibles cajas de resonancia. De cada elemento se hace un breve repaso conceptual y se proponen algunas actividades didácticas.

Music boxes hide in themselves a true treasure consisting of mathematical jewels. They are looked into, especially, the Archimedes' spiral, the screw as a gear, the precision in the measure of its small components, the length of the sound platens, the encoding system of the melody on the cylinder and Fourier's analysis applied to the recognition of the timbre of possible resonance boxes in a simplified way. It's carried out a short conceptual review of each element and some didactic activities are suggested.

Decía el filósofo G. Santayana (1863-1952) que

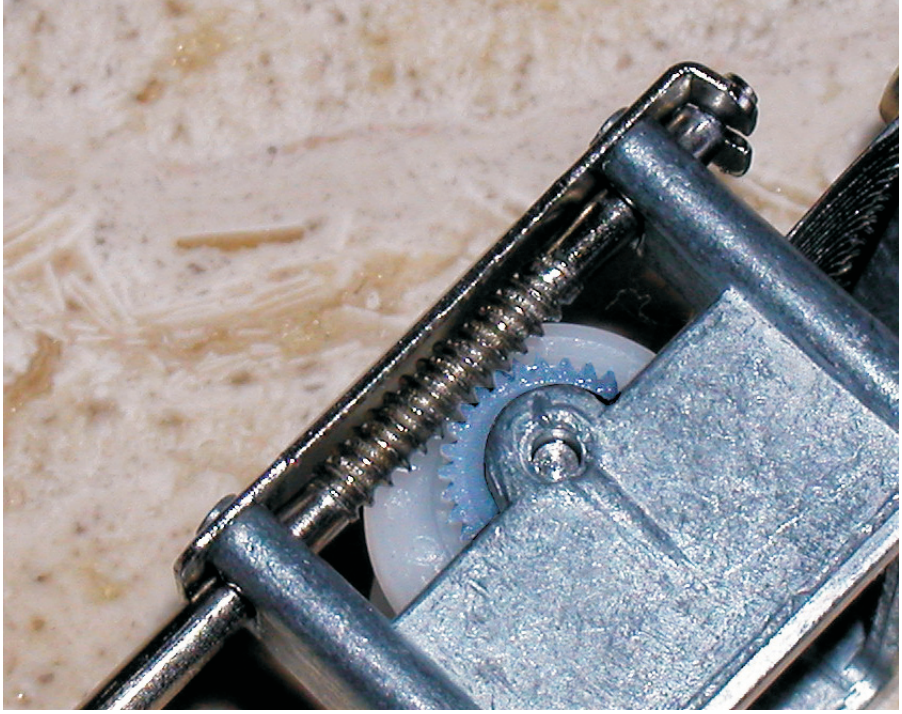
> si todas las artes aspiran a ser como la música, todas las ciencias aspiran a ser como las matemáticas.

Sea como fuere, la aspiración de este artículo es aprovechar el prieto mecanismo de una caja de música para ver, escuchar e interpretar matemáticas. Como experiencia didáctica, es una actividad que podría llevarse a cabo, al menos en su mayor parte, con alumos del último curso de ESO.

Las cajas de música, esos pequeños receptáculos que agasajan nuestros oídos, tienen algo de entrañable, algo de familiar que puede ser aprovechado para captar la atención de los más jóvenes. Es probable que todos y cada uno de ellos hayan escuchado alguna vez sus evocadoras notas metálicas. Pero serán bastantes menos, minoría mínima, aquellos que hayan desmontado y observado su mecanismo interior.

Es relativamente fácil, en la actualidad, encontrar este mecanismo vendiéndose por separado de su continente y, por lo tanto, con la posibilidad de hacerlo funcionar a la vista, aunque en este caso, en las innegables ganancias visuales –y alguna otra de la que hablaremos al final– habremos perdido por el camino dos elementos interesantes: el artilugio que le da cuerda y, por supuesto, la magia de abrir y cerrar una caja. Empecemos pues por el principio. Abramos la caja y, en el suave vaivén de su melodía, preguntémonos por las joyas matemáticas que custodia.

Josep Lluís Pol i Llompart
IES Josep Sureda i Blanes
Palma de Mallorca



La espiral de Arquímedes

El mecanismo que almacena la energía (potencial elástica) necesaria para producir el movimiento del tambor de la caja de música es un fleje metálico popularmente conocido como cuerda de reloj. Por el hecho de tener sección constante, al dar toda la cuerda de la caja, justo antes de comenzar la música, el fleje describirá aproximadamente la llamada espiral de Arquímedes pues se encontrará totalmente enrollada. Es decir, la distancia entre dos espiras cualesquiera será constante.

Esta espiral, que el mismo Arquímedes atribuye —en su tratado *Sobre las espirales*— a su contemporáneo Conon de Alejandría, puede definirse de manera precisa como

> el lugar geométrico de un punto del plano que, partiendo del extremo de una semirrecta se mueve uniformemente sobre ella, mientras que la semirrecta gira a su vez uniformemente alrededor de su extremo (Boyer, 1968).

Actividades

Demos a los alumnos un papel pautado en coordenadas polares y preguntémosle cómo se ha distribuido el papel. Hagámosle dibujar en él las dos o tres primeras revoluciones de una espiral arquimediana y que reflexione: ¿Cuántos datos se necesitarían para que las espirales de todos los alumnos fueran superponibles? ¿Qué hay del sentido de giro? ¿Qué pasa con la orientación de la línea espiral respecto del radio vector a medida que nos alejamos del centro? ¿A qué figura se parecerá cada vez más una revolución completa al alejarnos del centro? ¿Donde podemos encontrar este tipo de espirales? ¿Es la concha de un caracol un espiral arquimediana?

El tornillo como engranaje

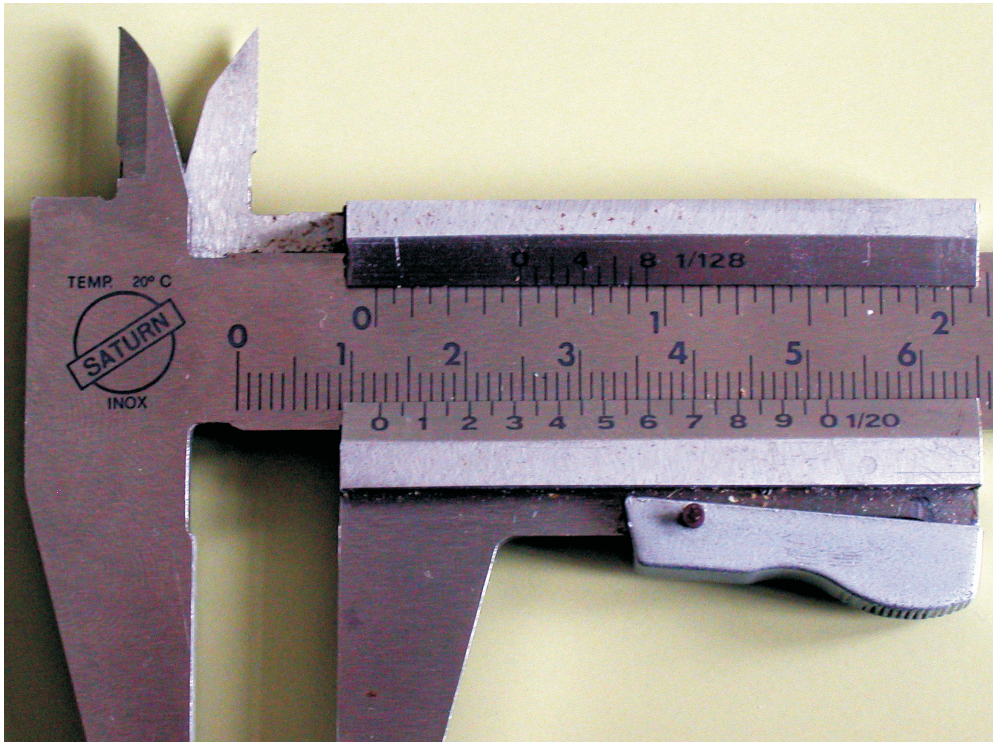
El hecho de que el mecanismo de una caja de música deba ir escondido obliga a éste a presentar un tamaño reducido. Esto implica que en el limitado recorrido de una revolución completa de su pequeño tambor musical, se ha de codificar la totalidad de la melodía. Lo cual, a su vez, precisa de una rotación suficientemente lenta y uniforme de aquél.

El enérgico tirón que generaría la cuerda de reloj es controlado y reducido por un sistema de engranajes que pasa habitualmente por un tornillo. Éste cumple con dos cometidos. Por una parte, es el tipo de engranaje que proporciona la máxima relación de giro, esto es, n a 1. En efecto, una revolución completa del tornillo sólo desplazará una de sus espiras y, por ende, únicamente un diente de la rueda adyacente. Si dicha rueda tiene n dientes, se necesitarán n vueltas del tornillo para generar una sola revolución en la rueda dentada. La otra función interesante es la de producir un cambio perpendicular en la dirección del eje de rotación, efecto que resulta muy útil a la hora de compactar el mecanismo (aunque este efecto pueda lograrse también a partir de engranajes cónicos).

De alguna manera, podríamos decir que un tornillo puede mirarse como la versión en geometría cilíndrica de una espiral arquimediana plana. En efecto, la curva que describe un tornillo podría definirse como el lugar geométrico de un punto del espacio situado en el extremo de un segmento (ρ cte.) que gira uniforme y perpendicularmente alrededor de un eje sobre el cual se encuentra el otro extremo del segmento, mientras que este último extremo se desplaza a su vez uniformemente a lo largo de dicho eje ($d\varphi/dz$ cte.). Es decir, que cada revolución aleja el punto de la posición anterior una distancia constante. Esta característica es conocida como paso de un tornillo. La curva generada, la hélice circular.

Actividades

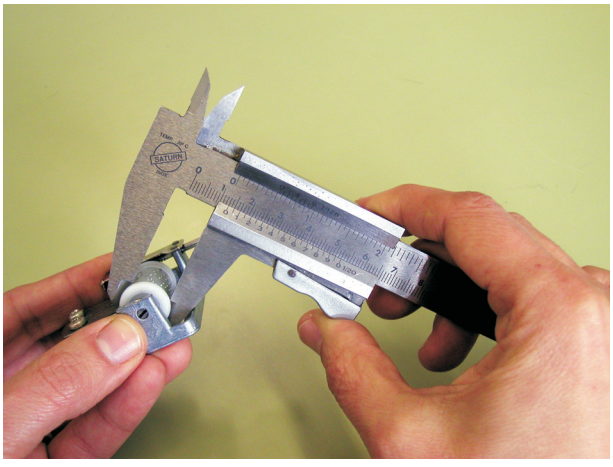
Preguntemos a los alumnos por el tornillo de Arquímedes. ¿Qué es y para qué sirve? Este podría ser el título de un pequeño trabajo de investigación. Trabajemos la mal llamada escalera de caracol. Hagámosles pensar en la relación entre el ángulo ocupado por un peldaño (que es lo mismo que decir el número de peldaños de una vuelta) y la altura de éstos para que la escalera sea transitable. En este punto es muy importante que los alumnos puedan visualizar la estructura ocupando directamente alguna escalera de este tipo que esté a su alcance o, por ejemplo, construyendo un modelo con algún material común como el corcho blanco. Y ¿qué decir del ADN?



La precisión en la medida

La precisión en la medida suele ser una de esas cenicientas del currículum de matemáticas para secundaria: muy pocos la llevan al baile. Pero como de música se trata…

La pequeñez del mecanismo que manejamos hace cobrar sentido al término de precisión ya que nos hallamos en el límite de uso de los instrumentos de medida cotidianos más precisos que manejan los alumnos. A saber: reglas milimetradas. En efecto, el paso de los tornillos examinados o el grueso de las pletinas sonoras se encuentran –en general– próximos al milímetro. ¿Qué pasa, entonces, cuando la longitud del objeto a medir es del orden de la unidad de medida? Se impone la elección de entre –al menos– dos caminos.



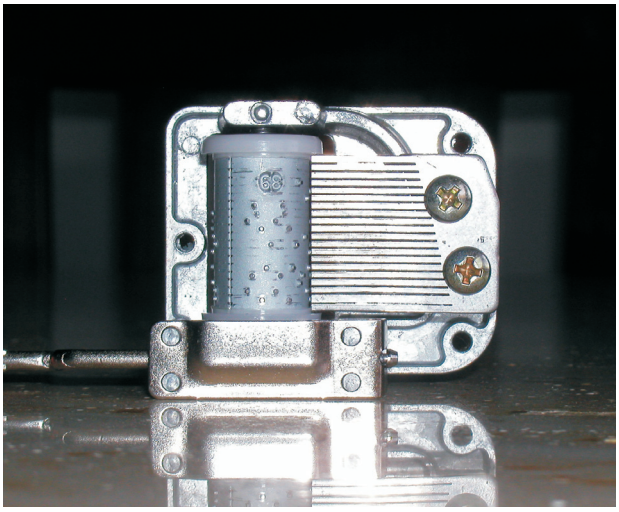
El camino de la mejora instrumental podría emprenderse con el uso de un calibrador Vernier o pie de rey, de presencia habitual en los centros de secundaria. El estudio de las posibilidades de este instrumento vale por sí solo algunos artículos. Basta resaltar aquí la idea del matemático portugués Pedro Nunes (1502-1578) aplicada por el francés Pierre Vernier (1584-1638) de dividir $(n - 1)$ unidades de la escala principal en n partes sobre una segunda regla, llamada propiamente, nonius. Así las cosas, el nonius nos permite alcanzar una precisión de $1/n$ sobre la unidad original. Es bonito observar cómo, para facilitar la lectura, al número de unidades divididas $(n - 1)$ se le puede añadir un número entero de veces n (divisiones del nonius) sin que esto altere el valor de la precisión (suponiendo, claro está, la regularidad en la medida a lo largo de toda la escala principal).

La otra opción de mejora consiste en la búsqueda de una sola medida sobre una determinada repetición de aquello pequeño que se quiere medir. Tenemos aquí, en realidad, una media que, bajo la hipótesis de valor constante para cada elemento, nos ofrece una medida más precisa. En el caso del mecanismo musical, podemos aplicar este método para medir todas las espiras del tornillo de una vez o el conjunto de las pletinas sonoras, aunque en este caso, tendremos el interesante problema del grueso del corte entre pletina y pletina.

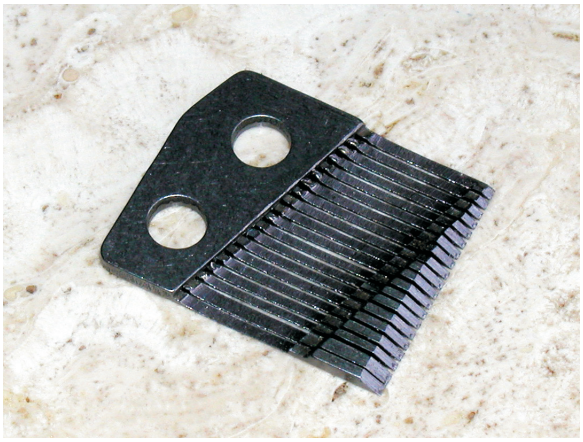
La longitud de las pletinas sonoras

Al mirar el peine de pletinas sonoras que el tambor va levantando en una caja de música, uno no puede menos que pensar en la caja de resonancia de un piano de cola o en la silueta de

un arpa. Pero se impone inmediatamente una diferencia: aquí las pletinas tienen un corte de crecimiento marcadamente lineal, mientras que en los demás instrumentos aparecen atractivas y sinuosas curvas.



Realmente, este corte lineal de las pletinas está en contradicción con aquello que nos dice la física del sonido: en la afinación actual, la frecuencia de cada nota se puede obtener de la nota inmediatamente anterior mediante el factor 21/12. Y como la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud del elemento sonoro (pletinas, cuerdas, tubos…), hemos de concluir que la longitud de las pletinas debería seguir también una línea de corte exponencial. Otra vez, el factor limitador del espacio en la caja de música obliga a los constructores a *hacer trampa*. Sabiendo que el crecimiento exponencial dispararía la longitud de las pletinas que producen las notas más graves, se compensa este efecto aumentando el grosor de las pletinas de manera conveniente. Basta girar el peine para comprobarlo.

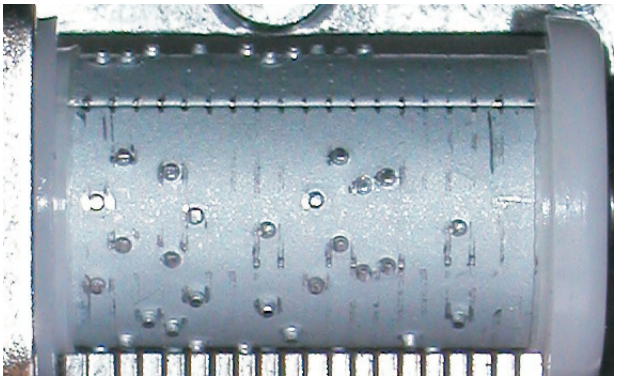


Actividades

Tal vez éste sea el momento de llevar a los alumnos a un aula de música y preguntar por algunos instrumentos (pianos, arpas, xilófonos o metalófonos, guitarra…). ¿Qué estrategias siguen los constructores de pianos, de arpas, de metalófonos, para no tener que alargar el instrumento hasta lo inmanejable?¿Nos hemos fijado en la curva que muestra una flauta de Pan? En el caso de los instrumentos de cuerda, el juego con el grosor y la tensión permite jugar a los *luthiers*. En el caso, por ejemplo, de los xilófonos o metalófonos, el grueso de las piezas hará el mismo efecto. ¿Conocen los alumnos las famosas xilografías de Pitágoras estudiando los sonidos? ¿Qué es eso de la música de las esferas?

La codificación en el tambor

El mecanismo final que produce el sonido en una caja de música es, no por sencillo, menos ingenioso. Se trata de unas pequeñas puntas, convenientemente clavadas en la superficie lateral del cilindro que, al girar, van levantando las pletinas sonoras del peine metálico produciéndose, al liberarse éstas, el sonido deseado. (Es el mismo caso de los mazos que en las fraguas catalanas eran accionados por molinos de agua). ¿Cómo codificar entonces la melodía deseada en ese pequeño tambor?



De entrada, cada nota tendrá asignada su franja del tambor. Nos encontramos ahora ante un sencillo problema de proporcionalidad y de máximo común divisor. En general, la simplicidad de las melodías codificadas reduce el problema a encontrar el intervalo de tiempo más pequeño existente entre dos notas consecutivas y calcular el número de esos intervalos que contiene la cancioncilla completa. Dividamos entonces el recorrido útil de tambor que queramos usar entre ese número y, finalmente, coloquemos las puntas en las bandas correspondientes según sean las notas, y a la distancia de la línea inicial que les toque según el tiempo de aparición.

Actividades

La propuesta didáctica para este apartado no puede ser otra que animar a los alumnos a marcar su propia banda sonora sobre un papel con melodías muy sencillas, cortas y sin acompañamiento. Es muy útil, en este caso, disponer de un metrónomo que facilitará la labor de reconocer los intervalos de tiempo para los legos en música. ¿Cómo escucharla? Algunos alumnos o alumnas capaces pueden interpretar tamaña partitura pertrechados con sus trabajados instrumentos. Tal vez, la afición binaria de alguno puede desembocar también, fácilmente, en una aplicación informática que, después de introducir ceros y unos en una tabla a modo de tambor, haga realidad el sonido codificado.

Dime cómo suenas...

... y te diré de qué estás hecha. Decíamos al principio de este artículo, que disponer del mecanismo sonoro de una caja de música separado de su continente nos privaba de algunas joyas matemáticas. Pero no es menos cierto que, en compensación, nos ofrece otras. Dos de ellas, tal vez las principales, son la resonancia y, en estrecha relación, el timbre.

Sorprende de entrada la intensidad sonora de este pequeño mecanismo aislado: casi inaudible. Pero la sorpresa es mayúscula cuando es accionado, por ejemplo, sobre la superficie de una mesa. Ahora todo el mundo puede escuchar la melodía. Estamos ante una caja de resonancia. El efecto físico de este dispositivo es el de actuar como amplificador natural. Pero además, la caja de resonancia aporta a la música su propia personalidad. En efecto, el resultado sonoro no será el mismo si hacemos sonar el mecanismo sobre una caja de madera que, por ejemplo, sobre un cristal. Al hecho de que seamos capaces de distinguir la misma nota producida por sistemas diferentes lo llamamos timbre.

Para entender qué es el timbre hay que desmenuzar el concepto simplificado de frecuencia de un sonido; porque cuando decimos que el *la* de un diapasón está vibrando con una frecuencia de 440 Hz (oscilaciones por segundo), estamos contando sólo parte de la verdad. En efecto, cabalgando sobre la frecuencia fundamental, vibran otras frecuencias llamadas armónicos. Para que estos armónicos no desbaraten la frecuencia fundamental, han de tener necesariamente una frecuencia múltiple entera de aquella. Y el conjunto de los armónicos y sus intensidades para las diferentes notas es algo así como la huella dactilar de los instrumentos.

Jean B. Joseph Fourier (1768-1830) vino a echarnos una mano en este análisis que, merecidamente y por eso mismo, lleva su nombre. Fourier descubrió que cualquier función periódica puede descomponerse en una suma de funciones seno y coseno, cada una de ellas multiplicada por un coeficiente característico. Esto es

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos(n\omega x)+b_n sen(n\omega x))$$

El primer término de la serie lo tenemos cuando n=1 y recibe el nombre de armónico fundamental (ω es por tanto la pulsación fundamental). Los términos restantes se conocen como armónicos (de orden n).

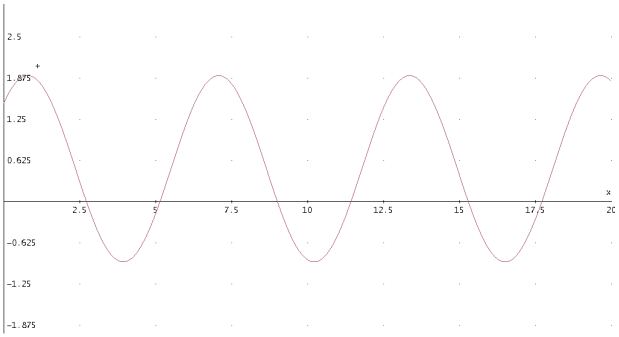
Actividades

Propondremos aquí dos actividades complementarias para realizar en clase. La primera consistirá en abrir una hoja de cálculo para construir el gráfico de una función periódica siguiendo el modelo de Fourier. Supongamos que se nos ocurre hacer:

$$f(x) = ½ + \text{sen}(x) + \cos(x)$$

para x entre 0 y 20.

Entonces obtendremos un gráfico como el siguiente:

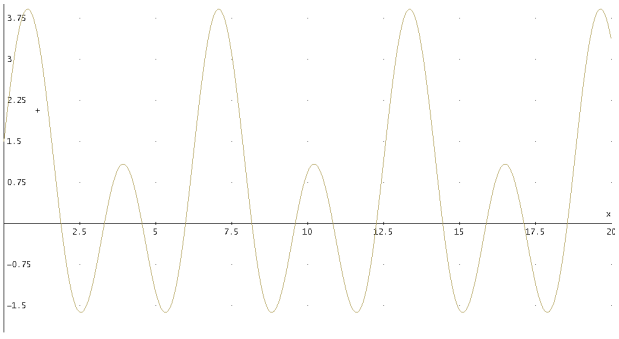


Añadamos ahora el armónico de segundo grado y probemos con:

$$f(x) = ½ + \text{sen}(x) + \cos(x) + \text{sen}(2x) + \cos(2x)$$

también para x entre 0 y 20.

El gráfico que obtenemos ahora tiene el siguiente aspecto:



Es importante destacar que la pulsación o frecuencia (y por ende, la distancia entre dos picos iguales) no ha cambiado y que, por tanto, este sonido daría la misma nota o tono que el anterior aunque sonaría diferente. Es la manera de visualizar cómo, cuando un violín y un clarinete dan la misma nota, la misma frecuencia fundamental, nuestro oído es capaz de distinguir sus sonidos porque reconoce en ellos armónicos diferentes. Los armónicos son entonces la huella digital del instrumento y sus sonidos.

Cuando los alumnos ya han construido sus propias funciones de Fourier, la manera más ágil de variar la contribución de los armónicos en la función se puede obtener desde el portal web Eduteka con la aplicación para Microsoft Excel Fourier 97.

La segunda propuesta, seguramente la más interesante y complementaria de la anterior, consistiría en utilizar algún programa informático que represente la función periódica de la frecuencia de los sonidos que recibe a través de un micrófono. De esta manera, el alumno comprobará cómo manteniendo un mismo tono, el gráfico de la función periódica correspondiente a su propia voz irá cambiando al cambiar, por ejemplo, la vocal empleada. Podrá comprobar, entre otras cosas, cómo el sonido de la vocal *i* es el que más se aproxima a una función periódica sinusoidal simple y que las demás vocales poseen un conjunto de armónicos característicos. (Existen diversos programas en el mercado que ofrecen versiones de prueba gratuitas y que son perfectas para este propósito. En nuestro caso, el programa utilizado ha sido el Waveshow de Paul K. Warme.)

La serie de Fourier es hoy en día una herramienta imprescindible para el análisis de resultados en numerosas aplicaciones, desde la valoración acústica de los instrumentos musicales hasta el análisis químico y médico en aparatos como la resonancia magnética nuclear. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEATO SIRVENT, J. (2003): "Sonidos, fracciones, medias, potencias y funciones exponenciales", *SUMA* 50, pp. 39-44.

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

PARRONDO, J. M. R. (2004): "Cuestión de escala", *Investigación y Ciencia*, abril, 2004, pp. 86-87.

RECUERDO LÓPEZ, M. (1994): *Ingeniería acústica*, Ed. Paraninfo SA, Madrid.

En Internet:

http://www.eduteka.org/descargas/Fourier97.xls
http://www.eduteka.org/ExpresionMusical.php
http://members.aol.com/waveshow/