SUMA 55
Junio 2007, pp. 7-20

Los inicios de la teoría de la probabilidad

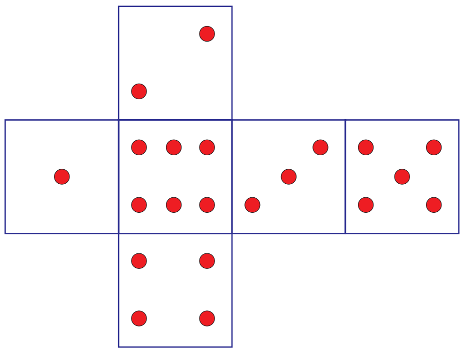
En el presente artículo se aborda, de una manera informal, los orígenes de la teoría del azar, presentándose algunos hitos y problemas históricamente relevantes. Su desarrollo abarca el periodo de tiempo que va desde los orígenes de nuestra civilización hasta finales del siglo XVIII. Por el escrito van desfilando grandes pensadores como: Galileo, Pascal, Fermat, Huygens, J. Bernoulli, Laplace y otros.

This article informally deals with the origins of probability theory, introducing some historically relevant milestones and problems. Its development spans the period from the origins of our civilization to the end of the 18th century. Great thinkers, such as: Galileo, Pascal, Huygens, J. Bernoulli, Laplace and some others pass through the document.

Los conceptos de azar y probabilidad son tan antiguos como la civilización misma. Hay que señalar que el sentido del término probabilidad es sumamente complejo debido al distinto uso que se hace de él, tanto en el lenguaje común como en el de las ciencias, incluyendo los campos de las matemáticas y la filosofía. El mismo concepto de probabilidad puede tener una doble vertiente, epistemológica y aleatoria, pero ambas aparecen sugeridas por un fenómeno muy antiguo: los juegos de azar.

¿Pero dónde comienzan los cálculos acerca del azar y dónde se conectan y funden con el concepto filosófico de azar?

Las pruebas más antiguas de utilización de juegos de azar aparecen en las culturas egipcia y griega. El sabio Herodoto ya nos deja constancia del modo que resolvieron en la antigua Libia una época de hambre que tuvo lugar alrededor del año 1.500 a.C.: jugaban durante todo el día sin parar, de manera que no pudieran sentir hambre, y al día siguiente comían y no jugaban, y de este modo pasaron cerca de 18 años. De igual manera existen pruebas de que unos mil ochocientos años a.C. se jugaba a un precioso juego llamado *perros y chacales*, que consta de un tablero en el que se colocaban unos punzones con cabeza de perro o de chacal según fuese el lanzamiento de unas tabas. También se sabe que hace más de 4.000 años en Irak fueron utilizados unos dados en forma cúbica, de cerámica, y con una ordenación de puntos algo distinta a la habitual; es el dado más antiguo encontrado hasta la fecha.



El destino se ríe de las probabilidades.
E. G. Bulwer-Lytton

Santiago Fernández Fernández
Asesor de Matemáticas del Berritzegune
Bilbao

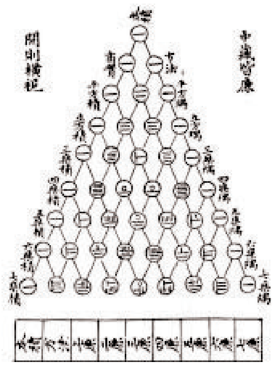
El mismo nombre de azar parece haber transitado desde Siria hasta Europa, y probablemente la flor de azahar, que aparece en la mayoría de los dados de la época, sea el origen de la palabra azar.

Los juegos de azar desde siempre han sido muy populares, y en épocas y ocasiones perseguidos. En Roma el juego alcanzó tal importancia e incidencia en la vida social que llegó a prohibirse en determinadas ocasiones y épocas del año. En las primeras épocas del Cristianismo determinados juegos de azar también fueron reprobados y censurados. El rey Luis XI de Francia, en 1255, también censura los juegos de azar y la fabricación de dados, e inclusive los pone al mismo nivel que la frecuentación de tabernas y la fornicación.

Curiosamente en algunas ocasiones el azar era asimilado a la voluntad de los dioses y en algunas ocasiones jugaba un papel decisorio, así: *Las vacantes importantes en la jerarquía sacerdotal eran adjudicadas por sorteo.*

En paralelo con el estudio de aspectos probabilísticos también son abordados poblemas de carácter combinatorio. Realizando un rápido recorrido por este tipo de situaciones combinatorias podemos decir que ya el famoso libro chino *I-Ching* nos proporciona, con sus combinaciones de triagramas místicos, uno de los ejemplos más antiguos. Entre los filósofos griegos también se encuentran consideraciones sobre distintos problemas que hoy se resolverían con el cálculo combinatorio, pero no hay constancia de que dispusieran de teoría alguna al respecto. El científico latino Boecio (siglo V) también describe con cierto detalle una regla para encontrar las combinaciones de *n* objetos tomados dos a dos. De igual modo, conviene citar que el astrónomo tudelano A. Ben Meir Ibn Ezra (siglo XI) y el judío catalán Levi Ben Gerson (sigloXIV), estudiaron con cierta profundidad reglas para el cálculo de variaciones y combinaciones, llegando a calcular números combinatorios, que por cierto ya eran conocidos por los científicos chinos en el siglo XIII como lo demuestra el grabado (columna siguiente) de la época.

Como curiosidad en el poema *De Vetula*, escrito por Richard de Fournival (1200-1250), se afirma, correctamente, que si se lanzan tres dados hay 216 combinaciones posibles y calcula de manera exacta los diferentes valores para la suma de los tres dados. Aunque ahora puede parecer una cuestión trivial, en aquella época no lo era, y otros muchos autores erraron al intentar resolverla, generalmente porque no tenían en cuenta las posibles permutaciones de una misma combinación.



Grabado chino del siglo XIII en el que aparece el triángulo de números combinatorios

Los precursores

> *Es una verdad muy cierta que, cuando no esté a nuestro alcance determinar lo que es verdad, deberemos seguir lo que es más probable.*
> R. Descartes. Discurso del método

Parece claro que desde la antigüedad hasta el Renacimiento se juega sin interrupción a toda clase de juegos de azar (dados, tabas, astrágalos, cartas, etc.); los juegos y las apuestas son muy populares y no distinguen clases sociales. Curiosamente no hay apenas manuales sobre las reglas del juego, lo que hace suponer que la gente conocía las reglas por tradición oral.

Los primeros acercamientos serios a lo que más tarde se llamaría la Probabilidad, son debidos a grandes científicos y matemáticos italianos como: N. Tartaglia, G.F. Peverone, Galileo y G. Cardano. Una de las cuestiones, abordadas hasta la saciedad, es el llamado problema de la división o reparto. En el año 1494 Luca Pacioli (1445-1517) formula el problema de esta manera:

> Un grupo juega a la pelota de modo tal que necesita un total de 60 puntos para ganar el juego y cada gol vale 10 puntos. Las apuestas son de 10 ducados. Por algún incidente no pueden terminar el juego y un bando se queda con 50 puntos y el otro con 20. Se quiere saber qué participación del dinero del premio le corresponde a cada bando.

Es interesante acercarnos a los trabajos de estos científicos, de la lectura de sus escritos podemos extraer la idea que ellos manejaban de los conceptos relacionados con el mundo del azar. Por ejemplo, ante el problema del reparto, N. Tartaglia (1499-1559) razona del siguiente modo:

Si suponemos que tenemos que llegar a 6 goles y *A* ya ha conseguido 5 y *B* ha conseguido 3, yo digo que el reparto más justo es de 2 a 1, puesto que *A* está 2 juegos por delante de *B*. Esto es 1/3 del total de juegos requeridos para ganar. Por lo tanto *A* debería tomar 1/3 de las apuestas. El remanente se divide equitativamente, dando a *A* una ventaja sobre *B* en la proporción 2 a 1.

El mismo Tartaglia no estaba muy conforme con sus razonamientos, reconociendo que:

La resolución de tal pregunta debe ser judicial más que matemática, de modo que, cualquiera sea la manera en que se lleve a cabo la división, habrá causa para litigar.

Jerónimo Cardano. 1501-1576

Niccolò Fontana Tartaglia. 1499-1559

Galileo Galilei. 1564-1642

Fra Luca Pacioli. 1445-1517

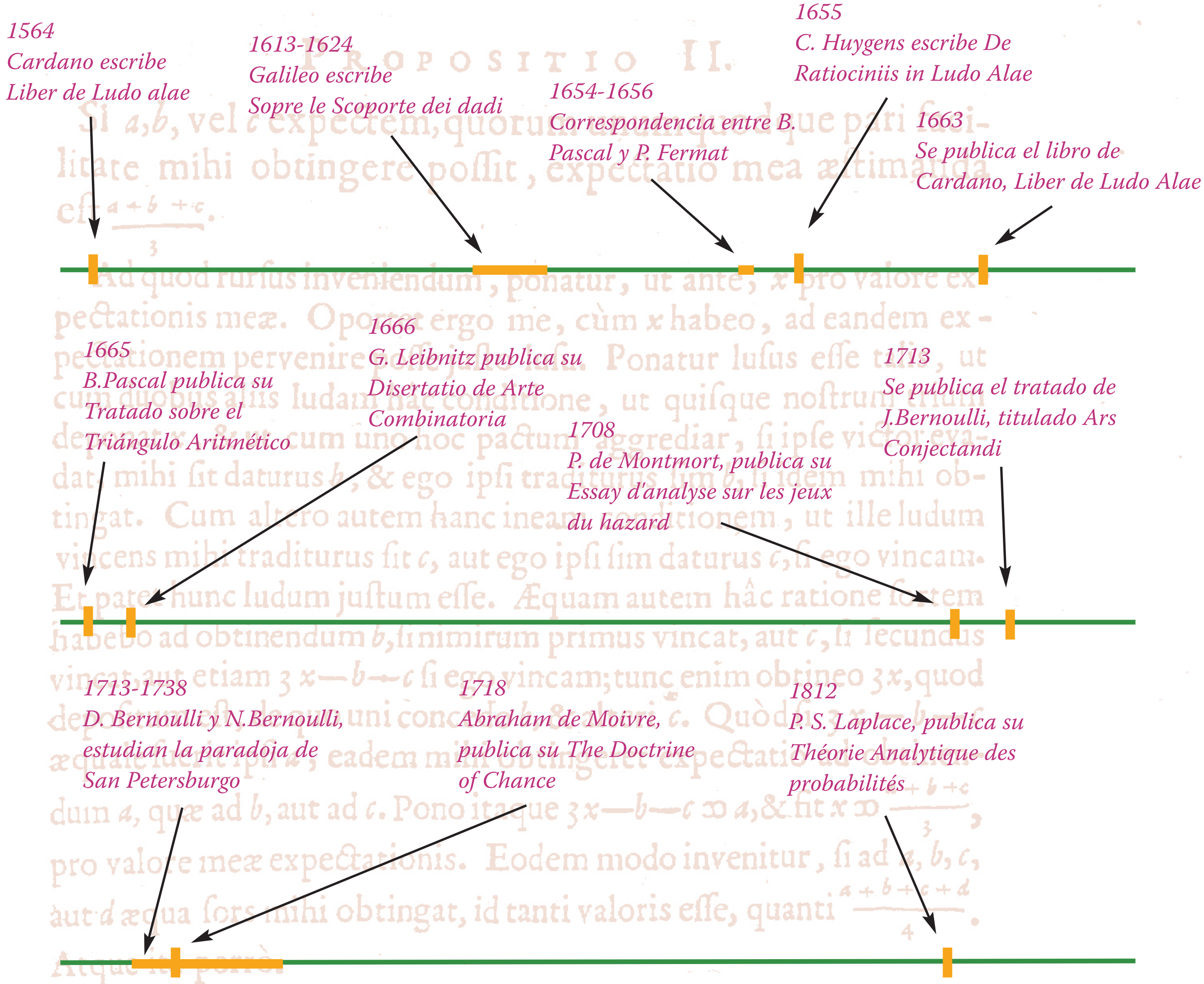
En 1558, G. F. Peverone resuelve este tipo de problemas de manera más correcta que Tartaglia. Su exposición está escrita en un pequeño tratado titulado Due brevi e facili trattati, el primo d'Arithmetica l'altro di Geometria. Presentamos una de las situaciones a título de ejemplo:

Supongamos que *A* ganará mediante el siguiente juego y que apuesta una unidad. Si a *B* también le queda un sólo juego apostará, también una unidad. Esto es, el premio debería dividirse igualmente. Si a *B* le quedan dos juegos, debería pagar 2 unidades más para llegar a la posición en que le quede un solo juego. Por lo tanto el premio debería dividirse en la forma 3 a 1. Si a *B* le quedan tres juegos, deberían pagar dos veces más nuevamente,... y así hasta llegar al problema de Pacioli y sería 7 a 1 (en realidad Peverone, por un aparente desliz da la respuesta 6 a 1).

Con la aparición de la imprenta comienzan a emerger tratados poco precisos sobre los diferentes juegos de moda. Se le asigna a G. Cardano el primer tratado relacionado con el mundo del azar, su título: *Liber de Ludo Alae*, es un estudio medianamente organizado, cuyo objetivo es calcular las diferentes posibilidades del lanzamiento de varios dados, así como resolver problemas que hemos llamado de la división de lotes. Al carecer de una simbología adecuada recurre constantemente a ejemplos concretos. A lo largo de todo el tratado no utiliza los teoremas de unión e intersección sino que se sirve especialmente de dos métodos: recuento de las distintas posibilidades y el concepto de ganancia media. Su obra comienza, curiosamente, con una serie de consejos moralizantes sobre los peligros del juego.

En la resolución de los problemas planteados, Cardano trabajó con los conceptos de la definición clásica de la probabilidad, aunque no los definió explícitamente. En concreto, introdujo la idea de asignar una probabilidad p entre 0 y 1 a un suceso cuyo resultado se desconoce, considerando el número total de resultados y el número de resultados favorables, y

Línea de tiempo de los principales acontecimientos relacionados con la probabilidad



Los teoremas básicos de la probabilidad

Teorema de estabilidad de las medias (Graunt, hacia 1662)
Teorema de la suma (Bayes)
Teorema de la multiplicación e independencia de sucesos (De Moivre)
Teorema de Bayes (Bayes y Laplace)
Ley de los Grandes Números (J. Bernoulli, hacia 1700)
Teorema Central del Límite (De Moivre, hacia 1711)

esbozó de una forma rudimentaria lo que ahora se conoce como la *ley de los grandes números*, al afirmar que si la probabilidad de una suceso es *p*, después de un número grande de repeticiones *n*, lo más razonable es apostar a que ocurrirá alrededor de *np* veces. Sin embargo, Cardano no alcanzó a reconocer la importancia teórica de estos conceptos, ya que consideraba estas relaciones como meramente aritméticas, más que como una medida de la posibilidad de ocurrencia de un suceso aleatorio.

El libro de G. Cardano si bien fue escrito alrededor de 1.564 no fue impreso hasta el año 1.663, esto explica, que las ideas que están contenidas en el tratado permanecieran, en buena parte, desconocidas para la mayoría de los estudiosos hasta bastantes años después de su muerte.

Años más tarde el científico italiano Galileo Galilei volvió a estudiar y resolver algunos de los problemas ya planteados por Cardano. Galileo también escribió un tratado sobre este tema, aproximadamente entre 1613 y 1624, inicialmente se denominó *Sopre le Scoperte dei dadi* (Sobre los descubrimientos del dado), pero en las obras escogidas de Galileo, publicadas en 1718 aparece como *Consideratione sopra il Giuco dei Dadi*. Uno de los problemas estudiados por Galileo es el siguiente:

Al tirar un dado equilibrado, con igual probabilidad se obtienen 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 puntos. En caso de tirar dos dados la suma de los puntos obtenidos está comprendida entre 2 y 12. Tanto el 9 como el 10, a partir de los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 se pueden obtener de dos formas distintas: 9=3+6=4+5, y 10=4+6=5+5. En el problema con tres dados tanto el 9 como el 10 se obtienen de varias formas, que son las siguientes: suma 10 se obtiene en cualquiera de los sucesos {(1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4) y (3,3,4)} mientras que los casos favorables de suma 9 son {(1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4) y (3,3,3)}; en los dos casos hay 6 eventos favorables. ¿Cómo es posible entonces que al tirar muchas veces los tres dados me salga más veces la suma 10 que la 9?

Galileo, que tenía sentido de la probabilidad digno de un genio, realiza un cuidadoso análisis de todas las sumas de puntos que pueden obtenerse al lanzar tres dados, y muestra que de los 216 casos posibles, 27 son favorables a que la suma sea 10, y 25 a que la suma sea 9. Es notable su razonamiento, ya que la solución es análoga a la que actualmente se hace para resolver este tipo de problemas, lo que nos da motivos para pensar que el concepto de caras equiprobables de un dado correcto ya era conocido en el siglo XVI. Sin embargo, la principal contribución de Galileo a la teoría de la probabilidad fue la creación de la teoría de la medida de errores. Según Galileo, los errores de medida son inevitables y los clasificó en dos tipos: los errores *sistemáticos*, debidos a los métodos y las herramientas de medida; y los errores *aleatorios*, que varían impredeciblemente de una medida a otra. Esta clasificación sigue en vigor actualmente. Con estas ideas, Galileo no sólo contribuyó al desarrollo de la teoría de la probabilidad, sino que puso las bases para el nacimiento de la estadística.

En resumen, en la mayoría de los tratados de la época los problemas abordados son de dos tipos: problemas de recuento de posibilidades (combinatoria) y de juegos de azar en los que hay que repartir unas ganancias en un juego interrumpido antes de su conclusión. En esa época también fueron abordadas situaciones combinatorias, por una parte están ligadas a la resolución del problema de las partes y por otra asociados a la magia alquimista de los signos; de hecho, se suele mencionar al gran alquimista mallorquí R. Llull (siglo XIII) como el fundador de la teoría de combinaciones. Llull deseaba representar todos los elementos del universo mediante signos verdaderos y luego generando todas las combinaciones posibles de los mismos, producir verdaderos signos para todos los compuestos posibles.

Nacimiento de las primeras teorías probabilísticas

> *Si bien en los juegos de azar puro los resultados son inciertos la esperanza que un jugador tiene de perder o ganar posee sin embargo un valor determinado.*
>
> Ch. Huygens (1657): El cálculo en los juegos de azar

Como hemos visto fueron los científicos italianos los primeros en preocuparse por el estudio de la teoría de la probabilidad, pero el impulso fundamental en el desarrollo de esta teoría no se da en Italia, sino en Francia.

Conviene recordar que en la sociedad francesa del siglo XVII, el juego era uno de los entretenimientos más frecuentes. Los juegos cada vez más complicados y las apuestas muy elevadas hicieron sentir la necesidad de calcular las probabilidades de los juegos de manera racional.

La mayoría de los historiadores coinciden en atribuir a los trabajos de Blas Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665) las bases sobre las que posteriormente se asienta la moderna teoría de la probabilidad. Pascal se interesó por este tema a raíz de unas cuestiones que le había propuesto el caballero De Méré. La historia es más o menos la siguiente: durante cierto viaje, hacia el año 1652, camino de Poitou, el espiritual Pascal coincidió con el mundano A. Gombauld, señor de Baussay, y más conocido con el sobrenombre De Méré, tal caballero era considerado como un jugador profesional, apasionado por el juego de los dados y las cartas, además de ser un hombre ilustrado e inteligente. Resulta que en el fragor de la conversación éste le propuso una serie de problemas que rápidamente cautivaron la atención del joven Pascal. El primero de los problemas estaba enunciado en los siguientes términos:

Se lanzan *n* veces dos dados cúbicos. Calcular el número de veces que es preciso lanzar los dados para apostar con ventaja al suceso de obtención del seis en los dos dados.

Meré le hace saber a Pascal que para él dos respuestas son posibles: 24 y 25. La primera obtenida mediante una regla teórica y la segunda mediante su experiencia de jugador profesional. Posteriormente le plantea otro problema, que Pacioli y Cardano habían estudiado un siglo antes, conocido como el problema des partis o del reparto. El problema en cuestión era el siguiente:

Dos jugadores deciden interrumpir el juego antes del término convenido; ¿cómo deberán repartirse las cantidades apostadas, según el progreso de la partida, para que dicho reparto sea justo?

Durante dos años Pascal ponderó las cuestiones y finalmente comunicó sus resultados al jurista francés Pierre Fermat.

En una de las primeras cartas de la extensa correspondencia matemática que mantuvieron a lo largo de dos años. Pascal narra a Fermat el encuentro con De Meré y le hace saber cómo ha resuelto el problema del reparto en la partida interrumpida:

He aquí aproximadamente cómo lo hago para saber el valor de cada una de las partidas cuando dos jugadores juegan, por ejemplo, en tres partidas, y cada uno ha puesto en el juego 32 monedas. Supongamos que el primero tenga dos y el otro una; ahora juegan una partida cuya suerte es que, si el primero la gana, gana todo el dinero que está en juego, a saber, 64 monedas; si el otro la gana, son dos partidas contra dos partidas, y por consiguiente, si quieren separarse, es preciso que retire cada uno lo que ha puesto, a saber, 32 monedas cada uno. Considerad, señor, que si gana el primero, le pertenecen 64; si pierde, le pertenecen 32. Ahora bien, si no quieren arriesgar esta partida y separarse sin jugarla, el primero debe decir: *estoy seguro de tener 32 monedas, porque la pérdida misma me las da; pero para las otras 32, quizá las tendré yo, quizás las tendréis vos; el azar es igual repartamos, pues, estas 32 monedas, mitad por mitad, y me dais, además de éstos las 32 monedas que me corresponden con seguridad.* Tendrá, pues, 48 monedas y el otro 16.

La carta concluye con una frase muy conocida:

El caballero Meré tiene mucho talento, pero no es geómetra; esto es, como sabéis, un gran defecto. Carta de Pascal a Fermat (20/7/1654).

Blaise Pascal. 1623-1662

Pierre Fermat. 1601-1665

Casi al unísono Fermat resolvió el problema por un método completamente distinto, lo cual fue para Pascal muy estimulante. *Ya ve*, escribió B. Pascal*, que la verdad es la misma en Toulouse que en París.*

El método de Pascal consistía en el empleo de la ecuación en diferencias con el fin de determinar las probabilidades sucesivas de los jugadores, pasando de los números más pequeños a los siguientes. Pero su método estaba restringido al caso de dos jugadores. Sin embargo el método de Fermat se podía extender a un número cualquiera de jugadores, estando basado en combinaciones. Después del intercambio de algunas cartas entre ellos, Pascal reconoció la generalidad del método de Fermat.

A lo largo de la correspondencia puede contemplarse, no sólo la evolución de los problemas sino la admiración creciente que Pascal siente por el ingenio de Fermat, como lo demuestra la siguiente carta:

Señor,

Su última carta me ha satisfecho a la perfección. Admiro su método para los lotes, tanto más porque lo comprendo bien; es enteramente suyo, no tiene nada en común con el mío, y llega fácilmente al mismo resultado. Nuestra comprensión se ha establecido.

Pero Señor, si en esto he competido con Vd., deberá buscar en otra .parte quien le siga en sus intervenciones numéricas, cuyos enunciados me ha hecho Vd. el honor de enviarme. Le confieso que esto me sobrepasa ampliamente; sólo soy capaz de admirarlas y le suplico humildemente que dedique su primer momento libre a concluirlas. Todos nuestros amigos las vieron el sábado pasado y las apreciaron de todo corazón: no es fácil soportar la espera de cosas tan bellas y deseables. Piense pues en ello, si le place y esté vd. seguro de que soy, etc.

Carta de Pascal a Fermat (27/10/1654)

A través de esta correspondencia había nacido una nueva ciencia, que tuvo la mala suerte de coincidir con los grandes descubrimientos de la matemática. Efectivamente, el siglo XVII puede considerarse el siglo de oro de las matemáticas: nacimiento y desarrollo del cálculo infinitesimal, teoría de la gravitación, desarrollo de la geometría analítica, etc.

Pascal también aplicó los razonamientos probabilísticos sobre la toma de decisiones a la teología y trató de demostrar la existencia de Dios. Dice Pascal:

Vous avez deux choses à perdre: le vrai et le bien, et deux choses à engager: votre raison et votre volonté, votre connaissance et votre béatitude; et votre nature a deux choses à fuir: l'erreur et la misère. Votre raison n'est pas plus blessée, en choisissant l'un que l'autre, puisqu'il faut nécessairement choisir. Voilà un point vidé. Mais votre béatitude? Pesons le gain et la perte, en prenant croix que Dieu est. Estimons ces deux cas : si vous gagnez, vous gagnez tout; si vous perdez, vous ne perdez rien. Gagez donc qu'il est, sans hésiter.

Pensées, Blaise Pascal (1670)

Su argumento era el siguiente: Dios existe o no existe; si no existe, da igual creer en él que no creer; si existe, creer que no existe provoca la condenación eterna, mientras que creer trae la salvación. Como la salvación es preferible a la condenación (en términos probabilísticos, la ganancia es mayor), una persona razonable actuará como si Dios existiera, aunque crea que la probabilidad de que exista es pequeña. Este argumento se conoce como La apuesta de Pascal.

Años más tarde de la correspondencia establecida con Fermat, exactamente el año 1665, Pascal publica su Tratado sobre el Triángulo Aritmético, la más importante contribución realizada hasta entonces en el campo de la combinatoria. El libro comienza con la construcción de lo que se dio en llamar el triángulo de Pascal, aunque ya era conocido desde cinco siglos antes. Como sabemos el triángulo es de la siguiente forma:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\ldots$$

Pascal realiza un estudio pormenorizado de las propiedades de dichos números, ocupándose, especialmente, del cálculo y la disposición de los números (llamados números combinatorios) que componen el famoso triángulo. La más importante es, sin duda alguna, la obtención de una fórmula para obtener los números combinatorios. Es la siguiente:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Identificando ese número como el número de combinaciones de k elementos en un conjunto de n elementos.

Finalmente Pascal aplicó todos estos resultados para producir una solución sistemática del problema del reparto de apuestas: si al jugador A le faltan r juegos para ganar y al jugador B le faltan s, las apuestas deberían dividirse de manera que al jugador A le correspondiera una parte proporcional al cociente entre

$$\sum_{k=1}^{s-1} \binom{n}{k} \quad \text{y} \quad 2^n, \text{donde } n = r + s - 1$$

Por esa misma época, el año 1655, el joven holandés Christian Huygens (1629-1695) entró en contacto con el círculo intelectual de Pascal, Fermat, Roberval, etc. El poder compartir de primera mano las inquietudes científicas de esos grandes pensadores fue crucial para su devenir intelectual, tanto es así que a su vuelta a Holanda comenzó a trabajar intensamente en problemas relativos al cálculo de probabilidades. De estas inquietudes intelectuales surgió un pequeño tratado, escrito en holandés: Van Rekeningh in Spelan van Geluk (el cálculo en los juegos de azar), posteriormente se hizo una versión latina De Ratiociniis in Ludo Aleae (1657).


Christian Huygens. 1629-1695

En 1656, C. Huygens envió su manuscrito a París con la esperanza de que Fermat o incluso Pascal pudieran llegar a estudiarlo y aprobar sus planteamientos. La respuesta tardó cuatro meses en llegar, pero la confirmación de su tabajo fue muy satisfactoria para Huygens. Más aún, Pascal le envió otro problema sobre el azar y Fermat le envió dos cuestiones, que junto con otros dos problemas diseñados por él mismo, fueron añadidos al final del libro y durante unos sesenta años constituyeron las pruebas estándar mediante las cuales se medía la habilidad del lector en la doctrina del azar; cabe citar que A. de Moivre, Jacques Bernoulli, Spinoza y Leibniz, entre otros, publicaron soluciones de algunos de estos problemas. Los cinco problemas en cuestión son los siguientes:

A y B juegan uno contra el otro, con dos dados, bajo la condicion de que A gana si obtiene 6 puntos, y B gana si obtiene 7 puntos. Le corresponde el primer tiro a A, los dos siguientes a B, los otros dos siguientes a A, y así sucesivamente, hasta que gane alguno de los dos jugadores. La pregunta es ¿Cuál es la probabilidad de A sobre B?

Este problema fue propuesto por Fermat en carta a Huygens en junio de 1656, y resuelto por Huygens en carta a Carcavi el 6 de julio de 1656.

Tres jugadores A, B y C, teniendo 12 fichas de las cuales cuatro son blancas y ocho negras, juegan con la condición de que gana el primer jugador que obtiene (al extraer sin mirar) una ficha blanca y A extrae primero, luego B, luego C, luego A nuevamente y así sucesivamente. La pregunta es ¿Cuál es la proporción de la probabilidad de ganar de cada jugador con respecto de los otros?

Esta situación fue resuelta posteriormente por Huygens en 1665 (aparece en el Apéndice II).

A apuesta a B que de un mazo de 40 cartas, entre las cuales hay 10 de cada color, extraerá 4, de forma que obtenga una de cada color. En este caso se comprueba que la probabilidad de A sobre las de B son de 1000 contra 8139.

Este problema fue propuesto por Fermat en carta a Huygens en junio de 1656; la respuesta sin prueba está en la carta a Carcavi del 6 de julio de 1656.

Como antes, los jugadores tienen 12 fichas de las cuales cuatro son blancas y ocho negras; A apuesta a B que escogiendo siete fichas sin mirar, obtendrá tres blancas. La pregunta es ¿Cuál es la probabilidad de A sobre B? (Huygens también considera el caso en que se apuesta a escoger tres o más fichas blancas).

Resuelto posteriormente por Huygens en 1665 (aparece en el Apéndice II).

Teniendo A y B cada uno doce fichas, juegan con tres dados, bajo la condición de que si se obtienen 11 puntos, A entrega una ficha a B, si se obtienen 14 puntos B entrega una a A, ganando el jugador que obtiene primero todas las fichas. Encontrar las probabilidad de A sobre las de B.

Este es el problema planteado por Pascal a Fermat y a través de Carcavi a Huygens en una carta del 28 de septiembre de 1656 que contiene las soluciones dadas por Pascal y Fermat. La solución de Huygens está en la carta a Carcavi del 12 de octrubre de 1656, y la demostración en una nota de 1676. Se conoce como el problema de la ruina del jugador.

Como curiosidad cabe señalar que en 1687 se publicó un libro anónimo en el que se resolvía el primero de los problemas y se esbozaba la solución del resto. Más tarde se comprobó que el autor de ese libro era el filósofo holandés de origen judeo-portugués Benito Spinoza.

DE RATIOCINIIS IN LUDO ALEÆ.

Etsi lusionum, quas sola sors moderatur, incerti solent esse eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut si quis primo jactu unâ tesserâ senarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò verisimilius sit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum est, calculoque subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis lusibus constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrum prior tertii victor sit evasurus. Verùm quanti exspectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc definire, si ludum uti est imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depositum est mihi quàm adversario meo tribuenda esset: vel etiam si quis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumeræ quæstiones exoriri possunt inter duos, tres, pluresve collusores. Cumque minimè vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam sive tesseras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æstimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad aliquid

Vvv

El libro de Huygens contiene un total de 14 proposiciones formuladas de modo claro y conciso, posteriormente figuran los cinco problemas mencionados y un primer apéndice; más tardeen una nueva edición (1665), añadió un segundo apéndice en el que muestra las soluciones de algunos de los problemas planteados.

Las tres primeras proposiciones las dedica a manejar y explicar la noción de esperanza matemática, en las seis siguientes se preocupa por problemas de reparto, tanto para dos jugadores como para tres, mientras que en las últimas se preocupa por resolver problemas con dos, tres y más dados. El científico holandés definió, por primera vez, el concepto de esperanza matemática de una variable aleatoria con un número finito de valores. En uno de los párrafos de su libro se puede vislumbrar la importancia y transcendencia que él mismo da al cálculo de las probabilidades, escribe:

> El lector observará que nos ocupamos, no sólo de los juegos, sino, más bien, de los fundamentos de una teoría nueva, a la vez profunda e interesante (1657).

Es posible que la claridad en su exposición y una adecuada elección de problemas sea el motivo por el que, durante muchos años, se haya considerado al científico holandés como el primer teórico de la teoría del azar. Sin embargo, hoy sabemos que ese honor le corresponde por igual a la tríada: Pascal, Fermat y Huygens, los cuales sentaron las bases modernas de la teoría de la probabilidad, bases que fueron desarrolladas a lo largo del siglo XVIII.

Ya hemos comentado la importancia para el desarrollo de la combinatoria del trabajo de Pascal, pero no podemos olvidar las aportaciones del filósofo y matemático G. Leibnitz, quien publicó en 1.666 la primera monografía dedicada íntegramente a la combinatoria, con el título Disertatio de Arte Combinatoria. Su trabajo no está motivado desde la necesidad de resolver problemas de carácter probabilístico sino más bien el tratar de estudiar ideas complejas a través de ideas sencillas. El tratado de Leibnitz desarrolla algunas de las ideas de R. Llull, enunciadas cuatro siglos antes.

La probabilidad, una teoría consolidada

En paralelo a los juegos de azar se hicieron otros estudios relacionados con la probabilidad y cuyo objetivo no era el análisis de juegos. En esta línea, el comerciante inglés John Graunt (1620-1675) abordó, hacia 1662, problemas sobre demografía o *política aritmética*, como se la llamaba entonces. Graunt se propuso encontrar un método preciso para estimar la edad media de los habitantes de Londres mediante la edad de defunción; en su estudio se encuentra el concepto de 'frecuencia de un suceso', remarcando el cierto grado de aleatoriedad presente en las proporciones obtenidas.

Las ideas de Graunt fueron recogidas por William Petty (1623-1687), quien elaboró un análisis comparativo entre la mortalidad de Londres y la de París, basándose en los datos de los hospitales de caridad. También el astrónomo Edmund Halley (1656-1742), basándose en procedimientos similares presentó, en 1693, una tabla de mortalidad de la ciudad de Breslau (Alemania). En los trabajos de Halley ya se pueden encontrar las bases de los teoremas de la suma y la multiplicación de probabilidades y de la ley de los Grandes Números, aunque no los enunció explícitamente; sus trabajos tuvieron gran influencia en demografía y en los seguros.

Retomando las figuras de Pascal, Fermat y Huygens podemos señalar que los juegos de azar dejaron de ser meros pasatiempos para convertirse en auténticos retos intelectuales en los que participaron las mejores mentes científicas del momento. Uno de estos genios fue Jacques Bernouilli (1654-1705) quien propuso a los matemáticos y filósofos de su época diversos problemas relacionados con el campo de la probabilidad, cuyas soluciones ofreció después.

Conviene anotar que la mayoría de los descubrimientos matemáticos de la familia Bernoulli, en este campo, igual que pasa con los de Leibnitz se encuentran en la famosa revista Acta Eruditorum; pero J. Bernouilli escribió, además, una obra de una enorme trascendencia, *Ars Conjectandi*, que no fue publicada hasta el año 1713.

El tratado en cuestión está dividido en cuatro partes. La primera contiene una reimpresión y un comentario a la obra de Huygens, la segunda está dedicada a la teoría de las combinaciones y permutaciones, en ella se encuentra la primera demostración correcta del teorema binomial para exponentes naturales. La tercera parte consiste en la resolución de diversos problemas relativos a juegos de azar y la última es una aplicación de la teoría de la probabilidad a problemas de economía y moral.

Como apéndice al *Ars Conjectandi* nos encontramos con una larga memoria sobre series numéricas.

> *Se ve por este Ensayo que la teoría de las probabilidades, en el fondo, no es otra cosa que el buen sentido reducido a cálculo; ... veremos que no hay ciencia más digna de nuestras reflexiones y cuyos resultados sean más útiles.*
> P. S. de Laplace. Ensayo filosófico sobre las probabilidades

Este tratado ha tenido una enorme influencia, contiene importantes contribuciones a todos los dominios de la teoría de las probabilidades; se encuentra el célebre teorema de Bernouilli o ley de los grandes números, que a grandes rasgos se puede enunciar así:

Es muy poco probable que, si efectuamos un número suficientemente grande de experimentos, la frecuencia de un acontecimiento se aparte notablemente de su probabilidad.

Se considera el primer teorema fundamental de la teoría de la probabilidad.

Básicamente el teorema establece que la frecuencia relativa de los resultados de un cierto experimento aleatorio, tienden a estabilizarse en cierto número, que es precisamente la probabilidad, cuando el experimento se realiza muchas veces.
El origen de dicho teorema es posible que se encuentre en los trabajos de Graunt y Petty.

Jacques Bernouilli. 1654-1705

J. Bernoulli también se preocupó de calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso aun siendo imposible contar los casos favorables, dice J. Bernoulli:

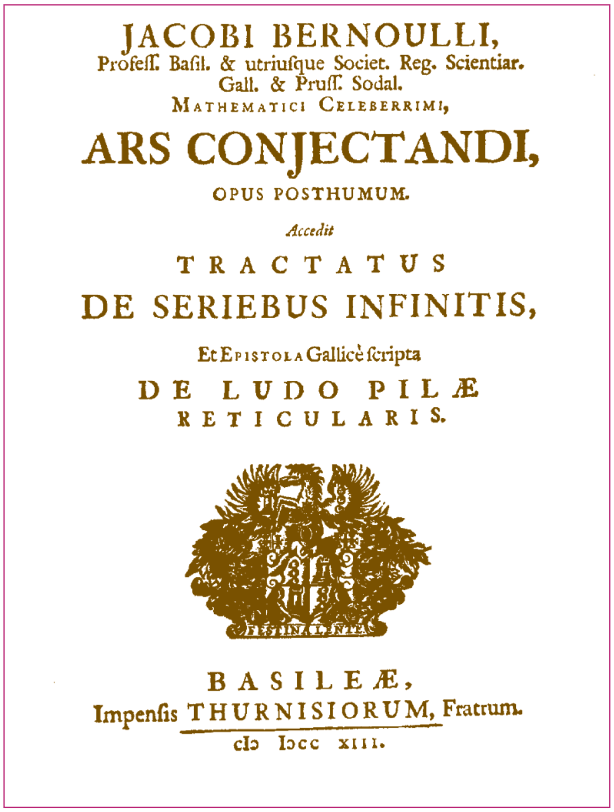
> Aquí hay otro camino disponible para alcanzar el resultado deseado. Lo que no se puede hallar a priori se puede obtener a posteriori, es decir, mediante la observación múltiple de los resultados de pruebas similares…

Este teorema recibirá con Laplace (1749-1827) su forma definitiva y cuya verificación experimental fue emprendida por G. L. de Buffon (1707-1788) y S. D. Poisson (1781-1840) mostrando su excepcional importancia en el terreno de las aplicaciones.

La obra de J. Bernoulli es fundamental por varios motivos, uno de ellos es que allí figura la primera definición clásica de probabilidad, seguramente muy influenciada por los trabajos de Graunt y Petty, que habían demostrado las ventajas de incluir en sus tablas no sólo los números absolutos, sino también las proporciones respecto del total.

Si hablamos de prioridades, debemos señalar que la primera contribución teórica relativa al campo de la probabilidad, correspondiente al siglo XVIII, es el "Essay d'analyse sur les jeux du hazard" (París, 1708) de P. Rémond de Montmort (1678-1719). Ya en el prefacio del libro el autor manifiesta conocer parte del trabajo de J. Bernoulli en el campo de la probabilidad, así como la veneración que siente por su autor y sus trabajos.

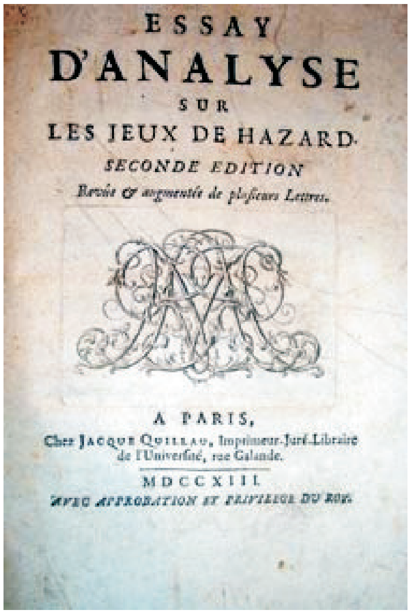
El escrito está dividido en cuatro partes, una primera dedicada a la combinatoria, la segunda dedicada a los juegos de cartas, la tercera trata de juegos con dados y la cuarta incluye la solución de varios problemas de azar y entre ellos los cinco propuestos por Huygens. El libro de Montmort tuvo un eco muy favorable y mereció elogios de muchos científicos de la época, entre los que cabe destacar a Leibnitz. El gran mérito de su trabajo es dar a conocer unas ideas, que los grandes científicos discutían, pero que nadie osaba publicar.


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↃ IↃcc xiii.

En este avance, a veces errático, y siempre difícil, de la teoría de la probabilidad, han surgido muchos escollos, unos de carácter estrictamente matemático y otros de índole filosófico. En esa línea tenemos que citar al matemático Daniel Bernoulli (1700-1782) quien hacia el año 1738 comenzó el estudio de un problema propuesto por

Nicolás Bernoulli veinticinco años antes, y que se hizo célebre con el nombre de *paradoja de San Petersburgo*. El enredo intelectual de esta paradoja viene de pensar que una vez definido matemáticamente el concepto de esperanza, la manera más razonable de tomar una decisión que involucrase probabilidades sería optar por aquélla que tuviese una mayor esperanza. Pero esta manera de pensar quedó desacreditada por medio de la célebre paradoja que nos ocupa. El estudio de la paradoja tuvo mucha importancia en el desarrollo de la teoría de la probabilidad aplicada a los problemas relacionados con los seguros: pagar una gran cantidad al asegurado pero con una probabilidad muy pequeña de que eso ocurra.


ESSAY
D'ANALYSE
SUR
LES JEUX DE HAZARD.
SECONDE EDITION
Revûe & augmentée de plusieurs Lettres.

A PARIS,
Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, rue Galande.
MDCCXIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Essay d'analyse sur les jeux du hazard. París, 1713, 2.ª ed.

Parece que no hay dudas en señalar al científico de origen francés Abraham de Moivre (1667-1754), refugiado en Londres, como el creador de una obra muy importante para el devenir de la teoría probabilística. Muchos historiadores le consideran el descubridor de la distribución normal. En el 1711 publicó en las Philosphical Transactions un estudio detallado sobre las denominadas leyes del azar, siete años después amplió su trabajo e incluyó en un nuevo tratado, The Doctrine of Chances(1718), numerosos problemas y aplicaciones sobre dados, juegos, anualidades de vida, etc. Este tratado contiene 26 problemas, además de unas observaciones introductorias que explican cómo la probabilidad es una medida. A pesar de que la mayoría de los problemas e ideas sobre la probabilidad expuestas por A. de Moivre ya figuraban en los tratados de J. Bernouilli y P. R. de Montmort, su libro tuvo un notable éxito, seguramente por la metodología empleada y el rigor en su exposición. Este libro es, sin duda, su obra principal. En él se estudian por primera vez y con cierta profundidad las funciones generatrices, el concepto de esperanza matemática, la probabilidad condicional y la independencia de sucesos, así como los problemas de probabilidad total y compuesta. Además demuestra el teorema central del límite, que lleva el nombre en su honor, y que posteriormente fue estudiado por Laplace, quien realizó un estudio más general y profundo. Es de notar que la teoría combinatoria elemental (cálculo del número de combinaciones y permutaciones) la deduce a partir de los principios de las probabilidades, al revés de como se acostumbra a presentar ahora.

En el año 1733, A. de Moivre publica en Londres un pequeño folleto titulado *Approximatio ad summan terminorum binomii in seriem expansi* en el que se incluía por vez primera la distribución normal, que con una cierta injusticia se ha llamado Curva de Gauss en lugar de Curva de Moivre.

Hay que señalar que el estudio de la distribución normal y la aproximación normal a la distribución binomial tuvo un considerable valor teórico y práctico en el desarrollo de la teoría de probabilidades. Uno de los grandes objetivos de A. de Moivre consistía en desarrollar para la teoría de las probabilidades métodos y notaciones generales, como si fuera un álgebra nueva.

En esta pequeña historia no podemos olvidar las contribuciones de dos grandes personajes, Thomas Bayes (muerto en 1763) y G. L. de Buffon (1707-1788). El primero se enfrentó con éxito al importante problema de «la probabilidad inversa» (esto es, determinar la probabilidad de las causas por los efectos observados). Para ejemplificarlo supongamos la siguiente situación:

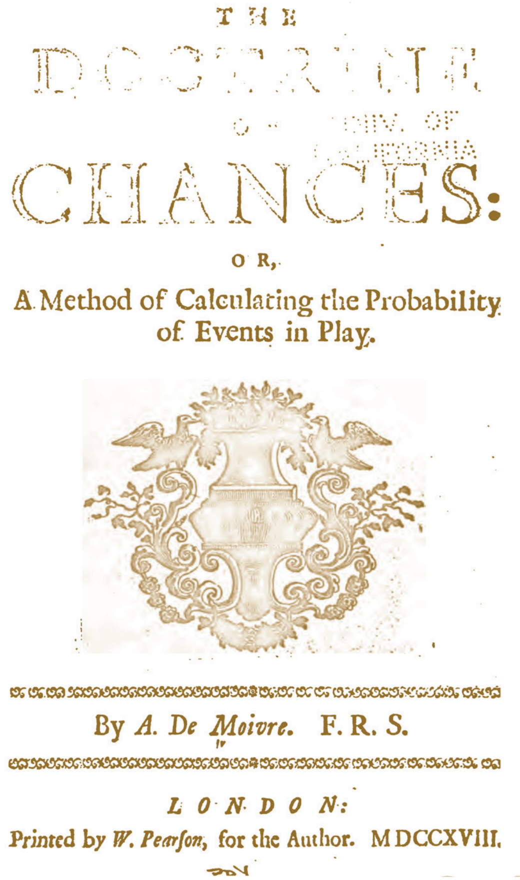
Tenemos dos cajas *A* y *B* que contienen bolas blancas y negras en la siguiente proporción: En *A* hay 6 bolas blancas y 4 negras. En *B* hay 4 bolas blancas y 6 negras. Una bola es sacada al azar de un caja y es blanca. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido sacada de la caja *A*?

Mientras Bufón realiza la primera intervención de la variable continua en las cuestiones de probabilidad, lo trata en un célebre problema que se conoce como el problema de la aguja de Bufón (1733). Este ejemplo de probabilidad geométrica señala la introducción del cálculo integral en las cuestiones de probabilidad. Esta línea de trabajo fue consolidada por Daniel Bernoulli, quien a partir del año 1760 consagró los métodos infinitesimales al cálculo de probabilidades, cuyo empleo fue generalizado por Lagrange, Laplace y Gauss.

Con el insigne matemático francés P. S. de Laplace (1749-1827) la teoría de la probabilidad adquiere rango de disciplina científica, cobrando un impulso que ha ido acrecentándose con el paso del tiempo. Con 63 años, Laplace publica, en 1812, un siglo después del escrito de J. Bernouilli, un gran tratado, titu-

IN LUDO ALEÆ 533

A. de Moivre. 1667-1754



THE
DOCTRINE
OF
CHANCES:
OR,
A Method of Calculating the Probability of Events in Play.

By A. De Moivre. F. R. S.

LONDON:
Printed by W. Pearson, for the Author. MDCCXVIII.

En el fondo, la teoría de probabilidades es sólo sentido común expresado con números.

P. S. de Laplace. 1749-1827

Thomas Bayes. 1702-1763

G. L. de Buffon.1707-1788

lado *Théorie Analytique des probabilités* (Teoría analítica de las probabilidades).

Además se ocupa de las probabilidades de las causas de los acontecimientos, siguiendo la línea de Bayes. Con ánimo de difundir sus ideas entre los lectores no especializados escribió, en 1814, una exposición introductoria a la probabilidad titulado *Essai philosophique des probabilités*. En este pequeño libro Laplace plasma una de sus famosas frases:

> En el fondo, la teoría de probabilidades es sólo sentido común expresado con números.

Corresponde a Laplace el mérito de haber descubierto y demostrado el papel desempeñado por la distribución normal en la teoría matemática de la probabilidad. Sus aportaciones en este campo discurren bajo dos vertientes, por un lado la creación de un método para lograr aproximaciones de una integral normal; por otra una demostración rigurosa de lo que ahora se denomina el teorema central del límite. La edición de *Théorie Analytique des probabilités* del año 1820 consta de dos libros y tres suplementos. El primero está dedicado al estudio de las funciones generatrices y a la teoría de la aproximación, mientras que el segundo consta de diez capítulos y desarrolla algunos aspectos de la teoría de la probabilidad, aplicando sus ideas a la resolución de numerosos problemas. El libro muestra la mano magistral de un analista consumado, lo que le permite abordar problemas mediante técnicas sofisticadas, como ocurre con la llamada Transformada de Laplace.

Las aportaciones realizadas por Laplace fueron tan importantes que prácticamente lo que quedaba por realizar eran labores de ordenación, precisión, rigor y crítica; labores que iniciaron ilustres matemáticos, contemporáneos suyos, como Legendre (1752-1833) y Gauss (1777-1855).

A finales del siglo XIX el mundo de la probabilidad y del azar estaba muy abonado y gracias a personajes como Borel (1871-1956), Pearson (1857-1936), Poincaré (1854-1912), Galton (1822-1911), Markov (1856-1922), Tchebycheff (1821-1894) y Kolmogoroff (1903-1987), esta ciencia se fue consolidando de una manera definitiva. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOURSIN, J. L. (1958): *Las Estructuras del Azar*, Ediciones Martínez Roca, SA, Barcelona.

DE MORA CHASLES, M.S. (1989): *Los inicios de la Teoría de la Probabilidad. Siglos XVI y XVII*, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, Bilbao.

GARCÍA CRUZ, J. A. (2000): *Historia de un problema: el reparto de una apuesta*, SUMA.

GUTIERREZ CABRIA, S. (1992): *Filosofía de la Probabilidad*, Ed. Tirant lo Blanch, Valencia.

HACKING, I. (1991): *La Domesticación del azar*, Ed. Gedisa, Barcelona.

HACKING, I. (1995): *El surgimiento de la probabilidad*, Ed. Gedisa, Barcelona.

LAPLACE, P. S. (1985): *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*, Ed. Alianza Editorial, Madrid.

SANTOS DEL CERRO, F. Y GARCÍA SECADES, M. (2004): *Historia de la probabilidad y la estadística(II)*, Ed. Delta, Madrid.

TATÓN R. Y OTROS. (1972): *Historia General de las Ciencias (tomo II)*, Ed. Destino, Barcelona.

TODHUNTER, I. (1949): *A History of the Mathematical Theory of Probability. From the time of Pascal to that of Laplace*, Chelsea Publishing Company, New Cork.

En Internet:

Diversos recursos sobre probabilidad

http://mathworld.wolfram.com/topics/Probability.html

Historias e ideas sobre probabilidad

http://etext.lib.virginia.edu/cgi-local/DHI/dhi.cgi?id=dv3-74

Reseñas históricas sobre azar y probabilidad

http://www.mala.bc.ca/~johnstoi/darwin/sect4.htm

History of Science: Origins of Modern Probability Theory

http://www.mala.bc.ca/~johnstoi/darwin/sect4.htm

A short History of Probability and Statistics

http://www.leidenuniv.nl/fsw/verduin/stathist/stathist.htm

Paradojas con el azar. Santiago Fernández

http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=66&Itemid=81