SUMA 54
Febrero 2007, pp. 95-99

El mejor tobogán... o el ingenio matemático de Johann Bernoulli

Foto Menchu Bas

En la sección *De cabeza* del número anterior de SUMA habíamos dejado a Galileo sumido en su sutil pero lamentable error de que la curva por la que una bola caería de un punto más alto a otro más bajo en el menor tiempo posible sería un arco de circunferencia que uniese ambos puntos.

Johann, el pequeño de los Bernoulli, ya sabía que Galileo estaba equivocado cuando lanzó en el verano de 1696, el reto público, pensando más en provocar a su hermano mayor Jacob que en otra cosa, de encontrar la auténtica curva braquistócrona, *la de tiempo más breve posible.*

Hubo que esperar más de un año para que apareciesen las cinco soluciones a uno de los retos más populares de la histo-

> *Indudablemente este premio no es de oro ni de plata, porque éstos sólo atraen a almas ruines y venales de las que no podemos esperar nada laudable ni útil para la ciencia.*
> Johann Bernoulli

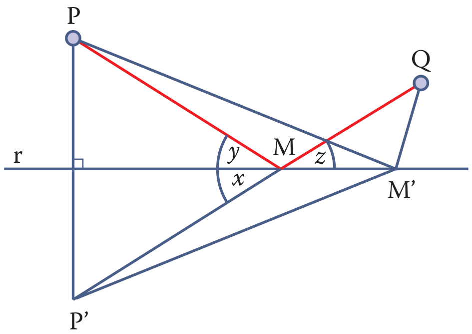
Antonio Pérez Sanz
decabezaz@fespm.org

ria de las matemáticas. Y el de más altura a tenor de los participantes: los dos Bernoulli, acompañados de L´Hôpital y de los mismísimos padres del cálculo: Newton y Leibniz. Seguramente la solución de Johann Bernoulli no sea la que más huella ha dejado en la historia, pero sin duda es con mucho la más ingeniosa, fruto de una brillante intuición.

Hágase la luz

Para aclarar el proceso seguido nada mejor que un poco de luz. Y Johann comienza su camino hacia la braquistócrona en la Grecia clásica, utilizando un viejo resultado sobre la naturaleza de la luz: *la luz no dobla las esquinas*... o dicho de otra forma, se propaga siempre en línea recta.

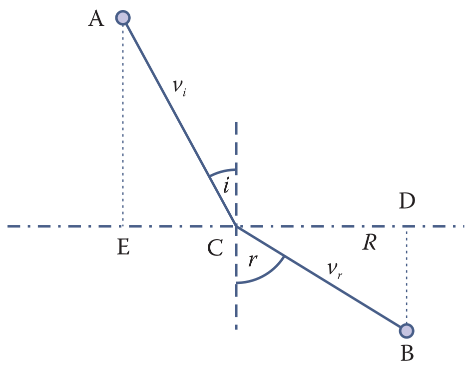
La luz elige siempre el camino más corto entre dos puntos. Gracias a esta simple observación, ya formulada por Euclídes, Herón de Alejandría, el mismo de la fórmula del área del triángulo, pudo explicar la ley de la reflexión de la luz: el ángulo incidente es igual al ángulo reflejado.



Supongamos que queremos ir de un punto P a un punto Q por el camino más corto, pero tocando en algún punto M a la recta r. ¿Cuál será ese punto M? Para encontrarlo basta con calcular el simétrico de P respecto de r, P' y unir mediante una recta P' con Q. El punto de corte de esta recta con la recta r será el punto M buscado. Y es evidente que los ángulos z e y son iguales al ser ambos iguales al ángulo x.

En el caso de la reflexión la luz no cambia de medio y su velocidad permanece constante. No ocurre lo mismo si el rayo luminoso pasa de un medio a otro. Todo el mundo lo ha podido comprobar al sumergir una varilla recta en un recipiente transparente de agua. Parece como si la varilla al entrar en contacto con el agua se quebrara, cambiando de dirección.

Ahora el rayo de luz para ir de un punto A a un punto B no sigue el camino más corto. Pero otro genio matemático nos da la clave, Fermat, afirma que en este caso la luz sigue respondiendo a un principio de mínimos: el camino que sigue es aquel en el que invierte el menor tiempo posible.



La velocidad del rayo AC en el medio superior es v_i , e incide con un ángulo i y al llegar a C pasa a un medio con densidad tal que su velocidad se convierte en v_r siendo el ángulo de refracción r. La velocidad de la luz en cada medio es inversamente proporcional a la densidad, n, de dicho medio.

De acuerdo con el principio de Fermat el trayecto del rayo será la poligonal *ACB*, donde el punto *C* estará ubicado de modo tal que el tiempo de recorrido sea el más corto posible.

A través de múltiples experimentos el holandés Snell en 1621, había descubierto la relación

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \text{cte.}$$

Esta constante depende en exclusiva de la relación entre las densidades de los dos medios.

En 1637, Descartes en su *Dioptrica* la formula, sin demostrarla, de una manera más clara:

$$\frac{\text{sen } i}{v_i} = \frac{\text{sen } r}{v_r}$$

Pero es Fermat el que proporciona la demostración definitiva. El 1 de enero de 1662 (una buena forma de empezar el año), en una carta a De la Chambre le escribe:

> Ya os dije en mi primera carta, que M. Descartes no ha demostrado jamás su principio, pues además de que las comparaciones no sirven apenas para fundamentar las demostraciones, emplea la suya a contra-sentido y supone que la luz atraviesa los cuerpos espesos más rápido que los cuerpos livianos, lo que es aparentemente falso...
>
> Para salir de este error e intentar encontrar la verdadera razón de la refracción, os indicaba en mi carta que empleando en esta investigación ese principio, tan común y tan comprobado, de que la naturaleza elige siempre las vías más cortas, podremos encontrar nuestro resultado.

Fermat demuestra la fórmula utilizando el método de máximos y mínimos. Si llamamos x a la longitud *EC*, podemos expresar el tiempo de recorrido desde el punto *A* hasta el punto *B* como una función de la variable x

$$t(x) = \frac{\sqrt{AE^2 + x^2}}{v_i} + \frac{\sqrt{DB^2 + (ED - x)^2}}{v_r}$$

Buscamos los valores de x para los que $t'(x)=0$,

$$t'(x) = \frac{x}{v_i\sqrt{AE^2 + x^2}} - \frac{ED - x}{v_r\sqrt{DB^2 + (ED - x)^2}} = 0$$

y es fácil obtener la relación

$$\frac{\text{sen}\, i}{v_i} = \frac{\text{sen}\, r}{v_r}$$

La luz acabará rodando

Perfecto. La luz sigue sus caminos y sus leyes, pero, ¿qué tiene que ver todo esto con el problema de la braquistócrona?

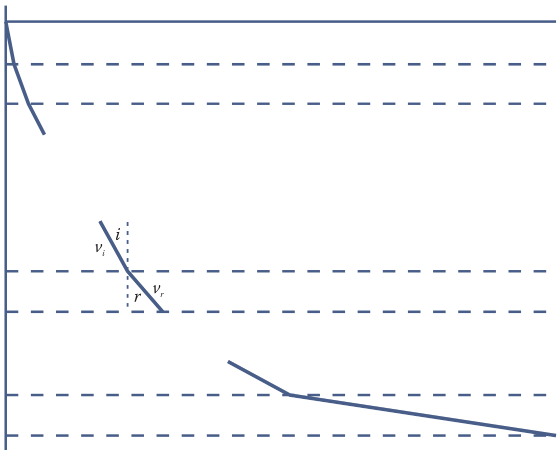
En apariencia nada, pero aquí surge el genio del pequeño de los Bernoulli. Imagina una esfera cayendo por la acción de la gravedad en un medio no homogéneo, es decir, la esfera pasa de un medio a otro con densidades distintas. En este tipo de situaciones también se cumple que el trayecto más corto no es el más rápido.

Johann Bernoulli se imagina el espacio dividido en láminas de densidad distinta. Dentro de cada una la velocidad de caída de la esfera es constante, pero la densidad sufre un cambio brusco de una lámina a la siguiente y por tanto la velocidad también. En cada capa la trayectoria será un segmento rectilíneo y la trayectoria global sería una poligonal como la de la figura.

Como el tiempo del recorrido ha de ser mínimo, se ha de cumplir el principio de Fermat, es decir:

$$\frac{\text{sen}\, i}{v_i} = \frac{\text{sen}\, r}{v_r}$$

Imaginemos, como Johann, que las láminas se hacen cada vez más finas y su número aumenta sin parar. La poligonal se irá aproximando a una curva: ¡a la curva buscada!



En un punto cualquiera de esta curva, la recta tangente se puede identificar con el segmento correspondiente de la poligonal. Y por tanto, el ángulo u que forma la tangente con la vertical en cada punto y la velocidad v en dicho punto verificarán:

$$\frac{\text{sen}\, u}{v} = cte.$$

Pero la velocidad de caída en cada punto es una función de la altura y:

$$v = \sqrt{2gy}$$

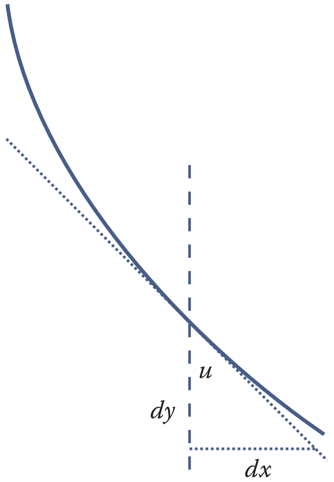
Por tanto, obtenemos que:

$$\frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{2g \cdot y}} = cte.$$

pero g es la constante de la gravedad, es decir:

$$\frac{\operatorname{sen} u}{\sqrt{y}} = k$$

Para $y = 0$, sen u =0 y la tangente es vertical.



Pero, observando la figura es fácil expresar sen u, en función de dy y dx:

$$\operatorname{sen} u = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

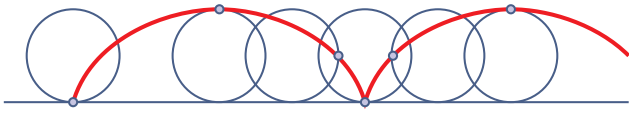
Y sustituyendo arriba, obtenemos:

$$\frac{dx}{\sqrt{y}\sqrt{dx^2 + dy^2}} = k$$

Invirtiendo el cociente y elevando al cuadrado obtenemos la ecuación:

$$y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = \frac{1}{k^2} = C$$

Y como muy bien presumía Johann, al lanzar su reto, no es difícil identificar esta curva con una muy popular en la época, ya investigada por Galileo, Pascal y Huygens: *la cicloide*.



La cicloide... la vieja conocida. Huygens ya había descubierto en 1673 otra maravillosa propiedad de esta curva tan especial: si dejamos caer una esfera desde un punto de una cicloide, el tiempo en alcanzar su punto más bajo no depende del punto inicial desde donde se suelta la esfera. O dicho de otra forma: la cicloide es la curva tautócrona: el tiempo en alcanzar el punto más bajo es el mismo para cualquier punto de la cicloide.

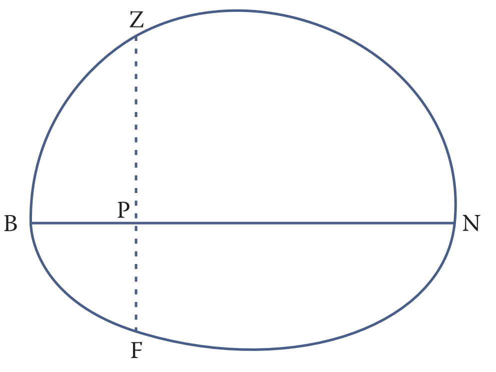
Amor de hermanos

A la solución de Johann Bernoulli publicada en mayo de 1697 en las *Acta Eruditorum*, le acompañaron las de Newton, que además en una carta dirigida a Montague en enero de 1697 proporciona un método para construir la cicloide que pasa por dos puntos dados *A* y *B*, la de Leibniz, elaborada en el otoño de 1696, la de L´Hôpital y sobre todo, la más elaborada y la que sin duda más rabia debió producir a Johann, la de su hermano Jacob mucho más general que la suya, publicada en un trabajo titulado *Resolución del problema de mi hermano, a quien yo a mi vez planteo otro*.

Jacob, como muestra de su gran amor fraterno, además de denunciar lo particular del método de su hermano, le propone otros retos relacionados con la cicloide, el primero:

> Dada una línea vertical, encontrar entre todas las cicloides que comienzan en un mismo punto y tienen la misma base horizontal, aquella en la que una esfera llega antes a la línea vertical.

Johann no tuvo demasiadas dificultades en encontrar la respuesta. Pero Jacob tenía un as en la manga, en forma de un segundo problema, por el que se permitió el lujo de ofrecer a su hermano una recompensa de 50 ducados si lo resolvía en un plazo de tres meses. Es un problema isoperimétrico:



De entre todas las figuras de igual perímetro sobre la base común *BN*, determínese la curva *BFN* que aunque ella misma no contenga la máxima área, en cambio haga que sí la tenga otra curva *BZN* cuya ordenada *PZ* es proporcional a una potencia o raíz del segmento *PF* o del arco *BF*.

Y como es injusto no compensar a una persona por un trabajo que emprenda en beneficio de otro con menoscabo de su propio tiempo y en detrimento de sus propios asuntos, por esto deseo garantizar a un hombre por quien yo salgo fiador, mi hermano, si resolviese el problema –aparte del elogio al cual se hace acreedor– una gratificación de cincuenta ducados con la condición de que en el plazo de tres meses a partir de esta publicación prometa intentarlo y presente antes del final del año la solución por cuadraturas, lo cual es posible.

Johann presumió de que no necesitaría tres meses, que le bastaba con tres minutos. Pero este problema le trajo **DE CABEZA...** Los avatares y el desenlace de este nuevo reto colocaría a cada uno de los dos hermanos en su lugar, incluso más allá de la muerte... Pero esa es otra historia. ■

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

ÁLVAREZ PÉREZ, J.M. (2006), *Curvas en la historia*, Ed. Nivola

CHABERT J.L. (1993), *Le problème brachistochrone*, Histoire de problèmes, histoire des mathématiques. Ed. Comisión Inter.-IREM

SÁNCHEZ C. Y VALDÉS C. (2001), *Los Bernoulli. Geómetras y viajeros,* Ed. Nivola

SÁNCHEZ C. Y VALDÉS C.(2003), *De los Bernoulli a los Bourbaki*, Ed. Nivola

www.mathcurve.com

www.divulgamat.net/weborriak/historia/MateOspetsuak/JhBernoulli.asp