SUMA 54
Febrero 2007, pp. 23-29

Incursión en el ámbito de las dos variables: Optimización usando argumentos gráficos

Cuando enseñamos a los alumnos a resolver problemas, solemos abusar de la utilización de algoritmos encaminados a encontrar la solución óptima, evitando las dificultades que puede suponer la introducción de reglas más o menos complejas en el diseño de dicho algoritmo. Pero resolver un problema es mucho más que aplicar un algoritmo de forma mecánica, supone encontrar una respuesta coherente a una serie de datos relacionados dentro de un contexto. Es por esto que presentamos esta práctica, donde la utilización de un algoritmo para resolver un problema nos lleva a encontrar soluciones que descartaremos como útiles.

When we are teaching students to solve a maths problem and we want them to find the best solution, we are used to using algorithms too much avoiding the difficulties, which arise with the use of more or less complex rules when designing this algorithm. But solving problems is more than simply applying an algorithm mechanically, it means finding coherent answer for a series of data related with a context. For this reason to solve a problem leads us to the discovery of some solutions that we will rule out as useful.

Las matemáticas han sido desde siempre fundamentalmente procedimentales. Por eso, su contribución a los objetivos generales de bachillerato se centra en su papel de instrumento para una comprensión, adecuada a la edad del alumno, del entorno. En consecuencia, es necesario que los alumnos se convenzan de este papel de las matemáticas que constatan en la práctica la potencia de los modelos matemáticos para interpretar la información y tomar decisiones y, al mismo tiempo, que conozcan las limitaciones de los procedimientos y mantengan una actitud vigilante ante los posibles errores que se puedan presentar.

Muchas veces los resultados teóricos obtenidos después de una optimización llevada a cabo para dar respuesta a un problema matemático, pueden distar de las soluciones prácticas utilizadas en la vida real. Es por esto que presentamos la siguiente práctica y sus sucesivas resoluciones hasta encontrar la óptima aplicada al entorno inmediato.

La práctica consiste en calcular las dimensiones mínimas que ha de tener un ortoedro para que pueda albergar un litro de volumen. Para encontrar la solución utilizaremos el programa informático *Derive*, al mismo tiempo que introduciremos el concepto de curva de nivel para resolver el problema de una forma digamos un tanto alejada del método estándar. La primera solución nos ofrece un resultado óptimo pero diferente de la realidad, por ello reformularemos el problema, teniendo en cuenta la forma en que se construye y comercializa un tipo determinado de envase en forma de brick. Nos daremos cuenta que el resultado final no es el que esperábamos y, otra vez, tendremos que replantearnos nuestra hipótesis de partida para resolver el problema. Introduciendo la relación áurea entre las caras del ortoedro llegaremos a la solución digamos *comercial*.

Esta práctica puede ser desarrollada en 2.º de bachillerato[i] y puede ayudar a conseguir algunos de los objetivos generales de las matemáticas de bachillerato, como pueden ser:

1.- Buscar diversos procedimientos para la resolución de problemas, tendiendo a la optimización de los procesos.
2.- Usar la calculadora y el ordenador de forma habitual y con soltura, para hacer todas aquellas tareas que los medios tecnológicos realizan mejor o de forma más rápida y segura, y tener constancia y control de sus limitaciones.

Jesús Ríos Garcés
IES de La Sénia. Tarragona
Universidad Jaume I. Castellón
Francisco José Monserrat Delpalillo
Universidad Jaume I. Castellón

Para ello vamos a necesitar una serie de conocimientos previos como el concepto de función y de su gráfica, estar familiarizados con los problemas de optimización de una variable y, también, con los lugares geométricos definidos por ecuaciones implícitas (recta, plano, circunferencia...). Además será necesaria la utilización del programa informático Derive, ya que nos servirá para intuir gráficamente las soluciones que posteriormente tendremos que descartar como soluciones *útiles*.

A partir de estos conocimientos y esta práctica, se pretende:

1.- Mostrar cómo la matemática ya conocida por el alumno puede aplicarse a aspectos inmediatamente identificables como útiles y próximos.
2.- Reforzar los conceptos de función, gráfica y lugar geométrico.
3.- Desarrollar la visión espacial.
4.- Introducir al alumno en problemas de optimización de dos variables, sin necesidad de más herramientas que una pequeña extensión de ciertos conocimientos previos.
5.- Introducir el concepto de curvas de nivel y su utilidad para resolver ciertos problemas de matemáticas.
6.- Familiarizarse con el programa informático Derive

El problema sobre el que va a girar todo este artículo es el siguiente:

PROBLEMA

Calcular las dimensiones de un envase en forma de *brick*, de 1 litro de volumen, realizado con la menor cantidad de cartón posible.

Este problema se puede enunciar en términos matemáticos de la siguiente forma:

Enunciado 1

Calcular las dimensiones de un ortoedro de 1 litro de volumen y con superficie mínima.

A partir de aquí definimos la función superficie

$$a(x, y, z) = 2\,(xy + xz + yz)$$

con la condición $z = 1/xy$, es decir volumen igual a 1.

Teniendo en cuenta que $z = 1/xy$, obtenemos que la función objetivo sería:

$$f(x,y) = a(x,y,\frac{1}{xy}) = \frac{2(x^2y^2 + x + y)}{xy}$$

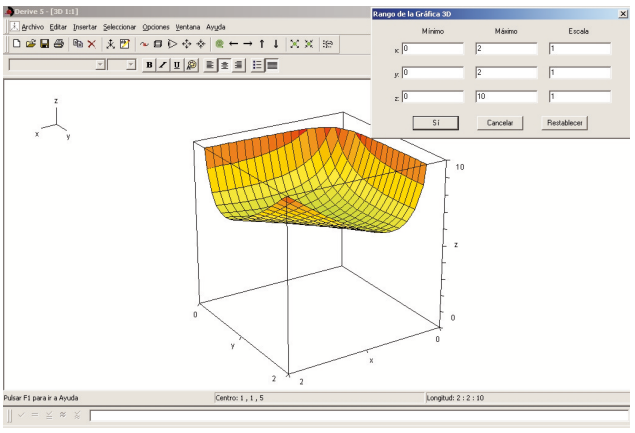
Utilizando el programa Derive, introducimos las expresiones anteriores tal y como se muestran a continuación:

$$\#1: \quad a(x, y, z) := 2 \cdot (x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z)$$

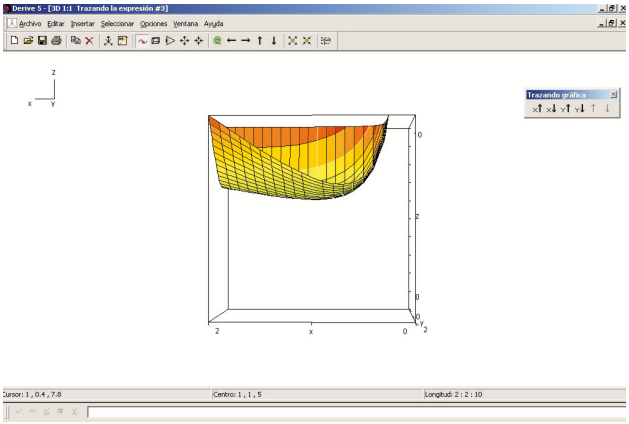
$$\#2: \quad f(x, y) := a\left[x, y, \frac{1}{x \cdot y}\right]$$

$$\#3: \quad \frac{2 \cdot (x^2 \cdot y^2 + x + y)}{x \cdot y}$$

Si dibujamos la superficie definida por la expresión #3 obtenemos:

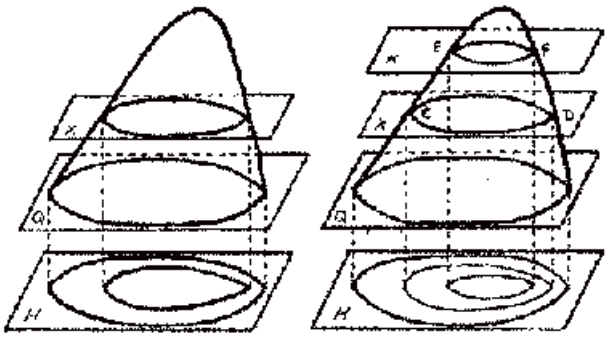


Teniendo en cuenta las capacidades gráficas de Derive para efectuar rotaciones de la superficie anterior, podremos intuir cual será la solución:



Ésta parecería ser x = 1dm, y = 1 dm, z = 1 dm y, con ello la superficie mínima será de 6 dm^2. Pero, claro está, no es la única manera de encontrar la solución y en absoluto la más rigurosa, de todas formas sólo queremos intuirla para ver que no nos va a ser *útil*.

Otra manera de constatar gráficamente el resultado es mediante la utilización de curvas de nivel:

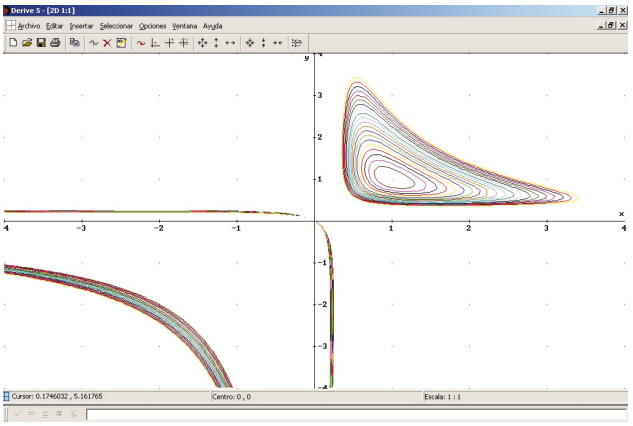


Recordemos que las curvas de nivel correspondientes a la gráfica de una función $f(x,y)$ se obtienen representando en el plano XY las curvas dadas por las funciones implícitas de la forma $f(x,y) = k$, siendo k un número real que forma parte del recorrido de la función f.

A continuación buscamos, con la ayuda de Derive, todas las curvas de nivel para valores de k desde 6 hasta 8 de 0,1 en 0,1.

El resultado es el que se muestra en la parte inferior de esta página, *#4* y *#5*.

Si ahora representamos las curvas de nivel anteriores, obtenemos el gráfico siguiente:



Observando detenidamente las curvas de nivel, parece ser que la solución la encontramos en x = 1, y = 1. Para asegurarnos, calculamos con la ayuda de Derive, las curvas de nivel con una amplitud menor, es decir, las curvas de nivel para valores de k desde 6 hasta 6,01 de 0,001 en 0,001 (ver *#6* y *#7* en la parte superior de la página siguiente).

#4: VECTOR(f(x, y) = k, k, 6, 8, 0.1)

#5:

$$\left[\frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=6,\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{61}{10},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{31}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{63}{10},\right.$$

$$\frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{32}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{13}{2},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{33}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{67}{10},$$

$$\frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{34}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{69}{10},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=7,\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{71}{10},$$

$$\frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{36}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{73}{10},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{37}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{15}{2},$$

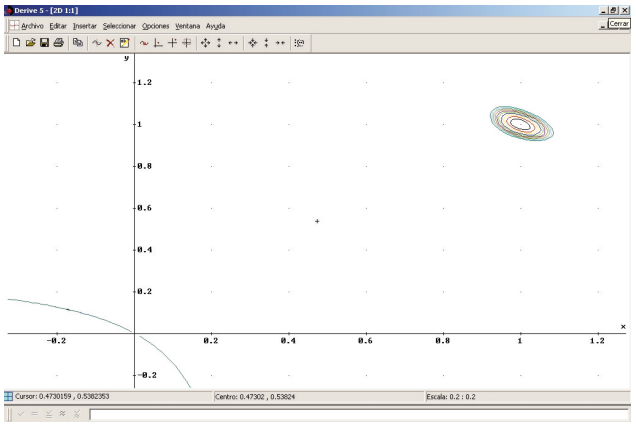
$$\frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{38}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{77}{10},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{39}{5},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{79}{10},$$

$$\left.\frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=8\right]$$

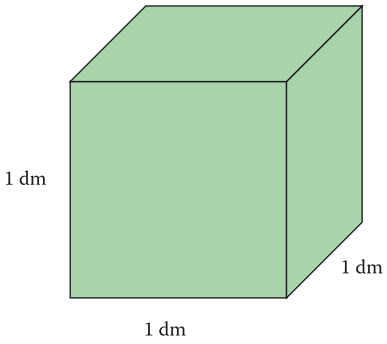
#6: VECTOR(f(x, y) = k, k, 6, 6.01, 0.001)

#7: $\left[\frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=6,\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{6001}{1000},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{3001}{500},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{6003}{1000},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{1501}{250},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{1201}{200},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{3003}{500},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{6007}{1000},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{751}{125},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{6009}{1000},\ \frac{2\cdot(x^2\cdot y^2+x+y)}{x\cdot y}=\frac{601}{100}\right]$

la representación gráfica sería:



Gráficamente obtenemos que, como se intuía, la solución es $x=1$, $y=1$ y la solución al problema sería el siguiente cubo.

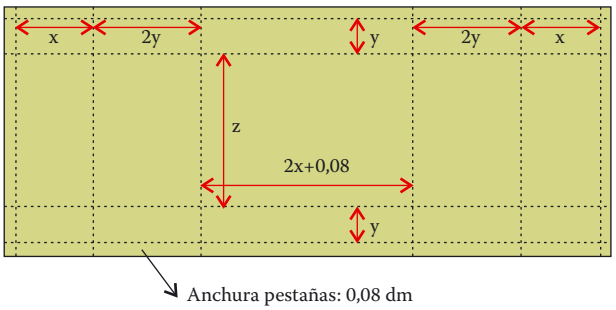


Pero esta solución dista bastante de los envases de 1 litro que se utilizan normalmente para la fabricación y distribución de productos como zumos, leches...

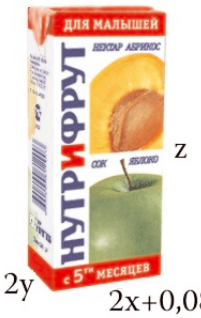
Es por ello que vamos a plantear este mismo problema en términos, digamos, más realistas.

Enunciado 2

Calcular las dimensiones de un ortoedro de 1 litro de volumen y con superficie mínima, teniendo en cuenta la forma en la que realmente se construye un envase en forma de brick: mediante el plegado de un rectángulo.



Con lo que el brick que tendríamos que calcular tendría las siguientes dimensiones



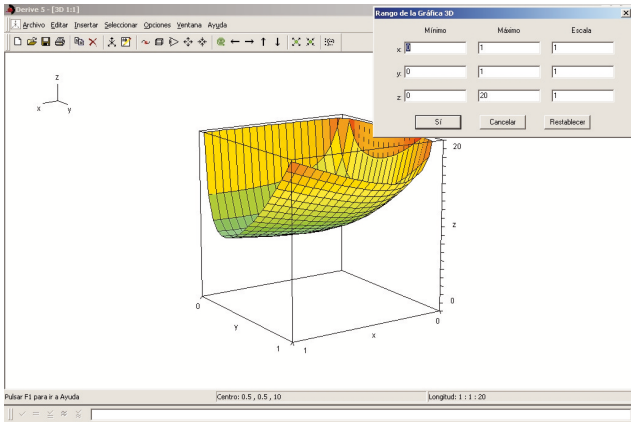
A continuación, procedemos de manera análoga a la del primer enunciado, utilizando Derive y las funciones *a(x, y, z)* y *f(x, y)*.

#1: a(x, y, z) := (2·y + z + 2·0.08)·(4·x + 4·y + 3·0.08)

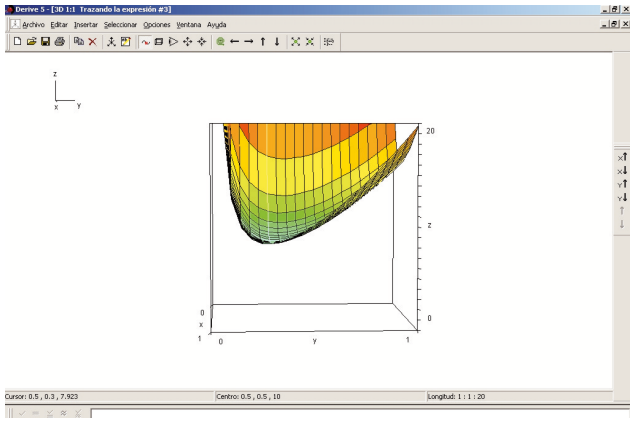
#2: $f(x,y) := a\left(x, y, \frac{1}{4\cdot x\cdot y+0.16\cdot y}\right)$

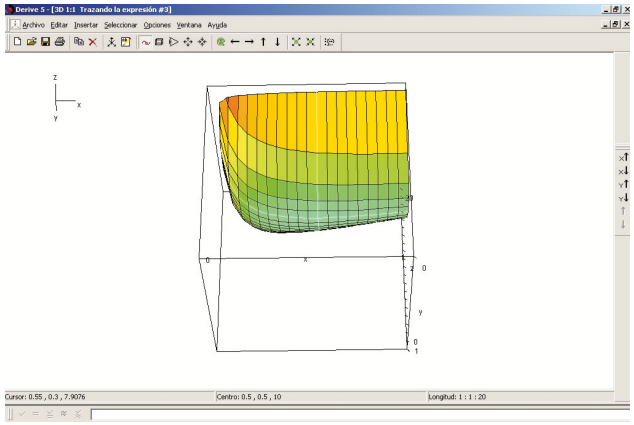
#3: $\frac{(50\cdot x+50\cdot y+3)\cdot(200\cdot x\cdot y\cdot(25\cdot y+2)+200\cdot y^2+16\cdot y+625)}{1250\cdot y\cdot(25\cdot x+1)}$

Dibujamos la superficie que viene dada por la expresión *#3* anterior.



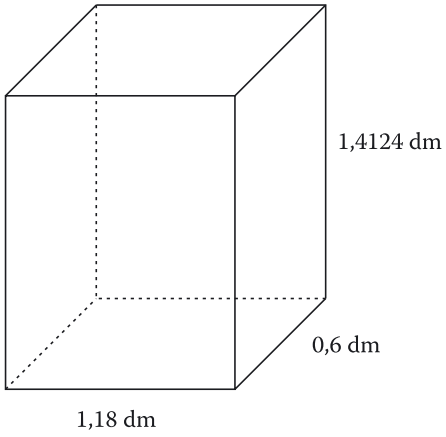
Y tratamos de intuir mediante diversas rotaciones de la gráfica anterior cual sería la solución:





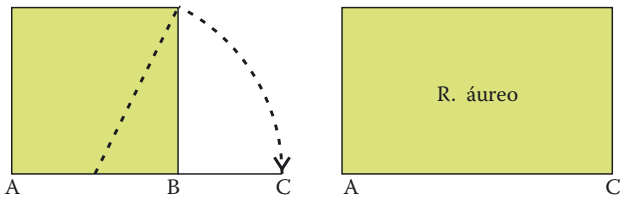
La solución parecería ser x = 0,55 dm, y = 0,3 dm y a partir de aquí obtenemos que $f(0'55, 0'3)$ = 7,9076 dm y que z=1,4124 dm.

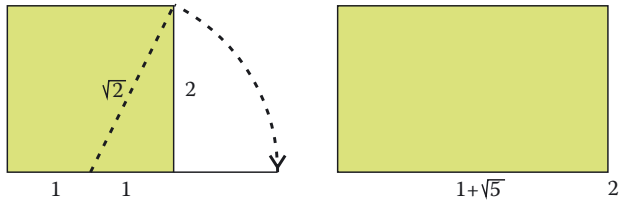
El ortoedro solución sería:



Solución, que por otra parte tampoco se adapta a la realidad.

Es por ello, que el tercer enunciado del problema viene a resolver este problema, ya que en los dos enunciados anteriores se pasaba por alto el hecho de que una de las caras del brick es un rectángulo áureo. Recordemos que la construcción de un rectángulo áureo puede ser explicada con el gráfico siguiente:





Enunciado 3

Calcular las dimensiones de un brick de 1 litro de volumen de manera que una de sus caras es un rectángulo áureo y la superficie del rectángulo obtenido al *desplegarlo* sea mínima.

Veamos si la solución obtenida se aproxima más a la solución *estandar*. Para ello procedemos exactamente igual que en las soluciones de los dos enunciados precedentes, utilizando Derive:

#1: $a(x, y, z) := (2 \cdot y + z + 2 \cdot 0.08) \cdot (4 \cdot x + 4 \cdot y + 3 \cdot 0.08)$

#2: $z = \dfrac{1}{4 \cdot x \cdot y + 0.16 \cdot y}$

#3: $r := \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

#4: $\dfrac{z}{2 \cdot x + 0.08} = r$

#5: $\text{SOLVE}\left(\left[z = \dfrac{1}{4 \cdot x \cdot y + 0.16 \cdot y}, \dfrac{z}{2 \cdot x + 0.08} = r\right], [y, z]\right)$

#6: $$\left[y = \frac{625 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{16 \cdot (25 \cdot x + 1)^2} \wedge z = \frac{(\sqrt{5} + 1) \cdot (25 \cdot x + 1)}{25} \wedge y \cdot (25 \cdot x + 1) \neq 0\right]$$

#7: $g(x) := a\left(x, \dfrac{625 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{16 \cdot (25 \cdot x + 1)^2}, \dfrac{(\sqrt{5} + 1) \cdot (25 \cdot x + 1)}{25}\right)$

#8: $$\frac{\sqrt{5} \cdot (250000 \cdot x^3 + 35000 \cdot x^2 + 1600 \cdot x + 15625 \cdot \sqrt{5} - 15601) \cdot (25000 \cdot \sqrt{5} \cdot x^3 \cdot (\sqrt{5} + 1) + 1000 \cdot \sqrt{5} \cdot x^2 \cdot (3 \cdot \sqrt{5} + 7) + 40 \cdot \sqrt{5} \cdot x \cdot (3 \cdot \sqrt{5} + 11) - 3117 \cdot \sqrt{5} + 15633)}{20000 \cdot (25 \cdot x + 1)^4}$$

#9: $$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{5} \cdot (250000 \cdot x^3 + 35000 \cdot x^2 + 1600 \cdot x + 15625 \cdot \sqrt{5} - 15601) \cdot (25000 \cdot \sqrt{5} \cdot x^3 \cdot (\sqrt{5} + 1) + 1000 \cdot \sqrt{5} \cdot x^2 \cdot (3 \cdot \sqrt{5} + 7) + 40 \cdot \sqrt{5} \cdot x \cdot (3 \cdot \sqrt{5} + 11) - 3117 \cdot \sqrt{5} + 15633)}{20000 \cdot (25 \cdot x + 1)^4}\right)$$

#10: $$\frac{7812500000 \cdot x^6 \cdot (\sqrt{5} + 1) + 78125000 \cdot x^5 \cdot (25 \cdot \sqrt{5} + 33) + 15625000 \cdot x^4 \cdot (13 \cdot \sqrt{5} + 21) - 156250 \cdot x^3 \cdot (3053 \cdot \sqrt{5} + 2989) + 12500 \cdot \sqrt{5} \cdot x^2 \cdot (637 \cdot \sqrt{5} - 12472) + 50 \cdot x \cdot (109651 - 203009 \cdot \sqrt{5}) + 243953165 \cdot \sqrt{5} - 732296771}{100 \cdot (25 \cdot x + 1)^5}$$

#11: $$\frac{7812500000 \cdot x^6 \cdot (\sqrt{5} + 1) + 78125000 \cdot x^5 \cdot (25 \cdot \sqrt{5} + 33) + 15625000 \cdot x^4 \cdot (13 \cdot \sqrt{5} + 21) - 156250 \cdot x^3 \cdot (3053 \cdot \sqrt{5} + 2989) + 12500 \cdot \sqrt{5} \cdot x^2 \cdot (637 \cdot \sqrt{5} - 12472) + 50 \cdot x \cdot (109651 - 203009 \cdot \sqrt{5}) + 243953165 \cdot \sqrt{5} - 732296771}{100 \cdot (25 \cdot x + 1)^5} = 0$$

#12: $$\text{NSOLVE}\left(\frac{7812500000 \cdot x^6 \cdot (\sqrt{5} + 1) + 78125000 \cdot x^5 \cdot (25 \cdot \sqrt{5} + 33) + 15625000 \cdot x^4 \cdot (13 \cdot \sqrt{5} + 21) - 156250 \cdot x^3 \cdot (3053 \cdot \sqrt{5} + 2989) + 12500 \cdot \sqrt{5} \cdot x^2 \cdot (637 \cdot \sqrt{5} - 12472) + 50 \cdot x \cdot (109651 - 203009 \cdot \sqrt{5}) + 243953165 \cdot \sqrt{5} - 732296771}{100 \cdot (25 \cdot x + 1)^5} = 0, x, \text{Real}\right)$$

#13: $x = 0.4577420435$

#14: $y = \dfrac{625 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{16 \cdot (25 \cdot x + 1)^2}$

#15: $y = 0.3118270023$

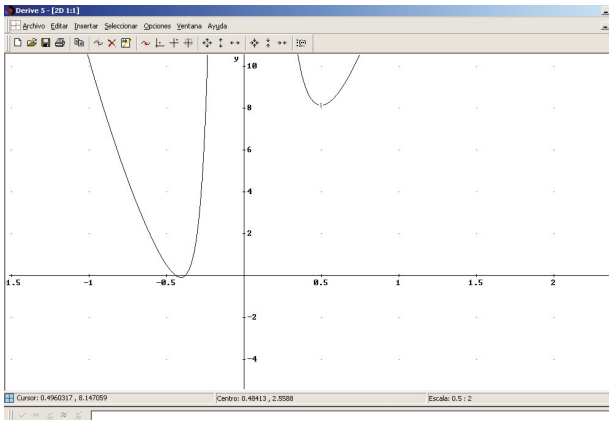
#16: $z = \dfrac{(\sqrt{5} + 1) \cdot (25 \cdot x + 1)}{25}$

#17: $z = 1.610727088$

#18: $g(0.4577420435)$

#19: 7.945217754

Gráficamente podríamos visualizar la solución, representando la expresión *#8* y obtendríamos:



Por lo tanto la solución sería x = 0,4577 dm, y = 0,3118 dm, z=1,6107 dm.

El resultado obtenido es el que más se asemeja al utilizado en la fabricación de los primeros envases de bricks caracterizados por la proporción áurea en sus caras.

NOTAS

i En el problema propuesto se utilizan funciones de dos variables, las cuales no son el prototipo de las funciones que se manejan en matemáticas de 2º de bachillerato. Sin embargo, sí aparecen en física o química, o en ampliación de matemáticas de 2º de bachillerato.

¿Qué es? El tetra-brick *está compuesto por un emparedado de láminas muy finas de materiales:*

** Plástico (polietileno)*
** Cartón*
** Plástico (polietileno)*
** Aluminio*
** Plástico (polietileno)*

La unión de todos ellos hace de este envase un buen colaborador a la hora de conservar sustancias delicadas.