

La marcha Dufour: Un recurso para hacer matemáticas en la calleⁱ

Dufour inventó un sistema de representación geográfica basado en principios topológicos en lugar de los principios geométricos de los mapas, croquis y planos habituales. La llamada marcha Dufour, aunque de origen militar, se emplea actualmente en actividades excursionistas y alpinistas para moverse por la montaña, pero es fácilmente adaptable a recorridos urbanos. Posee enormes posibilidades didácticas de carácter abstracto, obligando a los usuarios a desarrollar no sólo pautas de orientación sino también de razonamiento lógico sistemático. Ha sido utilizada con éxito en pruebas de calle de Olimpiadas Matemáticas.

Dufour invented a geographic representation system based on topological principles instead of the usual geometrical principles of maps sketches and planes. This representation is named the Dufour march. It has a military origin, however it is today used in field trips and alpinist activities to move through mountainous terrain and it is very easy to adapt to urban trips. The Dufour march has a lot of didactical potential of abstract character because it forces the users to develop not only orientation patterns also systematic logical thinking. It has been used with success in street proofs of Mathematical competitions.

Probablemente en la primera década del siglo XIX, el más tarde general *Guillaume Henri Dufour* (Constanza, 1787–Ginebra, 1875), ideó para el uso de sus exploradoresⁱⁱ un sistema de representación del terreno, fácil de aprender e interpretar y fiable para orientar los desplazamientos de la tropa. Como se verá más adelante, este sistema de representación contiene virtudes didácticas muy interesantes para las matemáticas.

En su carrera militar *Dufour* se caracterizó por su talante humanitario, ideando el emblema de la Cruz Roja para el socorro de los heridos en los campos de batalla. En 1864, junto con Dunant, Moynier, Appia y Maunoir, presidió la asamblea que dio lugar a la *Convención de Ginebra*, origen del Derecho Internacional Humanitario (Bory, 1982).

Fue el encargado de dirigir los trabajos para levantar el mapa de Suiza (1832–1864) y en su memoria se bautizó el *Dufour-spitze* (4638 metros), punto culminante del macizo del monte Rosa de los Alpes, en la frontera italo-suiza.



Guillaume Henri Dufour, 1850

Mariano Segura Mármol

*Colegio Sagrada Familia
Elda, Alicante*

Ricardo Martínez Rico

*Universidad de Alicante
Alicante*

Francisco Jesús García García

*IES Lloixa
Sant Joan d'Alacant, Alicante*



Dufourspitze, 3638 m. Los Alpes

De su uso militar, el sistema *Dufour* pasó a tener utilidad topográfica y fue adoptado como método de orientación en alta montaña y en actividades de marcha y senderismo, que empiezan a ser populares hacia finales del siglo XIX, sobre todo en Valenciaⁱⁱⁱ. Está documentado el uso del sistema *Dufour* en 1928 por la Colla Excursionista el Sol de Valencia y por la Institución de Exploradores de España (Riscos, 1963). Se empleó también por el *Comité Regional de Senderos de Gran Recorrido para el trazado del Sendero Europeo de Gran Recorrido por Montaña (número 7)*, que discurre desde la extinta Checoslovaquia a Portugal pasando por la Comunidad Valenciana y en el *Itinerario Ibérico del Mediterráneo al Atlántico* que nace en Monte Picayo (Valencia).

En Elda está documentado su empleo al menos desde el año 1963, en el V Campamento Regional de Montaña (Esteve, 1999). En la actualidad es también utilizado en competición, al menos en la denominada *Copa Catalana De Marxes Tècniques Regulades*.

Precisamente a través del Club Alpino Eldense llegamos a saber de la existencia del sistema de representación *Dufour*. En la fase provincial de la *Olimpiada Matemática Cap-i-Cúa* de segundo de ESO celebrada en Monforte del Cid (Alicante) en el 2000, *Año Mundial de las Matemáticas*, decidimos diseñar una prueba matemática de calle basada en él.

En dicha prueba de calle participaron diez equipos de tres concursantes cada uno, con el objetivo de realizar un recorrido urbano decodificando un mapa *Dufour* y resolviendo en tres puestos de control una serie de breves pruebas de cálculo, medición y estimación. De los diez equipos participantes, ocho completaron el recorrido sin extraviarse, habiendo tenido previamente una corta instrucción de únicamente 20 minutos.

Fundamentos de la representación Dufour

Según muestra la figura 1, todo mapa urbano puede ser concebido de forma abstracta como una representación gráfica en el plano de un determinado grafo^{iv} o red en el que las aristas son las calles y los vértices son las intersecciones de calles. Una interpretación similar (aunque algo más compleja) puede formularse para los mapas rurales.

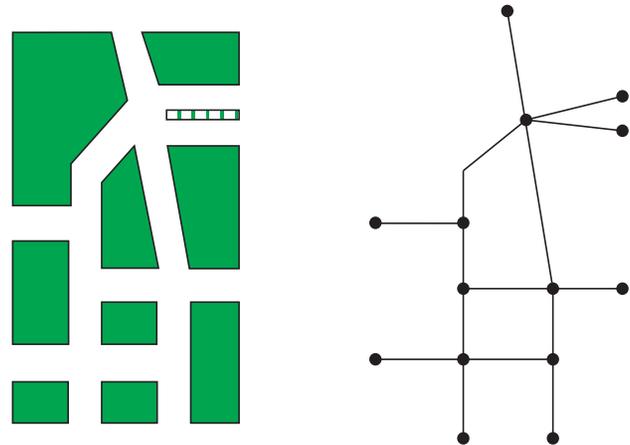


Figura 1. A la izquierda el plano usual y a la derecha un grafo del mismo

En este sentido se define un *camino* en una representación gráfica de un grafo como una sucesión ordenada de vértice, arista, vértice, arista, ..., vértice, de modo que el vértice final de una arista sea el inicial de la arista siguiente^v. Al primer vértice de la sucesión se le denomina *vértice inicial* y al último, *vértice final*.

Definiremos una *aplicación Dufour* como aquella que, dado cualquier camino de la representación gráfica del grafo original, devuelve una nueva representación gráfica de un grafo cuyos elementos son:

- Vértices*: Todos los vértices del camino original y todos los vértices adyacentes a cada uno de los vértices del citado camino.
- Aristas*: Todas las aristas del camino original y todas las aristas que sean incidentes con cada uno de los vértices del citado camino.

Esta aplicación contiene toda la información relevante sobre el camino entre el vértice inicial y el vértice final y equivale a una rectificación del camino conteniendo un entorno alrededor de cada punto del mismo.

Consecuentemente, la aplicación *Dufour* permite una *codificación secuencial* del camino del plano original con las siguientes características:

- Representa biunívocamente el camino.
- Está en línea recta.
- No conserva necesariamente la escala del grafo original.

Sin pérdida ninguna de información el grafo imagen se puede fragmentar, de modo que la linealidad no es un obstáculo para el almacenamiento de la información, que no será más que una secuencia^{vi} que consta de líneas, que a su vez se pueden almacenar en varias páginas y éstas en tomos si fuese necesario.

La representación no necesita, pero tampoco es incompatible, de información complementaria que podría resultar útil en sus aplicaciones prácticas: así, por ejemplo, las aristas o/y los vértices del grafo imagen podrían tener asignados pesos que representasen distancias, tiempos, pendientes medias, cotas de altitud o cualquier combinación de esas medidas. Del mismo modo los vértices podrían tener asignados signos o códigos convencionales para facilitar la localización que representasen carreteras, pistas forestales, sendas, casas, ruinas, árboles, balsas, fuentes, puentes, cuevas, ríos, barrancos, vértices geodésicos, pozos, pedregales, simas,... No obstante, desde el punto de vista matemático (no así, por supuesto, desde el punto de vista del senderismo o del alpinismo), la representación alcanza su más alta cota de interés didáctico en su versión más simple y abstracta.

Levantamiento de un mapa Dufour

En la Olimpiada Matemática 2000, situamos a los participantes en un punto de Monforte, les facilitamos un plano *Dufour* previamente confeccionado por la organización y les pedimos que, tras una corta instrucción de un cuarto de hora, fuesen capaces de interpretarlo, orientarse y llevar a cabo un recorrido prefijado por el casco antiguo del citado municipio.

Aunque en este caso fue la organización quien construyó (o levantó, para ser estrictos con la denominación alpinista) el plano *Dufour*, éste no deja de ser una actividad igualmente interesante para los alumnos. La metodología más atractiva es levantar el plano directamente desde la realidad, esto es, situarnos en la calle, darnos un paseo, confeccionar el *Dufour* y disfrutar de los atractivos, matemáticos o no, de nuestras ciudades y pueblos.

Resulta evidente que en ocasiones, y este escrito es un ejemplo, no es posible situarnos directamente en la realidad, por ello es necesario a veces levantar el recorrido *Dufour* a partir de un plano o mapa convencional.

Partiendo de la *figura 2*, veamos paso a paso cómo se levanta el mapa *Dufour* y los diferentes tipos de razonamiento que para ello se utilizan.

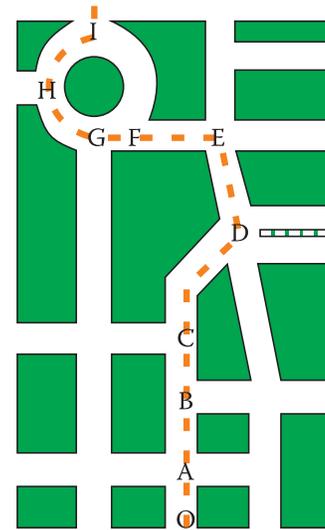


Figura 2

En primer lugar se observa que, de modo natural, un recorrido que lleva desde un origen a un destino, no discurre necesariamente en línea recta sino que efectúa obligados giros, salvando los accidentes urbanísticos o geográficos del terreno. Estos accidentes son los que dotan al plano de una *topología no trivial*.

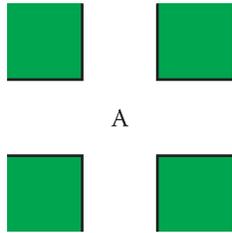
En el plano del ejemplo de la *figura 2* se han marcado las *singularidades*^{vii} del camino con letras del abecedario, para analizar detalladamente a continuación la construcción del mapa *Dufour*. Los puntos *ordinarios* del camino son topológicamente irrelevantes.

O es el punto de partida. Para que el mapa *Dufour* esté bien definido es necesario que este punto no sea una singularidad, esto es, no debe ser una confluencia de calles; en caso contrario, no existiría una correspondencia biunívoca entre el camino y su representación *Dufour*. De igual modo, el punto I de llegada tampoco puede ser una singularidad.

El mapa *Dufour* no está hecho a escala, por lo tanto no hay (mejor dicho, no es necesario que haya) correspondencia entre la distancia de A a B en el croquis original y en *Dufour*, así como tampoco ha de haberla entre O y A o entre cualquier otro par de vértices.

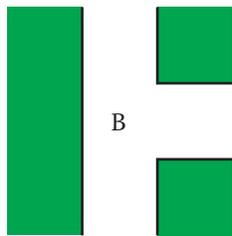
La idea fundamental para levantar un mapa *Dufour* es trazar un segmento, que será la imagen del camino que deseamos recorrer. En él iremos indicando cada una de las bocacalles de las sucesivas singularidades. Es de crucial importancia mantener el orden en el que van apareciendo las bocacalles según el sentido de la marcha.

A es la primera singularidad con la que nos encontramos.



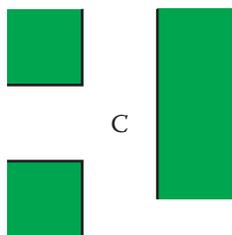
Según nos indica el trazo discontinuo, deseamos seguir hacia arriba, por lo tanto dejamos una calle a la derecha y, simultáneamente, otra a la izquierda, lo que se representa en *Dufour* como dos caminos que parten del trazo principal a la misma altura y que, sin continuidad, se interrumpen inmediatamente (la información más allá de esos caminos no es relevante para el recorrido que se desea representar).

En *B* se presenta el siguiente elemento de interés para el camino que se recorre.

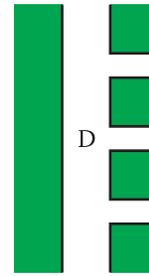


Aquí se observa que, siguiendo el sentido de la marcha, la posición relativa del caminante en *B* es dejar a su derecha un camino que no va a recorrer, lo que en el mapa *Dufour* queda representado por una derivación interrumpida a la derecha.

En el punto *C* pasa algo parecido pero a la izquierda.

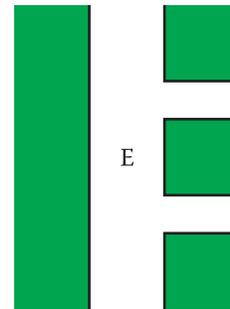


En el punto *D* la situación es más compleja pero, en el sentido de la marcha, se dejan a la derecha secuencialmente tres caminos sin interés para el recorrido que son los que se representan en el correspondiente *Dufour*.



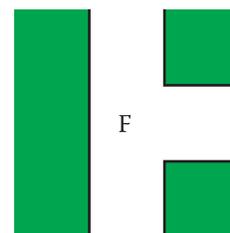
Obsérvese que lo único que interesa para levantar el plano es el número de caminos que dejamos sin recorrer y si estos quedan a la derecha o la izquierda del sentido de la marcha; es indiferente la distancia que los separa o el ángulo que forman entre ellos o con el trazo discontinuo.

En *E* de nuevo el sentido de la marcha deja a la derecha (posición relativa del móvil) dos caminos que se representan en *Dufour* por dos entrantes.

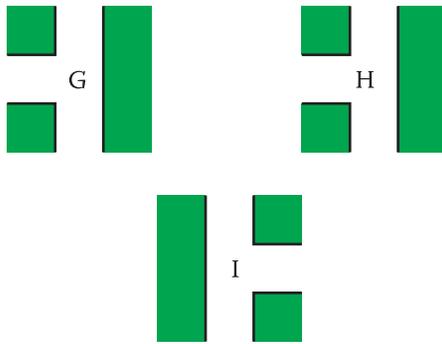


Las singularidades de *F* a *I* son las propias de una rotonda. La primera dificultad aparece a la hora de determinar con precisión cuáles son esas singularidades, pero basta con aplicar rigurosamente el principio básico de la secuencialidad. Primero debemos decidir en *F*, puesto que debemos elegir en qué sentido tomamos la rotonda; luego en *G*, para saber si nos salimos de ella o no; y así sucesivamente hasta *I*. Una vez establecidas las singularidades, vamos a ver cómo llevarlas al plano *Dufour*.

Según el sentido en el que entramos a la rotonda en *F*, dejamos una calle a la derecha de la marcha, por lo que su representación en *Dufour* es:



De modo totalmente análogo las representaciones de las singularidades *G, H, I* son:



Obsérvese que, a pesar de que la rotonda es circular en la realidad, en el *sistema Dufour* se sigue representando como una línea recta. Esta es una de las situaciones en las que más claro se ve cómo la geometría del plano usual no se traslada al plano *Dufour*, aunque sí se preserva la topología original.

Uniendo secuencialmente las representaciones de cada una de las singularidades obtenemos definitivamente el plano *Dufour* del camino que hemos escogido como ejemplo (figura 1).

Interpretación en el plano de un mapa *Dufour*

La reconstrucción, bien en un plano a escala o en la realidad, de un recorrido desde un mapa *Dufour*, consiste en esencia en interpretar la inversa de la aplicación utilizada al construir el mapa. Localmente, esta aplicación inversa está bien definida y eso asegura la reconstrucción unívoca del camino.

No obstante, detallamos a continuación el proceso, en tanto que genera la necesidad de realizar razonamientos en los que se encuentra la principal virtud didáctica de la marcha *Dufour*.



Figura 1

Estos razonamientos se pueden agrupar en dos tipos: razonamiento por inducción y razonamiento por deducción.

El primero hace referencia a la transposición mental directa de la información contenida en el mapa *Dufour* al mapa ordinario o a la realidad. Se trata de un proceso de lectura del código *Dufour* para traducir o descifrar su significado e interpretarlo para tomar la decisión de escoger uno de entre los trayectos posibles que se presentan en una singularidad.

El segundo tipo de razonamiento traslada la información en sentido inverso, esto es, analizando una por una todas las trayectorias posibles, observando en cada caso cuál sería la posición relativa de la singularidad y su codificación *Dufour*, y comprobando su correspondencia exacta con el mapa disponible. Se trata de un razonamiento por reducción al absurdo en el que se van descartando todas las alternativas que se presentan hasta quedarse de manera lógica con sólo una. Si se tiene en cuenta que, sobre todo cuando se realiza el proceso en la calle, uno de los errores que se pueden cometer consiste en confundir en el mapa *Dufour* la singularidad que se está analizando, se comprende el porqué de la importancia y eficacia de este tipo de razonamiento.

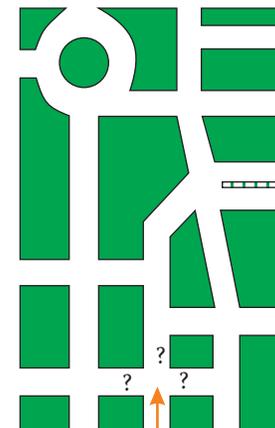
Estos dos modos de razonar no necesariamente se presentan en estado puro o excluyente. Lo habitual en la práctica es que se razone a la vez de los dos modos, combinando coherentemente las informaciones que se obtienen de ambos.

Ilustramos ahora el proceso con la reconstrucción paso a paso del recorrido del ejemplo anterior. Partimos ahora del mapa *Dufour* (figura 2).

El punto de salida *O* debe estar indicado en la realidad, o en el plano sobre el que se quiere reconstruir el camino representado, con un vector o sentido de marcha. Esto constituye la *condición inicial del mapa*^{viii}.



Figura 2

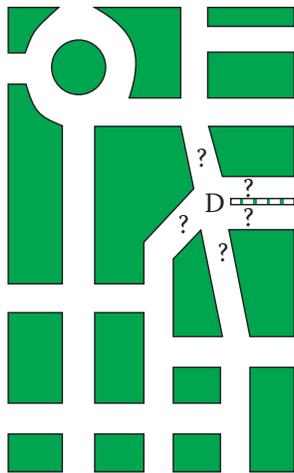


En cuanto llegamos a un cruce de calles nos encontramos con la primera singularidad, identificada como *A* en el mapa *Dufour*. Obsérvese que estamos razonando ahora desde la realidad. Debemos tomar una decisión entre cuatro alternativas: retroceder, girar a la derecha, continuar en línea recta o girar a la izquierda. En el *Dufour* observamos que dejamos un camino a la derecha y otro a la izquierda y eso mismo será lo que hagamos para continuar nuestro trayecto.

El siguiente cruce viene identificado como *B*. Tenemos ahora tres posibles decisiones: retroceder, girar a la derecha o seguir de frente. El mismo tipo de razonamiento de antes nos induce a seguir el camino de frente.

Otro tanto pasa en *C*. Las posibilidades son: seguir adelante, girar a la izquierda o retroceder, de modo que, dejando un camino a la izquierda, como indica *Dufour*, seguimos de frente.

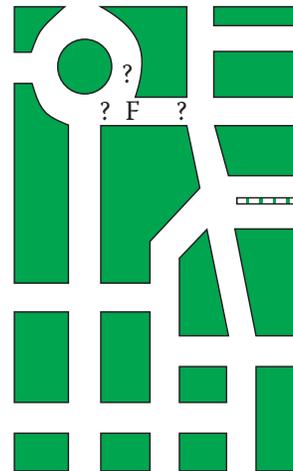
Algo más compleja deviene la situación en *D*.



Aquí hay cinco decisiones posibles pero sólo una de ellas deja exactamente tres caminos a la derecha tal y como viene representada en *Dufour* la singularidad. En este caso estamos haciendo un doble razonamiento. Situados en el cruce de calles vemos que en *D* se produce una intersección de cinco aristas, lo que nos obliga a considerar como una única singularidad todo el tramo de *Dufour*; este contiene tres ramales aparte del entrante y del saliente, que forman ambos parte del camino y son consecuentemente parte de la línea recta principal de la representación. A continuación, razonando por reducción al absurdo (o descarte de posibilidades) deducimos la conclusión.

El siguiente cruce de calles determina la singularidad *E* que cubre el tramo de *Dufour* que contiene los siguientes dos ramales entrantes, de modo que debemos dejar dos calles a la derecha y por lo tanto girar a la izquierda para continuar el recorrido.

En *F* desembocamos en una rotonda en la que podemos circular en el mismo sentido que las agujas del reloj o al contrario. Optamos entre tres decisiones y el mapa *Dufour* indica que el camino codificado se corresponde con el recorrido que deja a la derecha un camino, de modo que entraremos en la rotonda siguiendo el sentido de giro del reloj o negativo.



Si errásemos en el análisis y entrásemos en la rotonda en el sentido equivocado, pronto la comparación entre la realidad y el mapa *Dufour* devendría incoherente, de modo que deberíamos retrotraernos hasta la última singularidad analizada con seguridad.

En *G* hay un cruce de dos caminos y el plano indica que debemos dejar uno a la izquierda, de modo que continuaremos por la rotonda. Exactamente lo mismo ocurre en *H*.

Por el contrario, en *I*, según el plano *Dufour* debemos dejar un camino a la derecha, de modo que debemos abandonar la rotonda.

El plano *Dufour* no incluye más singularidades. Por lo tanto, antes de llegar al próximo cruce, habremos alcanzado el final del trayecto.

Fenomenología didáctica

La marcha *Dufour* puede inscribirse dentro del conjunto de las denominadas *actividades matemáticas de calle*, aunque conserva buena parte de su potencial formativo si se desarrolla dentro del aula.

Entre las *matemáticas de calle* cabe distinguir las que tienen como intencionalidad la *construcción de estructuras geométricas*, las que pretenden ver matemáticas en el entorno^{ix}, o las que proponen problemas que se utilizan en contextos al aire libre^x.

La marcha *Dufour* no encaja en ninguno de los tipos anteriores, pues utiliza un código de representación topológico mientras que el denominador común de las actividades mencionadas es la geometría. Paradójicamente es mucho más fácil levantar un mapa *Dufour* que un mapa a escala, pues *Dufour* no requiere recopilar tanta información. Al mismo tiempo el levantamiento se hace con un nivel de abstracción mucho mayor.

Además de la simplicidad de confección e interpretación, el sistema *Dufour* contribuye de modo natural al desarrollo de los siguientes procesos y habilidades:

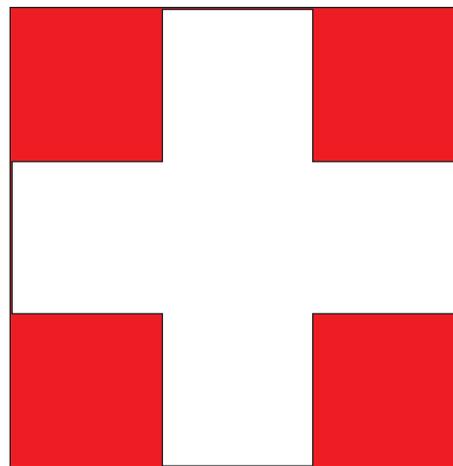
- La lateralidad con distintos grados de abstracción.
- El concepto de espacio y de representación abstracta del espacio.
- El razonamiento por descarte de casos o reducción al absurdo.
- La confección e interpretación de planos.
- La comprensión de las ventajas de la codificación coherente.

Las anteriores habilidades y procesos pueden ser abordados en la marcha *Dufour* con distintos grados de abstracción, que van desde la realización de recorridos cortos a partir de planos *Dufour* preconfeccionados, al levantamiento de planos *Dufour* de largos caminos, pasando por la localización en un mapa o plano a escala de una trayectoria codificada en *Dufour*, o levantando a partir de un mapa a escala el correspondiente plano *Dufour*. Consecuentemente, el espectro de edades adecuado para esta propuesta es muy amplio, incluyendo desde luego un rango mayor que el de toda la Educación Secundaria Obligatoria.

Entre los obstáculos para su realización cabe citar el tráfico en las zonas urbanas, aunque en casi todas las ciudades pueden localizarse sitios adecuados que eliminan o reducen a niveles

aceptables los riesgos. Merece la pena buscar tales sitios pues la riqueza formativa es mucho mayor operando sobre la realidad que sobre el intermedio de un mapa a escala.

Otra posibilidad es realizar los recorridos en zonas no urbanas. ■



La bandera federal del general Dufour, propuesta en 1817, desplegada por primera vez en 1821, adoptada por Argovie en 1833 y en el ejército entero de Suiza en 1840. La cruz está formada por 5 cuadrados iguales.

NOTAS

- Nuestro reconocimiento al Club Alpino Eldense que ha recogido, conservado y practicado durante años la marcha *Dufour*, y que nos ha brindado la posibilidad de conocer los detalles de esta actividad sugiriéndonos su enorme potencial formativo.
- Instrucciones sobre el dibujo de los reconocimientos militares. Otras obras suyas fueron: Memoria sobre la artillería de los antiguos y la Edad Media y Curso de táctica geométrica perspectiva.
- En el año 1880 se crea el Centre Excursionista de Lo Rat Penat.
- Es decir, un conjunto $V = \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ cuyos elementos se llaman vértices, y un subconjunto A de $V \times V$ cuyos elementos se llaman aristas.
- Técnicamente $\dots v_{i-1} v_i v_{i+1} \dots$ de modo que para todo k , el par (v_k, v_{k+1}) es de A .
- El carácter secuencial de todo camino es esencial al proceso de codificación *Dufour*. Esto significa en esencia una digitalización del camino.
- Entenderemos por singularidad cada una de las intersecciones de dos o más aristas en las que se debe tomar una decisión sobre qué camino seguir.
- Esta condición es ajena al sistema de representación propiamente dicho. Si no se proporciona, no necesariamente se puede asociar unívocamente un camino al mapa *Dufour*.
- Por ejemplo, las Rutas matemáticas o los concursos de Fotografía Matemática.
- Rallies matemáticos, gymkhanas matemáticas, ... En esencia, se aprovechan estas actividades para realizar tareas de estimación y medición que habitualmente no se hacen en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BORY, F. (1982): Génesis y desarrollo del Derecho Internacional Humanitario, Publicaciones CICR (Versión digital en <http://www.icrc.org/ihrcspa.nsf>).
- ESTEVE POVEDA, D. (1999): Memorias de un presidente: historia del Centro Excursionista Eldense, 1956-1981, Caja de Crédito de Petrel, Ayuntamiento de Elda.
- RISCOS (1963): Boletín del Centro Excursionista Eldense, n.º 2.
- VERDÚ, M.; PÉREZ, F.; RIQUELME, J. A. y MAESTRE, J. M. (1978): La Marcha Dufour. Manual de iniciación, Servicio de Información de Montaña del Club Alpino Eldense, Elda.