SUMA 53
Noviembre 2006, pp. 99-112

Biblioteca

Mi biblioteca particular

Luis Balbuena Castellano

La sección Mi biblioteca particular *trata de mostrar las lecturas que han dejado huella en el autor que amablemente la cumplimenta cada vez. Esas pueden ser de matemáticas y sus alrededores (las ciencias en su conjunto) o del amplio campo que se suele abarcar como literatura; pueden constar de libros de texto, de divulgación, artículos, citas... Y aunque hasta el momento se había ajustado a un cuestionario más o menos preciso, lo importante es que correspondan a influencias profundas en quien escribe y que piense, y por eso les hace partícipes, que pueden serlo para los lectores. En este número le ha tocado el turno a Luis Balbuena, que ha comprimido toda la sección y nos ofrece dos de los libros que han sido provechosos para él, en su fecunda tarea como profesor de matemáticas y de otras 'afines' que le han ido saliendo al paso. Libros que cumplen otro de los objetivos de la sección: sacar a la luz esos tesoros que no son novedad editorial (sustento principal de los apartados bibliográficos), pero que merecen disfrutar en algún momento del primer plano por su importancia y su influencia. Con nuestro agradecimiento por su aportación y el deseo de que sea provechoso para los lectores, os dejo con una parte de la* biblioteca particular *de Luis Balbuena.*

En los últimos tiempos hemos vivido la angustiosa situación de Plutón. ¿Es o no es un planeta? Al final los astrónomos decidieron pasarlo a la segunda división creando la familia de los planetas enanos. Eso denota la eterna vitalidad de la Astronomía.

Durante varios cursos impartí un Taller de Astronomía en el IES *Viera y Clavijo* de La Laguna (Tenerife). Eran solo dos horas semanales pero procuré sacarle todo el jugo que pude haciendo, incluso, salidas algunos viernes para ver el cielo de noche aprovechando que tenemos uno de los mejores cielos nocturnos del mundo que es, entre otras, la razón por la que existen en Canarias dos zonas de observatorios astrofísicos de gran importancia mundial: Cañadas del Teide (Tenerife) y Roque de los Muchachos (La Palma).

Como cualquier profesor que se precie, me hice de una bibliografía actualizada y suscribí al Instituto a la revista Tribu*na de Astronomía* que ofrece interesantes reportajes y nos ponía al día sobre información de actualidad y, si necesitaba asesoramiento, acudía al profesor y amigo Federico Fernández Porredón en el que siempre encontré la respuesta.

Lo que al principio no pensé es que también pudiese aprender de un libro editado nada menos que en 1807. Su autor es, precisamente, el que da nombre a mi instituto: José de Viera y Clavijo.

Fernando Corbalán (coordinador de la sección)
medios.suma@fespm.org

Se trata de un personaje que representa en Canarias, quizá como el que más, al periodo cultural que le tocó vivir: la Ilustración. Nació en Realejos (Tenerife) en 1731 y murió en Las Palmas de Gran Canaria en 1813. Se hizo clérigo. Entre sus características intelectuales destacan: ser sumamente curioso, disciplinado, ordenado y enciclopédico. Su obra más conocida y que aun hoy sigue siendo un referente es su *Noticias de la Historia General de las Islas Canarias*. Una documentada relación de datos y relatos que ponen bien de manifiesto sus capacidades.

Pero escribió sobre muchos temas. Aprendió bien el francés, país que visitó en dos viajes que hizo por Europa e hizo traducciones al castellano de obras francesas.

Pues bien, en 1807, publicó una breve obra titulada *Noticias del Cielo* y subtitulada *Astronomía para niños* que tiene una clara finalidad didáctica. En un estilo sencillo de preguntas y respuestas, va recorriendo distintos aspectos de la Astronomía dando *noticias* de lo que se sabía en aquel momento sobre cada uno de ellos. Su condición de clérigo se manifiesta en expresiones y párrafos. También queda claro su espíritu curioso estando al día de las noticias astronómicas que se estaban produciendo en aquel momento (posiblemente le ayudara el activo puerto de Las Palmas, por el que pasaban naves de países europeos navegando hacia América, África o Asia trayendo esas noticias en libros y en conversaciones con los oficiales). La obra es breve y de fácil lectura (puedes acceder a ella y descargarla si lo deseas en la web:
http://www.sinewton.org/varios/viera_1.pdf
Desde que tuve conocimiento de ella formó parte de los contenidos que expliqué cada curso.

Un efecto interesante, entre otros, es saber qué se daba como *noticia* en aquel momento y comparar con lo que hoy sabemos. Reproduzco a continuación algunas preguntas con sus correspondientes respuestas y espero que esto les anime a leer esta obra completa y, si imparten Astronomía, hagan uso de esos datos como un ejemplo más de la grandeza de la ciencia en general y de la Astronomía en particular.

PREGUNTA: ¿Cuáles son los Planetas?
RESPUESTA: Son aquellos Astros mudables que, andando errantes alrededor del Sol, reflectan su luz, hacen sus revoluciones y giros en distintos períodos de tiempo, y dan vueltas sobre sus propios ejes.
P.: ¿Cuántos son los Planetas que se conocen?
R.: En estos últimos años se han llegado a conocer hasta once.
P.: ¿Cómo se llaman?
R.: Mercurio, que es el que se mueve más cercano al Sol. Luego *Venus*. Después la *Tierra.*[1] Después *Júpiter*. Después *Saturno*. Después *Urano* o *Herschel*, descubierto en 1781. Y posteriormente *Ceres*, *Palas*, *Juno* y *Hércules*.[2]

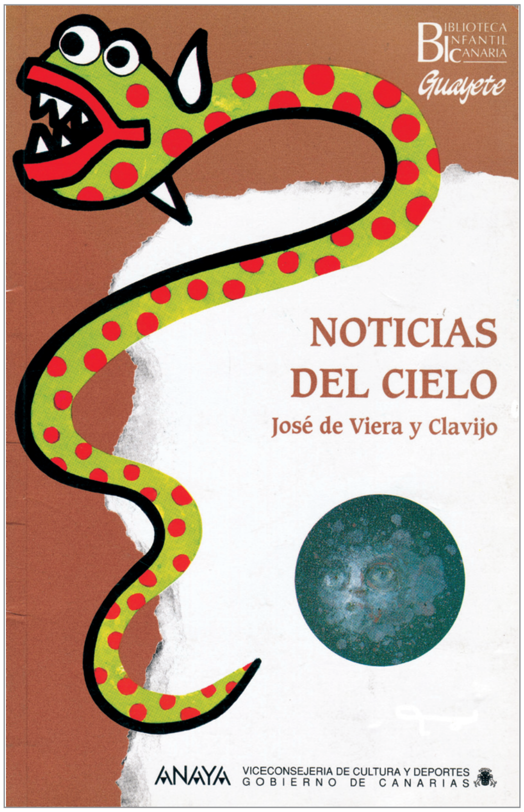
LOS SATÉLITES: LA LUNA
PREGUNTA: ¿Qué clase de cuerpos celestes son los Satélites?
RESPUESTA: Son unos Planetas secundarios que, acompañando siempre a los principales, dan giros alrededor de ellos.
P.: ¿En qué Planetas se han podido descubrir Satélites?
R.: Se han descubierto en Hércules, en Herschel, en Saturno, en Júpiter y en la Tierra.
P.: ¿Cuál es el satélite de la Tierra?
R.: *La Luna*.
P.: ¿Y qué es la Luna?
R.: Es un cuerpo esférico, opaco, que nos envía la luz del Sol a medida que la recibe. Tiene montañas muy eminentes y se han descubierto incendios de volcanes en ellas. Sus constantes manchas parece que no son otra cosa que profundidades, cavernas y simas dilatadas.
P.: ¿Y la Luna es más pequeña que la Tierra?
R.: Lo es en efecto, casi ochenta veces.
P.: ¿Y cuánto dista de nosotros?
R.: Su distancia media es de unas ochenta y seis mil leguas[3], pero unas veces está más cerca de la Tierra, y se llama Perigea, y otras más lejana y se le dice Apogea.

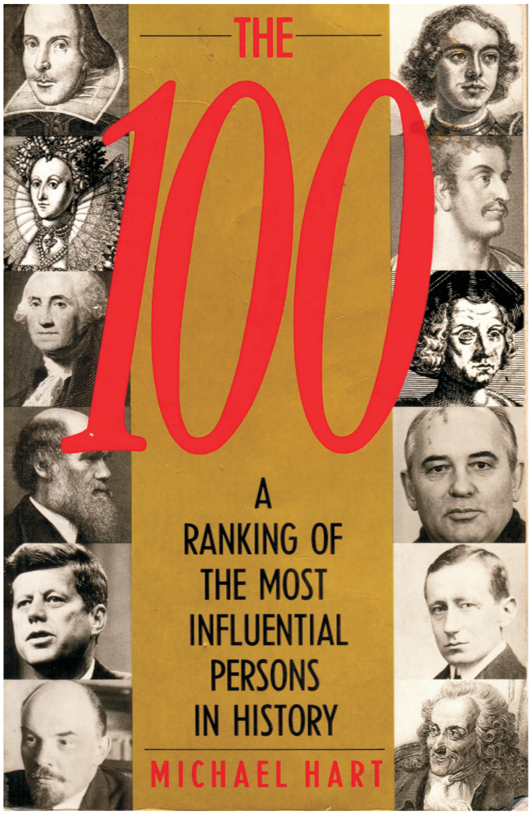
NOTAS

[1] Obsérvese que no nombra a Marte. Se supone que es una omisión involuntaria porque es descrito más adelante.

[2] Estos cuatro últimos cuerpos son los primeros asteroides descubiertos y a los que inicialmente se les dio categoría de Planetas.

[3] El Sistema Métrico Decimal se instituyó en Francia en 1795 pero en España no fue declarado obligatorio hasta una ley del 19 de julio de 1849. *Noticias del Cielo* fue publicado en 1807 por lo que las alusiones a magnitudes se refieren a las medidas populares existentes en España en aquellos momentos. La legua castellana es una medida de longitud equivalente a 4,19 kilómetros. Por tanto, la distancia propuesta por Viera equivale a 352 600 km.





Noticias del cielo o Astronomía para niños
José de Viera y Clavijo
Ediciones Idea, Santa Cruz de Tenerife, 2006
ISBN 84-96570-69-X
72 páginas
(Última edición que no corresponde con la de la imagen, que está agotada)

The 100, A ranking of the most influencial persons in History
Michael H. Hart
Carol Publishing Group
1992
ISBN 0-8065-1350-0
576 páginas

He leído muchos libros que tienen que ver con la enseñanza de las matemáticas, con su historia, con la divulgación, etc. pero me voy a centrar en el que señalo porque me ha enseñado gran cantidad de detalles que además he podido transmitir a mis alumnos y alumnas. En el Taller hice un trabajo sobre *Los cuarenta principales* utilizando a los cuarenta primeros de ese ranking y casi todos los años hacíamos alguna incursión por la lista. Cuando anunciaba que iba a hacer ese trabajo, en general los alumnos pensaban que pondríamos hilo musical en clase con ese popular programa radiofónico…

La primera noticia que tuve de esos cien personajes fue a través de la revista *Muy Interesante* a la que estaba suscrito para tratar de buscar temas relacionados con las matemáticas que pudiera llevar al Taller. Solicité en una librería que tratasen de conseguirme el libro que nombraba la revista y después de mucho tiempo –casi hasta me había olvidado– llegó el libro a mis manos.

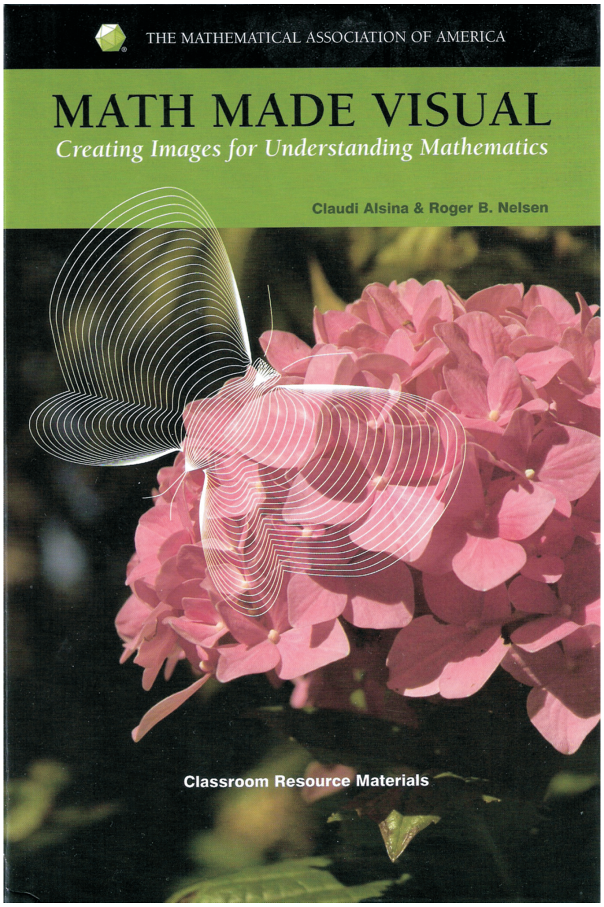
Ya se sabe que en esto de los *ranking* suele haber mucha subjetividad y este no es distinto. Pero el autor señala que el trabajo realmente no es suyo sino de su padre que lo trabajó durante mucho tiempo y no logró verlo publicado, así que él tomó la determinación de hacerlo en su memoria. A esa primera edición le llegaron muchas objeciones y le hicieron críticas desde distintas ópticas. Entonces decidió estudiarlas todas y ello le movió a realizar diversos cambios antes de proceder a publicarla de nuevo, al parecer con más éxito que la primera vez.

Independientemente de las pegas que cada uno le pueda poner, se trata de cien personajes importantes y yo al menos me considero incapaz de hacer nada parecido sobre todo por falta de conocimientos. Por tanto, la admito como está y voy a hacer algunas consideraciones que me parecen destacables. El orden en el que aparecen estas consideraciones no significa que haya jerarquía entre ellas.

- De entre los diez primeros, cinco son creadores o propagadores de las grandes religiones. En estos tiempos que corren, qué duda cabe de la influencia que han tenido en la historia de la humanidad.
- También están entre los diez primeros el inventor del papel y el inventor de la imprenta en occidente. Y aquí surge una primera reflexión ligada al "ombliguismo" de nuestra civilización occidental, porque estoy seguro de que la mayoría conoce el nombre y la época en la que vivió el inventor de la imprenta pero pocos saben algo del inventor del papel. ¡Claro!, se trata de un chino. Pertenece a una cultura a la que apenas dedicamos atención en nuestros libros de historia. Sin embargo, su invento bien que ha influido.
- Coloca a Colón en esta primera decena y los dos que faltan para completarla son científicos. Uno es el más grande, según ciertos autores y el otro le sigue a la zaga.
- Mi decisión de llevar al Taller a los cuarenta primeros la motivó, entre otras cosas, el que diecinueve de ellos están relacionados con la ciencia o la tecnología. Para cada uno de ellos hicimos una ficha en la que incluíamos los criterios usados por el autor del libro para colocarlo en ese puesto. Estudiábamos los acontecimientos históricos destacables que se produjeron durante su vida y un último apartado dedicado a los acontecimientos en Canarias, siempre, claro está, que el personaje haya vivido de 1402 para acá…Estas fichas se transformaron después en unos carteles en tamaño cartulina que han recorrido bastantes centros y el Museo de la Ciencia y el Cosmos de La Laguna.
- Cuando estudiamos la historia (al menos en mi época…) la idea con la que me quedé es que los personajes influyentes de verdad debieron ser los generales, los reyes o emperadores que construían imperios o promulgaban muchas leyes. Esta lista me dice que sí, que hay algunos entre los cien pero no tantos.
- Otro detalle que me sorprendió es la casi ausencia de personajes que hayan pasado a la historia como lo que conocemos como literatos. Casi me atrevo a decir que solo hay uno como tal. Pongo un ejemplo que aclare lo que quiero decir: Aristóteles escribió, por supuesto, pero se le conoce como filósofo y no como el caso de Cervantes, por ejemplo, al que se le asocia con la literatura.
- Lo que, desgraciadamente, no me sorprendió es que entre los cien ¡solo hay dos mujeres! Una prueba más, por si hay pocas, de la marginación que ha sufrido la mujer a lo largo de la historia y que aún queda camino por recorrer. Espero que cuando esta lista se renueve dentro de algunos años, el número de mujeres aumente considerablemente porque se hayan puesto las condiciones para que desarrollen plenamente sus capacidades.
- ¿Y españoles? Dejando aparte a Colón, solo hay tres y no están relacionados, precisamente, con la ciencia ni la tecnología… Tampoco con el arte… ¿Será porque el autor es anglosajón y "barre para casa"?... discutible.
- ¿Y matemáticos? Depende de la definición que se dé. Los hay…

En fin, muchas más ideas y reflexiones que se pueden hacer en torno a esta lista pero quizá lo mejor será que cada cual se haga las suyas y, en todo caso, las discuta con otros. Así lo he hecho y confieso que he aprendido mucho. ■

Escaparate:
1 Math made visual



Math made visual
Creating Images for
Understanding Mathematics
Claudi Alsina y Roger B. Nelsen
The Mathematical Association of America
Washington, 2006
ISBN: 0883857464
200 páginas

Si siempre es recibido con expectación un nuevo libro de Claudi Alsina, en este caso aumenta por el hecho de que es también de Roger Nelsen, autor del conocido Demostraciones sin palabras *(traducido por Proyecto Sur, 2001), en el que se proporcionan diferentes sustratos visuales para estimular el pensamiento matemático.*

Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org

Los lectores de SUMA, que tan bien conocemos a Claudi Alsina, además de por sus libros y charlas, por su sección en la revista, estamos acostumbrados a su facilidad de escritura y a su humor (que hacen leerlo como la mejor literatura de evasión) y a sus agudas aproximaciones con ojos matemáticos a las más variadas situaciones de la vida diaria, que nos han hecho ver de otra manera muchos aspectos de nuestro alrededor. El libro que comentamos, perteneciente a la prestigiosa serie *Classroom Resources Materials* de la MAA (*The Mathematical Association of America)*, es también una fascinante muestra de imaginación compuesta por una extensa colección de ideas apoyadas con o en imágenes para abordar los más variados aspectos del quehacer matemático, pero en este caso, aunque no sea formal en el académico sentido matemático (definición, teorema, demostración, corolario...), sí que se limita más a tópicos matemáticos, de mayor o menor actualidad en nuestras aulas. Eso sí, utilizando en todo momento el pensamiento visual y una gran cantidad de figuras para apoyar ese pensamiento.

El libro está dividido en tres partes. En la primera y más extensa, hay veinte capítulos breves, dedicado cada uno de ellos a un método para visualizar alguna idea matemática y varias aplicaciones de la misma a casos concretos, explicados con detalle, completada con una serie de retos para poner a prueba la pericia y la imaginación del lector (todos ellos resueltos explícitamente o con indicaciones y consejos suficientes para poder hacerlo por uno mismo, en la tercera parte). Completado, en una segunda parte, con una breve pero profunda historia de las imágenes matemáticas y del pensamiento visual, que se abre con la cita de Apollinaire: *la geometría es para las artes plásticas lo que la gramática es para el arte de escribir* y se cierra con unas consideraciones sobre la creatividad, apoyadas en diferentes reflexiones del arquitecto catalán Gaudí. Se pasa revista a lo que significa el pensamiento visual y su aplicación en el aula, así como a la utilización de objetos de la vida diaria o a la realización de modelos, entre otras cosas.

La cantidad de propuestas a lo largo de los veinte pequeños capítulos es impresionante, y el impacto de cada una de ellas depende de muchos factores, en general personales. Por eso, más que hacer una valoración de todos ellos, me limitaré a señalar algunos de los que a mí me han llamado especialmente la atención. Por una parte *el punto de Fermat* de un triángulo acutángulo (punto interior que cumple que la suma de distancias a los vértices es mínima), tan útil en situaciones en las que se buscan mínimos, que aparece en el capítulo 6 y se retoma en el 19 ya en el espacio. O pruebas visuales de unos lemas que permiten demostrar con más facilidad la *fórmula de Herón* del área del triángulo (lamentablemente desaparecida de la enseñanza en el combate del formalismo y la costumbre y que permite calcular áreas solo con medidas de longitud). En el capítulo 20, la *ley del cuadrilátero* (en cualquier cuadrilátero convexo la suma de los cuadrados de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las diagonales más cuatro veces el cuadrado de la distancia entre los puntos medios de las diagonales), que generaliza la *ley del paralelogramo*, analizada en el capítulo 12, en el que ese cuádruplo desaparece.

Por no hacer larga la enumeración, tres cosas más: Los procedimientos iterativos del capítulo 15; las *disecciones geométricas* del 13, con dos deliciosos puzzles de Sam Lloyd; y la prueba visual del Teorema de Pitágoras atribuida a Leonardo de Vinci, en la que una vez más se ve la huella del genio.

> *La geometría es para las artes plásticas lo que la gramática es para el arte de escribir*
> Apollinaire

Todo lo anterior no constituye más que una pequeña relación de las variadas propuestas a las que podemos dar cabida en nuestras aulas, que tanto contribuirán a iniciar (o profundizar) en los estudiantes en esa magna tarea que es el pensamiento visual.

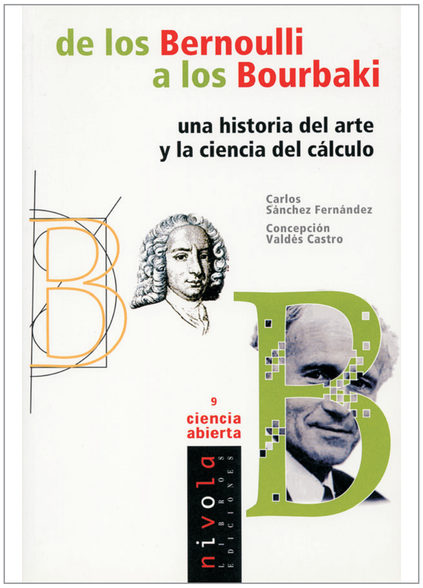
Las reflexiones teóricas y prácticas que se aportan en la segunda parte sirven para dar el marco teórico-práctico para reintroducir todo el pensamiento geométrico en las aulas.

Dejamos constancia (algo bien apropiado en un libro como este) del magnífico trabajo de edición del libro, en particular de todas las fotos, figuras y reproducciones, cuyo aspecto a primera vista no es muy aparente (es siempre en blanco y negro), pero que son de una calidad y una claridad destacable, sin necesidad de ser de gran tamaño. Y de la cuidada bibliografía final, en la que hay bastantes referencias en castellano —además de Alsina también de Estalella, Santaló o Bosch— y portugués —Veloso—.

Un libro, en resumen, con múltiples ideas, reflexiones y propuestas sobre un tema capital como es la visualización, que si en principio sorprende, porque se espera encontrar un libro más ligero, más en la línea de las últimas publicaciones divulgativas de Claudi Alsina, pronto muestra nuevas e interesantes facetas del autor.

Tenemos la seguridad de que la repercusión de este libro va a ser mucho mayor que si estuviera en castellano (o catalán), y es, además, una muestra de que los trabajos de nuestra tierra (los de algunos al menos) se sitúan a nivel internacional. ■

Escaparate:
2 De los Bernoulli a los Bourbaki.



De los Bernoulli a los Bourbaki.
Una historia del arte y la ciencia del cálculo
Carlos Sánchez Fernández y Concepción Valdés Castro
Nivola, Ciencia Abierta 9
ISBN: 84-95599-70-8
Tres Cantos (Madrid), 2004
238 páginas.

La solución al problema de la braquistócrona, de hallar la curva de descenso más rápido, fue uno de los más importantes éxitos del nuevo cálculo diferencial e integral que había sido descubierto independientemente por Isaac Newton y G. W. Leibniz. En estos primeros momentos el cálculo hallaba de una manera sencilla y novedosa áreas, volúmenes, tangentes y resolvía problemas que dieron lugar a las primeras ecuaciones diferenciales. Después, el desarrollo del cálculo sigue dos vías diferentes, una en el Reino Unido con los seguidores de Newton y otra en el continente europeo con los seguidores de Leibniz. Mientras que en Inglaterra la actividad matemática se ralentizó en parte por los problemas de una fundamentación rigurosa del cálculo, en el continente la influencia de Leibniz fue mucho mayor. El éxito se debió en parte por una notación más intuitiva y apropiada y por el enorme entusiasmo y productividad de los hermanos Bernoulli y de Euler después. Leonhard Euler, discípulo de Johann Bernoulli, ha sido el matemático más prolífico de todos los tiempos. Muchos de los espectaculares desarrollos de la matemática del siglo XVIII giran alrededor de sus trabajos y su *Introductio*

> *Luego para esta curva, que habiendo sido investigada por tantos matemáticos aparentemente nada acerca de ella quedaba por descubrir, encontramos una nueva propiedad...*
>
> Jakob Bernoulli,
> sobre la braquistócrona, 1697

Tomeu Barceló
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

in analysin infinitorum de 1748 ha sido uno de los más importante libros de texto de cálculo de todos los tiempos. A partir de Euler se desarrollan nuevas disciplinas, en especial el cálculo de variaciones y la geometría diferencial y es un periodo de una creatividad extraordinaria motivada en parte por problemas de mecánica, óptica y astronomía.

La primera parte del siglo XIX es la de la rigorización del análisis. La controversia de la cuerda vibrante con D´Alembert, Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange y la ecuación del calor después con Fourier y Dirichlet, mostraron la necesidad de clarificar los conceptos de función, de función continua, función derivable y de la integral. Un teorema que apareció en muchos de los libros de texto de cálculo del s. XIX da idea del estado en que se encontraban estos conceptos, *demostraba* que toda función continua es derivable, excepto quizás en algunos puntos aislados tales como x=0 para $f(x)=|x|$. Este Teorema se originó en unos trabajos de Ampère de 1806, cuando era profesor de L' Ecole Polytechnique y puede verse, por ejemplo, en el popular *Traité elementaire du calcul différentiel et du calcul intégral*, de Lacroix, que fue editándose sucesivamente hasta 1881. Entonces no existía una definición rigurosa de continuidad y en la *demostración* se usaba el hecho de que una función continua, a trozos es creciente o decreciente (sabemos ahora que una función continua y creciente es derivable en casi todo punto). Este, de hecho, sería el caso si definimos como continua aquella función que puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. El asunto se zanjó definitivamente cuando Karl Weierstrass mostró un ejemplo en 1861 de función continua que no tiene derivada en todo punto:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \text{ donde } 0<a<1,\ b \text{ entero impar}, ab>1+\frac{3\pi}{2}$$

Este es un ejemplo de las llamadas series de Fourier que han motivado gran parte del desarrollo del cálculo del s. XIX. Lo que ahora llamamos serie de Fourier es una combinación lineal infinita de senos y cosenos de la forma:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx$$

y este era el tipo de expresiones que permitían resolver la ecuación de ondas unidimensional (cuerda vibrante) o la ecuación del calor. ¿Cuáles son las funciones $f(x)$ que pueden escribirse de esta forma? Para Daniel Bernoulli en sus trabajos sobre la cuerda vibrante o para Fourier en su *Théorie analytique de la chaleur* (1822), toda función *razonable* puede ser representada de esta forma. Para otros, una combinación de este tipo tiene que ser una función infinitamente derivable, periódica, etc. El estudio de las series de Fourier siguió teniendo su impacto en el devenir de la matemática, ya que en el estudio de la unicidad de la representación de una función en serie de Fourier George Cantor introdujo posteriormente la teoría de conjuntos (1872-1882).

De los Bernoulli a los Bourbaki, una historia del arte y la ciencia del cálculo

Si se toma al pie de la letra, un título como el de este libro puede ser un proyecto demasiado ambicioso tanto en contenidos como por el largo periodo de tiempo que puede abarcar, desde finales del s. XVII hasta casi nuestros días. No hay que olvidar que el colectivo francés Bourbaki empieza su andadura a partir de 1930 y todavía, aunque a un ritmo e interés menor, siguen publicando nuevas ediciones. Para tener una idea de la gran cantidad de contenidos que se podrían estudiar, basta con observar la clasificación de materias que realiza la American Mathematical Society (AMS), con los 98 apartados que usualmente forman las secciones de la mayoría de bibliotecas de matemáticas. Gran parte de ellas, entrarían dentro de esta descripción. Por ejemplo de sólo una de ellas, el texto *History of Functional Analysis* de J. Dieudonné (1983), ocupa 312 páginas. Es necesario hacer por tanto una gran selección de material.

Imaginemos, por otra parte, que tenemos que dar un curso sobre la Historia del Cálculo desde los Bernoulli hasta finales del s. XIX, ¿qué temas debería contener? La respuesta claro está, puede ser variada. Una selección razonable sería la que contenga los aspectos que hayan sido históricamente importantes en el devenir de la matemática o que tengan relación con los conceptos hoy en día utilizados en nuestros cursos de cálculo. He aquí una posible lista:

La primera parte del siglo XIX es la de la rigorización del análisis. La controversia de la cuerda vibrante con D´Alembert, Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange y después la ecuación del calor con Fourier y Dirichlet, mostraron la necesidad de clarificar los conceptos de función, de función continua, función derivable y de la integral.

- El problema de la braquistócrona y las primeras ecuaciones diferenciales (tractriz, catenaria, espiral logarítmica, curvas isocronas).
- Los primeros libros de texto del cálculo (A*nalyse des infiniments petits* de L' Hôpital, *Treatise of fluxions* de

Colin MacLaurin, *Instituzione Analitiche* de Maria Agnesi,) con algún ejemplo tomado de estos libros, como la *trisectriz* de MacLaurin o la *bruja* de Agnesi.

- Euler, sus sumas infinitas, funciones trascendentes: exponencial, logaritmo, trigonométricas, función gamma, etc. Series de Taylor.
- La ecuación de la cuerda vibrante, ideas y controversias de D'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange.
- La ecuación del calor y las series de Fourier.
- La forma de la Tierra. La medida del meridiano y la definición del metro. Jorge Juan y Antonio de Ulloa.
- Escuelas matemáticas. Las matemáticas en la época de la Revolución francesa, L'Ecole Polytechnique.
- La evolución del concepto de función, de función continua, derivable, integrable Riemann e integrable Lebesgue.
- La rigorización del cálculo. *Cours D' Analyse* (1821) de Cauchy. Bolzano, Karl Weierstrass.
- Irracionalidad de *e*, π, Lambert, transcendencia, Joseph Liouville. Funciones especiales y geodésicas del elipsoide. Imposibilidad la trisección del ángulo, de la duplicación cubo y de la cuadratura del círculo.

Entre los contenidos de este temario caben algunas de las joyas de la matemática: Por ejemplo, el Teorema Fundamental del Algebra, la fórmula de Euler $e^{i\pi}+1=0$, que relaciona las cinco constantes más importantes 0, 1, π, *e*, *i*. El problema de Basilea, de la suma de los inversos de los números cuadrados

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$, etc.

El teorema Fundamental del Algebra, etc. La relación podría ser más extensa si añadimos temas relacionados con la variable compleja, funciones especiales, función zeta de Riemann, mecánica de fluidos, cálculo de variaciones y teoría del control, cálculo numérico, etc.

De los Bernoulli a los Bourbaki, una historia del arte y la ciencia del cálculo está estructurado en cuatro partes o capítulos, cuyos contenidos esenciales son como sigue:

Parte I. Del cálculo al análisis funcional
Primeras ecuaciones diferenciales, la braquistócrona y los orígenes del cálculo de variaciones, la ecuación de ondas, la ecuación del calor, series de Fourier, ecuación del potencial de Laplace, problema de n-cuerpos y estabilidad, ecuaciones integrales y principios del análisis funcional.

Parte II. Del cálculo a la teoría de funciones
Primeros textos del cálculo. Fundamentación del análisis. Medida e integración de funciones.

Parte III. Del arte de la sumación a la teoría de series divergentes
La edad dorada del arte de la sumación. La representación analítica y la cuestión de la convergencia. Series divergentes.

Parte IV. Del arte de las conjeturas a la teoría axiomática de las probabilidades.
El origen de la teoría de la probabilidad. Variables aleatorias. Distribución normal. Paradojas y axiomatización de las probabilidades.

El texto cubre bastante material, especialmente en los dos primeros capítulos. El tercer capítulo está muy centrado en el tema concreto de las series divergentes y que quizás se hubiera podido incluir en los dos primeros. El cuarto y último capítulo está dedicado a la probabilidad.

> *Los autores, Carlos Sánchez Fernández y Concepción Valdés Castro son catedráticos de historia de la matemática y de análisis matemático de la Universidad de la Habana y doctores por la Universidad Lomonosov de Moscú.*

Los autores, Carlos Sánchez Fernández y Concepción Valdés Castro son profesores de historia de la matemática y de análisis matemático de la Universidad de la Habana, doctores por la Universidad Lomonosov de Moscú. Su particular formación académica se puede observar en el estilo de la redacción del libro. Ya desde la introducción, refiriéndose al cálculo puede leerse por ejemplo:

> Luchó a brazo partido por merecer un lugar mejor en aquel mundo despiadado y exigente, donde la incipiente industria aupaba las nuevas ciencias técnicas… (pag. 12)

O un poco más adelante:

> Convulsiones sociales provocaron el predominio de la pujante clase burguesa, que no se encontraba suficientemente preparada para enfrentar el vertiginoso avance que las nuevas tecnologías imponían a las fuerzas productivas. Y la lucha por el saber …

O en la misma página, en un recuadro biográfico sobre Los Bernoulli:

> Familia burguesa de procedencia flamenca que huyendo de la intolerancia religiosa …

Los contenidos reflejan también esta tendencia. Por ejemplo una de las cuatro secciones de la Parte II: *El establecimiento de la teoría de funciones y la escuela moscovita* o que las últimas páginas del texto estén dedicadas a Kolmogórov. Algo que no es casual, ya que en la solapa interior de la portada presentando a los autores, se dice: *Kolmogórov presidió el tribunal que calificó sus tesis de doctorado*. Un lujo del que pocos podrán presumir, por otra parte.

El texto carece de un índice temático, que hubiera sido de gran ayuda para tener una idea más clara y completa de sus contenidos y poder localizar algún aspecto determinado, lo cuál sin el índice es complicado en un libro de 382 páginas. Al final hay un índice de notas biográficas, pero está en orden cronológico en vez de alfabético. Aparece, eso si, un glosario explicativo de conceptos, tales como *La ecuación de Laplace* o *Ecuaciones de Euler-Lagrange*, escrito por Rafael Hernández, que es de gran utilidad.

En el desarrollo de los temas no aparecen citas o referencias a otras obras o artículos especializados. Estas referencias clarificarían si las afirmaciones que se exponen reflejan sólo la opinión de los autores o si son algo más establecido. Ayudarían también al lector por si quiere consultar algunos de los temas a partir de otras fuentes, quiere contrastar su veracidad simplemente los desea conocer con más detalle. Veamos tres ejemplos de ello. Primer ejemplo: en la pág. 54, cuando trata de las matemáticas de la cuerda musical y de las ondas:

> En los trabajos de Platón la matemática consistía de cinco partes: aritmética, geometría plana, estereometría, astronomía y música o teoría de la armonía. En todo el periodo helenístico y en toda la Edad Media (...) no se conocen obras que profundicen en lo que podríamos llamar una teoría matemática de la música. Al parecer no era necesario, ni conveniente.

La descripción es correcta, pero sería quizás más adecuado decir que la matemática de Platón sigue el *Quadrivium* pitagórico formado por la aritmética, geometría, música y astronomía, al que luego en la Edad Media se añadió el *Trivium* de gramática, lógica y retórica, que forman el corpus de las siete Artes Liberales. Aunque ello es por supuesto una simplificación, ya que la escuela de Platón dedicó especial atención a la geometría, —recuérdese la inscripción a la entrada de su Academia: *Que nadie ignorante de geometría entre aquí*— y contó con notables representantes como Teateto o Eudoxo. Por otro lado, en el mundo griego y en la Edad Media, la música formaba parte importante del currículo de una persona cultivada, de los que había varios textos, como el *Harmonica* de Ptolomeo (90-168), base de la *música de las esferas* medieval.

Segundo ejemplo: en la pág. 224, en la introducción de la Parte III, se dice:

> Euler insatisfecho con la lentitud de la convergencia de la serie
>
> $$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$
>
> la había transformado en
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}(z+1)^n$$
>
> ...La serie transformada posee dominio mayor { |z+1|<1}

El lector puede preguntarse que cómo hizo Euler esta tranformación. Al no ser obvia, se agradecería una pequeña explicación o referencia. Luego resulta que los detalles de la idea de Euler se encuentran más adelante en la pag. 249. Hay además una errata, ya que el dominio mayor tiene que ser { |z+1| <2}.

Tercer ejemplo: La braquistócrona. Se introduce el problema tal como lo hizo Johann Bernoulli en 1696:

> Dados dos puntos *A* y *B* en un plano vertical, hallar el camino *AMB* por el que una partícula móvil *M*, descendiendo por su propio peso, iría de *A* a *B* en el menor tiempo posible.

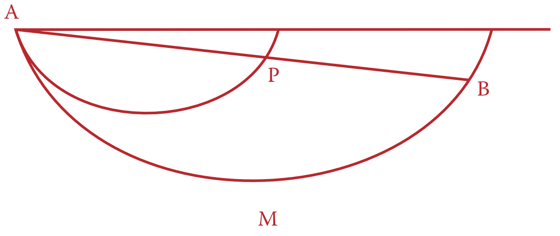
Se sigue con la propia demostración de Johann Bernoulli, hasta llegar a la ecuación diferencial

$$dy = dx\sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

para añadir finalmente:

> Bernoulli concluye que la curva braquistócrona es la cicloide de común.

No se muestran las ecuaciones de la cicloide, ni se termina el problema probando que dados los dos puntos *A* y *B* existe una única cicloide que pasa por ellos. Ello no supone mucho más espacio en la prueba y dejaría mucho mejor terminada la exposición.



Recordemos que las ecuaciones de la cicloide son $x= a(t–\text{sen } t)$, $y=a(1–\cos t)$. Como depende de un parámetro a, llamémosla **C**(a). Si dibujamos la cicloide, con el eje x hacia la derecha, el eje y hacia abajo, y los puntos *A* y *B* como en la figura. Para ir desde *A* a hasta *B*, ¿es realmente *AMB* la trayectoria más rápida? No es intuitivamente tan obvio que ésta sea así, ya que si soltamos desde *A* una bolita que se deslice sobre la curva por su propio peso, tiene que subir luego una parte considerable de curva hasta llegar hasta *B*. Sin embargo si la deducción de la ecuación diferencial es correcta, la curva buscada tiene que ser una cicloide. La cuestión es entonces demostrar que hay una única cicloide $\mathbf{C}(a)$ que pase por *A* y por *B*. El razonamiento que dieron tanto Johann Bernoulli como Newton en su prueba es a la vez elegante y sencillo: Sea *B* de coordenadas (p, q) y sea $P=(kp, kq)$ el punto sobre la cicloide con parámetro $a=1$ que está sobre la recta *APB*. Al estar *P* sobre $\mathbf{C}(1)$ satisface sus ecuaciones, luego $kp=a(t-\text{sen } t)$, $kq=a(1-\cos t)$. Luego *B* está sobre $\mathbf{C}(a/k)$.

Diseminadas a lo largo de todo el libro aparecen numerosas notas biográficas. Estas hacen que la lectura sea más entretenida y amena. Hay entre ellas la biografía de un matemático español, Julio Rey Pastor (1888-1962), al que se dedican dos páginas. Cuando se llega hasta aquí puede ser inevitable una reflexión acerca de la historia de la matemática española, poco conocida a veces incluso por los propios matemáticos españoles. ¿Han existido realmente matemáticos importantes en España? ¿Ha sido Rey Pastor el mejor matemático que ha dado este país? En España no ha habido matemáticos de la talla de un Fermat o de un Newton, pongamos por caso. Pero sin llegar a tanta altura, se pueden citar algunos. Por ejemplo Maslama de Madrid, que demostró que la proyección estereográfica utilizada en los astrolabios transforma circunferencias sobre la esfera (que no pasen por el polo de proyección) en circunferencias en el plano. O el gran matemático y rey de la taifa de Zaragoza al-Mutamin ben Hud. Es curioso observar que en este país casi todo el mundo conoce a El Cid y que sin embargo muy pocos sepan de al-Mutamin, que fue un gran intelectual, y fue rey. A sus órdenes estuvo además el mismo Cid. Con Rey Pastor se tiene a veces la impresión de que se está creando un mito, cuando aparece su nombre en enciclopedias, tiene dedicada una calle en Madrid, un cráter en la Luna, el aula magna de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, etc. ¿Cuál es el lugar de Rey Pastor en la matemática española? Los textos existentes que hablan de él no le hacen mucho favor, al ser más bien hagiográficos y dedicados a glosar su labor. Quizás hace falta una obra que estudie con seriedad la historia matemática española, o más concretamente la de la primera mitad del s. XX. Sin duda Rey Pastor fue un notable matemático, un gran maestro y comunicador, pionero en ciertos aspectos y que tuvo la gran capacidad de aglutinar a su alrededor escuelas y actividad matemática, más especialmente en Argentina donde se le tiene mucho cariño. Pero no tiene grandes contribuciones a la matemática. Otros españoles, aunque quizás algo después y de manera m´´as modesta, han publicado trabajos en revistas internacionales de prestigio, como por ejemplo Sunyer i Balaguer (*Acta Mathematica*), o Luis Santaló (*Annals of Mathematics* y *American Mathematical Monthly*), entre otros. ■

BIBLIOGRAFÍA

BOYER, Carl B.,(1992), *Historia de la matemática*, Alianza Universidad

DURÁN, Antonio, (1996), *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Universidad, 861AU.

GILLISPIE, C., (1990) *Dictionary of Scientific Biography* , New York 1970-1990.

GONZÁLEZ REDONDO, F., (2002), "La Matemática en el panorama de la Ciencia española", *La Gaceta de la RSME*, Vol. 5.3 (2002), pp. 779-809.

GRABINER, Judith, (1993), "Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous Calculus", *The American Mathematical Monthly*, vol. 90, n.3, (1983), pp. 185-194.

GRATTAN-GUINNESS, I., (1984), *Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910,* Alianza Editorial.

HAIRER, E., Wanner, G.,(1996), *Analysis by its History*, Springer Verlag.

HAWKINS, T.,(1975), *Lebesgue's Theory of Integration-Its Origins and Development*, Chelsea.

KATZ, Victor J., (1998), *A History of Mathematics, An Introduction*, Addison Wesley.

KATZ, Victor J.,(1987), "The calculus of trigonometric functions", *Historia Mathematica*, Vol. 14, n. 4, (1987), pp. 311-324

KLEINER, Israel, (1989), "Evolution of the Function Concept: A Brief Survey", *The College Mathematical Journal*, vol. 20, n. 4, (1989), pp. 282-300.

KLINE, M., (1983), "Euler and infinite series", *Mathematics Magazine* 56 (5) (1983), pp. 307-314.

Mactutor History of Mathematics, *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/*

Mathematical subjects classification, http://www.ams.org/msc/

REY PASTOR, Julio, (1998), *Julio Rey Pastor Selecta*, *Conmemoración del centenario de su nacimiento*, Fundación Banco Exterior, 1988.

RÜTHING, D., (1984) "Some definitions of the concept of function from John Bernoulli to N. Bourbaki", *Math. Intelligencer* 6 (4) (1984), pp. 72-77

SIMMONS, F., (1993), *Ecuaciones diferenciales, con aplicaciones y notas históricas*, McGraw-Hill, 1993

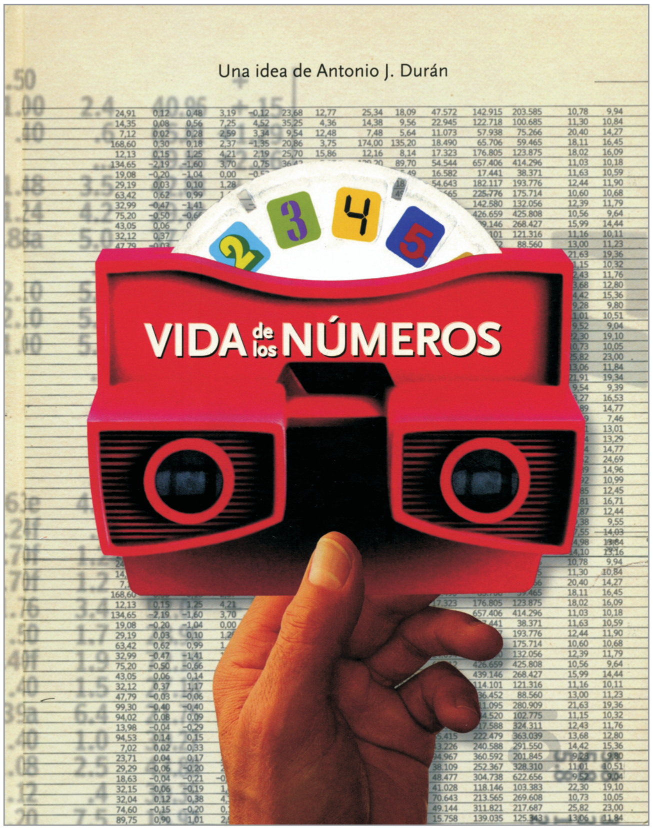
STIGLER, Stephen M., (1981), "Gauss and the invention of least squares", *The Annals of Statistics*, vol. 9, n. 3, (1981), pp. 465-474.

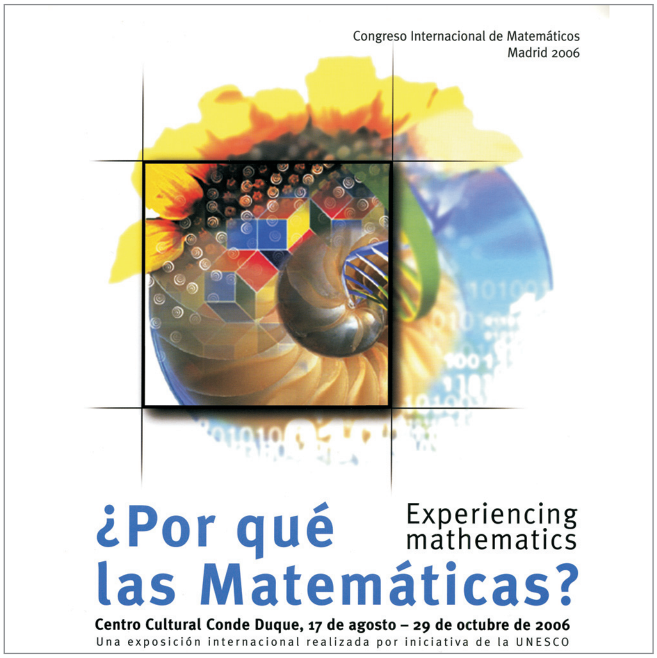
YOUSCHKEVITCH, A. P., (1976-77), "The concept of function up to the middle of the 19th century", Arch. *History Exact Sci*. 16 (1) (1976/77), pp. 37-85.

Escaparate:
3 Legado de un congreso

VIDA DE LOS NÚMEROS
Una idea de Antonio J. Durán
T Ediciones
2006
ISBN: 84-8688-213-3

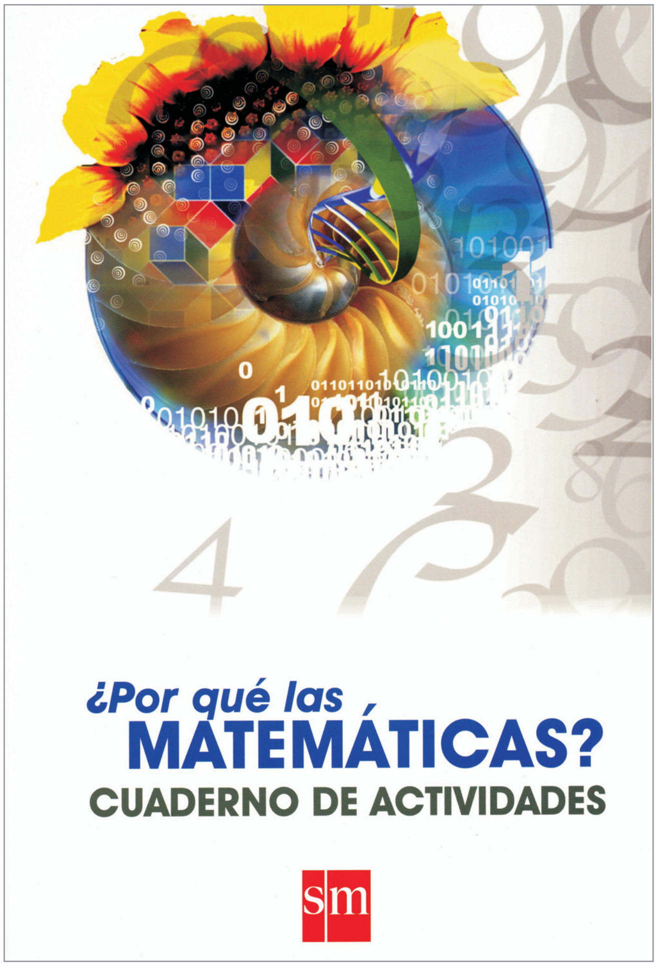
Reseñamos los catálogos de tres exposiciones presentadas durante el ICM 2006, (en este mismo número se recoge una crónica de éstas) que han gozado de un extraordinario éxito de público. Si las exposiciones ya son historia, tanto para los que las contemplaron como para los que no tuvieron esa oportunidad, quedan estos libros para seguir sacando provecho de las mismas.





¿POR QUÉ LAS MATEMÁTICAS?
(Catalogo de la exposición)
Centro Cultural Conde Duque,
Ayuntamiento de Madrid
Madrid 2006
ISBN 84-96102-24-6

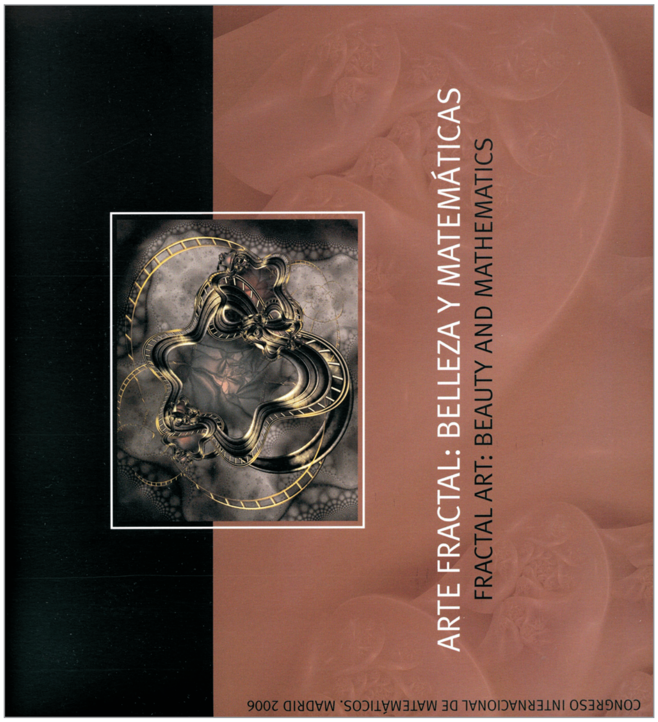
Fernando Corbalán
medios.suma@fespm.org



¿Por qué las Matemáticas?
Cuaderno de Actividades
M. Bas, A. Bell·lloch y R. del Rincón
Coordinadores Raúl Ibañez y A. Pérez Sanz
Ediciones SM, Madrid 2006
ISBN 84-675-1175-3
32 páginas

No es frecuente la aparición de las matemáticas en los medios, ni, cuando se abre un hueco en ellos, el aspecto de un evento que va a ser destacado y lo que en consecuencia va a quedar en el imaginario popular del mismo. Pero no hay duda que del ICM2006 lo que se va a recordar es que hubo un *fulano* al que se le dio un premio y lo rechazó, lo que refuerza un

Arte Fractal: Belleza y Matemáticas
Fractal Art: Beauty and Mathematics
ICM 2006 y Centro Cultural Conde Duque,
Ayuntamiento de Madrid, Madrid 2006
ISBN 84-96102-25-4
55 páginas



poco más la idea social del matemático como chiflado, como sabio loco fuera de la realidad (y que además en su versión próxima al ciudadano, el profesor, tiene un ramalazo de sadismo para hacer sufrir a sus alumnos).

Pero más allá de todo eso y de los trabajos propios del congreso, también han tenido lugar una serie de actividades culturales, en particular las tres exposiciones cuyos catálogos reseñamos, que han gozado de un extraordinario éxito de público (lo que pienso que debería mover a la reflexión de los gestores para diseñar otra política cultural de grandes eventos, que incluyera también la presencia de las matemáticas en los mismos, pero que dudo que, por desgracia, sirva tampoco esta vez). Si las exposiciones ya son historia, tanto para los que las contemplaron como para los que no tuvieron esa oportunidad, quedan estos libros para seguir sacando provecho de las mismas.

¿Por qué las Matemáticas?

Los dos primeros se refieren a la exposición con más visitantes y más en la línea de los museos de la ciencia: prohibido no tocar. Y conforman una gran cantidad de posibilidades de utilización en nuestras clases, tanto la que proponen los murales en sí mismos como las que se sugieren en el folleto de actividades. Sobre todo de la utilización de hoy mismo de las matemáticas (algo bien necesario dada la percepción social de nuestra materia como material arqueológico caído del cielo) y de las líneas de avance.

Arte fractal

El arte fractal supone una utilidad de las matemáticas inesperada y chocante para muchos, lo que es otra buena vía de enganche con las mismas para otra parte de la población, por lo que puede ser también una vía a utilizar en nuestras clases. El folleto que reseñamos recoge los premios de un concurso internacional de fractales convocado con motivo del *ICM2006*, con una amplia gama de muestras de las diferentes líneas y posibilidades que ofrecen. Y tiene (como el anterior) la virtud de estar muy bien presentado y tener un precio simbólico, lo que facilita su adquisición y uso (y que indica la buena labor social y de relación realizada por todos los que consiguieron que las exposiciones fueran posibles, encabezados por los comisarios de ambas R. Ibáñez y A. Pérez Sanz).

Vida de los números

En el caso de *Vida de los números* estamos hablando de otro nivel de libro, que podría colocarse en el apartado de libros-objeto o libros-regalo, por su estupenda presentación (papel, encuadernación, diseño, impresión, fotos y pinturas, troquelados...). Es un reflejo de la Exposición que tuvo lugar en la Biblioteca Nacional, basada en una idea de Antonio J. Durán, pero puede considerarse como una publicación en sí misma, que tiene vida propia.

Arropados con ilustraciones de S. Mackaoui, N. Pintado y J. Pagola, y fotos diversas, hay agudas reflexiones sobre los números, su entorno y su contexto. Un texto de Alberto Manguel ("Verlo por escrito: la doble naturaleza del número y la página"), que como señala él mismo, *trata del paisaje donde transcurrirá la vida de los números*, reflexiona sobre esa extraordinaria historia que transita por el soporte de los números (y también, más tarde en el tiempo, de las letras), esos objetos de barro o piedra, de papiros o trapos viejos, de pieles o maderas, hasta llegar a los destellos que conforman las pantallas de los ordenadores y los libros electrónicos.

Dos amplios capítulos de A. Durán, *ideólogo* de la exposición y del libro (que recoge que es 'una idea' suya), tratan del hecho de que *los números sirven para contar*. Sigue el rastro de los mismos desde la impresión de las manos en las cuevas que habitaron nuestros antepasados o los primeros restos sumerios, pasa por los escritos mayas que han podido llegar a nuestra vista (a pesar del empeño que pusieron algunos ancestros nuestros en que desaparecieran) y los códices medievales, en particular el de *Vigila*, de 976, que recoge los números *árabes* en un formato que casi reconocemos como actual.

En la segunda parte retoma las peripecias de los números, que cuentan ya con el valioso auxilio de la imprenta, lo que da lugar, con el aporte de destacados personajes de diferentes gremios: editores, pintores y los propios *matemáticos,* a toda una serie de obras no sólo importantes desde el punto de vista de la historia de la ciencia, sino también auténticas obras de arte, que nos cautivan al contemplarlas. Sigue también a unos recién llegados pero que serán inseparables compañeros de los números: los símbolos de las operaciones.

Se completa el libro con el amplio artículo "¿Cómo han aprendido a contar y calcular los seres humanos?", en el que Georges Ifrah adapta su magna *Historia universal de las cifras*, con una gran capacidad de síntesis. Poco hay que añadir sobre Ifrah para quien conozca esta obra. Para los que no tienen esa suerte les recomendamos que no la aplacen su lectura, ya que es el mejor y más lúcido estudioso de estos temas.

El artículo de Ifrah en *La vida de los números* es una buena manera de entrar en su génesis de, dando una visión de conjunto, ya que, a pesar de su limitada extensión, proporciona una información notable, un buen aperitivo para quien desee profundizar en el tema.

En definitiva, toda esta producción impresa es una buena forma de superar la impresión de sabios locos que tan fácil es adjudicar a los matemáticos y que tanto alimentan los medios y, sobre todo, de mostrar que sus cultivadores pueden ser gente peculiar, pero sus producciones sirven, y mucho, a todos los ciudadanos. ■